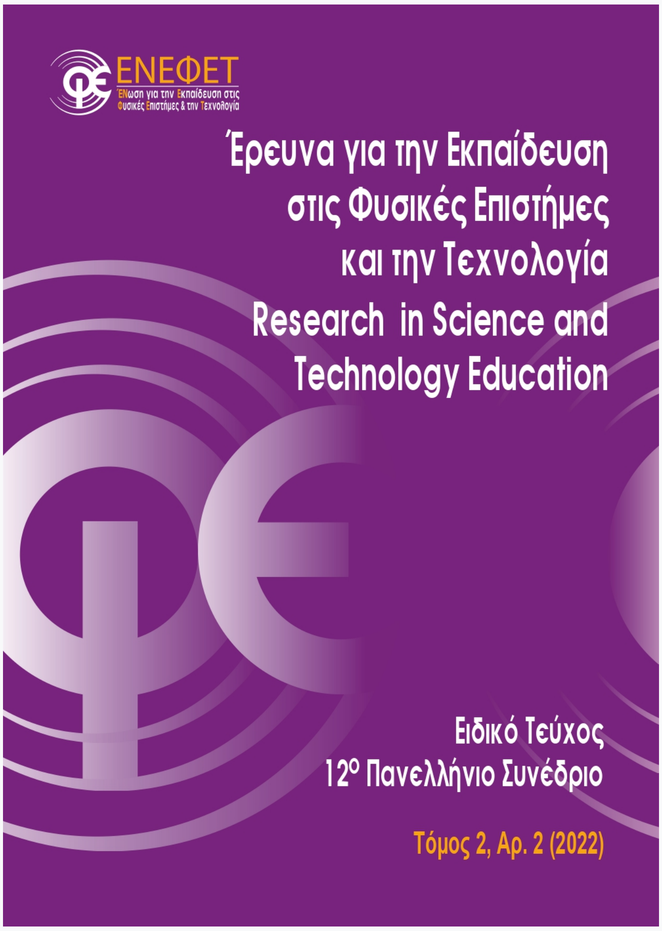
Έρευνα για την Εκπαίδευση στις Φυσικές Επιστήμες και την Τεχνολογία

Τόμ. 2, Αρ. 2 (2022)

12ο Πανελλήνιο Συνέδριο ΕΝΕΦΕΤ, Ειδικό Τεύχος



Διαχείριση της Σημειογραφίας Κλάσματος κατά την Επίλυση Προβλημάτων Φυσικής από Πρωτοετείς Φοιτητές/τριες Παιδαγωγικών Τμημάτων

Γεώργιος Κρητικός, Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος, Φραγκίσκος Καλαβάσης

doi: 10.12681/riste.30645

Έρευνα για την Εκπαίδευση στις Φυσικές Επιστήμες και την Τεχνολογία
Ειδικό Τεύχος, 12ο Πανελλήνιο Συνέδριο, (2022), Τόμος 2, Αρ. 2, σελ. 20-42

Διαχείριση της Σημειογραφίας Κλάσματος κατά την Επίλυση Προβλημάτων Φυσικής από Πρωτοετείς Φοιτητές/τριες Παιδαγωγικών Τμημάτων

Γεώργιος Κρητικός[1], Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος[2] και Φραγκίσκος Καλαβάσης[1]

[1]Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

[2]Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

gkritikos@aegean.gr

Περίληψη

Η μελέτη της μαθηματικής σημειογραφίας στα εγχειρίδια και στις δραστηριότητες διδασκαλίας και μάθησης έχει κεντρική θέση για την διεπιστημονική προσέγγιση των δυσκολιών μάθησης στην Φυσική. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μιας έρευνας που αφορά στη διαχείριση της σημειογραφίας κλάσματος κατά την επίλυση προβλημάτων Φυσικής από φοιτητές/τριες Παιδαγωγικών Τμημάτων Δημοτικής Εκπαίδευσης και Προσχολικής Αγωγής. Σκοπός της έρευνας ήταν να διερευνηθούν οι οπτικές των φοιτητών/τριών για τη μαθηματική σημειογραφία του κλάσματος κατά την επίλυση προβλημάτων Φυσικής και του βαθμού στον οποίο αποδίδουν φυσικό νόημα στο κλάσμα και στις εμπλεκόμενες μεταβλητές και σταθερές. Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας, όσο μικρότερη είναι η εξοικείωση των φοιτητών/τριών με μία έννοια Φυσικής, τόσο ενεργοποιούνται μαθηματικά νοήματα, συχνά με μη συμβατό τρόπο, δημιουργώντας μαθησιακά εμπόδια στην οικοδόμηση του σχετικού φυσικού νοήματος.

Λέξεις κλειδιά: Σημειογραφία κλάσματος, επίλυση προβλήματος, διεπιστημονικότητα.

Abstract

The study of mathematical notation in textbooks and in teaching and learning activities is central to the interdisciplinary approach of learning difficulties in Physics. In the present work we present the results of a research concerning the manipulation of fraction’s notation in solving Physics problems by students at pedagogical university departments of Primary Education and Preschool Education. The purpose of the research was to investigate the students’ perspectives on the mathematical notation of the fraction when solving Physics problems and the degree to which they give physical meaning to the fraction and the variables and constants involved. Based on the results of the research, the less students are familiar with a concept of Physics, the more mathematical meanings are activated, often in an incompatible way, creating learning barriers to the construction of the relevant physical meaning.

Key words: Fraction notation, problem solving, interdisciplinarity.

Εισαγωγή

Η μαθηματική σημειογραφία έχει θεμελιακό ρόλο στα εγχειρίδια και στη διδασκαλία της Φυσικής. Τα Μαθηματικά άλλοτε θεωρούνται ως εργαλείο των υπολογισμών και άλλοτε ως γλώσσα του επιστημονικού συλλογισμού της Φυσικής. Σύμφωνα με τους Redish και Kuo (2015), τα Μαθηματικά στη Φυσική αποτελούν μία ξεχωριστή διάλεκτο της μαθηματικής γλώσσας, καθώς οι Φυσικοί συνδυάζουν την εννοιολογική προσέγγιση με τους μαθηματικούς συμβολισμούς τροποποιώντας τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται και ερμηνεύονται οι εξισώσεις. Αναφορικά με τη χρήση των μαθηματικών συμβολισμών στη Φυσική κατά τη διάρκεια της κατάρτισης των μελλοντικών εκπαιδευτικών, έχουν δημοσιευθεί αποτελέσματα ερευνών κυρίως σε φοιτητές/τριες Τμημάτων Φυσικής (Bing & Redish, 2009· Uhden κ.ά., 2012) που κατευθύνονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην παρούσα εργασία, επιχειρούμε να διερευνήσουμε τη λειτουργία της μαθηματικής σημειογραφίας σε φοιτητές/τριες παιδαγωγικών τμημάτων κατά την επίλυση προβλημάτων Φυσικής. Ως σημείο εστίασης επιλέξαμε τη σημειογραφία του κλάσματος, καθώς εμφανίζεται σε ποικιλία ενοτήτων διδακτικών δραστηριοτήτων της Φυσικής, διατρέχοντας όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Θεωρητικό Πλαίσιο

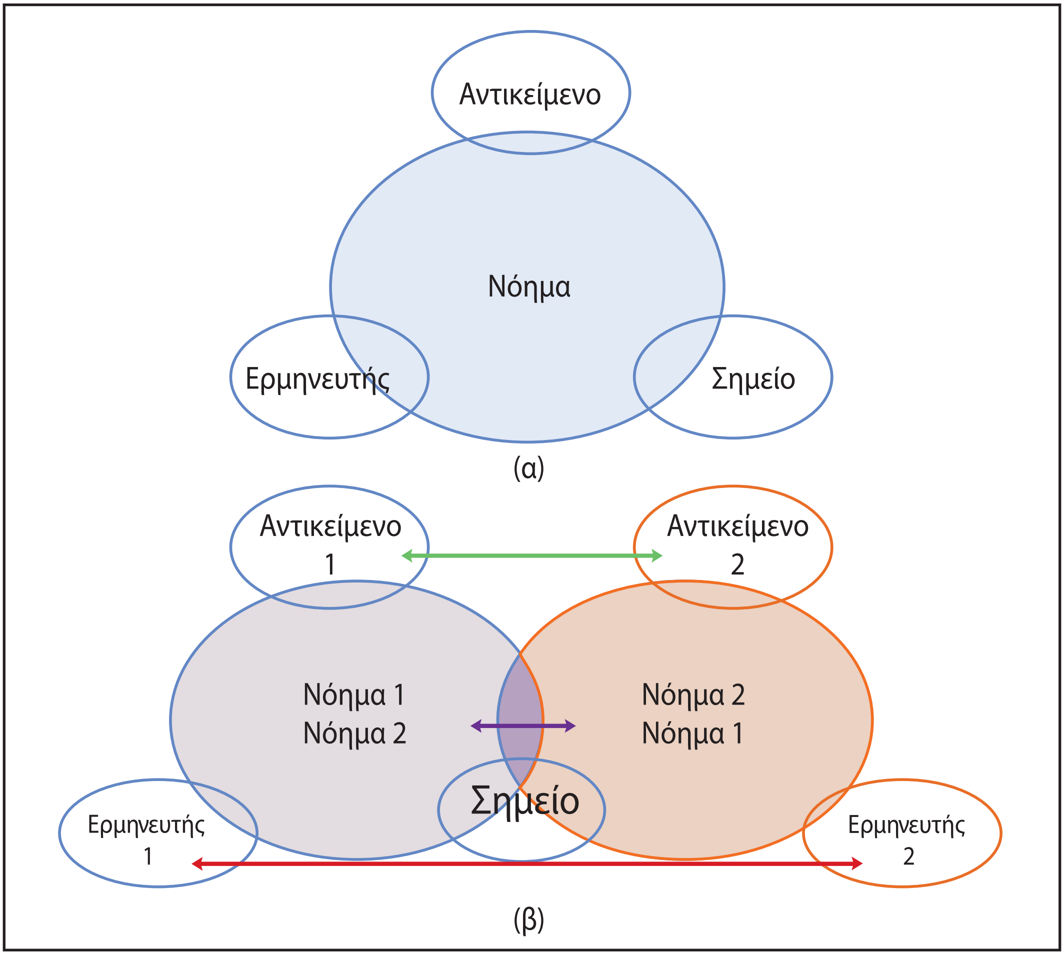
Σύμφωνα με τα τρέχοντα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) της δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στη χώρα μας, τα Μαθηματικά αλλά και οι επιμέρους Φυσικές Επιστήμες (Φυσική, Χημεία, Βιολογία, Γεωλογία-Γεωγραφία) θεωρούνται διακριτά μαθήματα με σαφή όρια που δημιουργούν φραγμούς στην επικοινωνία των διδασκαλιών τους. Έτσι, ένας/μία εκπαιδευτικός Μαθηματικών μπορεί να αγνοεί παντελώς τη διδακτέα ύλη της Φυσικής και αντίστοιχα το ίδιο ισχύει για έναν/μία εκπαιδευτικό Φυσικής. Ωστόσο, τα παιδιά ως κοινοί αποδέκτες των διακριτών διδασκαλιών δημιουργούν συνδέσεις ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Φυσική (ακόμη και αν αυτή η σύνδεση είναι διαμερισματοποίησης), ειδικά όταν εμφανίζεται παρόμοια σημειογραφία, όπως αυτή του κλάσματος. Η εγκυρότητα των συνδέσεων αυτών δεν φαίνεται να αξιολογείται με κάποιον τρόπο. Ως αποτέλεσμα, μία δυσκολία στην οικοδόμηση μιας έννοιας από το μάθημα της Φυσικής ενδέχεται να οφείλεται σε λανθασμένο νόημα που αναδύθηκε από μη συμβατή νοηματοδότηση στα Μαθηματικά. Για παράδειγμα, ένα παιδί μαθαίνει στα Μαθηματικά ότι, αν σε ένα κλάσμα αυξηθεί ο παρονομαστής, θα μειωθεί η τιμή του κλάσματος με την προϋπόθεση ότι ο αριθμητής παραμείνει σταθερός (ή μειώνεται). Αυτή η προϋπόθεση συχνά θεωρείται ως δεδομένη, χωρίς να δηλώνεται ρητά. Αν αυτή η γνώση αξιοποιηθεί, χωρίς να μετασχηματιστεί κατάλληλα, στη σχέση υπολογισμού ενός φυσικού μεγέθους που εμπεριέχει κλάσμα είναι πολύ πιθανό να οδηγήσει σε λανθασμένο φυσικό νόημα (Κρητικός κ.ά., 2020) και άρα σε εναλλακτικές ιδέες κατά την οικοδόμηση εννοιών στο μάθημα της Φυσικής.

