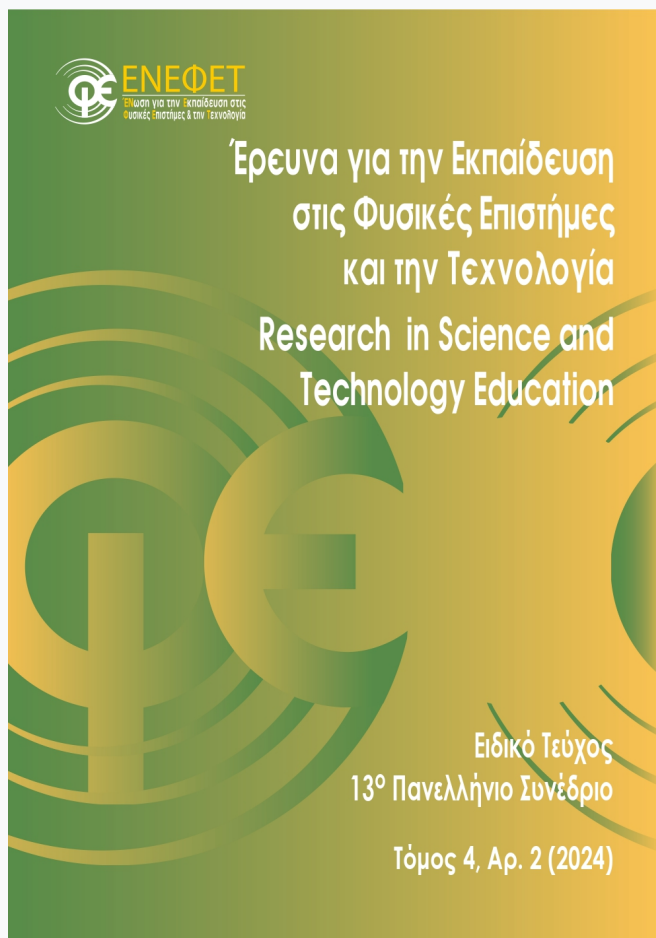


Έρευνα για την Εκπαίδευση στις Φυσικές Επιστήμες και την Τεχνολογία

Τόμ. 4, Αρ. 2 (2024)

13ο Πανελλήνιο Συνέδριο ΕΝΕΦΕΤ, Ειδικό Τεύχος



Μελέτη της Εμφάνισης της Ημιτονοειδούς Συνάρτησης στα Σχολικά Εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής στο Γενικό Λύκειο

Αντώνιος Ματσίγκος, Γεώργιος Κρητικός

doi: [10.12681/riste.37733](https://doi.org/10.12681/riste.37733)

Βιβλιογραφική αναφορά:

Ματσίγκος Α., & Κρητικός Γ. (2024). Μελέτη της Εμφάνισης της Ημιτονοειδούς Συνάρτησης στα Σχολικά Εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής στο Γενικό Λύκειο. *Έρευνα για την Εκπαίδευση στις Φυσικές Επιστήμες και την Τεχνολογία*, 4(2), 111–146. <https://doi.org/10.12681/riste.37733>

Μελέτη της εμφάνισης της Ημιτονοειδούς Συνάρτησης στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής στο Γενικό Λύκειο

Αντώνιος Ματσίγκος¹ και Γεώργιος Κρητικός²

¹Υποψήφιος Διδάκτορας, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και
του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

²Μέλος ΕΔΙΠ, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και
του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
matsigkosa@gmail.com, gkritikos@aegean.gr

Περίληψη

Η συνάρτηση αποτελεί θεμελιώδη έννοια στα Μαθηματικά και έχει κεντρικό ρόλο στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών της σχολικής εκπαίδευσης. Η παρούσα εργασία εστιάζει στη μελέτη της ημιτονοειδούς συνάρτησης, στα εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής του Γενικού Λυκείου στην Ελλάδα. Αρχικά, γίνεται συστηματική καταγραφή των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα ανωτέρω εγχειρίδια και στη συνέχεια γίνεται διερεύνηση των μετασχηματισμών στους οποίους εμπλέκεται. Επιπλέον, η ανάλυση εντοπίζει και καταγράφει το πλαίσιο των δραστηριοτήτων μέσα στο οποίο εντάσσονται οι αναπαραστάσεις της ημιτονοειδούς συνάρτησης. Στα Μαθηματικά, αποτυπώνεται κυρίως μονολειτουργική χρήση της συνάρτησης, ενώ δεν αναδεικνύεται ο διεπιστημονικός της χαρακτήρας. Στα εγχειρίδια της Φυσικής, η συνάρτηση εμφανίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό πολυλειτουργικά, καθώς πολλές δραστηριότητες προωθούν σύνθετους συλλογισμούς, όπου ενεργοποιούνται περισσότερα από ένα μητρώα αναπαραστάσης, ευνοώντας τον γνωστικό τους συντονισμό.

Λέξεις κλειδιά: ημιτονοειδής συνάρτηση, αναπαραστάσεις, μετασχηματισμοί

Abstract

The function is a fundamental concept in Mathematics and has a central role in the curricula of school education. This study focuses on the investigation of the sine function in Mathematics and Physics textbooks used in Greek General High Schools. Initially, a systematic documentation of the representations of the sine function in these textbooks is conducted, followed by an analysis of the transformations in which it is involved. Furthermore, the study identifies and records the context of the activities where these representations are embedded. In Mathematics textbooks, the sine function is primarily presented in a monofunctional manner, without highlighting its interdisciplinary nature. In contrast, in Physics

textbooks, it appears in a more multifunctional context, as many activities foster complex reasoning, activating multiple registers of representation and promoting cognitive coordination.

Key words: sine function, representations, transformations

Εισαγωγή

Η έννοια της συνάρτησης έχει εξ υπάρξεως διεπιστημονικό χαρακτήρα, καθώς συσχετίζει μεταβλητές οι οποίες μπορεί να εκφράζουν σημαντικές ποσότητες κατά τη διερεύνηση φαινομένων και προβλημάτων στον κόσμο που μας περιβάλλει αλλά και διαισθητικά. Η τριγωνομετρία ως τομέας των Μαθηματικών ενυπάρχει στα Μαθηματικά των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών, όχι όμως ως αυτόνομος κλάδος, αλλά ως βασική ενότητα, η οποία διδακτικά μελετάται με αποσπασματικό τρόπο, καθώς δεν εμπεριέχεται στο σύνολό της στο πρόγραμμα σπουδών. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που γεννώνται δυσκολίες στην κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, από τους/τις μαθητές/-τριες. Στον τομέα της Φυσικής, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποτελούν ισχυρό εργαλείο για τη μοντελοποίηση πλήθους φυσικών φαινομένων. Στο πλαίσιο της σχολικής εκπαίδευσης, συναντώνται στη Φυσική της Γ' Λυκείου, κυρίως στα κεφάλαια του ηλεκτρομαγνητισμού, των ταλαντώσεων και των κυμάτων, όπου μελετώνται περιοδικά φαινόμενα, όπως η εναλλασσόμενη τάση, η απλή αρμονική ταλάντωση και η διάδοση του κύματος. Τα φαινόμενα αυτά αναδεικνύουν θεμελιώδεις ιδιότητες της ημιτονοειδούς συνάρτησης. Παράλληλα, η αξιοποίηση του τριγωνομετρικού κύκλου και των περιστρεφόμενων διανυσμάτων συμβάλλει στην ανάπτυξη βαθύτερης κατανόησης και εννοιολογικών συνδέσεων, δημιουργώντας μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ φυσικών φαινομένων και μαθηματικών συναρτήσεων.

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στη διερεύνηση του ρόλου της ημιτονοειδούς συνάρτησης στη δομή των σχολικών εγχειριδίων, μέσα από τη συστηματική καταγραφή και ανάλυση των εμφανίσεών της στα βιβλία Μαθηματικών και Φυσικής του Λυκείου. Ακολουθώντας μια μεθοδολογία ανάλυσης περιεχομένου, οι εμφανίσεις αυτές θα ταξινομηθούν σε ένα σύστημα κατηγοριών, προκειμένου να αξιολογηθούν ως προς τον τύπο αναπαράστασης, το πλαίσιο ενσωμάτωσής τους και τις απαιτήσεις γνωστικού μετασχηματισμού μέσα στις δραστηριότητες των εγχειριδίων.

Ανάλυση Περιεχομένου Σχολικών Εγχειριδίων στις Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο παρουσιάζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις στα σχολικά εγχειρίδια συνιστά κρίσιμο πεδίο μελέτης, καθώς τα εγχειρίδια αποτελούν βασικό φορέα διαμόρφωσης της μαθηματικής γνώσης και της διδακτικής πρακτικής. Η παρούσα ενότητα επικεντρώνεται στην επισκόπηση διεθνών

ερευνών που αξιοποιούν την ανάλυση περιεχομένου για να εξετάσουν τις διδακτικές προσεγγίσεις, τις μορφές αναπαράστασης και το γνωστικό επίπεδο απαίτησης που χαρακτηρίζει την παρουσίαση των τριγωνομετρικών εννοιών. Το ηλικιακό φάσμα των μαθητών στους οποίους απευθύνονται τα εγχειρίδια των μελετών είναι από 14 έως 18 ετών καλύπτοντας το εύρος της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Η μελέτη των Chen και He (2019) διερευνά συγκριτικά το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων τριγωνομετρίας στην Κίνα, τη Γερμανία και τις Ηνωμένες Πολιτείες, εστιάζοντας στη δομή, στη σειρά παρουσίασης των εννοιών και στις μεθοδολογικές προσεγγίσεις που υιοθετούνται. Τα ευρήματα ανέδειξαν σημαντικές διαφοροποιήσεις στη διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, με τα κινεζικά εγχειρίδια να δίνουν έμφαση στη θεωρητική αυστηρότητα και στις αποδείξεις, τα γερμανικά να επικεντρώνονται σε πραγματικές εφαρμογές και τα αμερικανικά να αξιοποιούν εκτενώς γραφικές αναπαραστάσεις και τεχνολογικά εργαλεία (Chen & He, 2019). Επιπλέον, παρατηρήθηκαν διαφορές στη μετάβαση από τη γεωμετρική στην αναλυτική προσέγγιση των συναρτήσεων, με την Κίνα και τη Γερμανία να εισάγουν πρώτα τις τριγωνομετρικές έννοιες μέσω της γεωμετρίας των τριγώνων, ενώ στις Ηνωμένες Πολιτείες η διδασκαλία εστιάζει από νωρίς στη λειτουργική ερμηνεία των συναρτήσεων μέσω του μοναδιαίου κύκλου.

Μία άλλη έρευνα αναλύει τις αλλαγές στο περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων τριγωνομετρίας στις Ηνωμένες Πολιτείες κατά τη διάρκεια εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων, εστιάζοντας στον τρόπο παρουσίασης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων Ekić (2010). Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι τα παλαιότερα εγχειρίδια δίνουν έμφαση σε διαδικαστικούς υπολογισμούς και αλγεβρικές πράξεις, ενώ τα νεότερα ενσωματώνουν εννοιολογικές προσεγγίσεις, πραγματικές εφαρμογές και δυναμικά γραφικά εργαλεία. Παρά τις βελτιώσεις, εξακολουθούν να υπάρχουν προκλήσεις στη σύνδεση αριθμητικών, αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων, γεγονός που επηρεάζει την κατανόηση των μαθητών. Ο Ekić (2010) υπογραμμίζει την ανάγκη για εγχειρίδια που προωθούν τη βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, συνδυάζοντας τις μαθηματικές αρχές της θεωρίας με πρακτικές εφαρμογές μέσα στις οποίες νοηματοδοτούνται οι μαθηματικές έννοιες.

Σε μία μελέτη των Yang και Sianturi (2017) διερευνώνται οι διαφορές στο περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων τριγωνομετρίας στη Σιγκαπούρη και την Ινδονησία. Η μελέτη επικεντρώνεται στο επίπεδο γνωστικής απαίτησης και στη χρήση γραφικών αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με την έρευνα, τα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης προωθούν περισσότερο μια εννοιολογική προσέγγιση, δίνοντας έμφαση στη βαθύτερη κατανόηση και στην επίλυση προβλημάτων υψηλής γνωστικής δυσκολίας, ενώ τα ινδονησιακά εγχειρίδια επικεντρώνονται περισσότερο σε διαδικαστικούς υπολογισμούς και αλγεβρικές σχέσεις. Μια ακόμη σημαντική διαφοροποίηση ως εύρημα της έρευνας αφορά την παρουσίαση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω

γραφημάτων, όπου τα εγχειρίδια της Σγκαπούρης ενσωματώνουν περισσότερες οπτικές αναπαραστάσεις, οι οποίες διευκολύνουν τη σύνδεση μεταξύ γεωμετρικής και λειτουργικής προσέγγισης.

Οι Zhou και Dong (2023) στην έρευνά τους εξετάζουν τη διαχρονική εξέλιξη του περιεχομένου των κινεζικών σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών, εστιάζοντας στο πεδίο της τριγωνομετρίας. Η ανάλυση αποκαλύπτει ότι τα νεότερα εγχειρίδια έχουν υιοθετήσει μια πιο θεωρητικά προσανατολισμένη προσέγγιση, ενσωματώνοντας αυξημένη χρήση αποδείξεων και μαθηματικών αρχών, σε αντίθεση με τα παλαιότερα, τα οποία εστίαζαν κυρίως σε διαδικαστικές τεχνικές και εφαρμογές. Επιπλέον, σημειώθηκε ενίσχυση της χρήσης γραφικών αναπαραστάσεων και δυναμικών μεθόδων απεικόνισης, οι οποίες διευκολύνουν τη μετάβαση από την αλγεβρική στη γεωμετρική κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι συγγραφείς συμπεραίνουν ότι η βελτίωση των εγχειριδίων θα πρέπει να επικεντρωθεί στη σύνδεση της θεωρίας με την πρακτική εφαρμογή, ενισχύοντας τη διεπιστημονική προσέγγιση της τριγωνομετρίας, ώστε να διευκολυνθεί η εννοιολογική κατανόηση και η μαθησιακή εμπειρία των μαθητών (Zhou & Dong, 2023 · Yang & Sianturi, 2017).

