# Ανεμοπετάλιο

Τόμ. 6, Αρ. 6 (2026)

Ανεμοπετάλιο



## Η μαθηματική απόδειξη μέσα από τη ρητορική τέχνη και την οπτικοποίηση

*Μάρθα - Αντωνία Σμέρλα*

doi: [10.12681/anem.45031](https://doi.org/10.12681/anem.45031)

# Η μαθηματική απόδειξη μέσα από τη ρητορική τέχνη και την οπτικοποίηση

**Μάρθα- Αντωνία Σμέρλα**

Εκπαιδευτικός, M.ed, MBA, Μουσικό Σχολείο Καλαμάτας «Μαρία Κάλλας»

amandasmerla@gmail.com

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

*Η ρητορική και η οπτικοποίηση αποτελούν ισχυρά εργαλεία επικοινωνίας με εφαρμογές σε ποικίλα επιστημονικά πεδία, καθώς ενισχύουν τόσο τη σαφήνεια όσο και την πειστικότητα της παρουσίασης σύνθετων εννοιών. Η ρητορική παρέχει το θεωρητικό πλαίσιο για την οργάνωση και την πειστική έκθεση επιχειρημάτων, ενώ η οπτικοποίηση διευκολύνει τη μετάβαση από το αφηρημένο στο κατανοητό. Στο παρόν άρθρο, η μαθηματική απόδειξη εξετάζεται όχι μόνο ως αντικείμενο αυστηρά μαθηματικής έρευνας, αλλά και ως μορφή κειμένου που επιδέχεται ρητορική και επικοινωνιακή ανάλυση. Η διεπιστημονική σύνδεση ρητορικής, μαθηματικών και οπτικοποίησης μπορεί να εμπλουτίσει τη διδασκαλία και την παρουσίαση μαθηματικών αποδείξεων, ανοίγοντας νέες προοπτικές για βαθύτερη κατανόηση και αποτελεσματική μάθηση.*

***Λέξεις κλειδιά:*** *ρητορική, πειθώ, οπτικοποίηση, μαθηματική απόδειξη*

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το άρθρο αυτό προσεγγίζει τα μαθηματικά μέσα από μια ρητορική οπτική, εξετάζοντας την απόδειξη όχι απλώς ως αυστηρή ακολουθία λογικών βημάτων, αλλά ως ένα κείμενο που επικοινωνεί και πείθει. Παράλληλα, η οπτικοποίηση περιγράφεται ως η διαδικασία μετασχηματισμού μιας αφηρημένης ιδέας σε ορατό, συγκεκριμένο σχήμα. Η προσέγγιση αυτή αναδεικνύει τη διασύνδεση των μαθηματικών με άλλες επιστήμες, συνδυάζοντας τη μαθηματική λογική με στοιχεία από διαφορετικά γνωστικά πεδία, ώστε μαθητές και εκπαιδευτικοί να αντιληφθούν την απόδειξη όχι μόνο ως τεχνική διαδικασία αλλά και ως μέσο επιστημονικής σκέψης και πειστικού λόγου.

**Η ΡΗΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ**

Η απόδειξη αποτελεί θεμέλιο λίθο της μαθηματικής σκέψης και της επιστημονικής εγκυρότητας. Παρουσιάζεται συνήθως ως αυστηρή ακολουθία λογικών βημάτων που οδηγούν σε τεκμηριωμένο συμπέρασμα. Ωστόσο, πέρα από τη λογική της οργάνωσής της, η απόδειξη λειτουργεί και ως μορφή λόγου, απευθυνόμενη σε έναν αναγνώστη και επιδιώκοντας να πείσει, να καθοδηγήσει και να διαφωτίσει. Αυτή η διάσταση αναδεικνύεται μέσα από τα εργαλεία της ρητορικής. Η ρητορική, ήδη από τον Αριστοτέλη, νοείται ως η τέχνη της πειθούς (Λυπουρλής, 2002). Στον πυρήνα της βρίσκονται τρία μέσα πειθούς: το ήθος, δηλαδή η αξιοπιστία και το κύρος του ομιλητή, το πάθος, η συναισθηματική επίδραση στο ακροατήριο και ο λόγος, η λογική δομή των επιχειρημάτων.