Το θεωρητικό μας πλαίσιο στηρίζεται στη θεωρία της σημειωτικής για τη διδασκαλία/μάθηση (Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά., 2017· Moutsios-Rentzos κ.ά., 2019), στη συστημική θεώρηση της σχολικής τάξης (Davis & Simmt, 2003) και στη διεπιστημονική προσέγγιση της διδασκαλίας/μάθησης (Nikitina, 2006· Stinson κ.ά., 2009). Μέσα από τη συστημική θεώρηση δίνεται η δυνατότητα να μελετηθούν οι διδακτικό-μαθησιακές διεργασίες στα Μαθηματικά και τη Φυσική του σχολείου μέσω των κοινών τους συμβολισμών (Καλαβάσης & Κρητικός, 2017· Κρητικός & Μούτσιος-Ρέντζος, 2018). Θεωρούμε ότι η μάθηση της Φυσικής σχετίζεται όχι μόνο με τη διδασκαλία της Φυσικής, αλλά και με τη διδασκαλία των Μαθηματικών και των διασυνδέσεων που δημιουργούν οι μαθητές/τριες μέσα από τις κοινές σημειογραφίες στα δύο μαθήματα. Η αντίστοιχη συστημική προσέγγιση ισχύει και για τη μάθηση των Μαθηματικών. Στόχος, λοιπόν, της συστημικής μας θεώρησης είναι η ανάδειξη των διασυνδέσεων που δημιουργούν οι μαθητές/τριες, καθώς και ο έλεγχος της επιστημονικής τους ορθότητας.

Σύμφωνα με μια σημειωτική προσέγγιση, ο/η μαθητής/τρια αποδίδει διαφορετικά νοήματα σε μία συγκεκριμένη σημειογραφία, ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται αυτή η σημειογραφία. Παράλληλα, οι σημειογραφίες καταχωρούνται ως αναπαραστάσεις σε κάποιο νοητικό μητρώο αναπαραστάσεων (Duval, 2006). Η αντιστοίχιση των μαθηματικών εννοιών με τις αναπαραστάσεις δεν είναι ένα προς ένα. Για παράδειγμα, για τη σημειογραφία του κλάσματος το νόημα που μπορεί να αποδοθεί είναι η αναλογία δύο μεγεθών, ή ο λόγος τους, ή το πηλίκο τους. Αντίστοιχα, για την έννοια της αναλογίας η αναπαράσταση μπορεί να είναι η γραμμή κλάσματος, ή η γραφική παράσταση ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων, ή η εξίσωση $y=ax$, ή ένας πίνακας τιμών. Κάθε φορά που το παιδί καλείται να συλλογιστεί πάνω σε μία έννοια, ανακαλεί κάποια/ες αναπαράσταση/σεις από τα μητρώα των αναπαραστάσεών του. Μετά τον συλλογισμό και τη χρήση των αναπαραστάσεων, τα μητρώα είτε παραμένουν αμετάβλητα, είτε εμπλουτίζονται, είτε αναθεωρούνται ως προς το νόημα και τις χρήσεις των αναπαραστάσεων.

Η θεωρητική μας προσέγγιση για τη σημειωτική θεώρηση της διδασκαλίας απεικονίζεται στο Σχήμα 1 (Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά., 2017, σελ. 648) και εντάσσεται στην ευρύτερη κατηγορία των *επικοινωνιακών τριάδων* με την έννοια των *επικοινωνιακών σημειωτικών συστημάτων* (βλ. Ongstad, 2006). Η επικοινωνιακή τριάδα «σημείο, ερμηνευτής, επιστημικό αντικείμενο» αναδύει ένα νόημα εντός του μαθήματος στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία/μάθηση (Σχήμα 1α). Η επικοινωνιακή τριάδα ενεργοποιείται από το σημείο, το οποίο είναι δυνατό να είναι σύμβολο, εικόνα, λέξη κ.ά. αλλά και μία σύνθετη ολότητα από τον συνδυασμό αυτών (π.χ. μια φράση ή μια εξίσωση). Το νόημα συμπεριλαμβάνει λεκτικές και μη λεκτικές επικοινωνίες, πρακτικές, νόρμες κ.ά. Οι ερμηνευτές είναι τα υποκείμενα που συμμετέχουν στις επικοινωνιακές διαδικασίες. Το ίδιο άτομο μπορεί να συνιστά διαφορετικούς ερμηνευτές για διαφορετικές επικοινωνιακές καταστάσεις όπως, για παράδειγμα, ένας δάσκαλος πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης όταν διδάσκει Μαθηματικά και όταν διδάσκει Φυσικές Επιστήμες. Άλλο ένα παράδειγμα είναι ένας/μία μαθητής/τρια που κάποια στιγμή μαθαίνει ή μελετά Μαθηματικά, ενώ κάποια άλλη στιγμή μαθαίνει ή μελετά Φυσική. Τα επιστημικά αντικείμενα κατασκευάζονται από τα αντίστοιχα επιστημονικά αντικείμενα με θεσμικά μέσα (σχολικά εγχειρίδια, ΑΠΣ) και εννοιοποιούνται από τον ερμηνευτή σε μια δεδομένη διδακτική κατάσταση.

Σχήμα 1: (α) Επικοινωνιακή τριάδα και ανάδυση νοήματος, (β) Διεπιστημονική διδασκαλία βάσει κοινού σημείου ενεργοποίησης της επικοινωνιακής τριάδας (Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά., 2017, σελ. 648)



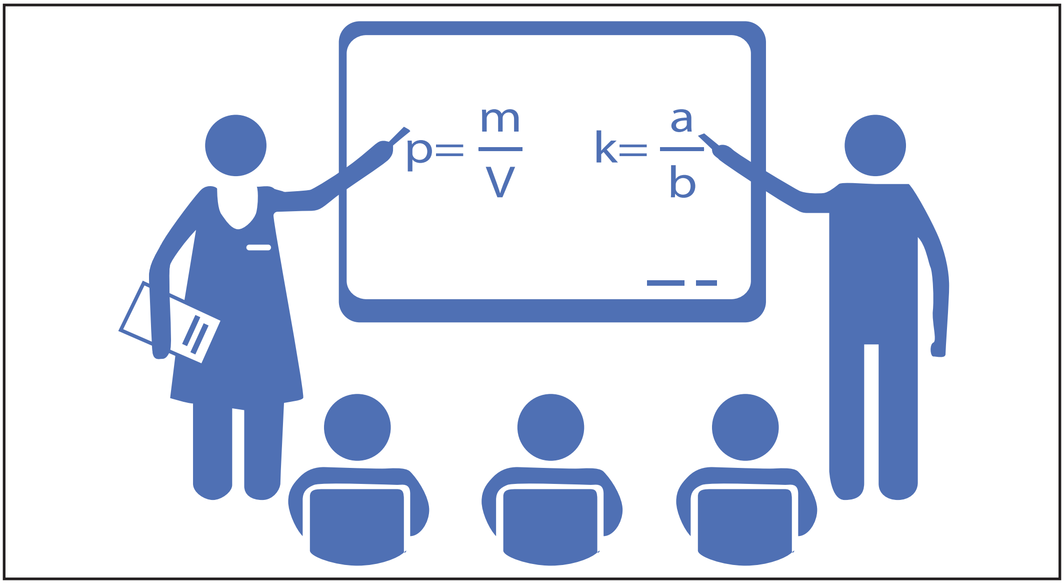
Στη Διδακτική των Μαθηματικών υπάρχει εκτεταμένη έρευνα αναφορικά με τις δυσκολίες των μαθητριών και των μαθητριών σχετικά με τις έννοιες που σχετίζονται με την κλασματική σημειογραφία, συμπεριλαμβανομένων του κλάσματος, του λόγου, της αναλογίας, του ρυθμού μεταβολής κ.ά. (Byerley & Thompson, 2017· Steffe & Olive, 2010· Streefland, 1991· Vamvakoussi κ.ά., 2011). Αντιστοίχως, στη Διδακτική της Φυσικής καταγράφονται έρευνες που αποκαλύπτουν και μελετούν τις δυσκολίες μαθητών και μαθητριών στην οικοδόμηση εννοιών της Φυσικής που περιλαμβάνουν κλασματική σημειογραφία, όπως η πυκνότητα, η αντίσταση, η χωρητικότητα πυκνωτή κ.ά. (Guisasola κ.ά., 2010· Hashweh, 2016· Viard & Khantine-Langlois, 2001).

Αν και καταγράφονται πολλαπλές εννοιολογικές δυσκολίες σχετικά με το διδακτικό-μαθησιακό πλαίσιο (Μαθηματικά ή Φυσική), παρατηρούμε ότι δεν φαίνεται να επιτρέπεται η αμφίδρομη μελέτη στα δύο πλαίσια. Για παράδειγμα, σε ένα λεκτικό πρόβλημα στα Μαθηματικά που εμπλέκει έννοιες της Φυσικής (όπως για παράδειγμα η ταχύτητα), συζητούνται εννοιολογικές δυσκολίες σχετικά με την έννοια του λόγου, ενώ ο ρόλος του πλαισίου φαίνεται είτε να έχει διακοσμητικό χαρακτήρα ή, ακόμη και σε περιπτώσεις ενεργής συμμετοχής του (όπως για παράδειγμα σε περιπτώσεις ρεαλιστικών προβλημάτων), η Φυσική εμπλέκεται ως επιπλέον μαθηματική συνθήκη για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος. Αντίστοιχα, στη Φυσική, πολλές φορές αναδεικνύονται δυσκολίες επίλυσης προβλημάτων Φυσικής λόγω της μη κατάλληλης εφαρμογής μαθηματικών εργαλείων. Δηλαδή, υποστηρίζουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις δεν γίνεται δυνατή η αναγνώριση των δυσκολιών εννοιολογικής κατανόησης του ενός επιστημονικού αντικειμένου που πηγάζουν από εννοιολογικές κατανοήσεις του άλλου επιστημονικού αντικειμένου. Στην παρούσα εργασία συζητάμε μια διεπιστημονική προσέγγιση που επιτρέπει την αναγνώριση διεπιστημονικών δυσκολιών.