Τέλος σε μια μελέτη των Choi και Kwon (2020), γίνεται σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της Κορέας, της Αυστραλίας και της Φινλανδίας, με έμφαση στον τρόπο παρουσίασης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Τα κορεατικά εγχειρίδια χαρακτηρίζονται από υψηλή θεωρητική αυστηρότητα και εκτενή χρήση αλγεβρικών σχέσεων, ενώ τα φινλανδικά ενσωματώνουν μια πιο εφαρμοσμένη προοπτική, προσεγγίζοντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσα από πραγματικά προβλήματα και οπτικοποιήσεις. Αντίστοιχα, τα αυστραλιανά εγχειρίδια δίνουν έμφαση στη σταδιακή εισαγωγή των εννοιών, ενισχύοντας τη σύνδεση μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων. Η συγκεκριμένη μελέτη καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η παρουσίαση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επηρεάζεται σημαντικά από το μαθησιακό πλαίσιο κάθε χώρας, γεγονός που αναδεικνύει τη σημασία μιας πιο ισορροπημένης προσέγγισης, η οποία συνδυάζει θεωρία, εφαρμογή και διεπιστημονική σύνδεση για τη βελτίωση της μαθησιακής εμπειρίας.

Λαμβάνοντας υπόψη τα συμπεράσματα των παραπάνω μελετών, η παρούσα έρευνα επεκτείνει αυτή τη συζήτηση εξετάζοντας συγκριτικά το περιεχόμενο ενός εγχειριδίου Μαθηματικών και δύο εγχειριδίων Φυσικής. Στόχος της ανάλυσης είναι να αναδειχθεί η οπτική κάθε εγχειριδίου όσον αφορά τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, να εντοπιστούν τυχόν διαφοροποιήσεις ή επικαλύψεις στην παρουσίαση των εννοιών και να αξιολογηθεί ο βαθμός σύνδεσης μεταξύ των δύο επιστημονικών πεδίων. Επιπλέον, η μελέτη επιχειρεί να διερευνήσει κατά πόσο η προσέγγιση που ακολουθείται σε καθένα από τα δύο εγχειρίδια υποστηρίζει ή περιορίζει τη διεπιστημονική μάθηση, στοιχείο που προκύπτει ως βασικό ζητούμενο από τη σχετική βιβλιογραφία.

Δυσκολίες Κατανόησης των Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων και οι Ερευνητικές τους Διαστάσεις

Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μεγάλο κεφάλαιο στην ιστορία της μαθηματικής επιστήμης, καθώς πραγματεύεται δυναμικές συσχετίσεις μεταξύ μεταβλητών. Μια μεγάλη ομάδα ερευνών εστιάζει στη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και τη μετάβαση από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο (Gagatsis, 1997· Hitt, 1998). Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και των πολλαπλών αναπαραστάσεών της συνιστά μία από τις σημαντικότερες προκλήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς απαιτεί από τους μαθητές να διαχειρίζονται διαφορετικούς κανόνες αναπαράστασης εντός διακριτών σημειωτικών συστημάτων και να αναπτύξουν την ικανότητα μετάβασης μεταξύ τους (De Bock et al., 2017).

Μία βασική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όταν εμπλέκονται με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι η κατασκευή συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεών τους (Bouanfif et al., 2024· Elia & Spyrou, 2006). Σύμφωνα με τους Mosese και Ogbonnaya (2021), η κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποτελεί πρόκληση για πολλούς μαθητές, καθώς απαιτεί την ικανότητα σύνδεσης και ερμηνείας πολλαπλών αναπαραστάσεών, όπως οι γραφικές, οι αλγεβρικές και οι λεκτικές. Ιδιαίτερα οι γραφικές παραστάσεις παίζουν καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση της περιοδικότητας (Καραβάκου & Κυνηγός, 2018), της μονοτονίας και των ακροτάτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στο πλαίσιο αυτό, η συγκεκριμένη έρευνα παραθέτει τη θετική επίδραση της χρήσης διαδραστικών εργαλείων όπως το GeoGebra, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να πειραματιστούν και να εξερευνήσουν τις γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, συνδέοντας τις με τις αλγεβρικές τους εκφράσεις. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν μια πιο ολοκληρωμένη και εμπειριστατωμένη κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ξεπερνώντας τις δυσκολίες που συνδέονται με την απομνημόνευση τύπων και διαδικασιών. Η μελέτη των Bouanfif et al. (2024), δείχνει πως οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και να ερμηνεύσουν πώς αυτές σχετίζονται με τις αντίστοιχες αλγεβρικές εκφράσεις. Συχνά, αντιλαμβάνονται τις συναρτήσεις ως στατικές οντότητες και όχι ως δυναμικές σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, γεγονός που περιορίζει την ικανότητά τους να εφαρμόσουν την έννοια σε πραγματικά μαθηματικά προβλήματα (Marchi, 2012).

Εξαιτίας της διασποράς των εννοιών της Τριγωνομετρίας στα εκπαιδευτικά προγράμματα σπουδών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση διαπιστώνονται μεγάλες δυσκολίες σε επίπεδο κατανόησης και χειρισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Weber, 2005). Σύμφωνα με τον Weber, οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν τις διάφορες μορφές με τις οποίες εμφανίζονται οι συναρτήσεις (π.χ. γραφική παράσταση, αλγεβρική έκφραση, πίνακας τιμών), γεγονός που οφείλεται

στην ελλιπή κατανόηση των βασικών εννοιών και ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι μερικές από τις ενότητες της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών, όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στη μάθηση (Moses & Ogbonaya, 2021).

Επιπλέον, η περιοδικότητα και οι μετασχηματισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποτελούν σημαντική πηγή δυσκολιών (Tallman, 2021). Η συγκεκριμένη έρευνα έδειξε ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις μεταβολές φάσης και τη σχέση των μεταβλητών σε μια ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή συνάρτηση, ιδιαίτερα όταν αυτές παρουσιάζονται μόνο σε αλγεβρική μορφή χωρίς την υποστήριξη γραφικών αναπαραστάσεων και χρήση τριγωνομετρικού κύκλου. Αντίστοιχα, οι Martín-Fernández et al. (2019) επισημαίνουν ότι οι μαθητές τείνουν να δυσκολεύονται στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι διαφορετικές παράμετροι επηρεάζουν το σχήμα μιας συνάρτησης, όπως η μεταβολή της περιόδου ή του πλάτους.

Οι δυσκολίες κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, σύμφωνα με τον Duval (2006), προκύπτουν κυρίως από τη διαχείριση των σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης και των μετασχηματισμών τους. Η μαθηματική γνώση δεν συνδέεται με ένα μόνο σύστημα αναπαράστασης, αλλά απαιτεί τη χρήση και τη μετάβαση μεταξύ διαφορετικών σημειωτικών αναπαραστάσεων, όπως η αλγεβρική, η γραφική και η γεωμετρική. Οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται στην επεξεργασία (treatment), δηλαδή στους μετασχηματισμούς που γίνονται εντός του ίδιου σημειωτικού συστήματος, όπως η αλγεβρική επεξεργασία μιας εξίσωσης. Ωστόσο, ακόμη μεγαλύτερη πρόκληση αποτελεί η μετατροπή (conversion), δηλαδή η αλλαγή από ένα σημειωτικό σύστημα σε ένα άλλο, όπως η μετάβαση από μια αλγεβρική σχέση στη γραφική της αναπαράσταση. Αυτή η μετατροπή απαιτεί εννοιολογική κατανόηση και όχι απλή εκτέλεση διαδικασιών, γεγονός που συχνά οδηγεί σε γνωστικές δυσκολίες και ελλιπή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Ο συγγραφέας επισημαίνει ότι οι περισσότερες μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά δεν οφείλονται στην πολυπλοκότητα των υπολογισμών, αλλά στη δυσκολία διαχείρισης των σημειωτικών αναπαραστάσεων και των μετασχηματισμών τους, κάτι που έχει άμεσο αντίκτυπο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης.

Συνολικά, η βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι οι δυσκολίες στην κατανόηση των συναρτήσεων και των αναπαραστάσεών τους προκύπτουν από τη δυσκολία σύνδεσης μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαράστασης, την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης των παραμέτρων που καθορίζουν τη μορφή μιας συνάρτησης και την τάση των μαθητών να επικεντρώνονται σε διαδικαστικούς υπολογισμούς αντί για δομικές σχέσεις (De Bock et al., 2017· Martín-Fernández et al., 2019· Tallman, 2021). Αυτές οι προκλήσεις υπογραμμίζουν την ανάγκη για εκπαιδευτικές παρεμβάσεις και διαμόρφωση σχολικών εγχειριδίων που ενισχύουν τη σύνδεση μεταξύ των διαφορετικών

προσεγγίσεων και αναπαραστάσεων των συναρτήσεων, προκειμένου να βελτιωθεί η μαθησιακή διαδικασία και η κατανόηση των μαθητών.

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να εξετάσει κατά πόσον το περιεχόμενο των εγχειριδίων των Μαθηματικών και της Φυσικής στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στην Ελλάδα, αναδεικνύει τις συνδέσεις των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης και τον διεπιστημονικό της χαρακτήρα.

Μαθηματικές Αναπαραστάσεις

Οι μαθηματικές αναπαραστάσεις αποτελούν θεμελιώδη συνιστώσα της μαθηματικής σκέψης και μάθησης, καθώς επιτρέπουν τη διασύνδεση μεταξύ διαφορετικών εκφάνσεων των μαθηματικών εννοιών και διευκολύνουν την κατανόηση, τη μοντελοποίηση και την επίλυση προβλημάτων (De Bock et al., 2017). Οι αναπαραστάσεις μπορούν να εκφραστούν μέσω συμβολικών, γραφικών, αριθμητικών και λεκτικών μορφών, οι οποίες, όταν χρησιμοποιούνται κατάλληλα, ενισχύουν την ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης και την ευελιξία σκέψης των μαθητών (Martín-Fernández et al., 2019 · Michelsen, 2006).

Σύμφωνα με τον Duval (2006), η μαθηματική γνώση είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη χρήση σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης (μητρώα αναπαράστασης), τα οποία επιτρέπουν την κατανόηση και την επεξεργασία μαθηματικών εννοιών. Κάθε μαθηματικό αντικείμενο δεν είναι προσβάσιμο άμεσα, αλλά μέσω διαφορετικών μορφών αναπαράστασης, όπως οι αλγεβρικές εκφράσεις, τα γραφικά μοντέλα, οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις και τα φυσικά περιγραφικά συστήματα. Ο Duval διακρίνει δύο βασικούς τύπους μετασχηματισμών αυτών των αναπαραστάσεων. Ο πρώτος αφορά την επεξεργασία (treatment) , δηλαδή τη μεταβολή μιας μαθηματικής έκφρασης εντός του ίδιου σημειωτικού συστήματος (π.χ. η αλγεβρική απλοποίηση μιας εξίσωσης). Ο δεύτερος τύπος είναι η μετατροπή (conversion), που συνίσταται στη μετάβαση από ένα σημειωτικό σύστημα σε ένα άλλο (π.χ. από μια αλγεβρική εξίσωση στη γραφική της απεικόνιση). Αυτή η περίπτωση μετασχηματισμού είναι ιδιαίτερα απαιτητική, καθώς δεν διατηρείται πάντα η δομή του αρχικού περιεχομένου, γεγονός που συχνά δημιουργεί γνωστικές δυσκολίες στους μαθητές. Τέλος, ο συγγραφέας τονίζει ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης προϋποθέτει τη δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς η αποκλειστική εστίαση σε ένα σημειωτικό σύστημα περιορίζει την εννοιολογική κατανόηση και οδηγεί σε επιφανειακή μάθηση.

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι ουσιώδης στη διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, καθώς αυτές αποτελούν βασικά μαθηματικά εργαλεία για τη μοντελοποίηση φυσικών περιοδικών φαινομένων. Οι γραφικές αναπαραστάσεις βοηθούν στην οπτικοποίηση των ιδιοτήτων τους, όπως η περίοδος και το πλάτος, ενώ οι συμβολικές εκφράσεις διευκολύνουν τη μαθηματική περιγραφή και

ανάλυση. Η εναλλαγή μεταξύ αυτών των αναπαραστάσεων ενισχύει τη μαθησιακή διαδικασία, επιτρέποντας στους μαθητές να αναπτύξουν μια βαθύτερη και πιο ολοκληρωμένη κατανόηση των συναρτήσεων (Tallman, 2021). Σε μία άλλη αντίστοιχη εργασία ο Marchi (2012) διερεύνησε πώς οι μαθητές κατανοούν την ημιτονοειδή συνάρτηση μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι οι εναλλαγές μεταξύ αλγεβρικής, γεωμετρικής και γραφικής αναπαράστασης είναι ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη μιας λειτουργικής κατανόησης.

Συνοψίζοντας, οι μαθηματικές αναπαραστάσεις αποτελούν θεμελιώδες στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς επιτρέπουν τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών προσεγγίσεων και την ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης. Η έρευνα έχει δείξει ότι η διδασκαλία των συναρτήσεων, και ειδικότερα των τριγωνομετρικών, ωφελείται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, καθώς αυτή η προσέγγιση επιτρέπει στους μαθητές να αναπτύξουν πλούσιες και δυναμικές μαθηματικές δομές σκέψης (De Bock et al., 2017 · Michelsen, 2006 · Tallman, 2021).

Αναπαραστάσεις Συναρτήσεων

Η έννοια της συνάρτησης μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων (Duvall, 2006). Πολλές έρευνες έχουν εξετάσει τον ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση και ερμηνεία των συναρτήσεων (Gagatsis & Shiakalli, 2004 · Hitt, 1998). Οι κυριότερες μορφές αναπαράστασης των συναρτήσεων περιλαμβάνουν την αλγεβρική, τη γραφική, την αριθμητική, τη γεωμετρική και τη λεκτική περιγραφή (Confrey & Smith, 1991; Weber, 2005). Πιο αναλυτικά:

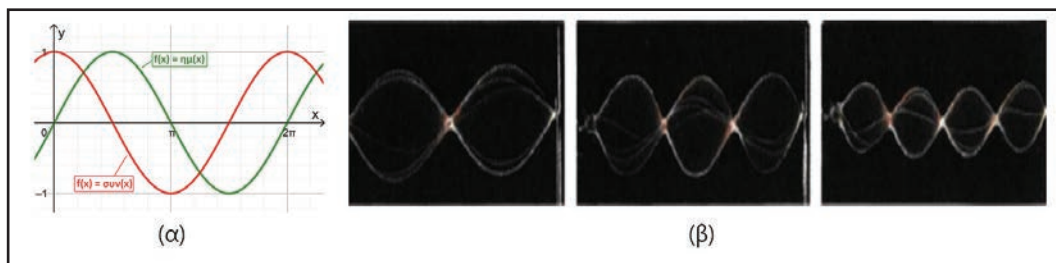
1. Αλγεβρική αναπαράσταση: Περιγράφει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσω εξισώσεων, όπως $\sin(x)$, επιτρέποντας ακριβείς μαθηματικούς υπολογισμούς αλλά καθιστώντας δύσκολη την εννοιολογική κατανόηση της περιοδικότητας και των μετασχηματισμών τους (Bekene Bedada & Machaba, 2022).
2. Γραφική αναπαράσταση: Παρουσιάζει τη συνάρτηση ως καμπύλη σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, επιτρέποντας τη μελέτη της συμπεριφοράς της σε διαφορετικά σημεία (Εικόνα 2α). Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, για παράδειγμα, εμφανίζουν χαρακτηριστικά όπως η περιοδικότητα και τα ακρότατα, τα οποία γίνονται πιο προφανή μέσω των γραφημάτων (Rahmadani et al., 2020 · Weber, 2005).
3. Αριθμητική αναπαράσταση (Πίνακες τιμών): Καταγράφει τιμές εισόδου και εξόδου για διαφορετικά σημεία των συναρτήσεων (Εικόνα 1). Παρόλο που μπορεί να παρέχει πληροφορίες για την περιοδικότητα, οι μαθητές συχνά δεν μπορούν να γενικεύσουν από μεμονωμένες τιμές τη συνολική μορφή της συνάρτησης (Rojanuardi & Jupri, 2022).