Στα μαθηματικά, τα ρητορικά αυτά μέσα προσλαμβάνουν ιδιαίτερο χαρακτήρα: το ήθος εκφράζεται μέσα από την εγκυρότητα των αξιωμάτων και την αξιοπιστία του συγγραφέα· το πάθος συνδέεται με την ψυχολογική ανταπόκριση του αναγνώστη σε μια καλαίσθητη και σαφή σκέψη· ο λόγος αντιστοιχεί στη συνεκτική αλυσίδα λογικών βημάτων που εξασφαλίζει την εγκυρότητα της απόδειξης. Όταν συνδυάζονται αρμονικά, η απόδειξη γίνεται όχι μόνο σωστή αλλά και πειστική και εμπνευσμένη (Easterling, 2000).Ταυτόχρονα, ο ρητορικός λόγος έχει αρχή, μέση και τέλος, και οι ενότητές του συνδέονται με συνοχή (Δάλκος, 2012). Αν μεταφέρουμε αυτή την αριστοτελική θεώρηση στο πεδίο των μαθηματικών, η απόδειξη αποτελεί ένα οργανωμένο κείμενο, βασισμένο σε προκείμενες που οδηγούν σε τεκμηριωμένο συμπέρασμα. Έτσι, η μαθηματική απόδειξη δεν είναι απλώς λογικό κατασκεύασμα, αλλά και μορφή επικοινωνίας που καθιστά την αλήθεια ενός ισχυρισμού προσιτή και αποδεκτή.

Η ρητορική διάσταση της απόδειξης δεν αποτελεί σύγχρονη ερμηνεία αλλά υπήρξε παρούσα ήδη από την αρχαιότητα. Ο Netz έδειξε ότι τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν μέσα από ένα ιδιάζον ρητορικό ύφος, όπου η διάταξη των προτάσεων, η επιλογή των όρων και η χρήση διαγραμμάτων λειτουργούσαν όχι απλώς ως εργαλεία λογικής αλλά ως μέσα πειθούς (Netz R., 2009). Η μαθηματική απόδειξη, επομένως, ήταν ήδη από τα ελληνιστικά χρόνια μια ρητορική πρακτική, που στόχευε στη νομιμοποίηση της μαθηματικής αλήθειας μέσα σε ένα συγκεκριμένο επιστημονικό και κοινωνικό πλαίσιο.

Την ίδια κατεύθυνση ακολουθεί και η κοινωνιολογική θεώρηση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας. Η μαθηματική απόδειξη, όπως και κάθε επιστημονική πρακτική, λειτουργεί ως μορφή ρητορικής που απευθύνεται σε μια κοινότητα με συγκεκριμένα κριτήρια εγκυρότητας. Η αποδοχή μιας απόδειξης εξαρτάται όχι μόνο από την ορθότητα των λογικών επιχειρημάτων της, αλλά και από το κατά πόσο τα επιχειρήματα της ανταποκρίνονται στις προσδοκίες και τις συμβάσεις του μαθηματικού ακροατηρίου. Έτσι, η πειθώ της απόδειξης διαμορφώνεται μέσα σε μια κοινότητα λόγου, όπου ο μαθηματικός πρέπει να χρησιμοποιήσει τόσο τυπικά όσο και ρητορικά μέσα, για να εξασφαλίσει την αποδοχή (McCloskey, 1998).

Η δυναμική των μαθηματικών αποδείξεων μπορεί επίσης να κατανοηθεί μέσα από την έννοια της «ρητορικής διαλεκτικής», δηλαδή μέσα από την αντιπαράθεση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, που δοκιμάζουν και αναθεωρούν τις αποδείξεις (Lakatos, 2012). Οι αποδείξεις δεν γεννιούνται ως ολοκληρωμένα λογικά οικοδομήματα, αλλά διαμορφώνονται μέσω αντιρρήσεων, αναθεωρήσεων και επαναδιατυπώσεων. Κάθε νέα απόδειξη επιδιώκει να απαντήσει στις προηγούμενες και να θεμελιώσει την εγκυρότητα της μέσα από επιχειρήματα που έχουν διαμορφωθεί με λογική οργάνωση. Μέσω αυτής της διαλεκτικής, η πειθώ της απόδειξης ενισχύεται, καθώς γίνεται φανερό όχι μόνο το τελικό αποτέλεσμα, αλλά και η πορεία της σκέψης που το δημιούργησε.