Η διεπιστημονική προσέγγιση της διδασκαλίας, σύμφωνα με την οπτική μας, στοχεύει στη διασύνδεση των διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων, με αφορμή την κοινή σημειογραφία στα διαφορετικά μαθήματα (Σχήμα 1β). Για παράδειγμα, η σημειογραφία του κλάσματος εμφανίζεται τόσο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, όσο και στη διδασκαλία της Φυσικής. Τα νοήματα που αναδύονται από τις διαφορετικές επικοινωνιακές τριάδες «σημείο, ερμηνευτής, επιστημικό αντικείμενο» είναι διαφορετικά. Ωστόσο, ένας/μία μαθητής/τρια που συμμετέχει στις δύο επικοινωνιακές τριάδες μπορεί να δημιουργήσει αντιστοιχίσεις ανάμεσα στα διαφορετικά νοήματα. Όταν οι αντιστοιχίσεις αυτές είναι επιστημονικά λανθασμένες, μπορεί να δημιουργηθούν οι σχετικές εναλλακτικές ιδέες που θα λειτουργήσουν ως εμπόδιο στην οικοδόμηση γνώσεων, ακόμα και σε άλλες διδακτικές ενότητες πέρα από αυτές στις οποίες δημιουργήθηκαν οι εναλλακτικές ιδέες. Για παράδειγμα, ένα παιδί μαθαίνει στο Δημοτικό ότι η τιμή ενός κλάσματος μειώνεται όταν ο παρονομαστής του κλάσματος αυξάνεται. Βεβαίως, αυτό ισχύει με την παραδοχή ότι ο αριθμητής παραμένει σταθερός (ή μειώνεται). Συχνά, αυτή η παραδοχή δεν είναι ρητή, αλλά υπονοείται κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ως αποτέλεσμα, όταν το παιδί συναντήσει τη σχέση υπολογισμού ενός φυσικού μεγέθους μέσα από ένα κλάσμα, υπάρχει το ενδεχόμενο το παιδί να εφαρμόσει τυφλά τη γνώση που κατέχει από τα Μαθηματικά, χωρίς να λάβει υπόψη τις σχέσεις ανάμεσα στα εμπλεκόμενα φυσικά μεγέθη, αποσιωπώντας έτσι τα αντίστοιχα φυσικά νοήματα. Αν υποθέσουμε ότι το εν λόγω φυσικό μέγεθος είναι η πυκνότητα (ρ=m/V) και αναφερόμαστε σε ένα μπαλόνι, τότε ένα παιδί μπορεί να σκεφτεί ότι αν αυξηθεί ο όγκος του μπαλονιού, εφόσον είναι παρονομαστής του κλάσματος, θα μειωθεί η πυκνότητα του μπαλονιού. Δεδομένου ότι η (μέση) πυκνότητα του αντικειμένου αυτού όντως μειώνεται, η επιβεβαίωση της ορθότητας του συλλογισμού του παιδιού ενισχύει την πεποίθησή του. Σε ένα άλλο πλαίσιο εφαρμογής, όπως στην πυκνότητα ενός κομματιού σιδήρου, ο συλλογισμός του μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα. Για παράδειγμα, το παιδί μπορεί και πάλι να θεωρήσει ότι αν αυξηθεί ο όγκος ενός κομματιού σιδήρου, τότε θα μειωθεί η πυκνότητά του, παρακάμπτοντας το γεγονός ότι για να αυξηθεί ο όγκος του κομματιού πρέπει να αυξηθεί και η μάζα του.

Η επικοινωνία ανάμεσα στις διδασκαλίες των Μαθηματικών και της Φυσικής θα μπορούσε να αποτρέψει τέτοιου είδους αντιστοιχίσεις, επιστημονικά μη συμβατές. Η οπτική μας για τη διεπιστημονική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών και της Φυσικής αναγνωρίζει και αναδεικνύει τις διαφορετικές επιστημονικές προσεγγίσεις, χωρίς να στοχεύει στην ενοποίηση των διακριτών μαθημάτων. Αντίθετα, επιδιώκει τη διασύνδεση των διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων μέσα από ένα ενιαίο πρόγραμμα (συν)διδασκαλίας (Nikitina, 2006· Stinson κ.ά., 2009), στο οποίο τα Μαθηματικά και η Φυσική παραμένουν διακριτά μαθήματα, αλλά ταυτόχρονα μετασχηματίζονται σε επικοινωνούντα μαθήματα επιτρέποντας να συνυπάρχουν τα διαφορετικά νοήματα (Σχήμα 2).

Σχήμα 2: Διεπιστημονική (συν)διδασκαλία Φυσικής και Μαθηματικών με βάση τη σημειογραφία κλάσματος



Σκοπός της Έρευνας

Σκοπός της έρευνάς μας ήταν να διερευνήσουμε τη σχέση (αν υπάρχει) της εξοικείωσης των πρωτοετών φοιτητών, ως προς μία έννοια Φυσικής, με την ενεργοποίηση φυσικού ή μαθηματικού νοήματος, κατά τη διαχείριση της σημειογραφίας του κλάσματος. Με βάση τα αποτελέσματα προηγούμενης έρευνάς μας (Κρητικός κ.ά., 2020), υποθέτουμε ότι, όσο μικρότερη είναι η εξοικείωση αυτή, τόσο ενεργοποιείται το μαθηματικό νόημα έναντι του φυσικού νοήματος. Μέσα από την έρευνα επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε τις οπτικές των φοιτητών/τριών για τη μαθηματική σημειογραφία του κλάσματος κατά την επίλυση προβλημάτων Φυσικής. Με δεδομένο ότι οι μαθηματικοί συμβολισμοί εμφανίζονται συχνά στα προβλήματα Φυσικής (Redish, 2005), επιδιώξαμε να διερευνήσουμε τον βαθμό στον οποίο οι φοιτητές/τριες αποδίδουν φυσικό νόημα στο κλάσμα και στις εμπλεκόμενες μεταβλητές και σταθερές. Παράλληλα, διερευνήσαμε αν το είδος της μεταβολής του αριθμητή ή/και του παρονομαστή ενός κλάσματος επηρεάζει τον βαθμό δυσκολίας επίλυσης ενός προβλήματος από τους/τις φοιτητές/τριες. Ως είδος της μεταβολής εννοούμε την πολλαπλασιαστική (π.χ. διπλασιασμός) ή την προσθετική (π.χ. αύξηση κατά 2) μεταβολή του αριθμητή ή/και του παρονομαστή.

Μέθοδος

Η έρευνα διεξήχθη στις αρχές του χειμερινού εξαμήνου του ακαδημαϊκού έτους 2021-22, δηλαδή αρχές Οκτωβρίου 2021. Στο δείγμα της έρευνας συμμετείχαν 94 πρωτοετείς φοιτητές/τριες πανεπιστημιακών Παιδαγωγικών Τμημάτων Δημοτικής Εκπαίδευσης (28) και Προσχολικής Αγωγής (66). Η επιλογή του δείγματος βασίστηκε σε δύο κύριους λόγους. Πρώτον, οι περισσότεροι/ες πρωτοετείς φοιτητές/τριες έχουν μόλις αποφοιτήσει από το Λύκειο και, επομένως, δεν έχουν μελετήσει τη Διδακτική των κλασμάτων, παρά μόνο τα έχουν διδαχθεί. Δεύτερον, οι φοιτητές/τριες Παιδαγωγικών Τμημάτων προέρχονται από όλες τις κατευθύνσεις/προσανατολισμούς του Λυκείου. Επομένως, το δείγμα αποτελείται από φοιτητές/τριες που δεν έχουν εντρυφήσει σε ζητήματα Διδακτικής των Μαθηματικών ή Φυσικών Επιστημών, αν και πρόκειται να διδάξουν σχετικά μαθήματα στο μέλλον.

Η συλλογή δεδομένων έγινε με ένα ερωτηματολόγιο, το οποίο παραθέτουμε παρακάτω. Η ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των φοιτητών/τριών πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό SPSS 26 και περιλάμβανε περιγραφική και επαγωγική στατιστική. Για να συγκρίνουμε τα προβλήματα σε καθένα από τα τέσσερα ζεύγη προβλημάτων (τα οποία περιγράφονται παρακάτω) πραγματοποιήθηκε στατιστικός έλεγχος εξαρτημένων δειγμάτων paired samples t-test. Για να εντοπιστούν στατιστικώς σημαντικές σχέσεις ανάμεσα στις μαθηματικές γνώσεις των φοιτητών/τριών και τις απαντήσεις στα προβλήματα Φυσικής, υπολογίστηκε ο συντελεστής συσχέτισης Pearson r.

Έρευνα Αναφοράς

Η παρούσα έρευνα βασίστηκε σε προηγούμενη έρευνά μας (Κρητικός κ.ά., 2020), στην οποία συμμετείχαν 28 εκπαιδευτικοί με την ιδιότητα του μεταπτυχιακού φοιτητή (6 Νηπιαγωγοί, 10 Δάσκαλοι, 8 Μαθηματικοί, 3 Φυσικοί και 1 Χημικός). Στόχος της έρευνας ήταν να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό η έλλειψη διασύνδεσης της διδασκαλίας των Μαθηματικών με τη διδασκαλία της Φυσικής επηρεάζει την οικοδόμηση εννοιών στη Φυσική. Μία ενδεικτική δραστηριότητα που αξιοποιήθηκε για τον σκοπό αυτόν ήταν η εξής:

> Ένας πυκνωτής φορτίζεται από μία μπαταρία τάσης V. Έτσι, αποθηκεύεται φορτίο Q. Η χωρητικότητα του πυκνωτή υπολογίζεται από τη σχέση C=Q/V. Αν αντικαταστήσουμε τη μπαταρία (V) με μία άλλη διπλάσιας τάσης (2V), τότε η χωρητικότητα του πυκνωτή θα:
>
> α) διπλασιαστεί, β) υποδιπλασιαστεί, γ) παραμείνει ίδια.
>
> Επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Για την κάθε λανθασμένη απάντηση, γράψτε τον βαθμό τον οποίο θα βάζατε σε ένα παιδί που την είχε επιλέξει.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, μόνο οι εκπαιδευτικοί Φυσικών Επιστημών (4 από τους 28) απάντησαν ορθά (γ). Από τις 24 λανθασμένες απαντήσεις των εκπαιδευτικών άλλων ειδικοτήτων οι 21 θεώρησαν ότι αν η τάση διπλασιαστεί, η χωρητικότητα θα υποδιπλασιαστεί (β), ενώ οι 3 θεώρησαν ότι αν η τάση διπλασιαστεί, η χωρητικότητα θα διπλασιαστεί (α). Όπως φάνηκε, η σημειολογική αντιστοίχιση με τα Μαθηματικά επικράτησε ισχυρά έναντι του φυσικού νοήματος, καθώς κανείς δεν αναζήτησε τη φυσική σημασία, αλλά και τη σχέση ανάμεσα στα μεγέθη Q και V. Το εννοιολογικό περιεχόμενο που ενεργοποίησαν (από το μητρώο αναπαραστάσεων) είχε ως βάση τα Μαθηματικά και όχι τη Φυσική. Επομένως, εντοπίσαμε μία έντονη διεπιστημονική επιρροή της μαθηματικής γνώσης στην οικοδόμηση εννοιών Φυσικής. Με βάση αυτή τη διαπίστωση προχωρήσαμε στον σχεδιασμό ενός ερευνητικού εργαλείου το οποίο περιγράφουμε παρακάτω.