4. Δεκτική-περιγραφική αναπαράσταση: Περιγράφει τα χαρακτηριστικά των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με χρήση φυσικής γλώσσας. Αυτή η αναπαράσταση μπορεί να ενισχύσει την εννοιολογική κατανόηση, αλλά η απουσία μαθηματικής αυστηρότητας την καθιστά λιγότερο αποτελεσματική ως μοναδική μέθοδο προσέγγισης (Martín-Fernández et al., 2019).
5. Γεωμετρική αναπαράσταση: Συνδέει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τη γεωμετρία του μοναδιαίου κύκλου, βοηθώντας τους μαθητές να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ γωνιών και τριγωνομετρικών τιμών. Ο μοναδιαίος κύκλος διευκολύνει επίσης την ερμηνεία του προσήμου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στα διάφορα τεταρτημόρια, στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς μέσα από τις φάσεις, και στην κατανόηση της έννοιας της περιοδικότητας (Lipka et al., 2019).
6. Εικονιστική αναπαράσταση: Η εικονιστική αναπαράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αναφέρεται στη σύνδεση της μαθηματικής έννοιας με φυσικά φαινόμενα, όπου η ίδια η μορφή της συνάρτησης αποτυπώνεται σε πραγματικά αντικείμενα ή καταστάσεις. Παραδείγματα τέτοιων αναπαραστάσεων περιλαμβάνουν τη διαμόρφωση μιας κυματομορφής σε μια παλλόμενη χορδή (Εικόνα 2β) ή την περιοδική κίνηση των κυμάτων στη θάλασσα, όπου η ημιτονοειδής συνάρτηση εμφανίζεται φυσικά ως μοντέλο περιγραφής της κίνησης (Lehtonen, 2022). Η Ρατσιομίτου (2019) επισημαίνει ότι η χρήση οπτικών και δυναμικών προσομοιώσεων επιτρέπει στους μαθητές να αντιληφθούν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως μέρος του φυσικού κόσμου, ενισχύοντας τη διαισθητική κατανόησή τους. Η έρευνα αναφέρει ότι τέτοιες αναπαραστάσεις γεφυρώνουν το χάσμα μεταξύ μαθηματικής θεωρίας και φυσικών εφαρμογών, διευκολύνοντας τη μετάβαση από την αφηρημένη κατανόηση στη βιωματική εμπειρία (Fisher, 2018). Επομένως, η εικονιστική αναπαράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων συμβάλλει ουσιαστικά στη διδακτική της τριγωνομετρίας, ενισχύοντας τη σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο.

Εικόνα 1. Πίνακας τιμών της συνάρτησης $y=\eta\mu x$ για τον σχεδιασμό της γραφικής της παράστασης. Άλγεβρα Β' λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2022:76)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\eta\mu x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	1	0,71	0	-0,71	-1	-0,71	0

Εικόνα 2. (α) Καμπύλη ημιτόνου-συνημιτόνου που δημιουργήθηκε στο Geogebra, (β) Στάσιμα κύματα σε χορδές. Φυσική Γ' Τάξη Γεν. Λυκείου, Τεύχος Γ' (Ιωάννου κ.ά., 2022β:54)



Μεθοδολογία έρευνας

Η παρούσα εργασία υιοθετεί τη μεθοδολογία της ανάλυσης περιεχομένου (content analysis), η οποία επιτρέπει τη συστηματική μελέτη του εκπαιδευτικού υλικού με σκοπό τη διερεύνηση των αναπαραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών και Φυσικής του Λυκείου στην Ελλάδα. Υιοθετεί τη μεθοδολογία της συγκριτικής ανάλυσης περιεχομένου, εστιάζοντας στην παρουσίαση των αναπαραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στα σχολικά εγχειρίδια. Σύμφωνα με τους Σαραφίδου (2011) και Mayring (2021), η ανάλυση περιεχομένου μπορεί να περιλαμβάνει τόσο ποσοτική προσέγγιση, μέσω της καταγραφής της συχνότητας εμφάνισης συγκεκριμένων κατηγοριών αναπαραστάσεων, όσο και ποιοτική ανάλυση, που διερευνά τη λειτουργία αυτών των κατηγοριών στο πλαίσιο της διδασκαλίας μέσα από τις δραστηριότητες, όπως ασκήσεις και προβλήματα.

Η διπλή προσέγγιση στην ανάλυση περιεχομένου, που συνδυάζει τη συχνότητα εμφάνισης και τους μετασχηματισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, προσφέρει ολοκληρωμένη εικόνα για τον τρόπο παρουσίασής τους στα δύο επιστημονικά πεδία. Η συγκριτική μελέτη συμβάλλει στην κατανόηση των διδακτικών επιλογών και στον εντοπισμό ελλείψεων ή ασυνεχειών που επηρεάζουν τη μαθησιακή διαδικασία (Chiu, 2016). Επιπλέον, αυτή η διττή προσέγγιση εντάσσεται στη συνδυαστική ανάλυση περιεχομένου (mixed-method content analysis), όπου η ποσοτική καταγραφή παρέχει ένα σαφές πλαίσιο δεδομένων, ενώ η ποιοτική διερεύνηση αποκαλύπτει τις διδακτικές προθέσεις και τις γνωστικές απαιτήσεις των δραστηριοτήτων (Vaismoradi & Snelgrove, 2019).

Στόχος της εργασίας είναι να αναδειχθούν οι ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των εγχειριδίων των δύο κλάδων, ως προς τις μορφές αναπαράστασης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αλλά και ως προς τους τύπους των μετασχηματισμών που ευνοούνται μέσα στις δραστηριότητες.

Ερευνητικά ερωτήματα:

- α) Σε τι ποσοστό εμφανίζονται οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής του Λυκείου;
- β) Ποια είδη πλαισίου εντοπίζονται στις δραστηριότητες, όπου εμφανίζεται η ημιτονοειδής συνάρτηση στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής του Λυκείου;
- γ) Ποιες είναι οι γνωστικές απαιτήσεις μετασχηματισμού των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής του Λυκείου;
- δ) Σε ποιο βαθμό οι δραστηριότητες των εγχειριδίων των Μαθηματικών και της Φυσικής του Λυκείου, ευνοούν την ανάπτυξη διαδικασιών σύνθετου συλλογισμού γύρω από τη χρήση της ημιτονοειδούς συνάρτησης;

Διαστάσεις εργαλείου ανάλυσης: Το εργαλείο ανάλυσης των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης περιλαμβάνει τρεις κύριες διαστάσεις (Πίνακας 1). Μονάδα ανάλυσης ορίστηκε κάθε είδους αναπαράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης μέσα στα θεωρητικά τμήματα των εγχειριδίων, αλλά και μέσα στις δραστηριότητες, που αφορούν λυμένα παραδείγματα, ερωτήσεις, ασκήσεις, προβλήματα. Κάθε επιμέρους ερώτημα μιας δραστηριότητας, στο οποίο εμφανίζεται η ημιτονοειδής συνάρτηση, ορίζεται ως μονάδα ανάλυσης και κωδικοποίησης. Για παράδειγμα, αν σε μία δραστηριότητα υπάρχουν δύο ερωτήματα που σχετίζονται με την ημιτονοειδή συνάρτηση και θίγουν διαφορετικές οπτικές της έννοιας, θεωρούνται ως δυο ξεχωριστές δραστηριότητες-μονάδες ανάλυσης, οι οποίες θα κατηγοριοποιηθούν.

Στην πρώτη διάσταση, καταγράφεται η συχνότητα εμφάνισης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στις αλγεβρικές, γραφικές, αριθμητικές και λεκτικές αναπαραστάσεις, με σκοπό να διερευνηθεί η έμφαση που δίνεται σε κάθε σημειωτικό σύστημα στα εγχειρίδια Φυσικής και Μαθηματικών (Martín-Fernández et al., 2019).

Η δεύτερη διάσταση αφορά το πλαίσιο δραστηριοτήτων, δηλαδή το περιβάλλον στο οποίο παρουσιάζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις στα εγχειρίδια Μαθηματικών και Φυσικής. Η διάκριση σε μαθηματικό, επιστημονικό και καθημερινό πλαίσιο επιτρέπει την εξέταση του βαθμού σύνδεσης των συναρτήσεων με θεωρητικές, επιστημονικές και βιωματικές εφαρμογές. Στο μαθηματικό πλαίσιο, η παρουσίαση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βασίζεται κυρίως σε συμβολική, αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση, με έμφαση στις ιδιότητές τους και στις τυπικές μαθηματικές αποδείξεις (Martín-Fernández et al., 2019). Στο επιστημονικό πλαίσιο, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις εμφανίζονται ως εργαλεία για τη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων, όπως η μελέτη κυμάτων, ταλαντώσεων και περιοδικών κινήσεων (Chiu,

2016). Το καθημερινό πλαίσιο περιλαμβάνει δραστηριότητες που συνδέουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με βιωματικές και πραγματικές εφαρμογές (Dündar, 2015). Η ενσωμάτωση ρεαλιστικών εφαρμογών μπορεί να βελτιώσει τη μαθησιακή εμπειρία, επιτρέποντας στους μαθητές να μεταβαίνουν ευκολότερα από τη θεωρητική κατανόηση στη λειτουργική χρήση των συναρτήσεων (Namlı, 2024).

Η τρίτη διάσταση αφορά την κατηγοριοποίηση των μετασχηματισμών και βασίζεται στη θεωρητική προσέγγιση του Duval (2006), σύμφωνα με την οποία η μαθηματική κατανόηση προϋποθέτει δύο κατηγορίες μετασχηματισμών. Η πρώτη κατηγορία είναι η επεξεργασία (treatment), δηλαδή μετασχηματισμοί εντός του ίδιου σημειωτικού συστήματος (μητρώου αναπαράστασης), όπως για παράδειγμα επεξεργασία μίας αλγεβρικής σχέσης ημιτονοειδούς συνάρτησης και υπολογισμός των χαρακτηριστικών της, όπως είναι η περίοδος, τα ακρότατα, η μονοτονία καθώς, και ο υπολογισμός των μεταβλητών που εμπλέκονται σ' αυτή. Ο Duval ορίζει τη μετατροπή (conversion) ως τη δεύτερη κατηγορία μετασχηματισμού μιας μαθηματικής έννοιας από ένα σημειωτικό σύστημα σε ένα άλλο, όπως η μετάβαση από μια αλγεβρική έκφραση στη γραφική της παράσταση ή από μια γεωμετρική αναπαράσταση σε μια λεκτική περιγραφή. Σύμφωνα με τον ίδιο, η μετατροπή είναι πιο απαιτητικός μετασχηματισμός από την επεξεργασία, καθώς δεν διατηρεί πάντα τις σχέσεις και τη δομή του αρχικού σημειωτικού συστήματος. Αυτό δυσκολεύει τους μαθητές να αναγνωρίσουν ότι διαφορετικές αναπαραστάσεις αφορούν την ίδια μαθηματική έννοια, προκαλώντας γνωστικά εμπόδια. Γι' αυτό, η ευέλικτη μετάβαση μεταξύ σημειωτικών συστημάτων είναι κρίσιμη για την εννοιολογική κατανόηση και τη μαθηματική σκέψη.

Τέλος ενσωματώθηκε μία τρίτη κατηγορία υψηλής γνωστικής απαίτησης, ο σύνθετος μετασχηματισμός (Yang & Sianturi, 2017). Στη μελέτη των Yang και Sianturi, που ανέλυσαν σχολικά εγχειρίδια της Σιγκαπούρης και της Ινδονησίας, τα προβλήματα υψηλής γνωστικής απαίτησης ορίζονται ως εκείνα που απαιτούν από τους μαθητές βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, μαθηματική σκέψη και στρατηγική επίλυση, σε αντίθεση με τα προβλήματα που βασίζονται απλώς σε διαδικαστικούς υπολογισμούς με καθοδήγηση. Σε αυτές τις δραστηριότητες δεν δίνεται ρητά στον μαθητή η αναπαράσταση της συνάρτησης, ούτε καθοδηγείται για τη διενέργεια καθορισμένων μετασχηματισμών επεξεργασίας και μετατροπής. Αντίθετα, μέσα από την περιγραφή του προβλήματος, καλούνται οι μαθητές/τριες να σκεφτούν και να διαχειριστούν κατάλληλα τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης για την επίλυση του προβλήματος. Κατά τον Duval (2006), η μαθηματική σκέψη αναπτύσσεται μέσα από τον συντονισμό των διαφορετικών μητρώων αναπαράστασης, αλλά και των κοινών νοημάτων που προκύπτουν μέσα από τις επιμέρους επεξεργασίες σε αυτά. Οι διασυνδέσεις αυτές είναι που οδηγούν στη βαθιά εννοιολογική κατανόηση.