Η μαθηματική απόδειξη αποτελεί, επομένως, ένα αυστηρό λογικό οικοδόμημα, άλλα ταυτόχρονα κείμενο με γλωσσική και επικοινωνιακή διάσταση. Η δομή της θυμίζει ρητορικό λόγο: ξεκινά με έναν εισαγωγικό πρόλογο που θέτει το πλαίσιο και καθορίζει τους ορισμούς, συνεχίζεται με την ανάπτυξη του συλλογισμού, όπου κάθε βήμα συνδέεται με σαφείς λεκτικούς δείκτες («επομένως», «άρα», «υποθέτουμε ότι…») και καταλήγει σε ένα συμπέρασμα, που συνοψίζει το αποτέλεσμα και αναδεικνύει τη σημασία του. Η γλωσσική ακρίβεια, η αποφυγή ασάφειας και η συνεπής λογική πορεία αποτελούν βασικές προϋποθέσεις της πειστικότητας. Όπως τονίζει ο Pólya (1949), μια απόδειξη, που δεν αιτιολογεί επαρκώς τα βήματά της, μπορεί να αποθαρρύνει τον αναγνώστη και να τον αφήσει χωρίς τα απαραίτητα εργαλεία για νέα μαθηματικά προβλήματα. Αντίθετα, μια καλά διατυπωμένη, πλήρως αιτιολογημένη απόδειξη λειτουργεί ως πολύτιμο μέσο μάθησης και πηγή δημιουργικότητας.

Σύγχρονες μελέτες στη φιλοσοφία των μαθηματικών (Morris, 2020) τονίζουν ότι η αξιολόγηση μιας απόδειξης δεν περιορίζεται στην αυστηρή εγκυρότητά της. Σημαντικές θεωρούνται επίσης ποιοτικές παράμετροι, όπως η επεξηγηματική δύναμη, η καθαρότητα, η αρμονία και η αισθητική. Μια καλογραμμένη απόδειξη δεν μεταδίδει απλώς γνώση, αλλά καλλιεργεί την κατανόηση και ενθαρρύνει τη δημιουργία νέων ιδεών, συμβάλλοντας ουσιαστικά στη διάδοση και την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης. Με αυτό το πρίσμα, η μαθηματική απόδειξη αποκαλύπτεται όχι ως ψυχρό λογικό σχήμα αλλά ως ζωντανή μορφή λόγου που συνδυάζει αυστηρότητα και πειθώ: το ήθος καλλιεργεί εμπιστοσύνη, το πάθος ενισχύει την εμπλοκή του αναγνώστη, ενώ ο λόγος διασφαλίζει την αλήθεια και τη συνοχή. Μέσα από αυτή τη σύνθεση, η απόδειξη μετατρέπεται από εργαλείο επαλήθευσης σε μέσο βαθύτερης κατανόησης, διάδοσης και εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης.

**ΡΗΤΟΡΙΚΗ ΚΑΙ Η ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ**

Η ρητορική έχει πλέον επεκταθεί πέρα από το λεκτικό λόγο, ώστε να συμπεριλάβει και οπτικές μορφές επιχειρηματολογίας, όπως τα διαγράμματα και την οπτικοποίηση δεδομένων (Prantl, 2025). Στα μαθηματικά, η οπτικοποίηση δεν αποτελεί απλώς συνοδευτικό υλικό ενός λογικού επιχειρήματος, αλλά λειτουργεί ως μέρος της πειθούς, καθώς διαμορφώνει τον τρόπο με τον οποίο ο αναγνώστης προσλαμβάνει και αξιολογεί την απόδειξη.

Οι αρχές της πειστικής επικοινωνίας του Campbell, στο έργο του *Φιλοσοφία της Ρητορικής*, μπορούν να προσαρμοστούν στον σχεδιασμό οπτικών αναπαραστάσεων μαθηματικών εννοιών, ενισχύοντας τόσο την κατανόηση όσο και την πειστικότητα (Campbell, 2023). Η σύνδεση λογικής και φαντασίας ευθυγραμμίζεται με τη λειτουργία των διαγραμμάτων στη μαθηματική σκέψη. Τα οπτικά στοιχεία ενεργοποιούν όχι μόνο τη λογική ακολουθία των βημάτων αλλά και την κατανόηση. Στο πλαίσιο αυτό οι επτά περιστάσεις του Campbell μπορούν να λειτουργήσουν ως ρητορικές αρχές σχεδιασμού οπτικοποίησεων μαθηματικών δεδομένων, είτε αυτά αφορούν αποδείξεις, είτε περιγραφές προβλημάτων.