Ερευνητικό εργαλείο

Σύμφωνα με το εργαλείο το οποίο σχεδιάσαμε για τον σκοπό της παρούσας έρευνας, αρχικά δώσαμε διατυπώσεις προβλημάτων Φυσικής που εμπεριείχαν τη σημειογραφία του κλάσματος. Με σκοπό να μειώσουμε από τους/τις φοιτητές/τριες το άγχος μιας εξέτασης στις Θετικές Επιστήμες (Κρητικός & Μούτσιος-Ρέντζος, 2022· Rayner κ.ά., 2009), διατυπώσαμε τα προβλήματα με τέτοιο τρόπο που να φαίνεται ότι δεν ζητάμε να τα επιλύσουν, αλλά να κρίνουν τις λύσεις που υποτίθεται ότι έδωσαν μαθητές/τριες Λυκείου. Αρχικά, ζητήσαμε από τους/τις φοιτητές/τριες να εκφράσουν την εντύπωση που έχουν για τη δυσκολία/ευκολία επίλυσης του κάθε προβλήματος μέσα από το ερώτημα: «*Κατά τη γνώμη σας, πόσο δύσκολη είναι η επίλυση του προβλήματος;*», απαντώντας σε μία πενταβάθμια κλίμακα Likert (πολύ εύκολη έως πολύ δύσκολη). Στη συνέχεια, δώσαμε πιθανές απαντήσεις των μαθητών/τριών Λυκείου και ζητήσαμε από τους/τις φοιτητές/φοιτήτριες να κρίνουν την κάθε απάντηση ως ορθή ή λανθασμένη ή αν απαιτείται περισσότερη σκέψη και διευκρινίσεις. Παρακάτω, παραθέτουμε τη διατύπωση της εκφώνησης για το πρώτο πρόβλημα του ερωτηματολογίου.

Το παρακάτω πρόβλημα έχει δοθεί σε σχολικό περιβάλλον. Θα θέλαμε αρχικά να μας πείτε τη γνώμη σας για τον βαθμό δυσκολίας του. Στη συνέχεια θα θέλαμε την γνώμη σας σχετικά με ορισμένες από τις απαντήσεις που μας δόθηκαν.

Δόθηκε το εξής πρόβλημα σε μαθητές/τριες Λυκείου:

1.1) Έστω ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ και διανύει απόσταση S σε χρόνο t. Η τιμή της ταχύτητας του αυτοκινήτου υπολογίζεται από τη σχέση υ=S/t. Αν το αυτοκίνητο συνεχίσει την ίδια κίνηση και διανύσει διπλάσια απόσταση, τι θα συμβεί στην τιμή της ταχύτητάς του;

Υπενθυμίζονται οι μονάδες μέτρησης στο SI (Διεθνές Σύστημα) για την ταχύτητα: m/s, για την απόσταση: m και για τον χρόνο: s.

1) Κατά τη γνώμη σας, πόσο δύσκολη είναι η επίλυση του προβλήματος;

[Πολύ εύκολη] 1 2 3 4 5 [Πολύ δύσκολη]

2) Οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους/τις μαθητές/τριες ήταν οι εξής:

(α) Η ταχύτητα του αυτοκινήτου θα αυξηθεί.

(β) Η ταχύτητα του αυτοκινήτου θα μειωθεί.

(γ) Η ταχύτητα του αυτοκινήτου θα παραμείνει ίδια.

Σημειώσετε τη γνώμη σας για καθεμιά από τις απαντήσεις (α), (β), (γ), επιλέγοντας

Α, εάν κατά τη γνώμη σας η πρόταση είναι πάντα σωστή.

Β, εάν κατά τη γνώμη σας η πρόταση είναι πάντα λανθασμένη.

Γ, εάν κατά τη γνώμη σας το θέμα χρειάζεται περισσότερη σκέψη και διευκρινίσεις.

Το ίδιο μοτίβο ακολουθήθηκε στις εκφωνήσεις και των υπόλοιπων προβλημάτων Φυσικής. Το μοτίβο περιέχει μία σχέση της μορφής c=x/y (c: σταθερά και x, y: μεταβλητές), όπου εφαρμόζεται ή μόνο μια πολλαπλασιαστική ή μόνο μια προσθετική μεταβολή σε έναν μόνο όρο του κλάσματος x/y και διερευνάται η μεταβολή στο κλάσμα. Συγκεκριμένα επιλέξαμε τις μεταβολές που σχετίζονται με το «2»: διπλασιάζεται μία ποσότητα στον αριθμητή ή τον παρονομαστή ή αυξάνεται κατά 2 ο αριθμητής ή ο παρονομαστής και ζητείται η αντίστοιχη μεταβολή στο κλάσμα. Αυτό που αναμένεται να αναγνωρίσουν οι φοιτητές/τριες είναι ότι, δεδομένου του φυσικού νοήματος του μεγέθους c (σταθερό), θα πρέπει να ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις ότι ο αριθμητής είναι ανάλογος με τον παρονομαστή, οπότε και το κλάσμα θα παραμένει σταθερό.

Παρακάτω παραθέτουμε τα αποσπάσματα των εκφωνήσεων για τα υπόλοιπα προβλήματα Φυσικής· το δεύτερο πρόβλημα αφορούσε στην ταχύτητα (υ=S/t), το τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα στην πυκνότητα (ρ=m/V), το πέμπτο και το έκτο στην αντίσταση ενός μεταλλικού αγωγού (R=V/I), ενώ το έβδομο και το όγδοο στη χωρητικότητα ενός πυκνωτή (C=Q/V).

1.2) Έστω ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ και διανύει απόσταση S σε χρόνο t. Η τιμή της ταχύτητας του αυτοκινήτου υπολογίζεται από τη σχέση υ=S/t. Αν το αυτοκίνητο συνεχίσει την ίδια κίνηση και διανύσει επιπλέον 2 m, τι θα συμβεί στην τιμή της ταχύτητάς του;

2.1) Η πυκνότητα ρ ενός κομματιού χαλκού υπολογίζεται από τη σχέση ρ=m/V, όπου m η μάζα του κομματιού και V ο όγκος του. Αν πάρουμε ένα κομμάτι χαλκού με διπλάσιο όγκο, τι θα συμβεί στην τιμή της πυκνότητάς του;

2.2) Η πυκνότητα ρ ενός κομματιού χαλκού υπολογίζεται από τη σχέση ρ=m/V, όπου m η μάζα του κομματιού και V ο όγκος του. Αν πάρουμε ένα κομμάτι χαλκού με όγκο μεγαλύτερο κατά 2 m^3, τι θα συμβεί στην τιμή της πυκνότητάς του;

3.1) Η αντίσταση R ενός μεταλλικού αγωγού υπολογίζεται από τη σχέση R=V/I, όπου V η τάση στα άκρα του αγωγού και I η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει. Αν διπλασιαστεί η τάση στα άκρα του αγωγού, τι θα συμβεί στην τιμή της αντίστασής του;

3.2) Η αντίσταση R ενός μεταλλικού αγωγού υπολογίζεται από τη σχέση R=V/I, όπου V η τάση στα άκρα του αγωγού και I η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει. Αν η τάση στα άκρα του αγωγού αυξηθεί κατά 2 Volt, τι θα συμβεί στην τιμή της αντίστασής του;

4.1) Η χωρητικότητα C ενός πυκνωτή υπολογίζεται από τη σχέση C=Q/V, όπου Q το φορτίο που είναι αποθηκευμένο στον πυκνωτή και V η τάση στα άκρα του. Αν διπλασιαστεί η τάση στα άκρα του πυκνωτή, τι θα συμβεί στην τιμή της χωρητικότητάς του;

4.2) Η χωρητικότητα C ενός πυκνωτή υπολογίζεται από τη σχέση C=Q/V, όπου Q το φορτίο που είναι αποθηκευμένο στον πυκνωτή και V η τάση στα άκρα του. Αν η τάση στα άκρα του πυκνωτή αυξηθεί κατά 2 Volt, τι θα συμβεί στην τιμή της χωρητικότητάς του;

Ο λόγος για τον οποίο εμπλέξαμε τέσσερις διαφορετικές έννοιες στα προβλήματα Φυσικής ήταν για να διερευνήσουμε αν η εξοικείωση των φοιτητών/τριών με τις έννοιες αυτές διαφοροποιεί τις απαντήσεις τους. Με βάση τη συχνότητα διδασκαλίας των εννοιών αυτών στο σχολείο και την εμφάνισή τους στην καθημερινότητα, θεωρήσαμε ότι ο βαθμός οικειότητας ήταν μεγάλος για την έννοια της ταχύτητας, μικρότερος για την έννοια της πυκνότητας, ακόμα μικρότερος για την έννοια της αντίστασης και σχεδόν ανύπαρκτος για την έννοια της χωρητικότητας.

Μετά τα προβλήματα Φυσικής θέσαμε στους/τις φοιτητές/τριες ερωτήματα μαθηματικών γνώσεων για την έννοια του κλάσματος, ώστε να ελέγξουμε το μαθηματικό τους υπόβαθρο, με την εξής διατύπωση:

Έστω η σχέση k=a/b, όπου a και b δύο θετικοί φυσικοί αριθμοί. Σημειώσετε τη γνώμη σας για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέγοντας

A, εάν κατά τη γνώμη σας η πρόταση είναι πάντα σωστή.

B, εάν κατά τη γνώμη σας η πρόταση είναι πάντα λανθασμένη.

Γ, εάν κατά τη γνώμη σας το θέμα χρειάζεται περισσότερη σκέψη και διευκρινίσεις.

Αν αυξηθεί το a και μείνει σταθερό το b, τότε το k θα παραμείνει σταθερό.

Αν μείνει σταθερό το a και αυξηθεί το b, τότε το k θα παραμείνει σταθερό.

Αν αυξηθεί το a και μείνει σταθερό το b, τότε το k θα αυξηθεί.

Αν μείνει σταθερό το a και αυξηθεί το b, τότε το k θα μειωθεί.

Αν μείνει σταθερό το a και το b γίνει (b+2), τότε το k θα υποδιπλασιαστεί.

Αν το a γίνει (a+2) και το b μείνει σταθερό, τότε το k θα διπλασιαστεί.