Οι κατηγορίες της τρίτης στήλης του Πίνακα 1 προέκυψαν από βιβλιογραφικά τεκμηριωμένες θεωρητικές προσεγγίσεις και από την ανάλυση περιεχομένου των σχολικών

εγχειριδίων Μαθηματικών και Φυσικής. Μέσω ερμηνευτικής-επαγωγικής μεθόδου, το περιεχόμενο αναλύθηκε και κατηγοριοποιήθηκε, ώστε να αποτυπωθούν οι μορφές και οι μετασχηματισμοί της ημιτονοειδούς συνάρτησης. Οι κατηγορίες διαμορφώθηκαν εμπειρικά, εξειδικεύοντας γενικές βιβλιογραφικές προτάσεις και αντανακλώντας τις διδακτικές πρακτικές των εγχειριδίων. Η ανάλυση βασίστηκε στα εξής σχολικά εγχειρίδια: Άλγεβρα Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2022), Φυσική Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Τεύχος Β΄ και Τεύχος Γ΄ της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας (Ιωάννου κ.ά., 2022α· 2022β). Όλα τα εγχειρίδια εκδόθηκαν στην Αθήνα από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων – Διόφαντος, υπό την εποπτεία του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Πίνακας 1. Διαστάσεις Ανάλυσης, Υποδιαστάσεις, Κατηγορίες Υποδιαστάσεων των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης

Διαστάσεις ανάλυσης	Υποδιαστάσεις	Κατηγορίες/Επεξήγηση/Επιμέρους ανάλυση
A. Εμφανίσεις αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης	Λεκτική	Περιγραφή συνάρτησης με φυσική γλώσσα κάνοντας άμεση αναφορά.
	Άλγεβρική	Συναρτήσεις ημιτόνου.
	Γραφική	Καμπύλες ημιτονοειδούς – συνημιτονοειδούς συνάρτησης σε ορθοκανονικό σύστημα 2 μεταβλητών.
	Αριθμητική/ Συμβολική/Εικονιστική	Πίνακας τιμών, εικόνες.
B. Πλαίσιο	Μαθηματικό	Αναφορά σε μαθηματικά σύμβολα, αναπαραστάσεις, αρχές της μαθηματικής επιστήμης.
	Επιστημονικό	Σύνδεση με τον φυσικό κόσμο (φυσικά φαινόμενα / πειραματικές διαδικασίες)
	Καθημερινό	Σύνδεση με την καθημερινή ζωή / Βιωματική συσχέτιση
	Επεξεργασία	Μετασχηματισμός εντός του ίδιου μητρώου <ul style="list-style-type: none"> • Επεξεργασία/ερμηνεία άλγεβρικής σχέσης • Επεξεργασία/ερμηνεία γραφικής παράστασης • Επεξεργασία/ερμηνεία εικονιστικής αναπαράστασης που σχετίζεται με τη συνάρτηση • Συμπλήρωση πίνακα τιμών

Γ. Τύπος γνωστικής απαίτησης μετασχηματισμού	Μετατροπή	Αλλαγή μητρώου αναπαράστασης <ul style="list-style-type: none"> • Λεκτικό σε Αλγεβρικό • Αλγεβρικό σε Λεκτικό • Αλγεβρικό σε Γραφικό • Γραφικό σε Αλγεβρικό • Λεκτικό σε Γραφικό • Γραφικό σε Λεκτικό
	Σύνθετος μετασχηματισμός	Σύνθετος συλλογισμός Έμμεση αναφορά στη συνάρτηση που προϋποθέτει τη χρήση της για επίλυση προβλήματος με επεξεργασία ή μετατροπή ή με συνδυασμό των δύο (πολλαπλή / συνδυαστική χρήση και επεξεργασία των αναπαραστάσεων της, όπως αλγεβρική, γραφική, χρήση μοναδιαίου κύκλου ή πίνακα).

Παραδείγματα ανάλυσης αναπαραστάσεων ημιτονοειδούς συνάρτησης στις δραστηριότητες Μαθηματικών και Φυσικής

Η παρούσα ανάλυση εμβαθύνει στην παρουσίαση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, εστιάζοντας σε επιλεγμένες δραστηριότητες από σχολικά τα εγχειρίδια. Σκοπός είναι η ανάδειξη των διαφορετικών επιπέδων γνωστικής απαίτησης και των τύπων αναπαραστάσεων που ενεργοποιούνται. Για τον σκοπό αυτό, επιλέχθηκαν τέσσερα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα: δύο από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών και δύο από αυτό της Φυσικής.

Το κριτήριο επιλογής των δραστηριοτήτων από το εγχειρίδιο των Μαθηματικών ήταν η έμφαση τους στη διαδικαστική γνώση και μονολειτουργική χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, πρόκειται για προβλήματα που απαιτούν την εφαρμογή τυποποιημένων αλγοριθμικών βημάτων και κανόνων για την επίλυση ασκήσεων σχετικών με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Αντίθετα, τα παραδείγματα από το εγχειρίδιο της Φυσικής επιλέχθηκαν με γνώμονα την υψηλότερη γνωστική απαίτηση. Αυτές οι δραστηριότητες δεν περιορίζονται σε απλούς διαδικαστικούς υπολογισμούς, αλλά προϋποθέτουν την αξιοποίηση τριγωνομετρικών εννοιών σε σύνθετα, πραγματικά ή υποθετικά, πλαίσια. Επιπλέον, ενεργοποιούν την ταυτόχρονη χρήση και σύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων (π.χ., γραφικές, αλγεβρικές, τριγωνομετρικός κύκλος με στρεφόμενα διανύσματα) για την κατανόηση και επίλυση των προβλημάτων. Αυτή η στοχευμένη διαφοροποίηση στην επιλογή των παραδειγμάτων επιτρέπει μια ενδελεχή, συγκριτική διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δομούνται και αξιοποιούνται σε διαφορετικά γνωστικά και διδακτικά πλαίσια.

Δραστηριότητα 1:

Εικόνα 3. Λυμένο παράδειγμα 1. Άλγεβρα Β' Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2022:80)

1^ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu x$.

ΛΥΣΗ

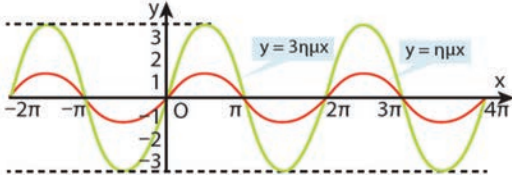
Οι τιμές της συνάρτησης $f(x)=3\eta\mu x$ είναι προφανώς τριπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $\varphi(x)=\eta\mu x$. Εξάλλου και η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π , αφού ισχύει:

$$f(x + 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu(x + 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu x = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{και } f(x - 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu(x - 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu x = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έχοντας υπόψη τα στοιχεία αυτά και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)=3\eta\mu x$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$3\eta\mu x$	0	3	0	-3	0



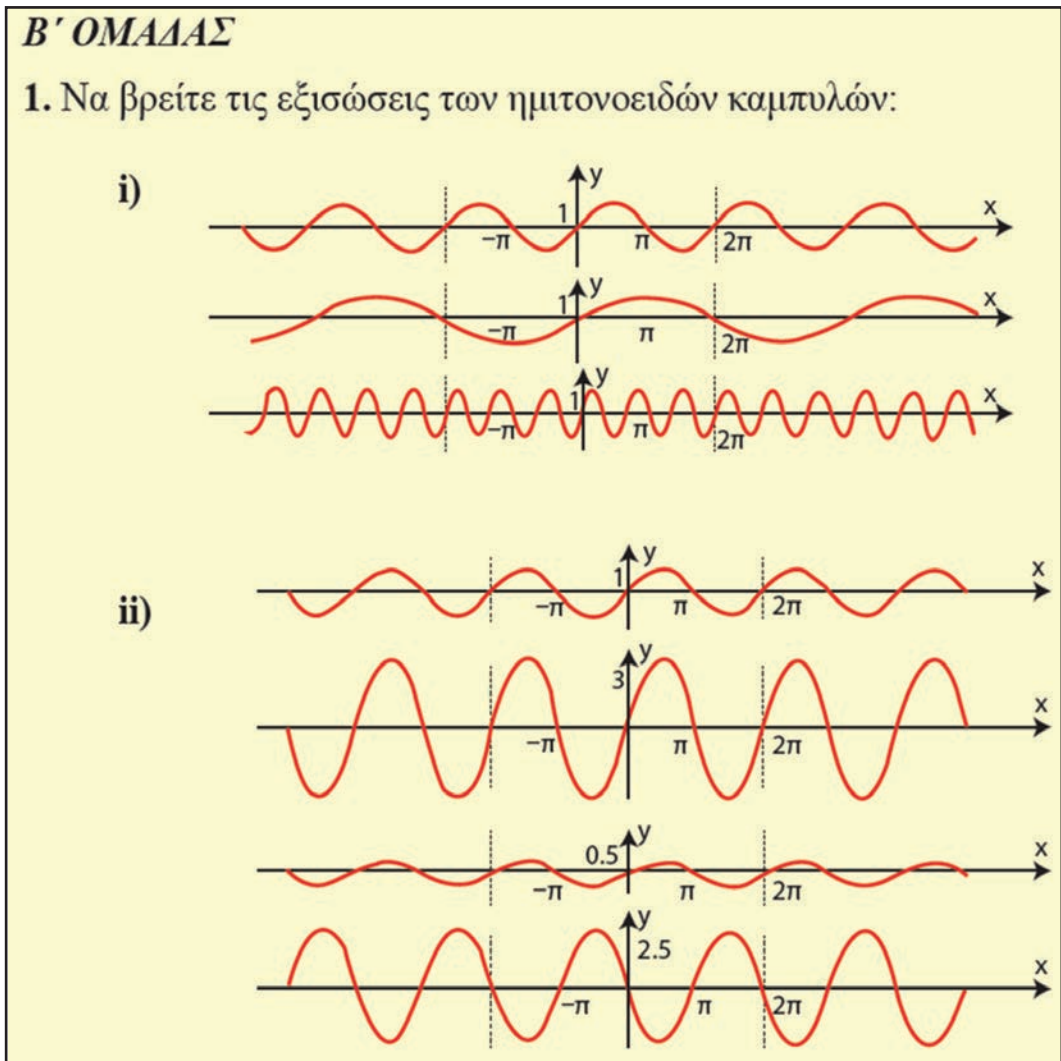
Εμφάνιση: Αλγεβρική Αναπαράσταση, Πλαίσιο: Μαθηματικό, Μετασχηματισμός: Μετατροπή.

Η πρώτη δραστηριότητα αποτελεί το πρώτο λυμένο παράδειγμα στο βιβλίο της Άλγεβρας Β' Τάξης Γενικού Λυκείου, στο κεφάλαιο 3 και στην ενότητα 3.4 της συνάρτησης ημίτονο. Το κείμενο της συγκεκριμένης δραστηριότητας περιέχει τη συνάρτηση ημίτονο, η οποία εμφανίζεται με την αλγεβρική της μορφή. Ως εκφώνηση δεν έχει πλαίσιο, καθώς η περιγραφή του ερωτήματος αφορά ξεκάθαρο μαθηματικό μετασχηματισμό. Η γνωστική απαίτηση στο επίπεδο του μετασχηματισμού αφορά μετατροπή από το αλγεβρικό μητρώο στο μητρώο των καρτεσιανών γραφικών παραστάσεων. Τόσο το μητρώο πηγή (αλγεβρική αναπαράσταση), όσο και το μητρώο στόχος (γραφική αναπαράσταση), εμφανίζονται ως μονό-λειτουργικά, καθώς για την επίλυση δεν απαιτούνται σύνθετες διαδικασίες επεξεργασίας στα μητρώα. Κατά την επίλυση της μετατροπής το σχολικό βιβλίο κάνει χρήση του πίνακα τιμών ως μεταβατικό σημειωτικό σύστημα κατά τον Duval (2006), όπου φαίνονται τα μέγιστα, τα ελάχιστα και η περίοδος της συνάρτησης. Στη δραστηριότητα αυτή δίδεται έμφαση στον σταθερό συντελεστή που βρίσκεται εκτός της συνάρτησης και είναι ο αριθμός 3. Ο σταθερός αυτός συντελεστής διαμορφώνει το μέγιστο και το

ελάχιστο της συνάρτησης. Η περίοδος τους καθορίζεται από το περιεχόμενο της ημιτονοειδούς συνάρτησης και παρατηρούμε πως είναι ίδια και για τις δυο συναρτήσεις.

Δραστηριότητα 2:

Εικόνα 4. Άσκηση 1, Β' Ομάδας . Άλγεβρα Β' Λυκείου. Κεφ3. Εν.3.4. (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2022:82)



Εμφάνιση: Λεκτική περιγραφή, Γραφική Αναπαράσταση, Πλαίσιο: Μαθηματικό, Μετασηματισμός: Μετατροπή.

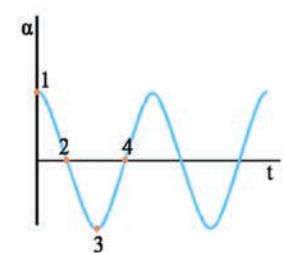
Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι η πρώτη άσκηση της Β' ομάδας (Εν.3.4) του εγχειριδίου Άλγεβρα Β' Τάξης Γενικού Λυκείου. Περιλαμβάνει δύο (2) σκέλη τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως ξεχωριστές επιμέρους δραστηριότητες. Και στις δύο επιμέρους δραστηριότητες η συνάρτηση εμφανίζεται με την καρτεσιανή γραφική της αναπαράσταση σε διάφορες εκδοχές. Και τα δύο ερωτήματα δεν έχουν πλαίσιο, αφορούν δηλαδή καθαρά μαθηματικές διαδικασίες. Επίσης ως προς τη γνωστική αιτιότητα του μετασχηματισμού, είναι μετατροπή από το γραφικό μητρώο αναπαράστασης (μητρώο πηγή), προς το αλγεβρικό μητρώο (μητρώο στόχος). Το ερώτημα, ενώ παρουσιάζεται ξεκάθαρα ως ερώτημα μετατροπής, ωστόσο ενέχει βήματα σημειωτικής επεξεργασίας για την ανίχνευση των χαρακτηριστικών τα οποία θα δομήσουν τις εξισώσεις. Οι πληροφορίες των γραφημάτων που αφορούν το εύρος στον άξονα x' Ox του μοτίβου που αντιστοιχεί σε μία περίοδο μετασχηματίζεται σε περιεχόμενο της συνάρτησης ημίτονο. Αντίστοιχα, στο δεύτερο ερώτημα παρατίθενται στους/στις μαθητές/τριες τέσσερις (4) γραφικές παραστάσεις σε κοινή εικόνα, ώστε να δοθεί έμφαση στην οπτική διάκριση που σχετίζεται με το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης. Κατά τον Duval (2006), προκειμένου οι μαθητές να παρατηρήσουν τις βασικές αντιθέσεις οπτικών χαρακτηριστικών που είναι Μαθηματικά σχετικές και γνωστικά σημαντικές, κάθε εργασία διάκρισης αναπαραστάσεων πρέπει να ενσωματωθεί σε μια εργασία μετατροπής.

