Τετράδια Ανάλυσης Δεδομένων

Τόμ. 20, Αρ. 1 (2024)

Τετράδια Ανάλυσης Δεδομένων - 20

Στρατηγικές νοερής επίλυσης γραφικών έργων με συναρτήσεις, μαθητών Γ΄ Λυκείου: Στρατηγική ανάλυσης περιεχομένου συνεντεύξεων με μεθόδους της Ανάλυσης Δεδομένων

Νικόλαος Παπαφιλίππου, Θωμάς Κουτσός, Άγγελος Μάρκος, Γεώργιος Μενεξές

Στρατηγικές νοερής επίλυσης γραφικών έργων με συναρτήσεις, μαθητών Γ΄ Λυκείου: Στρατηγική ανάλυσης περιεχομένου συνεντεύξεων με μεθόδους της Ανάλυσης Δεδομένων

Νικόλαος Παπαφιλίππου[1], Θωμάς Κουτσός, Άγγελος Μάρκος[2], Γεώργιος Μενεξές[1]

[1]Εργαστήριο Γεωργίας (Αγροκομίας), Τμήμα Γεωπονίας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 54124 Θεσσαλονίκη
[2]Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, 68100 Αλεξανδρούπολη

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Νοερά μαθηματικά,
Συναρτήσεις,
Στρατηγικές επίλυσης,
Ευελιξία,
Παραγοντική Ανάλυση Αντιστοιχιών,
Ιεραρχική Ανάλυση Συστάδων,
Biplot Ανάλυση,
Παρεμβολή Kriging

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Νικόλαος Παπαφιλίππου,
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο
Εργαστήριο Γεωπονίας,
Τμήμα Γεωπονίας
Θεσσαλονίκης, 54124
Θεσσαλονίκη
Email: npapafil@agro.auth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μεθοδολογικό σχήμα χρήσης μεθόδων της Ανάλυσης Δεδομένων (AFC, HCA, Biplot Analysis, Kriging Interpolation) για την επεξεργασία δεδομένων λόγου, τα οποία συλλέχθηκαν μέσω κλινικής συνέντευξης από 42 μαθητές Γ΄ Λυκείου, που αφορούσαν τις απαντήσεις τους σε εννέα γραφήματα δύο συναρτήσεων (γραμμικής-σταθερής ή τετραγωνικής-σταθερής ή δύο γραμμικές) και ζητούνταν να βρεθεί νοερά το αποτέλεσμα του αθροίσματος ή της διαφοράς τους. Η ανάλυση των ευρημάτων έδειξε, ότι οι μαθητές κατά τη νοερή επίλυση έργων με συναρτήσεις (γραμμικές\τετραγωνικές) ανέπτυξαν άλλοτε αλγεβρικές/παραμετρικές στρατηγικές, άλλοτε γραφικές/γεωμετρικές και άλλοτε γραφικές/αριθμητικές ή συνδυασμό αυτών. Η επιλογή στρατηγικής εξαρτάται τόσο από τα χαρακτηριστικά του μαθητή (γνώσεις, προτιμήσεις, εμπειρία), όσο και τη φύση του έργου. Σε έργα με γραμμικές συναρτήσεις, οι μαθητές επέλεξαν κατά σημεία προσεγγίσεις, αλγεβρικές-αριθμητικές ή συνδυασμό τους, ενώ σε έργα με καμπύλες επέλεξαν ολιστικές προσεγγίσεις, γραφικές-γεωμετρικές. Επίσης, οι μαθητές με καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά, έδειξαν μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν και είχαν περισσότερες επιτυχίες. Μέσω της AFC αναδείχθηκε κυρίως η αντίθεση μεταξύ των κατά σημείων προσεγγίσεων και των ολιστικών προσεγγίσεων καθώς και η αντίθεση μεταξύ των συνδυαστικών στρατηγικών γραφική/γεωμετρική-αριθμητική και γραφική/γεωμετρική-αλγεβρική. Η μέθοδος της χωρικής παρεμβολής Ordinary Kriging χρησιμοποιήθηκε για την προβολή των ποσοστών επιτυχίας των μαθητών στις στρατηγικές και το αποτέλεσμα της παρεμβολής με τη μορφή χάρτη με ισοκαμπύλες προβλήθηκε στο παραγοντικό επίπεδο της AFC.

Εισαγωγή

Τα νοερά μαθηματικά (mental mathematics) αποτελούν μια νέα πτυχή της διδασκαλίας των μαθηματικών. Οι περισσότερες όμως μελέτες, αν όχι όλες, για τα νοερά μαθηματικά όπως επισημαίνει ο Proulx (2015), έχουν επικεντρωθεί στους αριθμούς. Οι θετικές επιδράσεις των νοερών υπολογισμών στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και στη γενικότερη βελτίωση των δεξιοτήτων των μαθητών στη διαχείριση μαθηματικών προβλημάτων (Boule, 2008· Threlfall, 2002, 2009), οδήγησε στον προβληματισμό αν οι νοερές στρατηγικές είναι προσαρμόσιμες και σε μαθηματικά αντικείμενα διαφορετικά των αριθμών, όπως συναρτήσεις. Η ανάπτυξη ενός νοερού χάρτη μιας μαθηματικής έννοιας, σύμφωνα με το DfES (2005), βοηθά τους μαθητές να διακρίνουν συνδέσεις και να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

Από την άλλη, η έννοια της συνάρτησης είναι από τις πιο σημαντικές έννοιες στην εκμάθηση των μαθηματικών (Dubinsky&Harel,1992), έχοντας βασική θέση στα προγράμματα σπουδών. Ωστόσο, θεωρείται από πολλούς ερευνητές ότι είναι μία από τις λιγότερο κατανοητές και δυσκολότερες έννοιες για μάθηση (Eisenberg,1992), όπου πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες και δημιουργούν παρανοήσεις. Πηγή δυσκολίας, αποτελεί η σύνθετη προσέγγιση της έννοιας. Μία από τις σημαντικές δυσκολίες στην προσέγγιση αυτή είναι οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης (λεκτικά, πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Η δυσκολία των μαθητών προκύπτει από την ανάγκη σύνδεσης και μετάφρασης μεταξύ αυτών των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για συγκεκριμένες πτυχές της έννοιας αλλά δεν την περιγράφει πλήρως (Kaldrimidou & Ikonomou, 1992). Η κατάκτηση της έννοιας απαιτεί οι διαφορετικές αναπαραστάσεις να αντιμετωπίζονται ως διαφορετικές όψεις του ίδιου αντικειμένου. Η συνάρτηση όμως πέρα από τις διαφορετικές όψεις εμπεριέχει υπό έννοιες όπως πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, τιμή της συνάρτησης, μεταβλητές (ανεξάρτητη και εξαρτημένη) οι οποίες έχουν τις δικές τους δυσκολίες να κατανοηθούν. Άλλες έννοιες πού εμπλέκονται στην έννοια της συνάρτησης είναι ο αριθμός ως μέγεθος και η σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο μεγεθών, η συμμεταβολή, η ποσότητα, η αναλογία.

Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση των συμπεριφορών των μαθητών κατά τη νοερή διαχείριση συναρτήσεων και ειδικότερα τις στρατηγικές που αναπτύσσουν όταν επιλύουν έργα με συναρτήσεις νοερά σε γραφικό περιβάλλον, χωρίς δηλαδή χαρτί και μολύβι ή οποιοδήποτε άλλο υπολογιστικό υλικό, καθώς και ο βαθμός ευελιξίας μεταξύ των στρατηγικών σε σχέση με τα έργα αυτά, με τη χρήση μεθόδων της Ανάλυσης Δεδομένων (Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστιχιών, Ιερχική Ταξινόμηση σε Συστάδες, Biplot Ανάλυση, Χωρική Παρεμβολή Kriging). Ο όρος νοερή διαχείριση των συναρτήσεων αναφέρεται στις διαδικασίες μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης (Duval,2006· Threlfall, 2002), ενώ ο όρος ευελιξία αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ των διαφορετικών στρατηγικών και να τις εναλλάσσει, με γνώμονα τη γρήγορη και σωστή απάντηση (Threlfall, 2002).