Αν το a γίνει (a+2) και το b γίνει (b+2), τότε το k θα παραμείνει σταθερό.

Αν διπλασιαστεί μόνο το a, τότε το k θα διπλασιαστεί.

Αν διπλασιαστεί μόνο το b, τότε το k διπλασιαστεί.

Αν διπλασιαστούν ταυτόχρονα το a και b, τότε το k θα διπλασιαστεί.

Αν διπλασιαστούν ταυτόχρονα το a και b, τότε το k θα υποδιπλασιαστεί.

Αν διπλασιαστούν ταυτόχρονα το a και b, τότε το k θα παραμείνει σταθερό.

Αν διπλασιαστεί μόνο το b, τότε το k θα παραμείνει σταθερό.

Αποτελέσματα

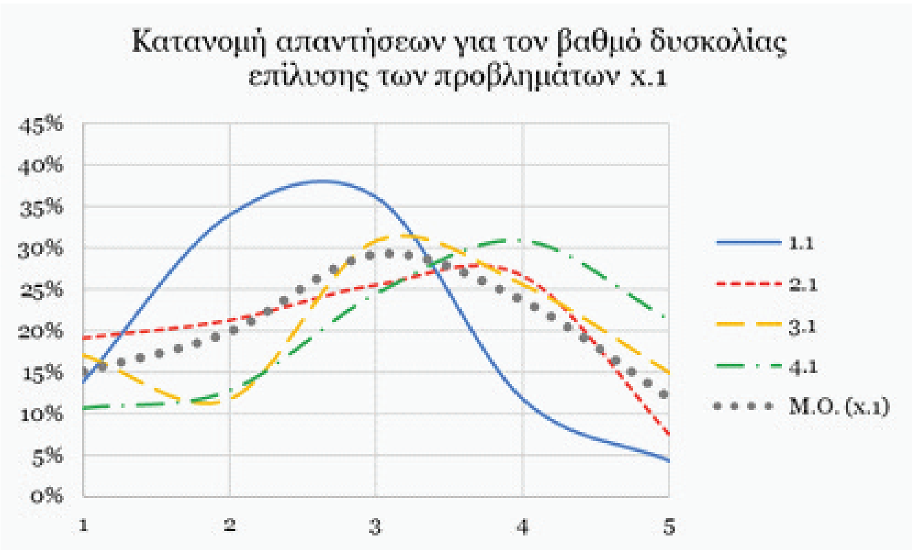
Οι απαντήσεις των φοιτητών/τριών στο πρώτο ερώτημα των προβλημάτων Φυσικής («κατά τη γνώμη σας, πόσο δύσκολη είναι η επίλυση του προβλήματος;»), καθώς και οι αντίστοιχοι μέσοι όροι παρατίθενται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Απαντήσεις στο ερώτημα 1 των προβλημάτων Φυσικής

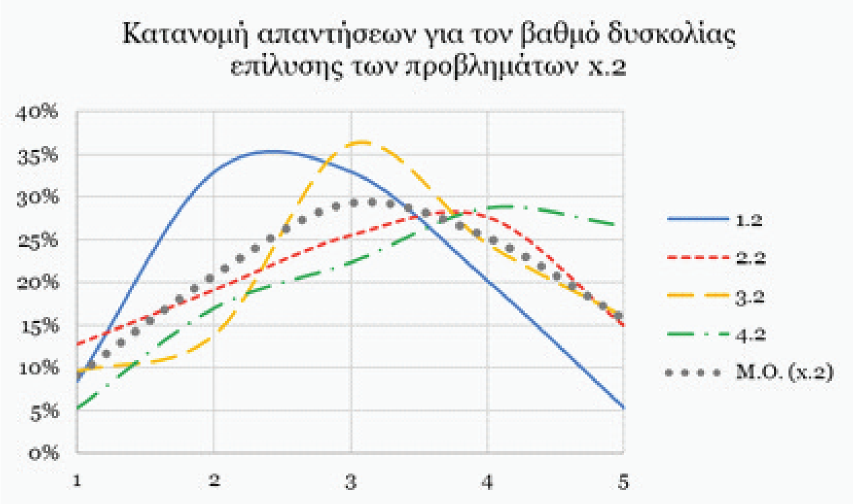
	υ=S/t		**ρ=m/V**		**R=V/I**		**C=Q/V**		**Μέσος Όρος**	
	1.1	**1.2**	**2.1**	**2.2**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**	**x.1**	**x.2**
[Πολύ εύκολη] 1	14%	9%	19%	13%	17%	10%	11%	5%	15%	9%
2	34%	33%	21%	19%	12%	14%	13%	17%	20%	21%
3	36%	33%	26%	26%	31%	36%	24%	22%	29%	29%
4	12%	20%	27%	28%	26%	24%	31%	29%	24%	25%
5 [Πολύ δύσκολη]	4%	5%	7%	15%	15%	16%	21%	27%	12%	16%
Μέσος Όρος	2,6	2,8	2,8	3,1	3,1	3,2	3,4	3,5	3,0	3,2

Στο Σχήμα 3 φαίνονται οι κατανομές των απαντήσεων του Πίνακα 1 για τα προβλήματα x.1 (1.1, 2.1, 3.1, 4.1 και του μέσου όρου αυτών), δηλαδή τα προβλήματα στα οποία ο αριθμητής ή ο παρονομαστής μεταβάλλεται πολλαπλασιαστικά. Αντίστοιχα, στο Σχήμα 4 φαίνονται οι κατανομές των απαντήσεων για τα προβλήματα x.2 (1.2, 2.2, 3.2, 4.2 και του μέσου όρου αυτών), δηλαδή τα προβλήματα στα οποία ο αριθμητής ή ο παρονομαστής μεταβάλλεται προσθετικά. Από τον στατιστικό έλεγχο (paired samples t-test), προέκυψε στατικά σημαντική διαφορά ($p<.05$) σε κάθε ζεύγος προβλημάτων x.1-x.2, καθώς και στους μέσους όρους αυτών. Συγκεκριμένα, οι φοιτητές/τριες έκριναν δυσκολότερα όλα τα προβλήματα προσθετικής μεταβολής σε σχέση με τα αντίστοιχα της πολλαπλασιαστικής μεταβολής. Αυτό σημαίνει ότι το είδος της μεταβολής (πολλαπλασιαστική ή προσθετική) του αριθμητή ή του παρονομαστή φαίνεται να τροποποιεί σημαντικά τις εκτιμήσεις των φοιτητών/τριών για τον βαθμό δυσκολίας επίλυσης ενός προβλήματος.

Σχήμα 3: Κατανομή απαντήσεων για τον βαθμό δυσκολίας επίλυσης των προβλημάτων x.1 (πολλαπλασιαστικής μεταβολής αριθμητή ή παρονομαστή)



Σχήμα 4: Κατανομή απαντήσεων για τον βαθμό δυσκολίας επίλυσης των προβλημάτων x.2 (προσθετικής μεταβολής αριθμητή ή παρονομαστή)



Στα προβλήματα με την έννοια της ταχύτητας, οι περισσότερες απαντήσεις δόθηκαν στις τιμές 2 και 3 της πενταβάθμιας κλίμακας Likert, με μέσο όρο όλων των απαντήσεων 2,6 και 2,8 για την πολλαπλασιαστική και την προσθετική μεταβολή, αντίστοιχα. Δηλαδή, οι περισσότεροι/ες φοιτητές/τριες θεώρησαν ότι τα δύο αυτά προβλήματα ήταν μέτριας δυσκολίας. Στα προβλήματα με την έννοια της πυκνότητας, παρατηρούμε μία διασπορά των επικρατέστερων απαντήσεων στις τιμές 2, 3 και 4 για την πολλαπλασιαστική μεταβολή του παρονομαστή με μέσο όρο 2,8. Η αντίστοιχη διασπορά για την προσθετική μεταβολή ήταν στις τιμές 3 και 4 με μέσο όρο 3,1. Στα προβλήματα με την έννοια της αντίστασης, οι περισσότερες απαντήσεις συγκεντρώθηκαν στην τιμή 3, με μέσο όρο 3,1 και 3,2 για την πολλαπλασιαστική και την προσθετική μεταβολή, αντίστοιχα. Αυτό υποδεικνύει ότι οι φοιτητές/τριες θεώρησαν λίγο δυσκολότερα τα προβλήματα αυτά. Τέλος, στα προβλήματα με την έννοια της χωρητικότητας οι απαντήσεις μετατοπίστηκαν προς την τιμή 4 για την πολλαπλασιαστική μεταβολή του παρονομαστή, με μέσο όρο 3,4. Στην προσθετική μεταβολή, οι επικρατέστερες απαντήσεις εντοπίστηκαν στις τιμές 4 και 5, με μέσο όρο όλων των απαντήσεων 3,5. Το τελευταίο εύρημα υποδηλώνει ότι τα προβλήματα με την έννοια της χωρητικότητας θεωρήθηκαν δυσκολότερα από τα υπόλοιπα. Ένα άλλο στοιχείο που προκύπτει από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι ότι τα προβλήματα στα οποία μεταβάλλεται ο παρονομαστής κρίθηκαν ως δυσκολότερα σε σχέση με αυτά που μεταβάλλεται ο αριθμητής.

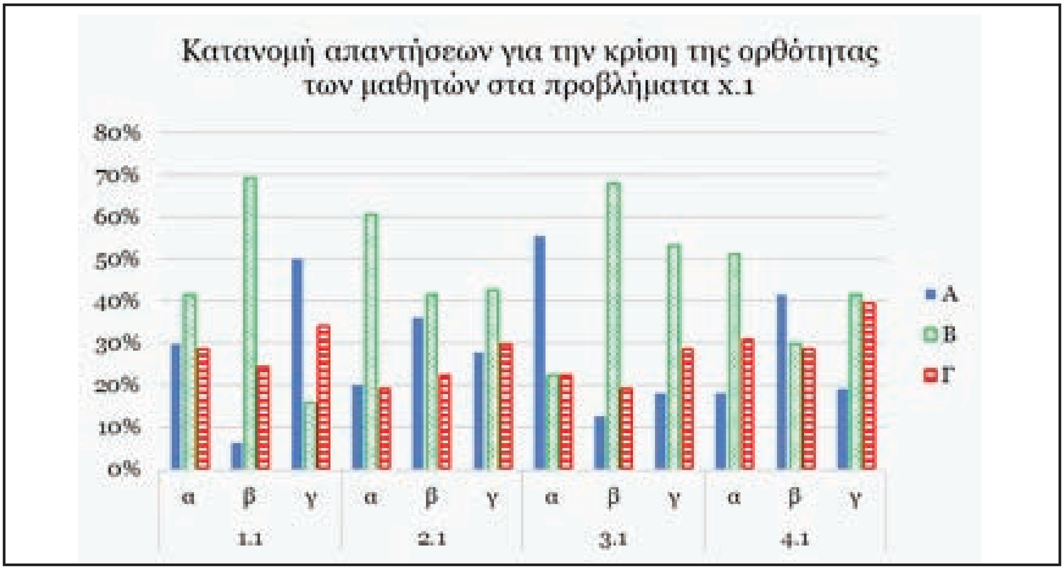
Το δεύτερο ερώτημα των προβλημάτων Φυσικής αφορούσε στην αποτίμηση από τους/τις φοιτητές/τριες των ενδεχόμενων απαντήσεων μαθητών/τριών Λυκείου. Από τις 3 ενδεχόμενες απαντήσεις α, β, γ των μαθητών/τριών, η ορθή απάντηση ήταν πάντα η γ (η τιμή του κλάσματος παραμένει σταθερή). Όπως παραθέσαμε και παραπάνω στη διατύπωση της εκφώνησης για το πρόβλημα 1.1, οι φοιτητές/τριες κλήθηκαν να αποτιμήσουν τις απαντήσεις των μαθητών/τριών με μία από τις εξής επιλογές: Α, εάν κατά τη γνώμη σας η πρόταση είναι πάντα σωστή, Β, εάν κατά τη γνώμη σας η πρόταση είναι πάντα λανθασμένη, Γ, εάν κατά τη γνώμη σας το θέμα χρειάζεται περισσότερη σκέψη και διευκρινίσεις. Οι απαντήσεις των φοιτητών/τριών στο δεύτερο ερώτημα δίνονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Απαντήσεις στο ερώτημα 2 των προβλημάτων Φυσικής