Επιπλέον, η οπτικοποίηση στην απόδειξη δεν αφορά μόνο την κατανόηση, αλλά και τη νομιμοποίηση της μαθηματικής αλήθειας (Duval, 1999). Η εναλλαγή ανάμεσα σε λεκτικές, συμβολικές και οπτικές μορφές είναι απαραίτητη για τη μαθηματική σκέψη. Οι οπτικές αναπαραστάσεις, όταν χρησιμοποιούνται σωστά, δημιουργούν την ικανότητα στον αναγνώστη να βλέπει την απόδειξη και να οδηγείται στο συμπέρασμα. Πρόκειται για μια μορφή ρητορικής λειτουργίας, που ενισχύει τόσο το ήθος της ακρίβειας όσο και το λόγο της εσωτερικής συνοχής. Οι σύγχρονες θεωρίες οπτικής επιχειρηματολογίας υποστηρίζουν ότι οι εικόνες μπορούν να έχουν την ίδια αυστηρότητα που έχει και ο λεκτικός λόγος (Blair, 2012). Παρέχουν πλαίσιο, ιεράρχηση και στοιχεία θεμελιώδη για την παρουσίαση μιας μαθηματικής απόδειξης. Η αισθητική διάσταση αποτελεί επίσης ρητορικό στοιχείο. Η επιλογή χρώματος, συμμετρίας και οπτικής ισορροπίας δεν είναι ουδέτερη αλλά επηρεάζει την οργάνωση της πληροφορίας και την αξιοπιστία της παρουσίασης (Moreau, 1998). Ένα καθαρό και συμμετρικό διάγραμμα ενισχύει την πειστικότητα του επιχειρήματος.

Η εφαρμογή αυτών των αρχών δείχνει ότι η οπτικοποίηση συμμετέχει ενεργά στη ρητορική της απόδειξης. Το συναίσθημα (πάθος) κινητοποιείται μέσα από τη νοηματική ανάδειξη βασικών στοιχείων, η αξιοπιστία (ήθος) ενισχύεται μέσω ακρίβειας και σαφήνειας και η λογική πειθώ (λόγος) δομείται πάνω στη γεωμετρία των οπτικών σχέσεων. Έτσι, η ρητορική και η οπτική αναπαράσταση δεν αποτελούν απλώς παράλληλες πρακτικές, αλλά συμπράττουν στην δημιουργία πειστικών και κατανοητών μαθηματικών αποδείξεων.

## Η ΡΗΤΟΡΙΚΗ ΤΕΧΝΗ ΚΑΙ Η ΔΥΝΑΜΗ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ : ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

Η εφαρμογή της ρητορικής και της οπτικοποίησης στη μαθηματική σκέψη γίνεται εμφανής στο Θεώρημα του Θαλή, το οποίο θεμελιώνει την έννοια της αναλογίας μέσω παράλληλων ευθειών και ομοίων τριγώνων (Αργυρόπουλος, 2017). Το θεώρημα αυτό αποτελεί ένα από τα πρώτα παραδείγματα συστηματικής μαθηματικής απόδειξης, σηματοδοτώντας τη μετάβαση από την εμπειρική πρακτική στη θεωρητική θεμελίωση.

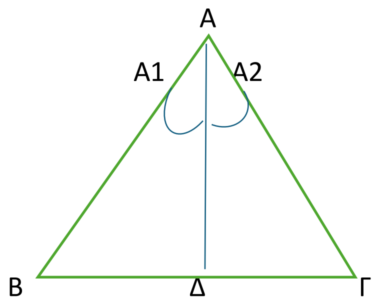
Η κλασική εφαρμογή του στη μέτρηση του ύψους της πυραμίδας αναδεικνύει τη δύναμη της αναλογικής σκέψης (Heath, 1981). Ο Θαλής αξιοποίησε τη σκιά του και τη σκιά της πυραμίδας για να προσδιορίσει το ύψος της, μετατρέποντας μια απλή παρατήρηση σε επιστημονική διαδικασία. Η οπτική απεικόνιση, λειτουργεί ως γέφυρα ανάμεσα στη διαισθητική εικόνα και στην αξιωματική λογική των μαθηματικών (Netz, 1998; Knorr, 1977). Η αφήγηση συνδυάζει ιστορία και καθημερινή εμπειρία, καθιστώντας την απόδειξη πειστική και κατανοητή.