Η συνάρτηση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Η ιστορική συμπύκνωση της έννοιας της συνάρτησης στο πλαίσιο των προγραμμάτων σπουδών παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες κατά τη διδακτική της μεταφορά. Στα διδακτικά εγχειρίδια παραθέτονται κατά συγκεχυμένο τρόπο οι διάφορες επιστημολογικές προσεγγίσεις που οδήγησαν στο νόημα της συνάρτησης, μέσα από τη μακρόχρονη ιστορική της εξέλιξη. Σύμφωνα με την Sierpinska (1992), οι μαθητές παγιδεύονται σε μια σειρά εμποδίων που αποτελούν γενικεύσεις των αποσπασματικών σχολικών εμπειριών, που συγκροτούν ένα αόριστο συνονθύλευμα αποσπασματικών πληροφοριών, απομνημονεύσεων, διάσπαρτων συνιστωσών, όπως τύποι, γραφήματα, διαγράμματα, προφορική περιγραφή σχέσεων, ένα αόριστο δηλαδή σχήμα συνειρμών.

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης περιλαμβάνει την ικανότητα να μπορεί κάποιος να την αναπαριστά με διάφορους τρόπους (αλγεβρικά, γραφικά, πίνακα τιμών, λεκτικά), καθώς επίσης και την ικανότητα να ερμηνεύει τις πληροφορίες που περιέχονται σε όλες αυτές τις αναπαραστάσεις και να μετακινείται ευέλικτα μεταξύ τους όταν μια αναπαράσταση ταιριάζει καλύτερα για να ορίσει ή να μεταδώσει κάποια πληροφορία. Οι μαθητές συχνά αναγνωρίζουν τη συνάρτηση σε μια μόνο αναπαράστασή της είτε τη συμβολική είτε τη γραφική (Vinner, 1983· Sfard, 1992· Zachariades κ.α., 2002· Markovits κ.α., 1993). Οι Markovits κ.α. (1993), διαπίστωσαν τη δυσκολία των μαθητών κατά τη μεταφορά από τη γραφική μορφή στην αλγεβρική, ενώ οι Elia κ.α. (2008) και οι Tall & Akko (2002), διαπίστωσαν τη δυσκολία στην μετατροπή από το αλγεβρικό στο λεκτικό περιεχόμενο μιας σχέσης. Δυσκολίες διαπιστώθηκαν ακόμη στη σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας κατά την αλλαγή πεδίου αναπαράστασης (Zachariades κ.α., 2002· Gagatsis et al., 2004· Elia κ.α., 2008· Hitt, 1998· Even, 1998· Knuth, 2000· Sfard, 1992).

Η Sfard (1992), υποστηρίζει ότι για να συλλάβει κάποιος μια αφηρημένη μαθηματική έννοια όπως η συνάρτηση, υπάρχουν δύο θεμελιώδεις τρόποι, δομικά, ως αντικειμενικές οντότητες και λειτουργικά ως υπολογιστικές διεργασίες. Παρατήρησε ότι η έννοια της συνάρτησης ήταν το αποτέλεσμα μιας μακράς αναζήτησης μαθηματικών μοντέλων για φυσικά φαινόμενα που άνθισε μετά την ανάπτυξη του αλγεβρικού συμβολισμού, για αυτό και αρχικά συνδέθηκε με την αλγεβρική διαδικασία, ενώ διαπίστωσε ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση με τη λειτουργική προσέγγιση και ότι δεν είναι ικανοί να γεφυρώσουν τις αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις. Ο Knuth (2000), μελετώντας τη σύνδεση μεταξύ της αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης μιας συνάρτησης, διαπίστωσε ότι οι μαθητές συντριπτικά δείχνουν εμπιστοσύνη στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις ακόμη και σε εργασίες που η γραφική παράσταση φαινόταν πιο κατάλληλη, ενώ δεν αναπτύσσουν την ευελιξία να χρησιμοποιούν, να επιλέγουν και να κινούνται μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων. Στην πραγματικότητα χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση ως μέσο υποστήριξης της αλγεβρικής τους λύσης παρά ως τρόπο λύσης. Γενικά οι μαθητές έχουν ισχυρή τάση να σκέφτονται αλγεβρικά παρά οπτικά.

Οι Schwartz & Yerushalmy (1992), διαπίστωσαν ότι η αλγεβρική αναπαράσταση είναι σχετικά πιο αποτελεσματική στην ανάδειξη της φύσης της συνάρτησης ως μια διαδικασία, ενώ η γραφική αναπαράσταση είναι πιο αποτελεσματική στην ανάδειξη της φύσης της συνάρτησης ως αντικείμενο. Με βάση τη πρώτη φύση, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια σχέση τιμών μεταξύ των τετμημένων και τεταγμένων x και y, αντικαθιστούν σε μια εξίσωση το x και προσπαθούν να βρουν λύση σε μια εξίσωση βρίσκοντας τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης, ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη, αντιλαμβάνονται τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ως μια οντότητα, αναγνωρίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης από τη μελέτη της συμβολικής της μορφής, αντιμετωπίζοντας την ολιστικά. Η Even (1998), μελετώντας τους παράγοντες που εμπλέκονται στη σύνδεση των διάφορων αναπαραστάσεων της συνάρτησης, διαπίστωσε ότι αυτοί αφορούν την ολιστική προσέγγιση του τρόπου συμπεριφοράς μιας συνάρτησης και την προσέγγιση κατά σημεία. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση πρέπει να αντιμετωπιστεί ολιστικά και να μελετηθεί η συμπεριφορά της (για παράδειγμα, όταν πρόκειται να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, που δίνεται σε αλγεβρική μορφή) και περιπτώσεις που πρέπει να εστιάσουμε σε συγκεκριμένα σημεία (για παράδειγμα, εύρεση τιμών από μια δοσμένη γραφική παράσταση). Διαπίστωσε ακόμη, ότι η ικανότητα μετάφρασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη σχετίζεται θετικά με την επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων με συναρτήσεις, η οποία όμως μειώνεται σε έργα που περιλαμβάνουν εικονικές αναπαραστάσεις, λόγω του ολιστικού χαρακτήρα τους αλλά και του τρόπου που η έννοια της συνάρτησης διδάσκεται στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Τα ζητήματα της αναπαράστασης και της οπτικοποίησης των μαθηματικών εννοιών αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως θεμελιώδη, με όλο και περισσότερο τους ερευνητές να συμφωνούν για τις θετικές επιπτώσεις τους στην ανάπτυξη της κατανόησης, της επικοινωνίας, της μαθηματικής αιτιολόγησης και της επίλυσης προβλήματος (Presmeg, 1998· Janvier, 1987· Kaput, 1987, 1991, 1999, 2001· Pape & Tchoshanov, 2001· Vergnaud, 1987, 1998· Duval, 1995, 2006· Arcavi, 2003). Η αναπαράσταση αναφέρεται ως δράση εξωτερίκευσης μιας εσωτερικής, νοερής αφαίρεσης. Στο πεδίο των μαθηματικών οι αναπαραστάσεις μπορούν να θεωρηθούν από τη μια μεριά ως μια εσωτερική αφαίρεση μαθηματικών ιδεών ή γνωστικών σχημάτων που αναπτύχθηκαν από έναν μαθητή μέσω της εμπειρίας ή από την άλλη μεριά αναπαραστάσεις όπως αριθμοί, εξισώσεις, γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα μπορούν να θεωρηθούν ως εξωτερικές εκδηλώσεις μαθηματικών εννοιών που δρουν ως ερεθίσματα για τις αισθήσεις και μας βοηθούν να καταλάβουμε αυτές τις έννοιες. Οι αναπαραστάσεις θεωρούνται σημαντικά εργαλεία επικοινωνίας (Kaput, 1991) και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, όπου μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναδιοργανώσουν και να μεταφράσουν τις ιδέες με σύμβολα, ενώ παράλληλα αποτελούν ένα κοινωνικό περιβάλλον για την ανάπτυξη μαθηματικών συζητήσεων.