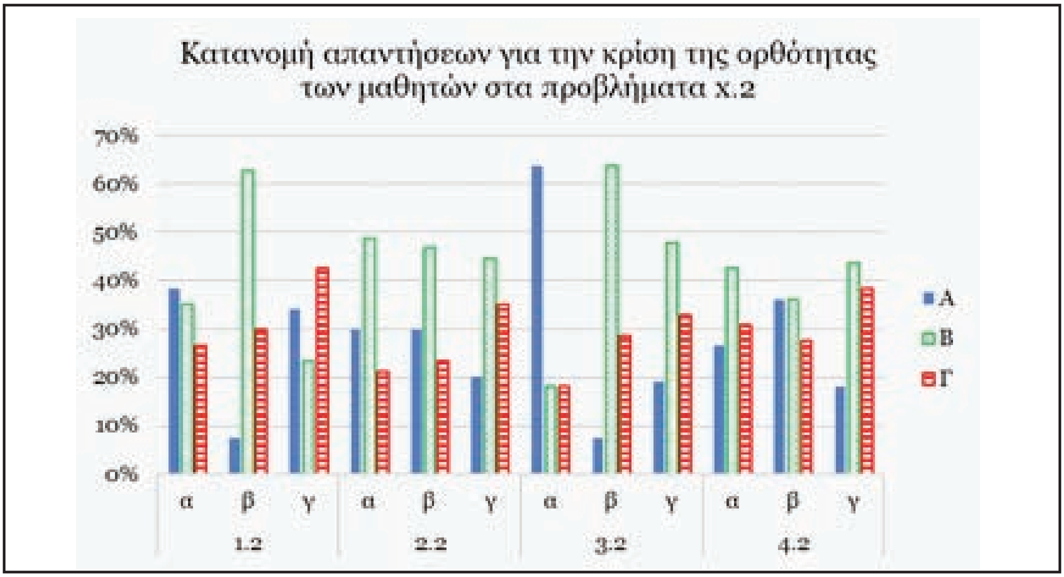
	υ=S/t			**ρ=m/V**			**R=V/I**			**C=Q/V**		
	1.1			**2.1**			**3.1**			**4.1**		
	α	**Β**	**γ**	**α**	**β**	**γ**	**α**	**β**	**γ**	**α**	**β**	**γ**
Α	30%	6%	50%	20%	36%	28%	55%	13%	18%	18%	41%	19%
Β	41%	69%	16%	61%	41%	43%	22%	68%	53%	51%	30%	41%
Γ	29%	24%	34%	19%	22%	30%	22%	19%	29%	31%	29%	39%
	1.2			**2.2**			**3.2**			**4.2**		
	α	**Β**	**γ**	**α**	**β**	**γ**	**α**	**β**	**γ**	**α**	**β**	**γ**
Α	38%	7%	34%	30%	30%	20%	64%	7%	19%	27%	36%	18%
Β	35%	63%	23%	49%	47%	45%	18%	64%	48%	43%	36%	44%
Γ	27%	30%	43%	21%	23%	35%	18%	29%	33%	31%	28%	38%

Στα Σχήματα 5 και 6 φαίνονται οι κατανομές των απαντήσεων για το δεύτερο ερώτημα των προβλημάτων Φυσικής για την πολλαπλασιαστική και την προσθετική μεταβολή, αντίστοιχα.

Σχήμα 5: Κατανομή απαντήσεων για την κρίση της ορθότητας των μαθητών στα προβλήματα x.1 (πολλαπλασιαστικής μεταβολής αριθμητή ή παρονομαστή)



Σχήμα 6: Κατανομή απαντήσεων για την κρίση της ορθότητας των μαθητών στα προβλήματα x.2 (προσθετικής μεταβολής αριθμητή ή παρονομαστή)



Συγκρίνοντας τη διαφοροποίηση των απαντήσεων ανάμεσα στα ζεύγη προβλημάτων x.1 και x.2 (με έλεγχο paired samples t-test), παρατηρήσαμε στατιστικά σημαντική διαφορά (p=.002) μόνο στην περίπτωση του ζεύγους προβλημάτων για την έννοια της ταχύτητας (αύξηση της απόστασης-αριθμητή). Στο πρόβλημα 1.1 οι περισσότεροι/ες φοιτητές/τριες έκριναν ως ορθή την απάντηση γ (σταθερή ταχύτητα) και ως λανθασμένες τις απαντήσεις α και β. Μεγαλύτερη συμφωνία φάνηκε στην κρίση της απάντησης β ως λανθασμένης (69%). Αντίθετα, στο πρόβλημα 1.2, παρότι και πάλι υπήρξε συμφωνία για την κρίση της απάντησης β ως λανθασμένης (63%), εμφανίστηκε σύγχυση στην απάντηση α (αύξηση της ταχύτητας), όπου θεωρήθηκε από τους/τις περισσότερους/ες ως ορθή (38%), και στην απάντηση γ, καθώς οι περισσότεροι/ες (43%) απάντησαν ότι το θέμα χρειάζεται περισσότερη σκέψη και διευκρινίσεις. Στα προβλήματα με την έννοια της πυκνότητας (αύξηση του όγκου-παρονομαστή), οι περισσότεροι/ες φοιτητές/τριες έκριναν ως λανθασμένες και τις τρεις απαντήσεις. Στα προβλήματα με την έννοια της αντίστασης (αύξηση της τάσης-αριθμητή), οι περισσότεροι/ες έκριναν ως ορθή την απάντηση α (αύξηση της αντίστασης) και λανθασμένες τις β και γ. Τέλος, στα προβλήματα με την έννοια της χωρητικότητας (αύξηση της τάσης-παρονομαστή), οι περισσότεροι/ες έκριναν ως ορθή την απάντηση β (μείωση της χωρητικότητας) και λανθασμένες τις α και γ. Παρατηρούμε ότι, μόνο στην περίπτωση της πολλαπλασιαστικής αύξησης του αριθμητή που αφορούσε στην ταχύτητα, οι φοιτητές/τριες έκριναν σωστά τις απαντήσεις των μαθητών. Αξιοσημείωτο είναι ότι για την έννοια της αντίστασης και της χωρητικότητας φαίνεται να ενεργοποιήθηκε η ελλιπής μαθηματική γνώση κατά την οποία, όταν αυξάνεται ο αριθμητής, αυξάνεται και το κλάσμα, ή όταν αυξάνεται ο παρονομαστής, μειώνεται το κλάσμα. Αντίθετα, στην περίπτωση της πυκνότητας δεν υιοθετήθηκε αυτή η ελλιπής μαθηματική γνώση, αλλά ούτε ενεργοποιήθηκε κάποιο φυσικό νόημα.

Στο πρώτο ερώτημα των προβλημάτων Φυσικής, αναφορικά με την εκτίμηση του βαθμού δυσκολίας επίλυσης των προβλημάτων, εντοπίστηκε ότι τα προβλήματα με μεταβολή του παρονομαστή κρίθηκαν ως δυσκολότερα σε σχέση με αυτά που μεταβάλλεται ο αριθμητής. Στο δεύτερο ερώτημα των προβλημάτων Φυσικής, παρατηρούμε ότι οι φοιτητές/τριες είχαν χαμηλότερες επιδόσεις, επίσης, στα προβλήματα με μεταβολή του παρονομαστή.

Αναφορικά με τα ερωτήματα μαθηματικών γνώσεων, οι απαντήσεις των φοιτητών/τριών δίνονται στον Πίνακα 3. Όπως φαίνεται, οι φοιτητές/τριες είχαν καλές επιδόσεις στα 10 από τα 13 ερωτήματα. Οι προτάσεις 5, 6 και 7 ήταν οι μόνες στις οποίες η μεταβολή του αριθμητή ή/και του παρονομαστή ήταν αποκλειστικά προσθετική. Και οι τρεις προτάσεις θα μπορούσαν να κριθούν ως λανθασμένες, ωστόσο, υπό προϋποθέσεις θα μπορούσαν να είναι ορθές. Για παράδειγμα, στην πρόταση 5 «Αν μείνει σταθερό το a και το b γίνει (b+2), τότε το k θα υποδιπλασιαστεί», αν $b=2$, τότε η πρόταση είναι ορθή, ενώ αν $b\neq 2$, τότε η πρόταση είναι λανθασμένη. Έτσι, η ορθή απάντηση είναι η Γ (χρειάζεται περισσότερη σκέψη και διευκρινίσεις). Ωστόσο, επειδή η πρόταση είναι ορθή μόνο σε μία περίπτωση, το σφάλμα από την επιλογή Β (η πρόταση είναι πάντα λανθασμένη) δεν είναι τόσο σημαντικό. Το ίδιο ισχύει και για την πρόταση 6 «Αν το a γίνει (a+2) και το b μείνει σταθερό, τότε το k θα διπλασιαστεί» με ειδική περίπτωση ορθότητας τη συνθήκη $a=2$. Οπότε, οι επιδόσεις τους στα ερωτήματα 5 και 6 είναι επίσης καλές, αφού οι δύο επικρατέστερες απαντήσεις, με μικρή διαφορά μεταξύ τους, είναι οι Β και Γ. Από την άλλη, στο ερώτημα 7 «Αν το a γίνει (a+2) και το b γίνει (b+2), τότε το k θα παραμείνει σταθερό», όπου η συνθήκη ορθότητας είναι a=b, οι περισσότερες απαντήσεις δόθηκαν στην επιλογή Α (η πρόταση είναι πάντα σωστή). Συνολικά, λοιπόν, οι φοιτητές/τριες είχαν καλές επιδόσεις στα 10 από τα 13 ερωτήματα, μέτριες επιδόσεις σε 2 ερωτήματα και χαμηλή επίδοση μόνο σε ένα ερώτημα.