Δραστηριότητα 3:

Εικόνα 5. Κεφ. 1, Ερ. 1.7, Φυσική Γ' Τάξη Γενικού Λυκείου, Τεύχος Γ' (Ιωάννου κ.ά., 2022β:32)

1.7 Το διάγραμμα του **σχήματος 1.40** παριστάνει την επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, σε συνάρτηση με το χρόνο.

α) Ποιο σημείο του διαγράμματος αντιστοιχεί σε απομάκρυνση $-A$;
β) Στο **σημείο 4** του διαγράμματος η ταχύτητα της ταλάντωσης είναι θετική, αρνητική ή μηδέν;
γ) Σε ποια απομάκρυνση αντιστοιχεί το **σημείο 4** του διαγράμματος;



Σχήμα 1-40.

Εμφάνιση: Γραφική Αναπαράσταση, Πλαίσιο: Επιστημονικό, Μετασχηματισμός: Επεξεργασία, Σύνθετος συλλογισμός.

Η δραστηριότητα είναι ερώτηση στο κεφάλαιο των μηχανικών ταλαντώσεων, η οποία περιέχει τρία υποερωτήματα. Η ημιτονοειδής συνάρτηση εμφανίζεται με την καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση. Η δραστηριότητα έχει επιστημονικό πλαίσιο, καθώς περιγράφει την κίνηση που εκτελεί ένα σώμα στο αυστηρό πλαίσιο του φαινομένου της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Ως προς τις γνωστικές απαιτήσεις μετασχηματισμού, είναι επεξεργασία, καθώς οι μαθητές πρέπει να εξετάσουν τα διάφορα σημεία του διαγράμματος, να τα αναλύσουν και να απαντήσουν στα ερωτήματα. Ενέχει σύνθετο συλλογισμό, καθώς τα ερωτήματα δεν συνδέονται αποκλειστικά με το μέγεθος της επιτάχυνσης που αναπαρίσταται στο γράφημα, αλλά με τα άλλα δυο κινηματικά μεγέθη, την ταχύτητα και την απομάκρυνση. Ο σύνθετος συλλογισμός είναι δυνατόν να ακολουθείται από αλγεβρικές επεξεργασίες που σχετίζονται με τα υπό μελέτη κινηματικά μεγέθη στο αλγεβρικό μητρώο αναπαράστασης.

Δραστηριότητα 4:

Εικόνα 6. Κεφ.1, Πρ. 1.39, Φυσική Γ' Τάξη Γενικού Λυκείου, Τεύχος Γ' (Ιωάννου κ.ά., 2022β:38)

1.39 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 20 \text{ cm}$ με περίοδο $T = 10 \text{ s}$. Τη χρονική στιγμή μηδέν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας. Να υπολογιστεί επί πόσο χρόνο (μέχρι να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας) η απομάκρυνσή του θα είναι μεγαλύτερη από $x = 10 \text{ cm}$.

[Απ: $10/3 \text{ s}$]

Εμφάνιση: Έμμεση Αναφορά στην συνάρτηση, Πλαίσιο: Επιστημονικό, Τύπος Γνωστικής Απαιτήσης: Σύνθετος Μετασχηματισμός

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι πρόβλημα στο κεφάλαιο 1 και αφορά μελέτη απλής αρμονικής ταλάντωσης. Η ημιτονοειδής συνάρτηση δεν εμφανίζεται άμεσα στο κείμενο με κάποια μορφή αναπαράστασης. Μέσα από το κείμενο και τον αξιωματικό ορισμό της απλής αρμονικής ταλάντωσης στο θεωρητικό τμήμα του κεφαλαίου, ως εκείνη η κίνηση στην οποία η θέση του σώματος είναι συνάρτηση ημιτόνου ως προς το χρόνο, καταδεικνύει έμμεση αναφορά. Το πλαίσιο του προβλήματος είναι επιστημονικό, καθώς πραγματεύεται το φαινόμενο της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Εντάσσεται στις δραστηριότητες υψηλής γνωστικής απαίτησης (σύνθετος μετασχηματισμός) καθώς για την επίλυση του προβλήματος ενεργοποιούνται περισσότερα από ένα σημειωτικά συστήματα αναπαράστασης. Οι μαθητές μπορούν να ακολουθήσουν την αλγεβρική επεξεργασία (επίλυση της εξίσωσης του ημιτόνου),

ή να αξιοποιήσουν τον τριγωνομετρικό κύκλο αναφοράς ως εργαλείο για την επίλυση του προβλήματος.

Αποτελέσματα

Αποτελέσματα καταγραφής των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης

Στην παρούσα ενότητα αποτυπώνονται τα αποτελέσματα των τριών επιπέδων όπως αυτά παρουσιάζονται στην πρώτη στήλη του Πίνακα 1. Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που αφορά το πρώτο επίπεδο ανάλυσης της πρώτης στήλης του Πίνακα 1, στον πίνακα 2 παρουσιάζονται οι συχνότητες f και τα ποσοστά % καταγραφής των εμφανίσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης για κάθε υποδιάσταση, στα εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής του Λυκείου τα οποία αποτελούν το εμπειρικό υλικό της παρούσας εργασίας. Συγκεκριμένα, σε ό,τι αφορά τα Μαθηματικά, έγινε συστηματική καταγραφή των εμφανίσεων της συνάρτησης στο εγχειρίδιο Άλγεβρα Β' Τάξης Γενικού Λυκείου, όπου και ορίζεται για πρώτη φορά η συνάρτηση ημίτονο. Αντίστοιχα, πραγματοποιήθηκε συστηματική καταγραφή των εμφανίσεων της συνάρτησης ημίτονο στις μορφές που ορίστηκαν στο εργαλείο ανάλυσης και στα 2 εγχειρίδια της Φυσικής Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Ομάδας Προσανατολισμού Σπουδών Υγείας.

Περιλαμβάνει τρεις (3) περιοχές καταγραφής των εμφανίσεων για κάθε μάθημα. Τις εμφανίσεις στο θεωρητικό τμήμα των εγχειριδίων, τις εμφανίσεις στα λυμένα παραδείγματα και τις εμφανίσεις της συνάρτησης στις άλυτες δραστηριότητες των εγχειριδίων, οι οποίες είναι ασκήσεις Α' και Β' Ομάδας για τα Μαθηματικά και Ερωτήσεις, Ασκήσεις, Προβλήματα για τη Φυσική.

Πίνακας 2. Συχνότητα και ποσοστό εμφάνισης των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα Μαθηματικά και τη Φυσική του Λυκείου

Α. Εμφανίσεις Αναπαραστάσεων ημιτονοειδούς συνάρτησης		Εγχειρίδια			
		Άλγεβρα Β' Λυκείου		Φυσική Γ' Λυκείου	
Πεδίο διερεύνησης		f	%	f	%
		(συχνότητα)	(ποσοστό)	(συχνότητα)	(ποσοστό)
Εμφανίσεις στο θεωρητικό τμήμα των εγχειριδίων	Λεκτική	8	18	5	4
	Αλγεβρική	27	61,5	78	55
	Γραφική	4	9	40	28
	Αριθμητική/Συμβολική/ Εικονιστική	5	11,5	19	13
Σύνολο		44	100	142	100

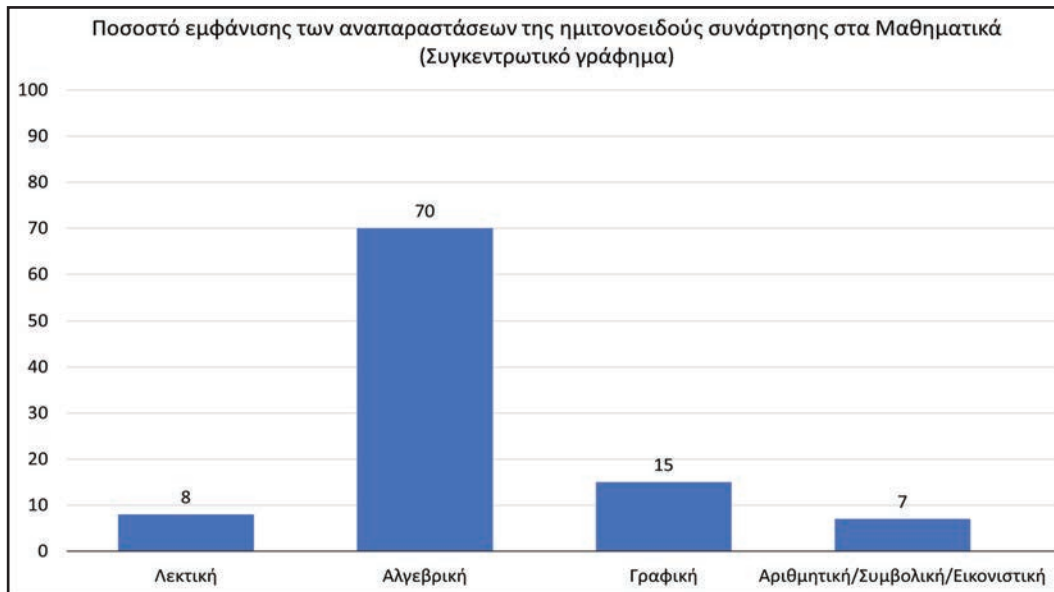
Εμφανίσεις στα λυμένα παραδείγματα των εγχειριδίων	Λεκτική	0	0	0	0
	Αλγεβρική	31	79	12	100
	Γραφική	5	13	0	0
	Αριθμητική/Συμβολική/ Εικονιστική	3	8	0	0
Σύνολο		39	100	12	100
Εμφανίσεις στις δραστηριότητες των εγχειριδίων	Λεκτική	1	4	1	2
	Αλγεβρική	18	69	41	80
	Γραφική	7	27	8	16
	Αριθμητική/Συμβολική/ Εικονιστική	0	0	1	2
Σύνολο		26	100	51	100
ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ					
Όλες οι εμφανίσεις της ημιτονοειδούς συνάρτησης	Λεκτική	9	8	6	3
	Αλγεβρική	76	70	131	64
	Γραφική	16	15	48	23
	Αριθμητική/Συμβολική/ Εικονιστική	8	7	20	10
Γενικό σύνολο		109	100	205	100

Σε ό,τι αφορά την καταγραφή στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών, στο γενικό σύνολο των εμφανίσεων, η αναπαράσταση που εμφανίζεται συχνότερα είναι η αλγεβρική (70%), ακολουθεί η καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση (15%), κατόπιν η λεκτική αναπαράσταση (8%) και τέλος η αριθμητική/συμβολική/εικονιστική (7%).

Αναλυτικότερα, στο θεωρητικό τμήμα του εγχειριδίου κυριαρχεί η αλγεβρική αναπαράσταση (61,5%), ακολουθούν η λεκτική αναπαράσταση (18%) , η αριθμητική/συμβολική/εικονιστική (11,5%) και, τέλος, η γραφική αναπαράσταση (9%). Ως αριθμητική/συμβολική/εικονιστική θεωρούνται αναπαραστάσεις, όπως πίνακες, διαγράμματα αντιστοιχίας, ή εικόνες σχετικές με τη συνάρτηση εκτός των προηγούμενων ρητά ορισμένων υπό-διαστάσεων. Στην περιοχή καταγραφής των λυμένων παραδειγμάτων τα αποτελέσματα προτάσσουν την αλγεβρική αναπαράσταση (79%), ακολουθεί η καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση (13%), η αριθμητική/συμβολική/εικονιστική (8%), ενώ απουσιάζει η λεκτική αναπαράσταση (0%). Στην τρίτη περιοχή των δραστηριοτήτων προς επίλυση, στην καταγραφή των εμφανίσεων κυριαρχεί η αλγεβρική αναπαράσταση (69%), ακολουθεί η καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση (27%), στην τρίτη ποσοστιαία θέση με πολύ μικρό ποσοστό

η λεκτική (4%) και, τέλος, δεν εμφανίζεται καθόλου η αριθμητική/συμβολική/εικονιστική (0%).

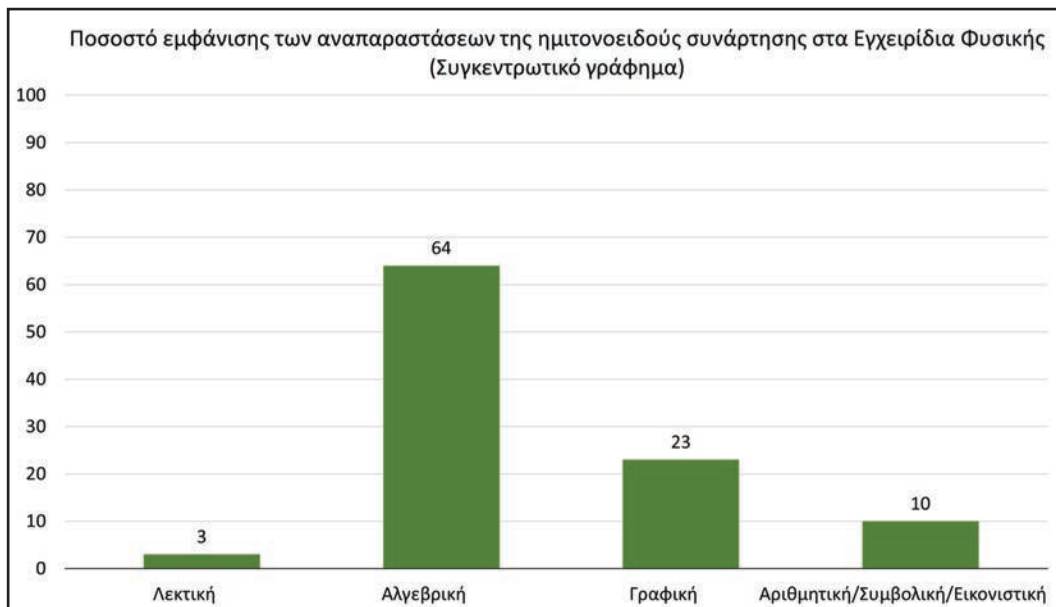
Γράφημα 1. Ποσοστό εμφάνισης των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα Μαθηματικά



Το γενικό σύνολο της καταγραφής των εμφανίσεων της συνάρτησης στη Φυσική (βλέπε γράφημα 2), προτάσσει την αλγεβρική αναπαράσταση (64%), ακολουθεί η καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση (23%), τρίτη σε σειρά έρχεται η αριθμητική/συμβολική/εικονιστική (10%) και, τέλος, η λεκτική αναπαράσταση η οποία εμφανίζεται σπάνια (3%).