Όπως αναφέρει ο Duval (2006), κανένα είδος μαθηματικής διαδικασίας δε μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς τη χρήση ενός σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης, γιατί κάθε μαθηματική διαδικασία περιλαμβάνει πάντοτε την αντικατάσταση κάποιας σημειωτικής αναπαράστασης από μία άλλη. Αυτό που έχει σημασία δεν είναι οι αναπαραστάσεις αλλά οι μετασχηματισμοί τους. Οι δυσκολίες των μαθητών όταν αντιμετωπίζουν οπτικά ερεθίσματα συνίστανται στη μη κατανόηση των μαθηματικών που αυτά εκπροσωπούν, στη γνωστική απόσταση ανάμεσα στην αναπαράσταση πηγή και στην αναπαράσταση στόχο, καθώς επίσης και στην κατεύθυνση της μετατροπής. Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης δεν είναι αντικειμενική ή απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία. Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων κι εμπειριών. Η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας στηρίζεται στις πλούσιες νοητικές αναπαραστάσεις που συνδέονται με αυτή.

Ο Arcavi (2003), υποστηρίζει πως οι γραφικές απεικονίσεις αποκαλύπτουν δεδομένα που μπορεί να είναι πιο ακριβή από τους συμβατικούς υπολογισμούς. Η οπτική λύση μπορεί να μας επιτρέψει να ασχοληθούμε με έννοιες και νοήματα που παρακάμπτονται από τη συμβολική, να υποστηρίξει τα συμβολικά αποτελέσματα, να επιλύσει συγκρούσεις μεταξύ συμβολικής λύσης και διαίσθησης, να λειτουργήσει ως εργαλείο για καταστάσεις που κάποιος είναι αβέβαιος για το πώς θα προχωρήσει. Η οπτικοποίηση όχι μόνο οργανώνει τα δεδομένα σε δομές με νόημα, αλλά καθοδηγεί την αναλυτική εξέλιξη μιας λύσης, ενώ δεν αποσκοπεί στην εξαίρεση της λεκτικής ή συμβολικής αναπαράστασης αλλά στη συμπλήρωση τους.

Νοερές στρατηγικές στην επίλυση γραφικών έργων με συναρτήσεις

Ο Proulx (2014;2015), μελέτησε την περίπτωση μαθητών ηλικίας 16-17 ετών (Grade 11), οι οποίοι έπρεπε να λειτουργούν νοερά με συναρτήσεις σε ένα γραφικό περιβάλλον. Συγκεκριμένα έπρεπε να επιλύσουν νοερά έξι ομάδες έργων με τρία ή τέσσερα έργα η καθεμία. Η πρώτη ομάδα περιλάμβανε τόσο τα γραφήματα όσο και τις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων και έπρεπε να τις προσθέσουν ή να τις αφαιρέσουν νοερά, η δεύτερη τα γραφήματα χωρίς την αλγεβρική τους αναπαράσταση και έπρεπε να τις προσθέσουν νοερά, η τρίτη περιλάμβανε το γράφημα μιας συνάρτησης f και το αποτέλεσμα του αθροίσματος δύο συναρτήσεων f και g και έπρεπε να βρουν την g, η τέταρτη περιλάμβανε παρόμοια γραφήματα με τη δεύτερη όπου οι μαθητές έπρεπε να τις αφαιρέσουν νοερά, στην πέμπτη ομάδα δόθηκαν μόνο οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων και οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν πράξεις όπως f + g, f - g, g - f, f + f και να αντλήσουν τη συνάρτηση που προκύπτει, ενώ στην έκτη ομάδα δόθηκαν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων που φαίνονταν συμμετρικές και οι μαθητές έπρεπε να βρουν το άθροισμά τους.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς του έδειξαν ότι οι μαθητές σε αυτό το νοερό πλαίσιο, χρησιμοποίησαν κατά την επίλυση των έργων τους τρεις συγκεκριμένες προσεγγίσεις (στρατηγικές), τις οποίες χαρακτήρισε ως *αλγεβρική-παραμετρική*, *γραφική-γεωμετρική* και *γραφική-αριθμητική*. Στην αλγεβρική/παραμετρική (ΑΠ), οι μαθητές άντλησαν πληροφορίες μόνο από τις αλγεβρικές πτυχές των συναρτήσεων (όπως εκφράσεις και παραμέτρους), ακόμη και αν τα έργα προσφέρθηκαν σε γραφικό περιβάλλον. Κατά την γραφική/γεωμετρική (ΓΓ), σε περιπτώσεις όπου οι μαθητές αντιμετώπισαν μη γραμμικές συναρτήσεις έδωσαν μια γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης ως ιδιότητα όχι της συνάρτησης, αλλά της καμπύλης που υπάρχει στο γράφημα, είδαν τις συναρτήσεις ως γεωμετρικές οντότητες, ως ολότητες, που ήταν 'παράλληλες' ή 'μετατοπίζονταν' παράλληλα. Στη περίπτωση της γραφικής/αριθμητικής (ΓΑ), οι μαθητές εστίασαν σε συγκεκριμένα σημεία στα γραφήματα των συναρτήσεων. Μέσα από αυτά τα σημεία, δημιούργησαν ακριβείς και κατά προσέγγιση απαντήσεις, οι οποίες συνδυάστηκαν για να βρουν την προκύπτουσα συνάρτηση.

Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών-Biplot Ανάλυση-Χωρική Παρεμβολή Kriging

Η Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών (ΠΑΑ), θεωρείται ως μια περιγραφική μέθοδος για τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ δύο ή περισσοτέρων κατηγορικών μεταβλητών χωρίς *a priori* υποθέσεις και προϋποθέσεις. Σκοπός της είναι η ανάδειξη και οπτικοποίηση της ενδογενούς δομής των δεδομένων, η οποία δεν είναι άμεσα αντιληπτή, αλλά βρίσκεται σε λανθάνουσα μορφή, χωρίς τη χρήση στατιστικων ελέγχων σημαντικότητας για την απόρριψη ή αποδοχή υποθέσεων σχετικά με αυτά (Μενεξές, 2006). Χρησιμοποιείται για την ανάλυση ποιοτικών δεδομένων με μόνο περιορισμό στις κλίμακες μέτρησης των μεταβλητών, οι οποίες θα πρέπει να είναι ονομαστικές ή διάταξης. Μπορούν βέβαια να χρησιμοποιηθούν και ποσοτικές μεταβλητές, αφού πρώτα οι τιμές τους χωριστούν με βάση λογικά ή στατιστικά κριτήρια σε κλάσεις δεδομένων. Μπορεί να εφαρμοστεί σχεδόν σε κάθε πίνακα της μορφής «αντικείμενα x μεταβλητές» με μη αρνητικά στοιχεία και μη μηδενικά αθροίσματα γραμών και στηλών, αρκεί οι μεταβλητές να είναι ομοιογενείς, να έχουν δηλαδή κοινή μονάδα μέτρησης και να υπάρχει φυσική ερμηνεία των αθροισμάτων των γραμμών και στηλών του πίνακα εισόδου (Μενεξές, 2006).

Μία από τις μεθόδους οπτικοποίησης πολυδιάστατων δεδομένων είναι το *Biplot*. Πρόκειται για ένα γραφικό εργαλείο με το οποίο απεοκονίζονται ταυτόχρονα οι γραμμές και οι στήλες ενός πίνακα δεδομένων της μορφής «αντικείμενα x μεταβλητές», σε κοινό χώρο, δύο συνήθως διαστάσεων. Το πρόθεμα «*Bi*», αναφέρεται σε αυτή την ταυτόχρονη αναπαράσταση αντικειμένων και μεταβλητών και όχι στον αριθμό των διαστάσεων. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα του *Biplot* είναι η ευκολία ερμηνείας του. Η ερμηνεία εξαρτάται από τη μέθοδο κανονικοποίησης των συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για την κατασκευή παραγοντικών διαγραμμάτων της ΠΑΑ. Η μέθοδος κανονικοποίησης διαφοροποιεί τις αποστάσεις είτε των σημείων γραμμών είτε των σημείων στηλών, ενώ δεν έχουν νόημα οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων γραμμών και στηλών (Μενεξές, 2006). Οι σχέσεις μεταξύ των σημείων γραμμών ή στηλών μπορούν να εξεταστούν και μέσω των *Biplot* αξόνων, ευθειών που ενώνουν την αρχή των αξόνων με ένα σημείο της γραμμής ή της στήλης αντίστοιχα. Στη συνέχεια παίρνουμε τις κάθετες προβολές των σημείων στους αντίστοιχους άξονες. Οι αποστάσεις των προβολών των σημείων από το σημείο στήλης (γραμμής), αποτελούν ένδειξη για το πως τα σημεία γραμμών (στηλών) σχετίζονται με το συγκεκριμένο σημείο στήλης (γραμμής). Επιπρόσθετα, μπορούν να υπολογιστούν τα τετράγωνα των συνημιτόνων των γωνιών που σχηματίζει ο *Biplot* άξονας με το διάνυσμα θέσης της στήλης (γραμμής), που αποτελούν ένα δείκτη συσχέτισης μεταξύ του σημείου και του άξονα (Μάρκος, 2006).