Πίνακας 3: Απαντήσεις στα ερωτήματα μαθηματικών γνώσεων

	Ερώτημα												
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Α	19%	12%	60%	64%	22%	27%	41%	48%	12%	23%	11%	49%	7%
Β	67%	76%	28%	24%	40%	39%	35%	30%	62%	62%	74%	24%	74%
Γ	14%	13%	13%	12%	37%	34%	23%	22%	27%	15%	15%	27%	18%
Ορθή απάντηση	**Β**	**Β**	**Α**	**Α**	**Γ**	**Γ**	**Γ**	**Α**	**Β**	**Β**	**Β**	**Α**	**Β**

Συγκρίνοντας και με τις απαντήσεις τους από τα προβλήματα Φυσικής, παρατηρούμε ότι οι φοιτητές/τριες αντιμετωπίζουν δυσκολία κατά τη διαχείριση του κλάσματος όταν υπάρχει προσθετική μεταβολή στον αριθμητή ή/και στον παρονομαστή, είτε πρόκειται για πρόβλημα Φυσικής είτε για πρόβλημα Μαθηματικών. Τη δυσκολία αυτή φαίνεται να την αναγνωρίζουν, αφού έκριναν ως δυσκολότερα τα προβλήματα Φυσικής με την προσθετική μεταβολή. Από την άλλη, ενώ δεν φαίνεται να έχουν ιδιαίτερο πρόβλημα στη διαχείριση του κλάσματος κατά την πολλαπλασιαστική μεταβολή στα ερωτήματα μαθηματικών γνώσεων, εντοπίστηκαν δυσκολίες στα προβλήματα Φυσικής, τις οποίες μάλιστα δεν αναγνώρισαν, όταν ρωτήθηκαν για τον βαθμό δυσκολίας των προβλημάτων με πολλαπλασιαστική μεταβολή.

Στο πλαίσιο της διεπιστημονικής προσέγγισης της διδασκαλίας, ένας διδακτικός στόχος θα μπορούσε να ήταν οι φοιτητές/τριες να αναγνωρίσουν την πρόταση 12, από τα ερωτήματα των μαθηματικών γνώσεων (στο k=a/b, αν διπλασιαστούν ταυτόχρονα το a και b, τότε το k θα παραμείνει σταθερό), μέσα στα προβλήματα Φυσικής x.1. Για να ελέγξουμε αν οι φοιτητές/τριες είχαν υιοθετήσει αυτή τη σύνδεση, υπολογίσαμε τον συντελεστή συσχέτισης Pearson, ανάμεσα στην πρόταση 12 και στις απαντήσεις για την επιλογή γ των προβλημάτων x.1. Στατιστικά σημαντική συσχέτιση (r=.213, p=.039) βρέθηκε μόνο με την έννοια της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι, μόνο στο πρόβλημα με την έννοια της ταχύτητας, όπου οι περισσότεροι/ες φοιτητές/τριες απάντησαν ορθά, η ορθή μαθηματική τους γνώση (49%) συμβαδίζει με την ορθή επιλογή στο πρόβλημα Φυσικής (50%).

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα που προέκυψε από τη στατιστική μας ανάλυση είναι η συσχέτιση της πρότασης 8 (στο k=a/b, αν διπλασιαστεί μόνο το a, τότε το k θα διπλασιαστεί) με τις απαντήσεις για την επιλογή α των προβλημάτων πολλαπλασιαστικής μεταβολής του αριθμητή στις έννοιες της ταχύτητας και της αντίστασης. Από τον έλεγχο προέκυψε στατιστικά σημαντική συσχέτιση (r=.243, p=.018) της πρότασης 8 με την επιλογή α για το πρόβλημα με την έννοια της αντίστασης. Οι περισσότεροι/ες φοιτητές/τριες απάντησαν ορθά ότι η πρόταση 8 είναι σωστή (48%). Παράλληλα, οι περισσότεροι/ες απάντησαν λανθασμένα ότι η επιλογή α για το πρόβλημα με την αντίσταση είναι σωστή (55%). Αυτό σημαίνει ότι μάλλον υιοθέτησαν την ορθή μαθηματική γνώση της πρότασης 8 με μη συμβατό τρόπο στην επίλυση του προβλήματος για την αντίσταση. Μία ερμηνεία για αυτό θα μπορούσε να είναι ότι, οι φοιτητές/τριες θεώρησαν πως αφού διπλασιάζεται η τάση (αριθμητής), διπλασιάζεται και η αντίσταση (κλάσμα). Στην περίπτωση της ταχύτητας, η οποία είναι πιο οικεία έννοια για τους φοιτητές/τριες, δεν εντοπίστηκε αυτή η μη συμβατή υιοθέτηση της μαθηματικής γνώσης. Αυτό το εύρημα συμφωνεί με την αρχική μας υπόθεση ότι, όσο μικρότερη είναι η εξοικείωση με μία έννοια Φυσικής, τόσο ενεργοποιείται το μαθηματικό νόημα έναντι του φυσικού νοήματος.

Συμπεράσματα και Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα επιδιώξαμε να διερευνήσουμε την ποικιλία των συνδέσεων που ενεργοποιούν πρωτοετείς φοιτητές/τριες παιδαγωγικών τμημάτων ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Φυσική, κατά την επίλυση προβλημάτων Φυσικής που εμπεριέχουν τη σημειογραφία του κλάσματος. Στηριζόμενοι σε προηγούμενη έρευνά μας (Κρητικός κ.ά., 2020), υποθέσαμε ότι η εξοικείωση των φοιτητών/τριών με μία έννοια Φυσικής είναι σημαντική για την οικοδόμηση φυσικού νοήματος. Αντίθετα, η έλλειψη εξοικείωσης οδηγεί τους/τις φοιτητές/τριες να καταφύγουν στις μαθηματικές τους γνώσεις βασιζόμενοι/ες στις εμπλεκόμενες μαθηματικές σημειογραφίες. Ως αποτέλεσμα, οι φοιτητές/τριες αφενός μπορεί να μην μετασχηματίσουν κατάλληλα τη μαθηματική τους γνώση, ώστε να οικοδομηθεί το επιθυμητό φυσικό νόημα (Kuo κ.ά., 2013) και, αφετέρου, μπορεί να περιοριστούν στο μαθηματικό νόημα λειτουργώντας διεκπεραιωτικά και στοχεύοντας αποκλειστικά στην επίλυση του προβλήματος.

Αν λάβουμε υπόψη τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι προπτυχιακοί/ές φοιτητές/τριες στις πράξεις μεταξύ κλασμάτων στα Μαθηματικά, η οικοδόμηση του φυσικού νοήματος γίνεται ακόμη δυσκολότερη. Ένα ζήτημα που σχετίζεται με τη μαθηματική γνώση αφορά στη διάκρισή της σε εννοιολογική και διαδικαστική (Hiebert & Lefevre, 1986). Όταν η γνώση είναι διαδικαστική πραγματοποιείται μία αλληλουχία ενεργειών με στόχο την επίλυση ενός προβλήματος, χωρίς ωστόσο να υπάρχει κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών και των σχέσεων ανάμεσά τους. Αντίθετα, κατά την εννοιολογική γνώση δίνεται έμφαση στην κατανόηση των νοημάτων που αναδύονται από το πρόβλημα. Σε πληθώρα ερευνών σχετικά με τη Διδακτική των κλασμάτων φαίνεται να υπερτερεί η διαδικαστική έναντι της εννοιολογικής γνώσης (Δεσλή & Κυριακορεΐζη, 2015· Lin κ.ά., 2013· Netwon, 2008· Van Steenbrugge κ.ά., 2014· Vula & Kingji, 2018). Στη δική μας έρευνα φαίνεται επιπλέον ότι, η τάση προς τη διαδικαστική μαθηματική γνώση, κατά την επίλυση προβλημάτων Φυσικής με κλασματική σημειογραφία, δημιουργεί ένα σημαντικό εμπόδιο στην οικοδόμηση των εννοιών των εμπλεκόμενων φυσικών μεγεθών.

Με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, η υπόθεσή μας επιβεβαιώθηκε, εφόσον οι φοιτητές/τριες είχαν καλύτερες επιδόσεις στα προβλήματα με την οικεία έννοια της ταχύτητας, ενώ οι χαμηλότερες επιδόσεις τους εμφανίστηκαν στην έννοια της χωρητικότητας, η οποία ήταν άγνωστη για τους/τις περισσότερους/ες από αυτούς/ές. Στα προβλήματα με την έννοια της ταχύτητας, οι απαντήσεις των φοιτητών/τριών φαίνεται ότι προέκυψαν από τη γνώση τους για την έννοια αυτή και το φυσικό της νόημα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Αντίθετα, στα υπόλοιπα προβλήματα και ιδιαίτερα σε αυτά με την έννοια της χωρητικότητας, οι απαντήσεις των φοιτητών/τριών φαίνεται να προέκυψαν μέσα από τη μαθηματική τους γνώση για το κλάσμα, κάνοντας αυθαίρετες υποθέσεις (όπως ότι το φορτίο-αριθμητής παραμένει σταθερό, όταν μεταβάλλεται η τάση-παρονομαστής).

Ως προς την εκτίμηση των φοιτητών/τριών για τη δυσκολία επίλυσης των προβλημάτων Φυσικής, τα προβλήματα προσθετικής μεταβολής του αριθμητή ή του παρονομαστή κρίθηκαν δυσκολότερα σε σχέση με τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής μεταβολής. Άλλωστε, και οι επιδόσεις των φοιτητών/τριών στα προβλήματα προσθετικής μεταβολής ήταν χαμηλότερες σε σχέση με τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής μεταβολής. Αντίστοιχο εύρημα εμφανίστηκε και στα ερωτήματα μαθηματικών γνώσεων, όπου οι φοιτητές/τριες είχαν τις χαμηλότερες επιδόσεις στα προβλήματα προσθετικής μεταβολής του αριθμητή ή/και του παρονομαστή. Επιπλέον, φάνηκε ότι τα προβλήματα στα οποία μεταβάλλεται ο παρονομαστής κρίθηκαν ως δυσκολότερα σε σχέση με αυτά που μεταβάλλεται ο αριθμητής. Παράλληλα, οι φοιτητές/τριες είχαν χαμηλότερες επιδόσεις, επίσης, στα προβλήματα με μεταβολή του παρονομαστή.