Από ρητορική σκοπιά, η παρουσίαση συγκροτεί μια καθαρή και δομημένη λογική ακολουθία. Η τριμερής διάσταση του ήθους, του πάθους και του λόγου εκδηλώνεται χαρακτηριστικά: ο λόγος φαίνεται στη σαφή αναλογική σκέψη, το ήθος στην αξιοπιστία του Θαλή, το πάθος στη δραματικότητα και πρακτική χρησιμότητα της μέτρησης της πυραμίδας (Proclus, 1992). Η οπτικοποίηση μετατρέπει σύνθετες λογικές δομές σε άμεσα προσλήψιμες μορφές, διευκολύνοντας τόσο την κατανόηση όσο και την πειθώ (Tufte, 2001).

Ας εξετάσουμε την πρόταση ότι «Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες». Η μετάβαση από την υπόθεση στο συμπέρασμα δεν αποτελεί μόνο μια τυπική λογική διαδικασία, αλλά και μια ρητορικά δομημένη πορεία που αποσκοπεί στο να πείσει τον αναγνώστη ότι το συμπέρασμα είναι αναγκαίο (Netz R. , 2009; Hanna, 2000). Η γεωμετρική απόδειξη συνιστά ένα είδος ρητορικού λόγου, όπου η σειρά των βημάτων, η επιλογή της διατύπωσης και η συνοδευτική οπτικοποίηση λειτουργούν ως μέσα πειθούς με διανοητική έννοια (Stylianides, 2023) (Toulmin, 2012). Η οπτικοποίηση οργανώνει τον χώρο της σκέψης, επιτρέπει στον αναγνώστη να αντιληφθεί τη δομή της υπόθεσης και ενισχύει την κατανόηση της λογικής ακολουθίας, πριν ακόμα εκτυλιχθεί λεκτικά (Stylianides, 2023).

Συγκεκριμένα, θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ, όπου ΑΒ=ΑΓ. Με τη βοήθεια του διαγράμματος γίνεται άμεσα αντιληπτή η συμμετρία της υπόθεσης. Φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α, η οποία χωρίζει τη γωνία σε δυο ίσες γωνίες, Α1 και Α2 και ταυτόχρονα διαιρεί το τρίγωνο ΑΒΓ σε δυο μικρότερα τρίγωνα, τα ΑΒΔ και ΑΓΔ. Η κατασκευή αυτή αποτελεί παράδειγμα γεωμετρικής απόδειξης με εξηγητικό χαρακτήρα, δηλαδή μιας διαδικασίας που αποκαλύπτει γιατί ισχύει το αποτέλεσμα, όχι μόνο ότι ισχύει (De Villiers, 2011). Στο διάγραμμα είναι εμφανές ότι τα δυο τρίγωνα έχουν ίσες πλευρές ΑΒ=ΑΓ, κοινή την πλευρά ΑΔ και ίσες γωνίες στην κορυφή Α. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα, αφού ΑΒ=ΑΓ,ΑΔ=ΑΔ και Α1=Α2 , Και συνεπώς, οι αντίστοιχες γωνίες τους στις βάσεις, δηλαδή οι γωνίες Β και Γ του αρχικού τριγώνου, είναι ίσες. Άρα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες (Τσολάκης, 2020). Στο πλαίσιο του μοντέλου επιχειρηματολογίας (Toulmin, 2012), η υπόθεση, η κατασκευή και η λογική αξιολόγηση συνθέτουν ένα ολοκληρωμένο επιχείρημα που αιτιολογεί το συμπέρασμα.

Η όλη διαδικασία αναδεικνύει ότι η οπτικοποίηση και η ρητορική διάταξη της απόδειξης δεν είναι πρόσθετα στοιχεία, άλλα αναπόσπαστα μέρη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας. Από την εποχή του Θαλή έως τον Ευκλείδη, η γεωμετρία αξιοποίησε συστηματικά εικόνες και ρητορικά δομημένο λόγο, για να καθοδηγήσει το συλλογισμό και να πείσει τον αναγνώστη (Netz R. , 2009) (Hanna, 2000). Έτσι, η παρούσα απόδειξη συνιστά παράδειγμα της αλληλεξάρτησης λόγου και εικόνας, όπου η ρητορική τέχνη και η δύναμη της οπτικοποίησης συνεργάζονται, για να κάνουν τη γνώση σαφή, αναγκαία και πειστική. Συνολικά, η σύνθεση λογικής αναλογίας, οπτικού επιχειρήματος και πρακτικής αφήγησης δημιουργεί ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο κατανόησης, ενισχύοντας τόσο την εννοιολογική πρόσληψη όσο και τη βαθύτερη εμβάθυνση στη μαθηματική γνώση (Heath, 1981; Netz, 1999).