Η μέθοδος Kriging χρησιμοποιείται ευρέως ως μια από τις πιο αποτελεσματικές τεχνικές χωρικής παρεμβολής, κυρίως στις γεωεπιστήμες (Tziachris et al, 2017). Το πλεονέκτημα της είναι, ότι η εκτίμηση μιας μη δειγματικής τιμής σε μια θέση-σημείο, γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τη χωρική συσχέτιση γειτονικών τιμών. Οι Menexes & Koutsos (2021), πρότειναν μία μέθοδο που συνδυάζει την ΠΑΑ με τη μέθοδο Kriging, για την απεικόνιση συμπληρωματικών τιμών ποσοτικών μεταβλητών στο παραγοντικό επίπεδο, που προκύπτει από την εφαρμογή της ΠΑΑ, με σκοπό να βελτιώσουν ακόμη περισσότερο την ερμηνεία των γραφικών αποτελεσμάτων. Ουσιαστικά, μετασχηματίζουν το παραγοντικό επίπεδο χρησιμοποιώντας τη χωρική παρεμβολή Kriging, σε μια επιφάνεια, όπου τα x,y είναι οι συντεταγμένες των σημείων που προκύπτουν από την ΠΑΑ και z είναι οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής που θέλουμε να απεικονίσουμε. Η εφαρμογή της παρεμβολής Kriging και η προβολή των σημείων έγινε μέσω του ‘Surfer for Windows’, ενός δημοφιλούς και αποτελεσματικού προγράμματος των Windows από την Golden Software (Koutsos et al., 2022).

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 42 μαθητές/τριες της Γ΄ λυκείου, προσανατολισμού που διδάσκεται μαθηματικά (θετικών και οικονομίας) και βασίστηκε στη δειγματοληψία σκοπιμότητας (βολική), που ικανοποιεί τις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας (Cohen κ.α., 2008:σελ. 170). Από αυτούς δέκα είχαν μέση βαθμολογία στα μαθηματικά 19 (Άριστα), έντεκα είχαν μέση βαθμολογία 17 (Λίαν Καλώς), έντεκα είχαν μέση βαθμολογία 13,5 (Καλώς) και δέκα είχαν μέση βαθμολογία 11 (Σχεδόν Καλώς).

Διαδικασία

Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω μεμονωμένων κλινικών συνεντεύξεων, όπου η διάρκεια τους ήταν περίπου μια διδακτική ώρα. Σε κάθε μαθητή παρουσιαζόταν σε φύλλο χαρτί ένα έργο και στη συνέχεια μετά από περίπου ένα λεπτό του ζητούνταν να δώσει μια προφορική απάντηση ή να δείξει με το χέρι την απάντηση πάνω στο φύλλο, καθώς επίσης και να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε την απάντηση. Οι απαντήσεις καταγράφονταν σε κινητό τηλέφωνο ενώ ταυτόχρονα ο ερευνητής κρατούσε σημειώσεις. Το ζήτημα κυρίως δεν ήταν να διαπιστωθεί αν η απάντηση του μαθητή ήταν σωστή ή όχι, αλλά ποια στρατηγική χρησιμοποίησε για να φτάσει σε αυτή. Οι απαντήσεις των μαθητών με τη μορφή λεκτικών εξηγήσεων και χειρονομιών, καθώς και οι σημειώσεις και παρατηρήσεις του ερευνητή δημιούργησαν τα δεδομένα της παρούσας μελέτης. Για την εξασφάλιση των κανόνων του κώδικα δεοντολογίας, ζητήθηκε η άδεια από τη διεύθυνση των Λ.Τ. και από το σύλλογο γονέων και κηδεμόνων, ενώ στους μαθητές δόθηκε και συμπληρώθηκε έντυπο συναίνεσης και υπογραφής από τον κηδεμόνα. Τα δεδομένα που προέκυψαν από την έρευνα θα παραμείναν εμπιστευτικά και καμία αναφορά δε έγινε σε ονόματα συμμετεχόντων, προστατεύοντας έτσι τα προσωπικά δεδομένα των μαθητών, ενώ στο τέλος της έρευνας όλα τα στοιχεία καταστράφηκαν. Ταυτόχρονα ενημερώθηκαν η σχολική σύμβουλος του κλάδου και η προϊσταμένη δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης Χαλκιδικής.

Ανάλυση των Δεδομένων

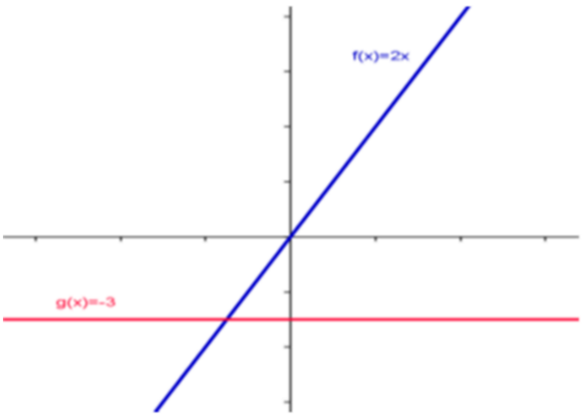
Για την ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων αξιοποιήθηκαν τεχνικές της θεμελιωμένης θεωρίας (Cresswell, 2011:σελ. 423-447). Στο πρώτο επίπεδο ανάλυσης πραγματοποιήθηκε ανάγνωση των απομαγνητοφωνημένων συνεντεύξεων, στη διάρκεια των οποίων εντοπίστηκαν αποσπάσματα (διατυπώσεις), που αντιστοιχούσαν σε καθεμία από τις κατηγορίες των στρατηγικών. Στο δεύτερο επίπεδο ανάλυσης έγινε η κωδικοποίηση των δεδομένων σε κάθε κατηγορία, ενώ στο τρίτο επίπεδο έγινε η ομαδοποίηση αυτών των κωδικών με βάση τις ομοιότητες που παρουσίαζαν και τα κοινά τους χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε τους κωδικούς ΑΠ (αλγεβρική/παραμετρική) στρατηγική, ΓΓ (γραφική/γεωμετρική), ΓΑ (γραφική/αριθμητική) και ΑΠ-ΓΓ, ΑΠ-ΓΑ και ΓΓ-ΓΑ, για τους αντίστοιχούς συνδυασμούς των στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, καθώς και Σ (σωστό), Λ (λάθος), ΔΑ (δεν απαντήθηκε) για τις απαντήσεις τους.

Στην παρούσα εργασία δεν θα παρουσιασθούν τα αποτελέσματα της θεμελιωμένης θεωρίας, αλλά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χρήση μεθόδων της Ανάλυσης Δεδομένων για την επεξεργασία δεδομένων λόγου, τα οποία συλλέχθηκαν μέσω κλινικής συνέντευξης. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν η Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών (Correspondance Analysis-AFC), η Ιεραρχική Ταξινόμηση σε Συστάδες (HCA), η Biplot Ανάλυση (Μάρκος, 2006· Μενεξές, 2006) και η μέθοδος χωρικής παρεμβολής Kriging (Menexes & Koutsos, 2021). Οι μέθοδοι της ανάλυσης δεδομένων εφαρμόστηκαν μέσω του λογισμικού CHIC Analysis εκδ. 1.0 (Markos, et al., 2010).