Συνοψίζοντας, η μαθηματική σημειογραφία που εμπεριέχεται έντονα στα εγχειρίδια Φυσικής και χρησιμοποιείται κατά τη διδασκαλία Φυσικών μεγεθών ενδέχεται να δημιουργεί εναλλακτικούς (από τους θεσμικά αποδεκτούς) συσχετισμούς από την πλευρά των φοιτητών/τριών. Ο μετασχηματισμός των μαθηματικών γνώσεων για τη μάθηση εννοιών από τη Φυσική χρειάζεται ιδιαίτερο σχεδιασμό στο πλαίσιο της διεπιστημονικής προσέγγισης της διδασκαλίας των Θετικών Επιστημών (Nikitina, 2006· Stinson κ.ά., 2009). Αναφορικά με τη σημειογραφία του κλάσματος $k=a/b$, θεωρούμε σημαντική την αποσαφήνιση των σχέσεων ανάμεσα στον αριθμητή, τον παρονομαστή και την τιμή του κλάσματος. Μία ημιτελής γνώση από τα Μαθηματικά μπορεί να δημιουργήσει μαθησιακό εμπόδιο στην κατανόηση των μεγεθών και των μεταβολών τους στο μάθημα της Φυσικής. Για παράδειγμα, η ημιτελής γνώση ότι η αύξηση του παρονομαστή επιφέρει μείωση του κλάσματος (αγνοώντας αν ο αριθμητής παραμένει ή όχι σταθερός), θα οδηγήσει σε μία εναλλακτική ιδέα των φοιτητών/τριών που δύσκολα θα μπορεί να γίνει αντιληπτή από τους/τις ίδιους/ίδιες. Εν κατακλείδι, η διεπιστημονική προσέγγιση τόσο της έρευνας στη Διδακτική των Θετικών Επιστημών, όσο και της διδασκαλίας των Θετικών Επιστημών, κρίνεται σημαντική για την ανάδειξη και την αντιμετώπιση των μαθησιακών εμποδίων που απορρέουν από την έλλειψη διασύνδεσης της διδασκαλίας των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Οι χαμηλές επιδόσεις των φοιτητών/τριών στα προβλήματα Φυσικής θεωρούμε ότι μπορούν να αντιμετωπιστούν αποδοτικότερα μέσα από ένα διεπιστημονικό πλαίσιο διδασκαλίας Μαθηματικών και Φυσικής (Καλαβάσης, & Κρητικός, 2017· Κρητικός, & Μούτσιος-Ρέντζος, 2018· Kuo κ.ά., 2013), παρά στη μονοεπιστημονική διδασκαλία Φυσικής. Μέσα από μία συστημική οπτική και εστιάζοντας στις συνδέσεις των νοημάτων που αναδύονται στα δύο διακριτά μαθήματα, οι φοιτητές/τριες θα μπορούν να αποφύγουν ενδεχόμενους εναλλακτικούς συσχετισμούς κάθε φορά που συναντούν μία νέα έννοια Φυσικής. Αντίθετα, θεωρούμε ότι αν καλλιεργηθεί μία διεπιστημονική συστημική οπτική, οι φοιτητές/τριες θα αναζητούν το φυσικό νόημα στα φυσικά μεγέθη και στις σχέσεις ανάμεσα στις εμπλεκόμενες μεταβλητές.

Περιορισμοί και Προεκτάσεις

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στην παρούσα έρευνα δεν προηγήθηκε καμία διδακτική προσέγγιση του κλάσματος, ούτε και των φυσικών μεγεθών της ταχύτητας, της πυκνότητας, της αντίστασης και της χωρητικότητας. Επίσης, οι ερωτήσεις στα προβλήματα Φυσικής προς τους/τις φοιτητές/τριες επιλέξαμε να είναι έμμεσες με αναφορά σε ερωτήσεις που δόθηκαν σε μαθητές/τριες, ώστε να αποφορτιστούν οι φοιτητές/τριες από πιθανό άγχος επίλυσης προβλημάτων (Κρητικός, & Μούτσιος-Ρέντζος, 2022· Rayner κ.ά., 2009). Ωστόσο, οι έμμεσες ερωτήσεις ενδέχεται να δημιούργησαν σύγχυση στους/στις φοιτητές/τριες ως προς το ζητούμενο των ερωτήσεων. Σε μελλοντική έρευνα, σχεδιάζουμε να υιοθετήσουμε ένα πλαίσιο διεπιστημονικής διδασκαλίας των παραπάνω (Burgos κ.ά., 2020), ώστε να ελέγξουμε τον βαθμό στον οποίο οι φοιτητές/τριες μπορούν με κατάλληλες διδακτικές προσεγγίσεις να αντιληφθούν τη διάκριση και, ταυτόχρονα, τη συνύπαρξη του μαθηματικού και του φυσικού νοήματος μέσα από τη σημειογραφία του κλάσματος.

Βιβλιογραφία

Δεσλή, Δ., & Κυριακορεΐζη, Α. (2015). Γνώσεις περιεχομένου και παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου υποψηφίων δασκάλων στις πράξεις με κλάσματα. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, & Μ. Τζεκάκη (Επιμ.), *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις* (σελ. 439–448). ΕΝΕΔΙΜ. ISBN: 978-618-82277-0-5.

Καλαβάσης, Φ., & Κρητικός, Γ. (2017). Η διεπιστημονική καλλιέργεια στην ταυτότητα της σχολικής μονάδας. Στο Α. Κοντάκος & Φ. Καλαβάσης (Επιμ.), *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού 9. Η σχολική μονάδα ως ευφυής υβριδική και ηθική οντότητα* (σελ. 55–68). Διάδραση. ISBN: 978-618-5059-66-8.

Κρητικός, Γ., Μούτσιος-Ρέντζος, Α., Πιννίκα, Β., & Καλαβάσης, Φ. (2020). Διεπιστημονική προσέγγιση της (συν)διδασκαλίας Μαθηματικών και Φυσικής: Η περίπτωση της χωρητικότητας ενός πυκνωτή. Στο Α. Σπύρτου, Π. Παπαδοπούλου, Α. Ζουπίδης, Γ. Μαλανδράκης, & Π. Καριώτογλου (Επιμ.), *Πρακτικά 11ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση. Επαναπροσδιορίζοντας τη Διδασκαλία και Μάθηση των Φυσικών Επιστημών και της Τεχνολογίας στον 21ο αι.* (σελ. 258–265). Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, ΕΝΕΦΕΤ. ISBN: 978-618-83267-7-4.

Κρητικός, Γ., & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2018). Μηχανική των διεπιστημονικών αναστοχασμών στη σχολική μονάδα. Στο Α. Κοντάκος & Φ. Καλαβάσης (Επιμ.), *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού 10. Μοντέλα ανάπτυξης εκπαιδευτικών μονάδων: Εφαρμογές της συστημικής προσέγγισης και η εκπαιδευτική μηχανική της* (σελ. 111–126). Διάδραση. ISBN: 978-618-5059-81-1.

Κρητικός, Γ., & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2022). Το Άγχος Μελλοντικών Νηπιαγωγών για τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες. Στο Μ. Καμπεζά, Α. Βελλοπούλου, Ά. Γιαννοπούλου, Σ. Δέλη, Ε. Διδάχου, Ε. Κατσικονούρη, Β. Μαντζουράτου, & Σ. Σαΐτη (Επιμ.), *Πρακτικά 12ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΟΜΕΡ «Ενισχύοντας την αλληλεπίδραση, υποστηρίζοντας την έκφραση: προκλήσεις και προοπτικές στη μάθηση και διδασκαλία παιδιών προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας»* (σελ. 512–523). ΤΕΕΑΠΗ Πανεπιστημίου Πατρών. ISBN: 978-618-84599-2-2.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., Κρητικός, Γ., & Καλαβάσης, Φ. (2017). Διεπιστημονικές αναστοχαστικές διαδρομές ανάμεσα στα μαθηματικά και τη φυσική: σημεία, αντικείμενα, ερμηνευτές και νοήματα. *Πρακτικά 34ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας με Διεθνή Συμμετοχή «Πάντα κατ΄αριθμόν γίγνονται»* (σελ. 643–653). Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. ISSN: 1105-7955.

Bing, T. J., & Redish, E. F. (2009). Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 5*(2), 1–15. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.5.020108

Burgos, M. G., Pérez, H. G., & Jaimes, D. V. (2020). Real teaching situations to encourage the learning of fractions from physics. *Journal of Physics: Conference Series, 1645*(1), 012018. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1645/1/012018

Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 168–193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003

Davis, B., & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 137–167. https://doi.org/10.2307/30034903

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Guisasola, J., Zubimendi, J. L., & Zuza, K. (2010). How much have students learned? Research-based teaching on electrical capacitance. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 6*(2), 020102. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.6.020102

Hashweh, M. Z. (2016). The complexity of teaching density in middle school. *Research in Science & Technological Education, 34*(1), 1–24. https://doi.org/10.1080/02635143.2015.1042854

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.1–27). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203063538

Kuo, E., Hull, M. M., Gupta, A., & Elby, A. (2013). How students blend conceptual and formal mathematical reasoning in solving physics problems. *Science Education, 97*(1), 32–57. https://doi.org/10.1002/sce.21043

Lin, C. Y., Becker, J., Ko, Y. Y., & Byun, M. R. (2013). Enhancing pre-service teachers' fraction knowledge through open approach instruction. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 309–330. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.03.004

Moutsios-Rentzos, A., Kritikos, G., & Kalavasis, F. (2019). Co-constructing teaching and learning spaces in and between mathematics and physics at school. *Proceedings of CIEAEM 70. Quaderni di Ricerca in Didattica, 2*(3), 215–220. Ανακτήθηκε στις 18/6/2022, από: http://math.unipa.it/~grim/quaderno_2019_numspec_3.htm

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American educational research journal, 45*(4), 1080-1110. https://doi.org/10.3102/0002831208320851

Nikitina, S. (2006). Three strategies for interdisciplinary teaching: contextualizing, conceptualizing, and problem-centring, *Journal of Curriculum Studies, 38*(3), 251–271. https://doi.org/10.1080/00220270500422632

Ongstad, S. (2006). Mathematics and mathematics education as triadic communication? A semiotic framework exemplified. *Educational studies in mathematics, 61*(1), 247–277. https://doi.org/10.1007/s10649-006-8302-7

Rayner, V., Pitsolantis, N., & Osana, H. (2009). Mathematics anxiety in preservice teachers: Its relationship to their conceptual and procedural knowledge of fractions. *Mathematics Education Research Journal, 21*(3), 60–85. https://doi.org/10.1007/BF03217553

Redish, E. F. (2005). Problem solving and the use of math in physics courses. In *Conference World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change*. Delhi, August 21-26. https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/0608268

Redish, E. F., & Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science & Education, 24*(5), 561–590. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9749-7

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. Springer. ISBN: 978-1-4419-0590-1.

Stinson, K., Harkness, S. S., Meyer, H., & Stallworth, J. (2009). Mathematics and science integration: Models and characterizations. *School Science and Mathematics, 109*(3), 153–161. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb17951.x

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Springer. ISBN: 978-94-011-3168-1.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in physics education. *Science & Education, 21*(4), 485–506. https://doi.org/10.1007/s11191-011-9396-6

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between dicrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning & Instruction, 21*(5), 676–685. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.03.005

Van Steenbrugge, H., Lesage, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions: a mirror of students' knowledge?. *Journal of Curriculum Studies, 46*(1), 138–161. https://doi.org/10.1080/00220272.2013.839003

Viard, J., & Khantine-Langlois, F. (2001). The concept of electrical resistance: How Cassirer's philosophy, and the early developments of electric circuit theory, allow a better understanding of students' learning difficulties. *Science & Education, 10*(3), 267–286. https://doi.org/10.1023/A:1008712903985

Vula, E., & Kingji-Kastrati, J. (2018). Pre-service teacher procedural and conceptual knowledge of fractions. In G. J. Stylianides, & K. Hino (Ed.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers* (pp. 111–123). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68342-3_8