Αναλυτικότερα για τις τρεις περιοχές καταγραφής των εμφανίσεων των αναπαραστάσεων, ξεκινώντας από το θεωρητικό τμήμα, πρώτη σε εμφάνιση αποτυπώνεται η αλγεβρική αναπαράσταση (55%), δεύτερη η καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση (28%), τρίτη η αριθμητική/συμβολική/εικονιστική (13%) και, τέλος, με πολύ σπάνια εμφάνιση η λεκτική αναπαράσταση (4%). Στη δεύτερη περιοχή καταγραφής των λυμένων παραδειγμάτων κυρίαρχη σε ποσοστό εμφάνισης είναι η αλγεβρική αναπαράσταση (100%), με εμφανές τεράστιο έλλειμμα λυμένων δραστηριοτήτων στα εγχειρίδια. Τέλος, στην περιοχή των άλυτων δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων, πρώτη και κυρίαρχη σε ποσοστό έρχεται η αλγεβρική αναπαράσταση (80%), ακολουθεί η καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση (16%), ενώ με αμελητέο ποσοστό καταγραφής οι άλλες δύο εμφανίσεις, λεκτική (2%) και αριθμητική/συμβολική/εικονιστική (2%).

Γράφημα 2. Ποσοστό εμφάνισης των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης στη Φυσική



Αποτελέσματα ανάλυσης δραστηριοτήτων ως προς τη φύση του πλαισίου

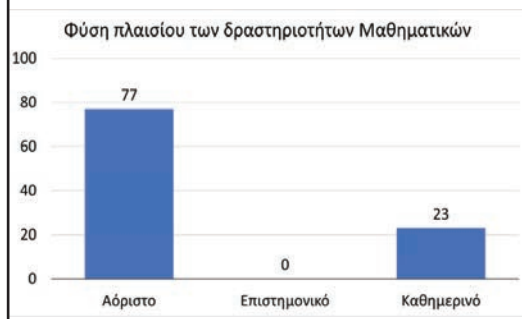
Ως προς το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, στον πίνακα 3 παρατίθενται τα αποτελέσματα σχετικά με τον τύπο του πλαισίου στο οποίο εντάσσονται οι δραστηριότητες μέσα στα σχολικά εγχειρίδια. Να σημειωθεί πως η κατηγοριοποίηση αφορούσε τις δραστηριότητες συνολικά, και όχι για κάθε επιμέρους ερώτημα ως ξεχωριστή δραστηριότητα, καθώς για τη συγκεκριμένη διάσταση ανάλυσης η πλαισίωση κάθε δραστηριότητας (ερώτηση, άσκηση, πρόβλημα), είναι κοινή για τα επιμέρους ερωτήματα. Σε ό, τι αφορά τις δραστηριότητες των Μαθηματικών, το μεγαλύτερο ποσοστό αντιστοιχεί σε δραστηριότητες με μαθηματικό πλαίσιο (77%), ένα μικρό ποσοστό σχετίζεται με καθημερινό πλαίσιο (23%) και δεν εμφανίζονται καθόλου δραστηριότητες με επιστημονικό πλαίσιο (0%).

Αντίστοιχα, οι δραστηριότητες για το μάθημα της Φυσικής εμφανίζουν όλες επιστημονική πλαισίωση (100%). Το σημαντικό στοιχείο είναι πως καμιά δραστηριότητα που περιλαμβάνει την ημιτονοειδή συνάρτηση στη Φυσική, δεν έχει σύνδεση με την καθημερινή ζωή, αλλά αντίθετα είναι καθαρά επιστημονικού περιεχομένου.

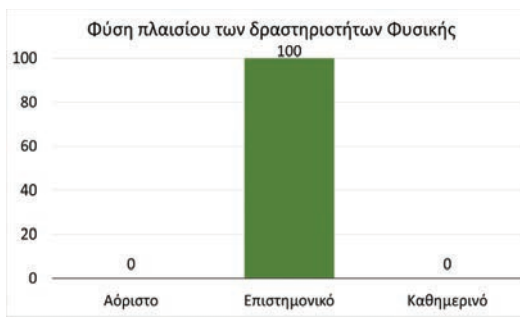
Πίνακας 3. Συχνότητα και ποσοστό ως προς τη φύση του πλαισίου
στις δραστηριότητες των Μαθηματικών και της Φυσικής

B. Πλαίσιο		Εγχειρίδια			
		Άλγεβρα Β' Λυκείου		Φυσική Γ' Λυκείου	
		f (συχνότητα)	% (ποσοστό)	f (συχνότητα)	% (ποσοστό)
Εμφανίσεις στις δραστηριότητες των εγχειριδίων	Μαθηματικό	10	77	0	0
	Επιστημονικό	0	0	35	100
	Καθημερινό	3	23	0	0
Σύνολο		13	100	35	100

Γράφημα 3. Φύση του πλαισίου στις δραστηριότητες των Μαθηματικών



Γράφημα 4. Φύση του πλαισίου στις δραστηριότητες της Φυσικής



Αποτελέσματα ανάλυσης ως προς τους τύπους γνωστικών απαιτήσεων μετασχηματισμού της ημιτονοειδούς συνάρτησης

Στον πίνακα 4 παρουσιάζονται οι συχνότητες f και τα ποσοστά $\%$ ανάλυσης που αφορούν τους μετασχηματισμούς των εμφανίσεων των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης, όπως κατηγοριοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν το τρίτο επίπεδο ανάλυσης της πρώτης στήλης του Πίνακα 1 και εξυπηρετούν το τρίτο ερευνητικό ερώτημα.

Από την ανάλυση που έγινε, στο γενικό σύνολο των μετασχηματισμών των εμφανίσεων της συνάρτησης ημίτονο στα Μαθηματικά, κυριαρχεί η μετατροπή (60%), ακολουθεί η επεξεργασία (40%), ενώ με μηδενικό ποσοστό εμφάνισης (0%) παρατηρήθηκε η υπό-διάσταση του σύνθετου μετασχηματισμού (βλ. γράφημα 5).

Αναλυτικότερα, στο θεωρητικό τμήμα των Μαθηματικών, κυριαρχεί ο μετασχηματισμός της επεξεργασίας (80%), ακολουθεί ο μετασχηματισμός της μετατροπής (20%), ενώ δεν παρατηρείται σύνθετος μετασχηματισμός (0%). Συγκεκριμένα, οι μετασχηματισμοί επεξεργασίας αφορούν τη χρήση μοναδιαίου κύκλου για την εύρεση της μονοτονίας, αλγεβρικές πράξεις για την εξήγηση των ιδιοτήτων που καθιστούν τη συνάρτηση περιοδική και περιττή, αριθμητικοί υπολογισμοί για τη συμπλήρωση πίνακα τιμών και επεξεργασία των γραφημάτων για την εξήγηση της περιοδικότητας της συνάρτησης με την επανάληψη του γραφικού μοτίβου. Στα λυμένα παραδείγματα, τα οποία είναι περιορισμένα στον αριθμό, εμφανίζονται διαδικασίες κυρίως μετατροπής, αλλά και επεξεργασίας, που δρουν βοηθητικά για την επίτευξη της μετατροπής. Πρέπει να σημειωθεί πως κατά τη μετατροπή από μία αναπαράσταση σε άλλη, ενεργοποιούνται και διαδικασίες επεξεργασίας οι οποίες, όμως, δε χαρακτηρίζουν τον μετασχηματισμό, καθώς αποτελούν μεταβατικές βοηθητικές αναπαραστάσεις (Dunval, 2006).

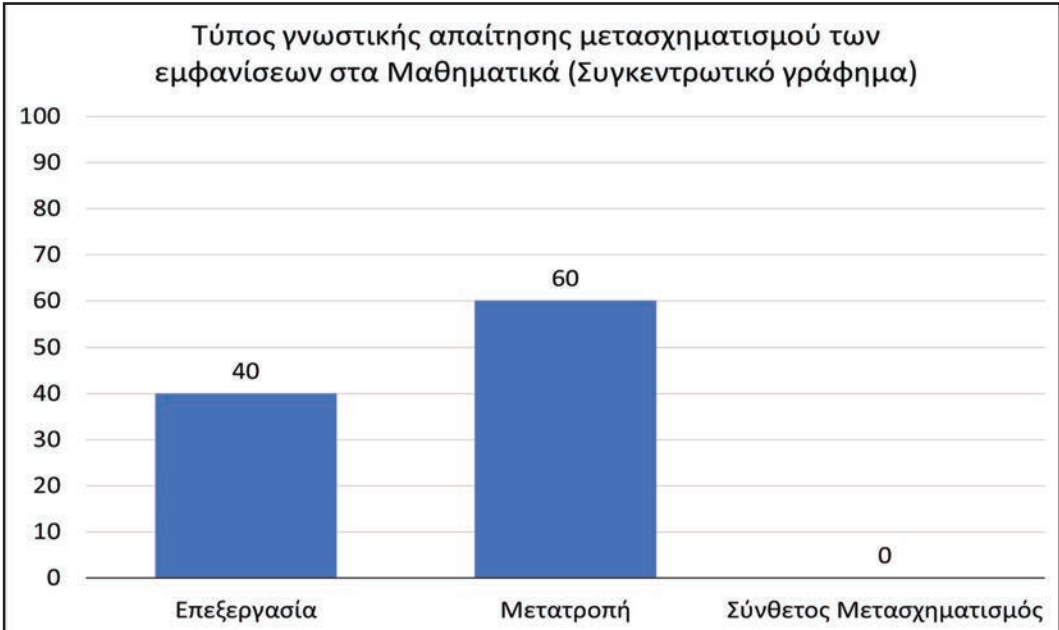
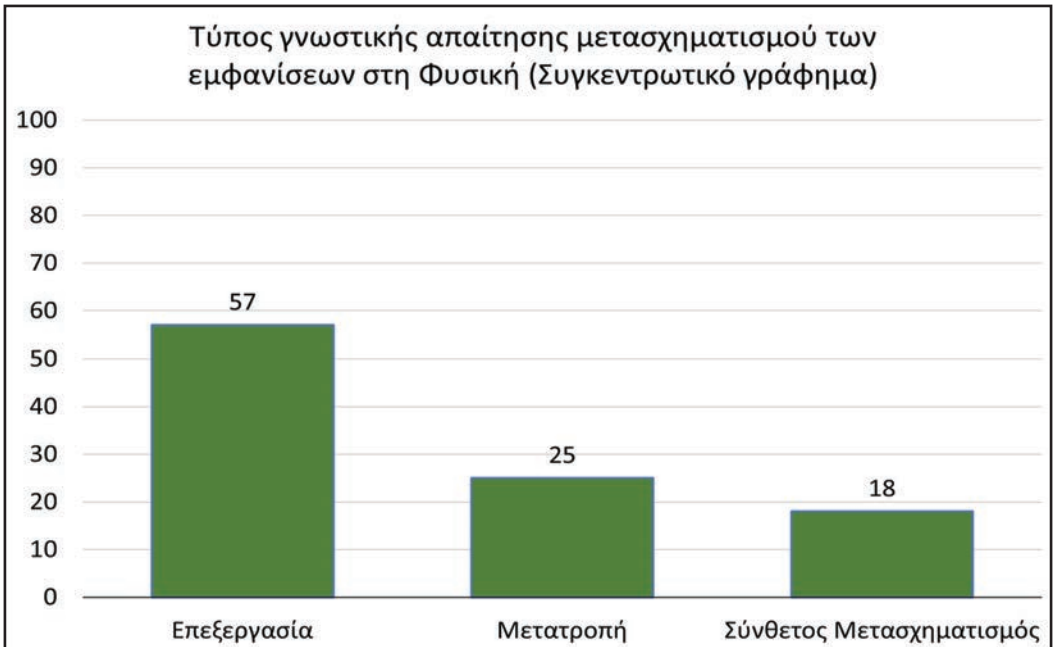
Πίνακας 4. Γνωστικές απαιτήσεις μετασχηματισμού στα Μαθηματικά και τη Φυσική

Γ. Τύπος γνωστικής απαίτησης μετασχηματισμού		Εγχειρίδια			
		Άλγεβρα Β' Λυκείου		Φυσική Γ' Λυκείου	
Πεδίο διερεύνησης		F (συχνότητα)	% (ποσοστό)	f (συχνότητα)	% (ποσοστό)
		Εμφανίσεις στη θεωρία	Επεξεργασία	8	80
Μετατροπή	2		20	17	46
Σύνθετος Μετασχηματισμός	0		0	0	0
Σύνολο		10	100	37	100
Εμφανίσεις στα λυμένα παραδείγματα των εγχειριδίων	Επεξεργασία	3	50	2	40
	Μετατροπή	3	50	3	60
	Σύνθετος Μετασχηματισμός	0	0	0	0
Σύνολο		6	100	5	100
Εμφανίσεις στις δραστηριότητες των εγχειριδίων	Επεξεργασία	9	26	33	61
	Μετατροπή	25	74	4	7,5
	Σύνθετος Μετασχηματισμός	0	0	17	31,5
Σύνολο		34	100	54	100

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ					
Όλες οι εμφανίσεις της ημιτονοειδούς συνάρτησης	Επεξεργασία	20	40	55	57
	Μετατροπή	30	60	24	25
	Σύνθετος Μετασχηματισμός	0	0	17	18
	Γενικό Σύνολο	50	100	96	100

Σε ότι αφορά τους μετασχηματισμούς των εμφανίσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα εγχειρίδια της Φυσικής του Λυκείου, από την ανάλυση προέκυψε ότι ο μετασχηματισμός που καταγράφεται συχνότερα είναι αυτός της επεξεργασίας (57%), ακολουθεί ο μετασχηματισμός της μετατροπής (25%) και τελευταίος είναι ο σύνθετος μετασχηματισμός (18%). Στο γράφημα 6 φαίνονται τα συγκεντρωτικά ποσοστά των μετασχηματισμών των εμφανίσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης.

Στο θεωρητικό τμήμα των εγχειριδίων αρχικά, η ανάλυση έδειξε πως ο μετασχηματισμός που εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα είναι η επεξεργασία στο ίδιο μητρώο αναπαράστασης (54%), ακολουθεί ο μετασχηματισμός της μετατροπής (46%), ενώ δεν εμφανίζονται καθόλου σύνθετοι μετασχηματισμοί (0%). Σε ό, τι αφορά τα λυμένα παραδείγματα τα οποία ήταν πολύ περιορισμένα σε πλήθος, εμφανίζεται πρώτος ο μετασχηματισμός της μετατροπής (60%), ακολουθεί ο μετασχηματισμός της επεξεργασίας (40%), ενώ δεν παρατηρήθηκαν εμφανίσεις με σύνθετο μετασχηματισμό (0%). Τέλος, ως προς τις δραστηριότητες προς επίλυση στα σχολικά εγχειρίδια, η ανάλυση έδειξε πως ο μετασχηματισμός της επεξεργασίας εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα (61%), ακολουθεί ο σύνθετος μετασχηματισμός (31,5%) και λιγότερο συχνά εμφανίζεται η μετατροπή (7,5%). Στα ακόλουθα γραφήματα, παρουσιάζονται τα ποσοστά κατά περιοχή διερεύνησης.