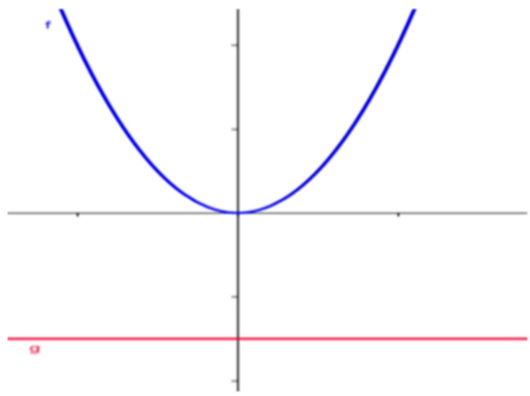
Ερευνητικό εργαλείο

Το εργαλείο της έρευνας περιλαμβάνει έργα παρόμοια με αυτά που δόθηκαν στην εργασία του Proulx (2015). Αποτελείται από έξι ομάδες έργων με δύο ή ένα έργο η καθεμία. Λόγο του περιορισμένου χρόνου και του νοερού πλαισίου, τα γραφήματα των συναρτήσεων που επιλέχθηκαν ήταν απλά και γνωστά στους μαθητές και υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, ώστε να μπορούμε να πάρουμε μία απάντηση είτε προφορική, είτε με κάποια χειρονομία σε σύντομο χρονικό διάστημα.

Στην πρώτη ομάδα δόθηκαν τόσο η γραφική όσο και η αλγεβρική έκφραση δύο συναρτήσεων, μιας γραμμικής με μια σταθερή (Εικόνα 1) και μιας τετραγωνικής με μια σταθερή (Εικόνα 1) και ζητούνταν να βρεθεί νοερά το άθροισμα και η διαφορά τους. Στη δεύτερη ομάδα δόθηκαν δύο παρόμοια έργα χωρίς την αλγεβρική έκφραση των συναρτήσεων και ζητούνταν να βρεθεί νοερά το άθροισμα τους.



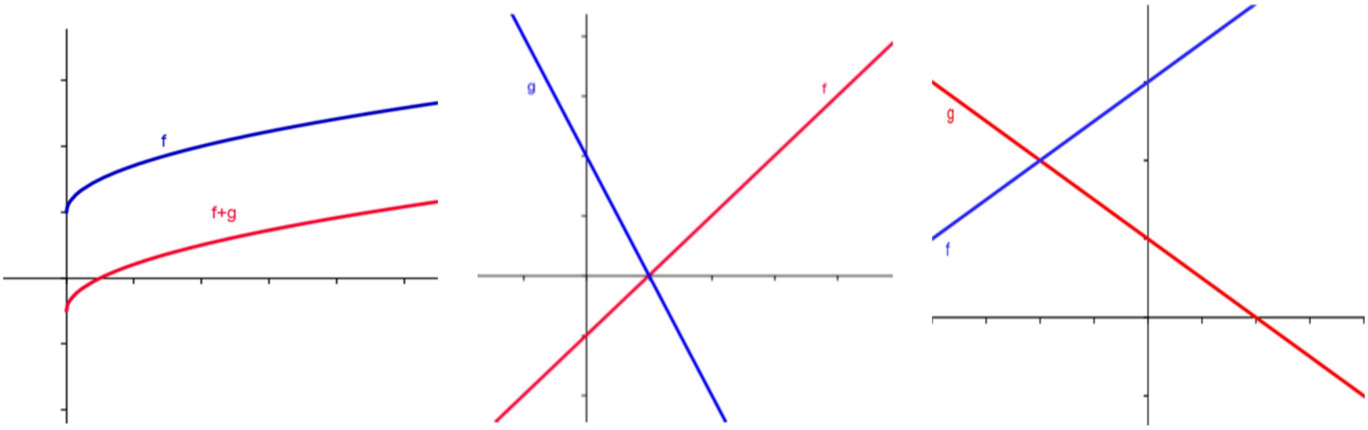
Γράφημα 1



Γράφημα 2

Εικόνα 1:Γραφήματα των Έργων 1 και 2

Στην τρίτη ομάδα δόθηκε ένα έργο με το γράφημα μιας συνάρτησης f και του αποτελέσματος του αθροίσματος f+g και ζητούνταν να προσδιοριστεί νοερά η συνάρτηση g (Εικόνα 2), ενώ στην τέταρτη ομάδα δόθηκε επίσης ένα έργο με το γράφημα δύο τεμνόμενων ευθειών σε σημείο του άξονα x΄x και ζητούνταν να βρεθεί η διαφορά τους f-g (Εικόνα 2). Στην πέμπτη ομάδα δόθηκαν μόνο οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=x$, καθώς και των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x$ και ζητούνταν να προσδιοριστεί νοερά το γράφημα της f+g, ενώ στην έκτη ομάδα δόθηκε το γράφημα δύο ευθειών που φαίνονταν συμμετρικές και ζητούνταν να προσδιοριστεί νοερά το γράφημα του αθροίσματος τους (Εικόνα 2).



Γράφημα 3 Γράφημα 4 Γράφημα 6

Εικόνα 2: Γραφήματα των Έργων 3, 4 και 6

Με το έργο 1 αναμένονταν να διαπιστωθεί αν η ύπαρξη των αλγεβρικών εκφράσεων, οδηγήσει τους μαθητές σε μια αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική επίλυσης, προσθέσουν δηλαδή αρχικά τους τύπους των συναρτήσεων και στη συνέχεια δώσουν μια γραφική απάντηση ή αν θα προβούν σε μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση του γραφήματος, επιλέγοντας μια γεωμετρική/γραφική στρατηγική (Proulx,2015), λέγοντας δηλαδή ότι η πρόσθεση μιας σταθεράς μετατοπίζει τη συνάρτηση κατακόρυφα προς τα πάνω ή προς τα κάτω ανάλογα αν η σταθερά είναι θετική ή αρνητική. Με το έργο 2 αναμένονταν να διαπιστωθεί αν η απουσία των αλγεβρικών εκφράσεων, οδηγήσει τους μαθητές σε μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση του γραφήματος ή αν καταφύγουν πάλι στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων οι οποίες τους είναι γνωστές, καθώς και να διαπιστωθεί αν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν διαφορετική στρατηγική για την επίλυση του έργου της γραμμικής από την τετραγωνική συνάρτηση. Με το έργο 3 αναμένονταν να διαπιστωθεί αν οι μαθητές προβούν σε μια ολιστική ανάγνωση του γραφήματος, παρατηρώντας ότι το αποτέλεσμα είναι μια κατακόρυφη μετατόπιση της αρχικής συνάρτησης προς τα κάτω (ΓΓ στρατηγική) ή θα σκεφτούν αλγεβρικά ότι η g=(f+g)-f και θα εστιάσουν σε κάποια σημεία βρίσκοντας προσεγγιστικά την κατακόρυφη απόσταση τους (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

Με το έργο 4 αναμένονταν να διαπιστωθεί αν οι μαθητές καταφύγουν στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων, θεωρήσουν για παράδειγμα ότι η $f(x)=αx+β$ με $α>0$ και $β<0$ και η $g(x)=γx+δ$ με $γ<0$ και $δ>0$, επομένως η $(f-g)(x)=(α-γ)x+(β-δ)$, όπου $α-γ>0$ και $β-δ<0$, άρα η προκύπτουσα συνάρτηση θα είναι μία ευθεία με θετική κλίση που τέμνει τον άξονα y΄y στα αρνητικά (ΑΠ στρατηγική) ή αν εστιάσουν σε συγκεκριμένα σημεία του γραφήματος, σημεία τομής με τον άξονα y΄y και σημείο τομής τους και υπολογίσουν τις τιμές της διαφοράς σε αυτά, προκειμένου να σχηματίσουν μια εικόνα για την προκύπτουσα συνάρτηση (ΓΑ στρατηγική). Με το έργο 5 αναμένεται να διαπιστωθεί γενικότερα η ικανότητα των μαθητών να μετατρέπουν ένα αμιγώς αλγεβρικό πρόβλημα σε γραφικό. Επίσης, το ενδιαφέρον εστιάζεται στο αν οι μαθητές πάρουν για παράδειγμα τις περιπτώσεις $f(x)=-x$ για $x<0$ και $f(x)=x$ για $x>0$ και στη συνέχεια προσθέσουν τις αλγεβρικές τους εκφράσεις, βρίσκοντας ότι η $(f+g)(x)=0$ για $x<0$ και ότι η $(f+g)(x)=x$ για $x>0$ (ΑΠ στρατηγική) ή καταφύγουν σε ακριβείς υπολογισμούς με συγκεκριμένες τιμές του x, θετικές και αρνητικές, προκειμένου να αποκτήσουν μια εικόνα για την προκύπτουσα συνάρτηση (ΓΑ στρατηγική). Με το έργο 6 αναμένονταν να διαπιστωθεί αν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν μια ολιστική προσέγγιση επίλυσης παρατηρώντας τη συμμετρία του σχήματος και διαπιστώνοντας ότι το άθροισμα τους θα είναι μια σταθερή συνάρτηση με τιμή ίση με το διπλάσιο της τεταγμένης του σημείου τομής τους (ΓΓ στρατηγική) ή θα εστιάσουν στις παραμέτρους α και β των γραμμικών συναρτήσεων διαπιστώνοντας ότι οι συντελεστές διεύθυνσης είναι αντίθετοι, άρα το άθροισμα τους θα ισούται με το άθροισμα των παραμέτρων β (ΑΠ στρατηγική) ή ακόμη αν εστιάσουν σε συγκεκριμένα σημεία, όπως το σημείο τομής τους και το σημείο τομής καθεμιάς με τον άξονα y΄y και υπολογίσουν προσεγγιστικά το άθροισμα σε αυτά τα σημεία προκειμένου να αποκτήσουν μια εικόνα για την προκύπτουσα συνάρτηση (ΓΑ στρατηγική) ή αν χρησιμοποιήσουν συνδυασμό αυτών προκειμένου να δώσουν μια ολοκληρωμένη απάντηση.