**Εικόνα 1:** Τρίγωνο ΑΒΓ

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ**

Η μελέτη της μαθηματικής απόδειξης ως ρητορικού κειμένου αναδεικνύεται σε μια πολλά υποσχόμενη διεπιστημονική προοπτική. Η ρητορική διάσταση δεν μειώνει την αυστηρότητα της μαθηματικής σκέψης· αντιθέτως, τη συμπληρώνει συνδέοντας την αλήθεια με την κατανόηση και την πειστικότητα. Τα μαθηματικά και η ρητορική υπηρετούν την πειθώ με διαφορετικά μέσα, και όταν συνδυάζονται, η απόδειξη μετατρέπεται σε ζωντανό κείμενο κατανόησης, διερεύνησης και έμπνευσης.

Στο σύγχρονο εκπαιδευτικό περιβάλλον, η εξατομίκευση της μάθησης, η αξιοποίηση οπτικοποιήσεων που ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα και τις εμπειρίες των μαθητών, και ο σχεδιασμός διδακτικού υλικού με στόχο την πειθώ, ενισχύουν ουσιαστικά την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας. Η διεπιστημονική προσέγγιση της απόδειξης ως λογικής δομής, ρητορικού κειμένου και οπτικής αναπαράστασης, διευρύνει τις δυνατότητες για βαθύτερη, βιωματική και ανθρωποκεντρική μαθηματική παιδεία ανοίγοντας παράλληλα δρόμους για περαιτέρω έρευνα και καινοτομία.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Blair, J. A. (2012). *The Rhetoric of Visual Arguments.* Springer.

Campbell, G. (2023). The Philosophy of Rhetoric.

De Villiers, M. (2011). The role of proof in mathematics. *Pythagoras*, σσ. 17-24.

Duval, R. (1995). Semiosis et pensée humaine: sémiotiques registres et apprentissages intellectuels. *Berna: Peter Lang*.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. σσ. 3-26.

Easterling, K. (2000). *Ιστορία της Αρχαίας Ελληνικής Λογοτεχνίας.* Αθήνα: Παπαδήμα.

Espinoza-Vásquez, G. H.-R.-H. (2025). Teaching Thales's Theorem: Relations between Suitable Mathematical Working Spaces and Specialised Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, σσ. 118, 271-293.

Francois, M. P. (1998). Τα πάθη: Γενική Προβληματική. *D.a.t.a*, σ. 16.

Hanna, G. (2000). A critical examination of three factors in the Decline of proof. σσ. 21-33.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Stydies in Mathematics*, σσ. 44, 5-23.

Heath, S. T. (1981). *A History of Greek Mathematics.* New York: Dover Publications, Inc.

Knorr, W. R. (1977). The Evolution of the Euclidean Elements, A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry. *History of Science*, σσ. 216-227.

Lakatos, I. (2012). *Proofs and Refutations:The logic of mathematical discovery.* cambridge university press.

McCloskey, D. N. (1998). *The rhetoric of economics.* university of wisconsin press.

Moreau, P. -F. (1998). Τα Πάθη. *D.a.t.a.*, σ. 16.

Morris, R. (2020). Motivated proofs: what they are, why they matter and how to write them. *The Review of Symbolic Logic*, σ. 28.

Netz, R. (1998). Greek Mathematical Diagrams: Their Use and their meaning. *For the Learning of Mathematics*, σσ. Vol. 18, No. 3, pp. 33-39.

Netz, R. (2009). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics.* Cambridge University Press.

Prantl, V. T. (2025). Untangling Rhetoric, Pathos, and Aesthetics in Data.

Proclus. (1992). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* USA: Princeton University Press.

Stylianides, G. S.-R. (2023). Proof and proving in school and university mathematics education. *Mathematics Education*, σσ. 1-13.

Toulmin, S. (2012). *The uses of argument.* Cambridge University Press.

Tufte, E. R. (2001). *The Visual Display of Quantitative Information.* Cheshire: Graphics Press.

Αργυρόπουλος, Η. Β. (2017). *Ευκλείδια Γεωμετρία Τεύχος Α΄.* Διόφαντος.

Δάλκος, Κ. Δ. (2012). *Ρητορικά Κείμενα.* ΟΕΔΒ.

Λυπουρλής, Δ. (2002). *Αριστοτέλης Ρητορική.* Θεσσαλονίκη: Ζήτρος.

Τσολάκης, Χ. Α. (2020). *Έκφραση Έκθεση α΄τεύχος.* Διόφαντος.