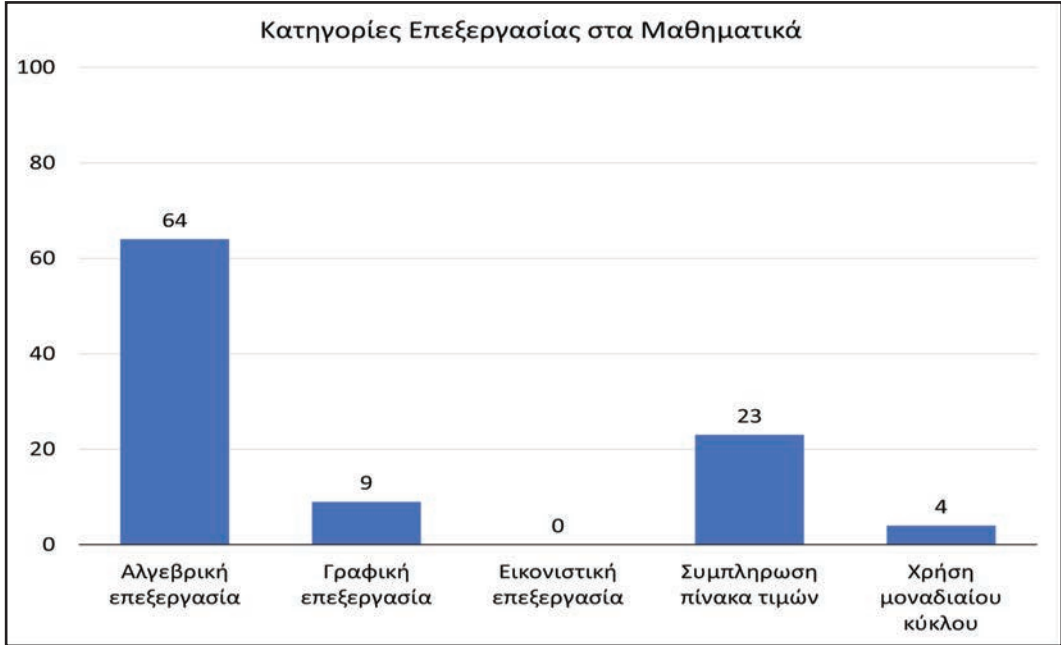
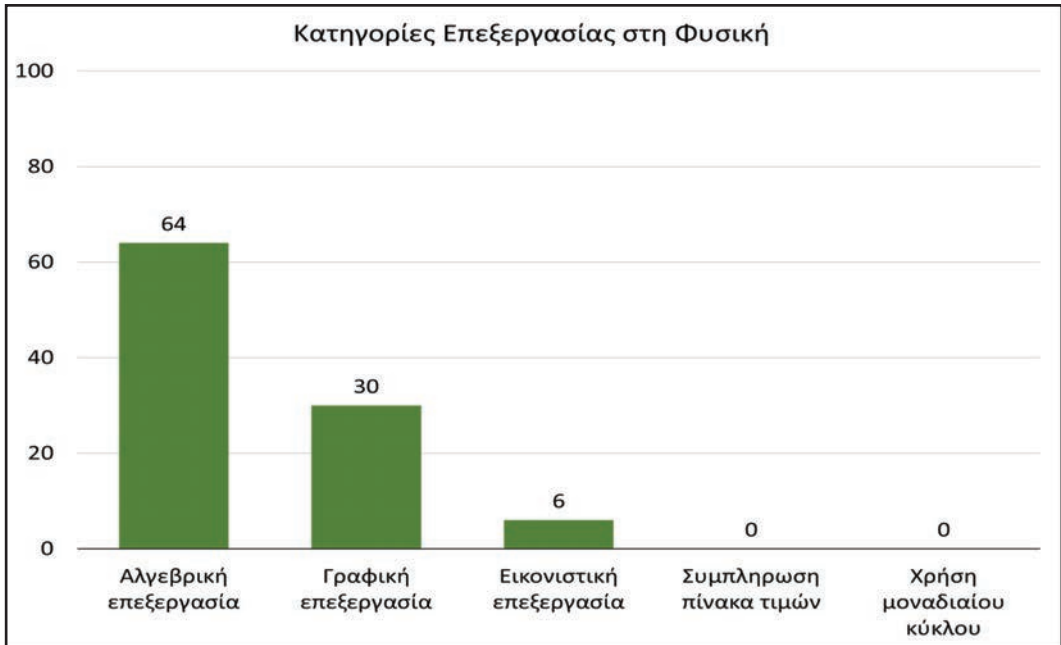
Γράφημα 5. Μετασχηματισμοί ημιτονοειδούς συνάρτησης στα Μαθηματικά**Γράφημα 6.** Μετασχηματισμοί ημιτονοειδούς συνάρτησης στη Φυσική

Ανάλυση μετασχηματισμών επεξεργασίας

Στον πίνακα 5, παρουσιάζεται η ανάλυση και ταξινόμηση των μετασχηματισμών της επεξεργασίας ως προς τις επιμέρους κατηγορίες που επιλέχθηκαν (βλ. πίνακα 1). Στην ανάλυση που έγινε στις εμφανίσεις του εγχειριδίου των Μαθηματικών οι οποίες κατηγοριοποιήθηκαν, αποτυπώνει πως η επεξεργασία με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης είναι η αλγεβρική (64%), η οποία σχετίζεται με πράξεις και διαδικασίες που εστιάζουν στη χρήση της αλγεβρικής σχέσης της συνάρτησης. Στη συνέχεια, ακολουθεί η επεξεργασία που σχετίζεται με τη συμπλήρωση του πίνακα των αριθμητικών τιμών (23%), ακολουθούν με μικρό ποσοστό οι επεξεργασίες που σχετίζονται με τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης (9%), πολύ περιορισμένη χρήση του μοναδιαίου κύκλου για την επεξεργασία της συνάρτησης (4%), ενώ δεν παρατηρήθηκαν εικονιστικές αναπαραστάσεις που να σχετίζονται με την επεξεργασία της συνάρτησης (0%). Αντίστοιχα, στη Φυσική οι κατηγορίες επεξεργασίας που κατεγράφησαν εντάσσονται στο αλγεβρικό μητρώο αναπαράστασης (64%), ακολουθούν οι επεξεργασίες των γραφικών αναπαραστάσεων (30%) και με πολύ μικρό ποσοστό εμφάνισης οι εικονιστικές επεξεργασίες (6%). Τα ποσοστιαία αποτελέσματα απεικονίζονται στα ακόλουθα γραφήματα 7,8.

Πίνακας 5. Κατηγορίες μετασχηματισμού Επεξεργασίας των εμφανίσεων της συνάρτησης ημίτονο στα Μαθηματικά και τη Φυσική

Γνωστική απαίτηση	Εγχειρίδια			
	Άλγεβρα Β' Λυκείου		Φυσική Γ' Λυκείου	
Επεξεργασία	f (συχνότητα)	% (ποσοστό)	f (συχνότητα)	% (ποσοστό)
Κατηγορία επεξεργασίας				
Επεξεργασία/ερμηνεία αλγεβρικής σχέσης	14	64	34	64
Επεξεργασία/ερμηνεία γραφικής παράστασης	2	9	16	30
Επεξεργασία/ερμηνεία εικονιστικής αναπαράστασης	0	0	3	6
Συμπλήρωση πίνακα τιμών	5	23	0	0
Χρήση μοναδιαίου κύκλου	1	4	0	0
Σύνολο	22	100	53	100

Γράφημα 7. Κατηγορίες επεξεργασίας ημιτονοειδούς συνάρτησης στα Μαθηματικά**Γράφημα 8.** Κατηγορίες επεξεργασίας ημιτονοειδούς συνάρτησης στη Φυσική

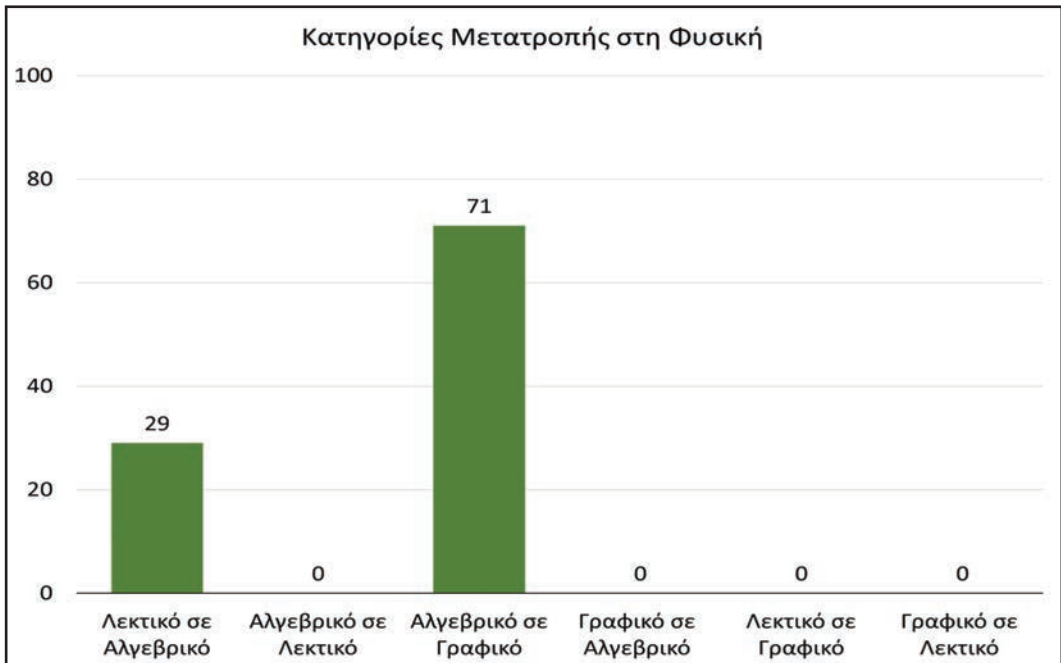
Ανάλυση μετασχηματισμών μετατροπής

Στον πίνακα 6, παρουσιάζεται η ανάλυση των μετασχηματισμών μετατροπής μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων για τα Μαθηματικά και τη Φυσική.

Πίνακας 6. Κατηγορίες Μετασχηματισμού Μετατροπής των εμφανίσεων της συνάρτησης ημίτονο στα Μαθηματικά και τη Φυσική

Γνωστική απαίτηση	Εγχειρίδια			
	Άλγεβρα Β' Λυκείου		Φυσική Γ' Λυκείου	
Μετατροπή	f	%	f	%
Κατηγορία Μετατροπής	(συχνότητα)	(ποσοστό)	(συχνότητα)	(ποσοστό)
Λεκτικό σε Αλγεβρικό	0	0	7	29
Αλγεβρικό σε Λεκτικό	0	0	0	0
Αλγεβρικό σε Γραφικό	23	77	17	71
Γραφικό σε Αλγεβρικό	7	23	0	0
Λεκτικό σε Γραφικό	0	0	0	0
Γραφικό σε Λεκτικό	0	0	0	0
Σύνολο	30	100	24	100

Οι μετατροπές που κατηγοριοποιήθηκαν προέρχονται και από τις τρεις περιοχές των εγχειριδίων, το θεωρητικό τμήμα, τα λυμένα παραδείγματα και τις δραστηριότητες προς επίλυση (ερωτήσεις, ασκήσεις, προβλήματα). Σε ό, τι αφορά τα Μαθηματικά, εμφανίζονται δύο τύποι μετατροπής (βλ. γράφημα 9). Ο πρώτος τύπος αποτελεί τη μετάβαση από το αλγεβρικό μητρώο αναπαράστασης, στο γραφικό μητρώο αναπαράστασης (77%), ενώ ο δεύτερος που παρατηρήθηκε είναι αυτός της αντίθετης κατεύθυνσης, δηλαδή της μετατροπής από το γραφικό μητρώο προς το αλγεβρικό μητρώο αναπαράστασης (23%). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των μετατροπών της συνάρτησης στη Φυσική (βλ. γράφημα 10) προτάσσουν τη μετατροπή από την αλγεβρική μορφή στην καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση (71%), ενώ ως δεύτερη κατηγορία εμφάνισης παρατηρήθηκε η μετατροπή από το λεκτικό μητρώο αναπαράστασης, στο αλγεβρικό μητρώο αναπαράστασης (29%). Και εδώ δεν παρατηρήθηκαν οι υπόλοιπες κατηγορίες μετατροπής (0%).

Γράφημα 9. Κατηγορίες Μετατροπής στα Μαθηματικά**Γράφημα 10.** Κατηγορίες Μετατροπής στη Φυσική

Συμπεράσματα και Συζήτηση

Η ανάλυση της ποσοστιαίας κατανομής των αναπαραστάσεων έδειξε ότι στα εγχειρίδια των Μαθηματικών κυριαρχεί η αλγεβρική αναπαράσταση (70%), με σαφώς μικρότερη παρουσία της γραφικής (15%) και της λεκτικής ή αριθμητικής (15%). Στα εγχειρίδια της Φυσικής παρατηρείται μια πιο ισορροπημένη κατανομή μεταξύ αλγεβρικής (64%) και γραφικής αναπαράστασης (23%), ενώ η αριθμητική και λεκτική παρουσία παραμένει περιορισμένη. Οι λεκτικές αναπαραστάσεις διαφοροποιούνται μεταξύ των δύο μαθημάτων. Στα Μαθηματικά γίνεται πιο συχνά ρητή αναφορά στη «συνάρτηση ημίτονο» ή την «ημιτονοειδή συνάρτηση», ενώ στη Φυσική η αναφορά είναι έμμεση, καθώς η συνάρτηση εμπλέκεται εννοιολογικά μέσω αξιωματικών ορισμών που αφορούν φυσικά φαινόμενα, χωρίς να αναφέρεται ρητά. Αυτή η διαφοροποίηση αντικατοπτρίζει τη χρήση διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων μεταξύ των δύο επιστημονικών πεδίων, όπως περιγράφεται από τον Duval (2006).