Αποτελέσματα

Από την ανάλυση των δεδομένων, προέκυψε ότι ο ελάχιστος αριθμός σωστών απαντήσεων ήταν 2 (2/9) και ο μέγιστος ήταν 9 (9/9), ενώ η σωστή χρήση διαφορετικών στρατηγικών είχε ελάχιστη τιμή 1 (1/6) και μέγιστη τιμή 5 (5/6). Οι άριστοι μαθητές απάντησαν σωστά από 7 έως 9 έργα, οι μαθητές με επίδοση λίαν καλώς απάντησαν σωστά από 3 έως 8 έργα, οι μαθητές με επίδοση καλώς απάντησαν σωστά από 4 έως 7 έργα, ενώ οι μαθητές με επίδοση σχεδόν καλώς απάντησαν σωστά από 2 έως 4 έργα (Πίνακας 1).

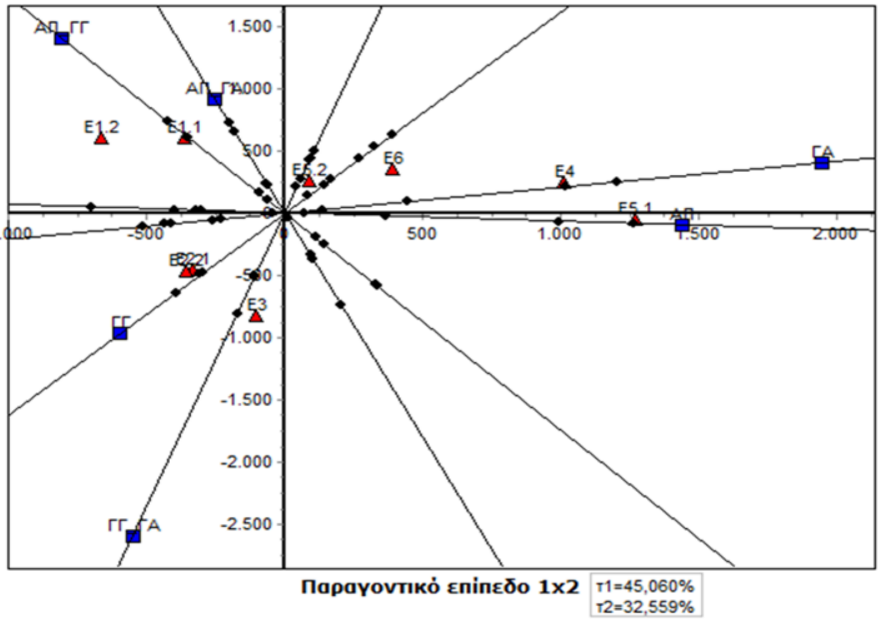
Πίνακας 1: Συνολικές επιτυχίες ανά ομάδα μαθητών

ΟΜΑΔΑ\ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ	2	3	4	5	6	7	8	9	ΣΥΝΟΛΟ
ΑΡΙΣΤΑ (18.1-20)	0	0	0	0	0	2	2	4	10
ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ (16.1-18)	0	1	2	4	1	2	1	0	11
ΚΑΛΩΣ (13.1-16)	0	0	3	1	6	1	0	0	11
ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ (9.1-13)	1	1	8	0	0	0	0	0	10
ΣΥΝΟΛΟ	1	2	13	5	7	5	3	4	42

Από την Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών στον υποπίνακα έργα-στρατηγικές, βρέθηκε ότι οι δύο πρώτοι άξονες ερμήνευσαν το 77,6% της συνολικής αδράνειας. Ο πρώτος παραγοντικός άξονας (45,06%) ανέδειξε την αντίθεση μεταξύ των έργων 1.2 με τα έργα 4 και 5.1, καθώς και των στρατηγικών ΑΠ και ΓΑ με τον συνδυασμό των στρατηγικών ΑΠ-ΓΓ, που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση τους, ενώ ο δεύτερος παραγοντικός άξονας (30,6%) ανέδειξε την αντίθεση μεταξύ των έργων 1 και 3, καθώς και των στρατηγικών ΓΓ και ΑΠ-ΓΓ, που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση τους. Έτσι, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο πρώτος παραγοντικός άξονας ερμηνεύει τη λειτουργική διαχείριση των συναρτήσεων (Sfard, 1992) και την κατά σημεία προσέγγιση τους (Even, 1998), ενώ ο δεύτερος παραγοντικός άξονας ερμηνεύει την ολιστική προσέγγιση των συναρτήσεων ως αντικείμενο (Schwartz & Yerushalmy1992). Από την Biplot ανάλυση προέκυψε γενικότερα η σύνδεση κάθε έργου με την στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυσή του, όπως παρατίθεται παρακάτω στον πίνακα των αποστάσεων των προβολών των σημείων των έργων από τα σημεία των στρατηγικών και του τετραγώνου των συνημίτονων των γωνιών των διανυσμάτων θέσης των σημείων των έργων με τους Biplot άξονες (Πίνακας 2).,

Πίνακας 2: Αποστάσεις και συν^2 των σημείων των έργων από τους Biplot άξονες των σημείων των στρατηγικών

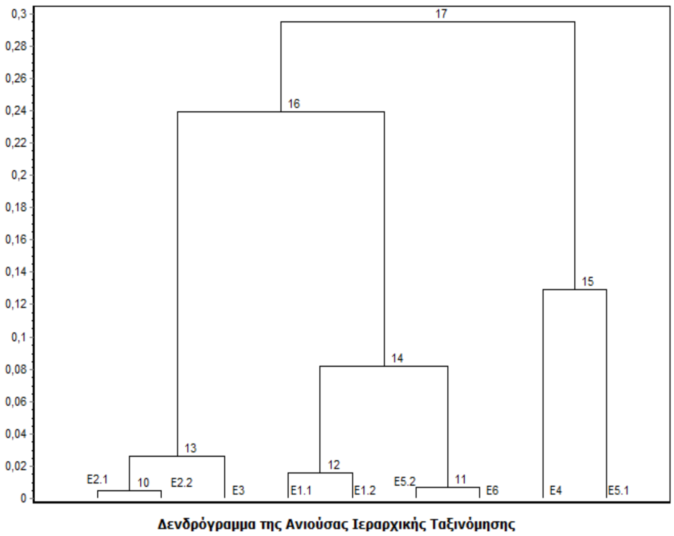
ΕΡΓΟ	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5.1	5.2	6
Στρατηγική ΑΠ									
Απόσταση	1,848	2,148	1,748	1,769	1,492	0,451	0,175	1,376	1,078
συν^2	0,329	0,616	0,289	0,308	0,003	0,909	0,999	0,061	0,473
Στρατηγική ΓΓ									
Απόσταση	1,015	1,021	1,033	1,028	1,118	1,829	2,065	1,173	1,350
συν^2	0,208	0,033	0,994	0,990	0,826	0,507	0,241	0,945	0,928
Στρατηγική ΓΑ									
Απόσταση	2,379	2,672	2,282	2,303	2,034	1,066	0,838	1,923	1,639
συν^2	0,110	0,347	0,554	0,575	0,104	0,999	0,940	0,248	0,736
Στρατηγική ΑΠ-ΓΓ									
Απόσταση	1,439	1,364	1,476	1,468	1,597	2,326	2,556	1,662	1,851
συν^2	1,000	0,905	0,163	0,147	0,639	0,078	0,284	0,448	0,049
Στρατηγική ΑΠ-ΓΑ									
Απόσταση	0,896	0,973	0,892	0,892	0,931	1,583	1,818	0,971	1,122
συν^2	0,928	0,714	0,381	0,361	0,852	0,001	0,094	0,693	0,209
Στρατηγική ΓΓ-ΓΑ									
Απόσταση	2,632	2,652	2,633	2,633	2,653	2,968	3,105	2,670	2,735
συν^2	0,533	0,252	0,830	0,814	0,993	0,188	0,028	0,989	0,666