Επίσης, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι η διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στα Μαθηματικά δίνει έμφαση στις συμβολικές και διαδικαστικές προσεγγίσεις, ενώ στη Φυσική η συνάρτηση αξιοποιείται περισσότερο για μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων. Όπως καταδεικνύεται από τη μελέτη των Martín-Fernández et al. (2019), η περιορισμένη έκθεση των μαθητών σε πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορεί να οδηγήσει σε αποσπασματική κατανόηση, καθώς οι μαθητές τείνουν να αντιμετωπίζουν τις συναρτήσεις ως στατικές δομές και όχι ως δυναμικές σχέσεις μεταξύ μεταβλητών. Συνεπώς, η ανισορροπία στην κατανομή των αναπαραστάσεων που καταγράφηκε στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια ενδέχεται να συμβάλλει στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Σε ό,τι αφορά το πλαίσιο των δραστηριοτήτων που εντάσσονται οι αναπαραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, στα Μαθηματικά είναι σχεδόν αποκλειστικά μαθηματικού πλαισίου (77%), ενώ στη Φυσική το σύνολο των δραστηριοτήτων εντάσσεται σε επιστημονικό πλαίσιο (100%). Καμία από τις δραστηριότητες της Φυσικής δεν συνδέεται άμεσα με την καθημερινή ζωή, γεγονός που υποδεικνύει ότι η εφαρμογή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε ρεαλιστικά προβλήματα παραμένει περιορισμένη. Αντίστοιχα, στα Μαθηματικά, οι δραστηριότητες εστιάζουν κυρίως στη θεωρητική κατανόηση της συνάρτησης χωρίς να ενσωματώνουν τη φυσική της σημασία. Το εύρημα αυτό είναι σύμφωνο με τη μελέτη των Choi και Kwon (2020), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι η υπερβολική θεωρητικοποίηση των μαθηματικών εγχειριδίων μπορεί να οδηγήσει σε γνωστική ασυμφωνία, καθώς οι μαθητές δεν βλέπουν την πρακτική εφαρμογή των εννοιών που διδάσκονται. Επιπλέον, η απουσία καθημερινού πλαισίου στη Φυσική αντικατοπτρίζει τη διαπίστωση των Namli (2024) ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν τις μαθηματικές έννοιες με τη ζωή τους, όταν αυτές παρουσιάζονται αποκλειστικά μέσα σε

αυστηρά ακαδημαϊκά και εκπαιδευτικά πλαίσια. Η διεθνής βιβλιογραφία έχει δείξει ότι η ενσωμάτωση καθημερινών εφαρμογών και διαθεματικών προσεγγίσεων μπορεί να βελτιώσει την κατανόηση των μαθητών και να ενισχύσει τη μαθησιακή τους εμπειρία (Yang & Sianturi, 2017). Συνεπώς, η έλλειψη διεπιστημονικών συνδέσεων στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια αποτελεί πιθανό εμπόδιο στη βαθύτερη κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που αφορούν τη διάσταση των γνωστικών απαιτήσεων μετασχηματισμού της ημιτονοειδούς συνάρτησης, στα Μαθηματικά, κυριαρχούν οι μετατροπές μεταξύ αναπαραστάσεων (60%), ενώ στη Φυσική κυριαρχεί η επεξεργασία (57%), δηλαδή η ανάλυση και ερμηνεία μιας ήδη δοσμένης αναπαράστασης. Ενδιαφέρον στοιχείο αποτελεί η πλήρης απουσία σύνθετων μετασχηματισμών στα Μαθηματικά (0%), ενώ στη Φυσική το 18% των δραστηριοτήτων απαιτεί σύνθετους συλλογισμούς, ενισχύοντας τη βαθύτερη κατανόηση της συνάρτησης. Αυτό το εύρημα επιβεβαιώνει τις παρατηρήσεις των Tallman (2021) και Duval (2006), που υπογραμμίζουν ότι η μετάβαση μεταξύ αναπαραστάσεων είναι κρίσιμη για την εννοιολογική κατανόηση. Επίσης, συνάδει με τη μελέτη των Mosese και Ogbonnaya (2021), οι οποίοι επισημαίνουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στη μετάβαση από την αλγεβρική στη γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων, γεγονός που ενισχύεται όταν τα διδακτικά εγχειρίδια δεν προάγουν επαρκώς τη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων (Duval, 2006).

Σχετική έρευνα των Zohar και Dori (2003), υπογραμμίζει τη κρίσιμότητα της ενσωμάτωσης δραστηριοτήτων υψηλής γνωστικής απαίτησης για την προώθηση της βαθιάς μάθησης, της εννοιολογικής κατανόησης και της ανάπτυξης δεξιοτήτων ανώτερης τάξης στους μαθητές, τονίζοντας μάλιστα ότι αυτές δεν αποκλείουν ούτε τους μαθητές με χαμηλότερες επιδόσεις. Στην παρούσα ανάλυση, η έλλειψη δραστηριοτήτων υψηλής γνωστικής απαίτησης ως προς τη χρήση των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης (σύνθετος μετασχηματισμός) στα μαθηματικά εγχειρίδια, πιθανά περιορίζει την ικανότητα των μαθητών να διαχειριστούν πολλαπλές σημειωτικές μορφές ταυτόχρονα, γεγονός που έχει αναδειχθεί ως κεντρικός παράγοντας δυσκολίας (Martín-Fernández et al., 2019). Από την άλλη πλευρά, η καταγραφή δραστηριοτήτων που ευνοούν σύνθετο μετασχηματισμό στη Φυσική ενισχύει την άποψη ότι το διεπιστημονικό πλαίσιο μπορεί να ευνοήσει τη βαθύτερη μαθηματική κατανόηση, όπως υποστηρίζουν οι Zhou & Dong (2023). Συνεπώς, η απουσία τέτοιων μετασχηματισμών στα μαθηματικά εγχειρίδια ενδέχεται να συμβάλλει στη διατήρηση διαδικαστικών προσεγγίσεων, περιορίζοντας τη μαθησιακή διαδικασία.

Είναι προφανές πως η μελέτη μιας συνάρτησης στη σχολική πραγματικότητα επιδέχεται πολλές προσεγγίσεις, καθώς αφενός είναι μια πολυσύνθετη μαθηματική έννοια, αφετέρου αποτελεί εργαλείο διαφορετικών ρόλων και περιοχών εστίασης.

Έχει ενδιαφέρον ως επέκταση της έρευνας σε επόμενο στάδιο να μελετηθούν, να καταγραφούν και να κατηγοριοποιηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της Ελλάδας στην κατανόηση της έννοιας σε δύο επίπεδα, στο αντικείμενο των Μαθηματικών και στο αντίστοιχο της Φυσικής. Επίσης, θα μπορούσαν να διερευνηθούν οι προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών και Φυσικής γύρω από τη διδασκαλία των αναπαραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και να εντοπιστούν συσχετίσεις μεταξύ περιεχομένου εγχειριδίων, διδακτικών προσεγγίσεων και δυσκολιών στους μαθητές. Μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να εξετάσει την επίδραση εναλλακτικών διδακτικών στρατηγικών στην κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, καθώς και την ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού που ενισχύει τη μαθησιακή διαδικασία. Επιπλέον, η σύγκριση των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων με εκείνα άλλων χωρών θα μπορούσε να προσφέρει χρήσιμες πληροφορίες για βέλτιστες πρακτικές στη διδακτική των συναρτήσεων.

Τα ευρήματα της παρούσας μελέτης αναδεικνύουν σημαντικές πτυχές του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων σε σχέση με τις αναπαραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η ανάγκη για ενίσχυση της διαθεματικής σύνδεσης, η προώθηση πολλαπλών αναπαραστάσεων και η αύξηση των σύνθετων γνωστικών μετασχηματισμών αποτελούν βασικούς άξονες προς βελτίωση, με απώτερο στόχο τη διευκόλυνση της εννοιολογικής κατανόησης και της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών.

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Γ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Β., & Σβέρκος, Α. (2022). *Άλγεβρα Β' Τάξης Γενικού Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».
- Ιωάννου, Α., Ντάνος, Γ., Πήττας, Α., Ράπτης, Σ. (2022α). *Φυσική Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου Τεύχος Β', Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».
- Ιωάννου, Α., Ντάνος, Γ., Πήττας, Α., Ράπτης, Σ. (2022β). *Φυσική Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου Τεύχος Γ', Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».
- Καραβάκου, Μ., & Κυνηγός, Χ. (2018). Διερευνώντας με Ψηφιακά Μέσα για την κατανόηση τριγωνομετρικών εννοιών μέσω της περιοδικότητας. Στο Χ. Σκουμπούρη & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 3^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»* (σσ. 312-324). Πανεπιστήμιο Αιγαίου. ISBN: 978-960-86791-9-1

- Σαραφίδου, Γ.Ο. (2011). *Συνάρθρωση ποσοτικών και ποιοτικών προσεγγίσεων: η εμπειρική έρευνα*. Gutenberg.
- Bekene Bedada, T., & Machaba, F. (2022). The effect of GeoGebra on STEM students learning trigonometric functions. *Cogent Education*, 9(1), 2034240.
<https://doi.org/10.1080/2331186X.2022.2034240>
- Bouanfir, D., Abid, M., & El Wahbi, B. (2024). Difficulties in problem solving and understanding semiotic registers of numerical functions concepts. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*, 16(1), 154-163.
<http://www.ijtppe.com/IJTPE/IJTPE-2024/IJTPE-Issue58-Vol16-No1-Mar2024/23-IJTPE-Issue58-Vol16-No1-Mar2024-pp154-163.pdf>
- Chen, Y., & He, X. (2019, September). A comparative analysis on trigonometry textbooks from three countries. In *Proceedings of the third international conference on mathematics textbook research and development* (pp. 137-142).
<https://doi.org/10.17619/UNIPB/1-768>
- Chiu, M. S. (2016). The challenge of learning physics before mathematics: A case study of curriculum change in Taiwan. *Research in science education*, 46, 767-786.
<https://doi.org/10.1007/s11165-015-9479-5>
- Choi, E., & Kwon, O. N. (2020). Comparison of trigonometry in mathematics textbooks in Korea, Australia, and Finland. *Communications of Mathematical Education*, 34(3), 393-419. <https://doi.org/10.7468/jksmee.2020.34.3.393>
- Confrey, J., & Smith, E. (1991, October). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. In *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63).
- De Bock, D., Neyens, D., & Van Dooren, W. (2017). Students' ability to connect function properties to different types of elementary functions: An empirical study on the role of external representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 939-955. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9724-z>
- Dündar, S. (2015). Mathematics teacher-candidates' performance in solving problems with different representation styles: The trigonometry example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1379-1397.
<https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1396a>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103-131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>

- Ekici, C. (2010). *Treatments of trigonometric functions during reforms in the United States* (Doctoral dissertation, uga). https://getd.libs.uga.edu/pdfs/ekici_celil_201012_phd.pdf
- Elia, I., & Spyrou, P. (2006). How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *The Mathematics Enthusiast*, 3(2), 256-272. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1053>
- Fisher, D. M. (2018). Reflections on teaching system dynamics modeling to secondary school students for over 20 years. *Systems*, 6(2), 12. <https://doi.org/10.3390/systems6020012>
- Gagatsis, A. (1997). Problemi di Interpretazione Connessi con il Concetto di Funzione. *La Matematica e la sue Didattica*, 2, 132-149. https://www.academia.edu/59221452/Processi_di_traduzione_ed_il_concetto_di_funzione1
- Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational psychology*, 24(5), 645-657. <https://doi.org/10.1080/0144341042000262953>
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)80064-9](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9)
- Lehtonen, D. (2022). "Now I Get It!": Developing a Real-World Design Solution for Understanding Equation-Solving Concepts. <https://urn.fi/URN:ISBN:978-952-03-2250-2>
- Lipka, J., Adams, B., Wong, M., Koester, D., & Francois, K. (2019). Symmetry and measuring: Ways to teach the foundations of mathematics inspired by Yupiaq Elders. *Journal for Humanistic Mathematics*, 9(1), 107-157. <https://doi.org/10.5642/jhummath.201901.07>
- Marchi, D. J. (2012). *A study of student understanding of the sine function through representations and the process and object perspectives* (Master's thesis, The Ohio State University). http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1343253667
- Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2019). Meaning and Understanding of School Mathematical Concepts by Secondary Students: The Study of Sine and Cosine. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education*, 15(12). <https://dx.doi.org/10.25236/IJNDE.2023.051318>
- Mayring, P. (2021). Qualitative content analysis: A step-by-step guide. <http://digital.casalini.it/9781529766738>
- Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM*, 38, 269-280. <https://doi.org/10.1007/BF02652810>
- Mosese, N., & Ogbonnaya, U. I. (2021). GeoGebra and Students' Learning Achievement in Trigonometric Functions Graphs Representations and Interpretations. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 16(2), 827-846. <https://doi.org/10.18844/cjes.v16i2.5685>
- Namli, S. (2024). Comparing Ninth-Grade Students' Approaches to Trigonometric Ratio Problems through Real-World and Symbolic Contexts. *International Education Studies*, 17(4), 70-84. <https://doi.org/10.5539/ies.v17n4p70>

- Patsiomitou, S. (2019). A trajectory for the teaching and learning of the didactics of mathematics: Linking visual active representations. *Global Journals Incorporated United States*. <https://doi.org/10.34257/SPatTrajiCT>
- Rahmadani, H., Roza, Y., & Murni, A. (2020). Design of Information and Technology Based Teaching Materials in Mathematics Subjects of IT High School Pekanbaru Students. *Mathematics Education Journal*, 4(1), 17-28. <https://doi.org/10.22219/mej.v4i1.11467>
- Rosjanuardi, R., & Jupri, A. (2022). Epistemological Obstacle in Learning Trigonometry. *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(2), 5-25. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1350528>
- Tallman, M. A. (2021). Investigating the transformation of a secondary teacher's knowledge of trigonometric functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, 100869. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100869>
- Vaismoradi, M., & Snelgrove, S. (2019). Theme in qualitative content analysis and thematic analysis. <https://doi.org/10.17169/fqs-20.3.3376>
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112. <https://doi.org/10.1007/BF03217423>
- Yang, D. C., & Sianturi, I. A. (2017). An analysis of Singaporean versus Indonesian textbooks based on trigonometry content. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(7), 3829-3848. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00760a>
- Zhou, C., & Dong, J. (2023). Comparative Analysis of Old and New High School Math Textbooks—Taking. *International Journal of New Developments in Education*, 5(13). <https://dx.doi.org/10.25236/IJNDE.2023.051318>
- Zohar, A., & Dori, Y. J. (2003). Higher order thinking skills and low-achieving students: Are they mutually exclusive?. *The journal of the learning sciences*, 12(2), 145-181. https://doi.org/10.1207/S15327809JLS1202_1