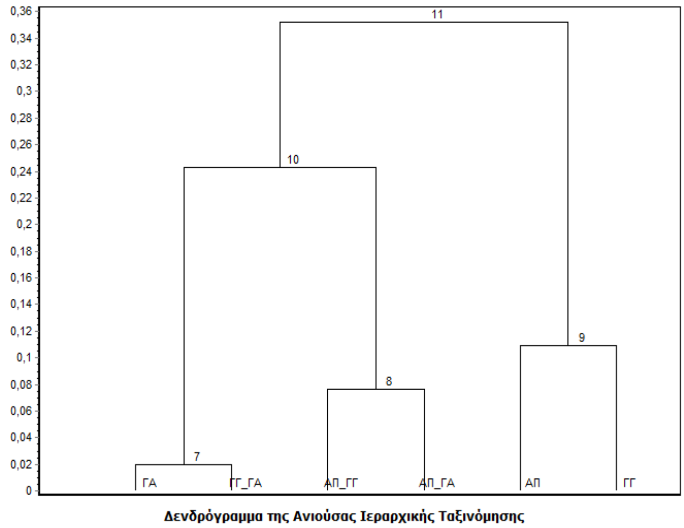


Εικόνα 3: Παραγοντικό επίπεδο 1x2 της ΠΑΑ του υποπίνακα (έργα)x(στρατηγικές) και Biplot άξονες των σημείων των στρατηγικών

Από τον Πίνακα 2 και το διάγραμμα με τους Biplot άξονες (Εικόνα 3), προκύπτει ότι η στρατηγική ΑΠ σχετίζεται περισσότερο με τα έργα 4 και 5.1 (συν^2=*0,909* και *0,999*), δηλαδή η πλειονότητα των μαθητών κατέφυγαν σε αυτή τη στρατηγική για τα συγκεκριμένα έργα, που όπως προαναφέραμε ήταν μία από τις αναμενόμενες απαντήσεις σε αυτά. Η στρατηγική ΓΓ σχετίζεται περισσότερο με τα έργα 2, 5.2 και 6 (συν^2=*0,994, 0,945* και *0,928*), δηλαδή οι μαθητές κατέφυγαν σε μία ολιστική προσέγγιση και μια γρήγορη απάντηση στα έργα αυτά, η οποία ήταν μία από τις αναμενόμενες για τα έργα 2 και 6, όχι όμως και για το έργο 5.2, γεγονός που οδήγησε στις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις (Πίνακας 3). Η στρατηγική ΓΑ σχετίζεται περισσότερο με τα έργα 4 και 5.1 (συν^2=*0,999* και *0,940*), η οποία ήταν μία από τις αναμενόμενες απαντήσεις για τα συγκεκριμένα έργα. Η στρατηγική ΑΠ-ΓΓ σχετίζεται περισσότερο με το έργο 1 (συν^2=*1,000* και *0,905*), δηλαδή οι μαθητές στο έργο αυτό, αρχικά κατέφυγαν στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων οι οποίες δίνονταν και στη συνέχεια αφού διαπίστωναν την προσθήκη μιας σταθεράς μιλούσαν για μια μετατόπιση του γραφήματος προς τα πάνω ή προς τα κάτω, απαντήσεις που ήταν αναμενόμενες για το συγκεκριμένο έργο. Η στρατηγική ΑΠ-ΓΑ σχετίζεται περισσότερο με τα έργα 1.1 και 3 (συν^2=*0,928* και *0,852*), η οποία είναι μία από τις αναμενόμενες απαντήσεις για τα έργα αυτά, ενώ η στρατηγική ΓΓ-ΓΑ σχετίζεται περισσότερο με τα έργα 2 και 5.2 (συν^2=*0,830, 0,814* και *0,989*), η οποία ήταν αναμενόμενη ως απάντηση για το έργο 2, όχι όμως για το έργο 5.2

Από την Ιεραρχική Ταξινόμηση σε Συστάδες, προέκυψαν τρεις βασικές ομάδες τόσο έργων, όσο και στρατηγικών. Μία ομάδα αποτελούν τα έργα 2 και 3, μία τα έργα 1, 5.2 και 6 και μία ομάδα τα έργα 4 και 5.1, ενώ αντίστοιχα οι στρατηγικές ΓΑ και ΓΓ-ΓΑ, ΑΠ-ΓΓ και ΑΠ-ΓΑ, ΑΠ και ΓΓ αποτελούν τις ομάδες των στρατηγικών. Φαίνεται οι μαθητές να αντιμετώπισαν με παρόμοιο τρόπο αυτές τις ομάδες έργων, ενώ για την επίλυση των έργων χρησιμοποίησαν είτε τη ΓΑ σε συνδυασμό με τη ΓΓ στρατηγική, είτε την ΑΠ σε συνδυασμό με τις ΓΑ και ΓΓ στρατηγικές, είτε αμιγώς τις στρατηγικές ΑΠ και ΓΓ (Εικόνα 4).



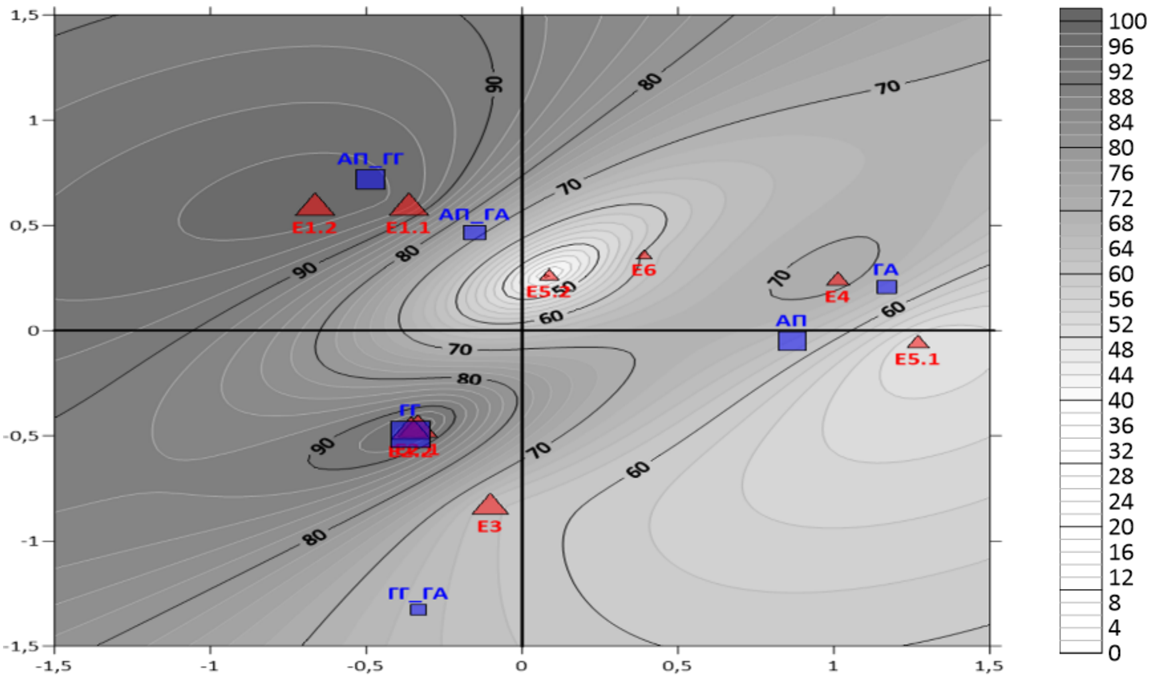


Εικόνα 4 : Δενδρογράμματα της Ιεραρχικής Ταξινόμησης σε Συστάδες των έργων και των στρατηγικών αντίστοιχα

Με τη μέθοδο της χωρικής παρεμβολής Kriging, έγινε προβολή των ποσοστών επιτυχίας των μαθητών στις στρατηγικές (Πίνακας 2), με τη μορφή χάρτη με ισοκαμπύλες (Εικόνα 5). Οι σκουρόχρωμες περιοχές αντιστοιχούν σε μεγαλύτερα ποσοστά. Με τον τρόπο αυτό το σύστημα έργα-στρατηγικές-ποσοστά επιτυχίας, αποτυπώθηκε στο δισδιάστατο χώρο, δίνοντας τη δυνατότητα καλύτερης ερμηνείας. Έτσι για παράδειγμα, από την ανάγνωση του διαγράμματος που συνδυάζει το παραγοντικό επίπεδο της ΠΑΑ με τη χωρική παρεμβολή Kriging (Εικόνα 5), διαπιστώνουμε ότι για το έργο 1 χρησιμοποιήθηκε η ΑΠ-ΓΓ στρατηγική και το ποσοστό επιτυχίας ήταν πάνω από 90%, ενώ για το έργο 5.1 χρησιμοποιήθηκαν οι ΑΠ και ΓΑ στρατηγικές και το ποσοστό επιτυχίας ήταν κάτω από 40%.

Πίνακας 3: Συνολικές επιτυχίες ανά έργο

ΕΡΓΟ	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5.1	5.2	6
ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ	40/42	41/42	41/42	40/42	25/42	21/42	14/42	10/42	14/42
ΠΟΣΟΣΤΟ	95,2%	97,6%	97,6%	95,2%	59,5%	50%	33,3%	23,8%	33,3%



Εικόνα 5: Διάγραμμα χωρικής παρεμβολής Kriging των ποσοστών επιτυχίας στο παραγοντικό επίπεδο 1x2 της ΠΑΑ του υποπίνακα (έργα)x(στρατηγικές)

Συμπεράσματα

Τόσο τα νοερά μαθηματικά όσο και τα γραφικά περιβάλλοντα μπορούν να θεωρηθούν ως ασυνήθιστα περιβάλλοντα για εργασίες με συναρτήσεις. Ωστόσο, όπως προέκυψε από την ανάλυση των περιγραφικών απαντήσεων των μαθητών, φαίνεται ότι στην πλειονότητα τους αντιμετώπισαν και ασχολήθηκαν με τα προτεινόμενα έργα, αναπτύσσοντας αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης. Με αυτή την έννοια, ακόμη και αν ήταν η πρώτη εμπειρία τους με δραστηριότητες στη νοερή διαχείριση συναρτήσεων, οι ενέργειες τους μπορούν να κατανοηθούν ως τρόποι επίλυσης μέσω της δημιουργίας στρατηγικών προσαρμοσμένων στις εργασίες. Η έλλειψη του μέσου, χαρτί και μολύβι, φαίνεται να αντισταθμίζεται από την αφήγηση και τη φωναχτή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης, ενώ ακόμη παρατηρήθηκε μια αίσθηση ταχύτητας και άγχους για την ολοκλήρωση της, ευρήματα που συμφωνούν με αυτά του Proulx (2013).

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε, ότι η επιλογή των στρατηγικών επηρεάζεται από τη φύση του έργου (γραμμικές, μη γραμμικές συναρτήσεις, ύπαρξη αλγεβρικής έκφρασης της συνάρτησης), αλλά και από την επίδοση των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών (άριστα, λίαν καλώς, καλώς, σχεδόν καλώς. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με τις διαπιστώσεις του Threlfall (2002), σύμφωνα με τον οποίο η φύση των στρατηγικών που επιλέγουν οι μαθητές επηρεάζεται τόσο από το ίδιο το έργο και τα χαρακτηριστικά του όσο και από τα χαρακτηριστικά των μαθητών (γνώσεις, προτιμήσεις, εμπειρία).

Η ανάλυση των ευρημάτων έδειξε ακόμη, ότι οι μαθητές κατά τη νοερή διαχείριση των συναρτήσεων, χρησιμοποίησαν άλλοτε αλγεβρικές/παραμετρικές στρατηγικές, άλλοτε γραφικές/γεωμετρικές και άλλοτε γραφικές/αριθμητικές ή και συνδυασμό αυτών, ευρήματα που συμφωνούν με αυτά του Proulx (2015). Σε έργα που δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων (έργο 1 και 5), οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν την ΑΠ στρατηγική. Σε έργα με τεμνόμενες γραμμικές συναρτήσεις (4 και 6), επέλεξαν κατά σημεία προσεγγίσεις, που είτε εστίασαν στις παραμέτρους της γραμμικής συνάρτησης, ΑΠ στρατηγική, είτε εστίασαν σε συγκεκριμένα σημεία του γραφήματος, ΓΑ στρατηγική. Σε έργα με καμπύλες (2.2 και 3), επέλεξαν ολιστικές προσεγγίσεις, εστιάζοντας σε όλο το γράφημα ως αντικειμενική οντότητα, ΓΓ στρατηγική. Τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν με αυτά του Proulx (2015). Η πλειονότητα των συνδυαστικών απαντήσεων αφορούσε ένα συνδυασμό αλγεβρικών/παραμετρικών και γραφικών/αριθμητικών στρατηγικών (ΑΠ-ΓΑ), κυρίως στα πιο σύνθετα έργα 4, 5 και 6. Η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε περισσότερο αμιγώς στις απαντήσεις όλων των ομάδων μαθητών ήταν η γραφική/γεωμετρική (ΓΓ), κυρίως στα τρία πρώτα έργα. Η στρατηγική αυτή φαίνεται να οδηγούσε σε μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση των γραφημάτων και κατά συνέπεια σε μια γρήγορη απάντηση στο συγκεκριμένο πλαίσιο, παρόλο που δεν ήταν επιβεβλημένη. Η επιλογή όμως της στρατηγικής γραφική/γεωμετρική (ΓΓ), δεν ήταν ενδεδειγμένη στα σύνθετα έργα 4, 5 και 6 και ήταν αυτή που οδήγησε τους μαθητές που την επέλεξαν ως απάντηση σε αυτά, σε λάθος.

Επίσης, η πλειονότητα των μαθητών επέδειξε αδυναμία να συνδέσει την αλγεβρική με τη γραφική έκφραση του αθροίσματος συναρτήσεων (έργο 5), κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα των Markovits κ.α. (1993) και Knuth (2000), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο κατά τη μεταφορά από τη γραφική στην αλγεβρική αναπαράσταση μιας συνάρτησης. Γενικότερα οι μαθητές, ακόμη και αν δεν δίνονταν, καταφεύγαν στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων (αλγεβρική 'προκατάληψη'), σε συμφωνία με τις διαπιστώσεις του Knuth (2000), ότι οι μαθητές έχουν ισχυρή τάση να σκέφτονται αλγεβρικά παρά οπτικά, ακόμη και αν τα ερεθίσματα είναι οπτικά. Επιπλέον, οι μαθητές με καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά, έδειξαν μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας στις στρατηγικές και χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό αυτών, προκειμένου να δώσουν πληρέστερη απάντηση σε πιο σύνθετα έργα (4 και 6), ευρήματα που συμφωνούν με αυτά του Proulx (2015). Σε έργα απλά, όπως η πρόσθεση ή αφαίρεση σταθεράς, επέλεξαν μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση του γραφήματος, ενώ σε σύνθετα έργα, όπως τεμνόμενες ευθείες, επέλεξαν ένα συνδυασμό αλγεβρικών-αριθμητικών προσεγγίσεων σε αντίθεση με τους μαθητές χαμηλής επίδοσης που δεν έδωσαν απάντηση.

Οι μέθοδοι της Ανάλυσης των Δεδομένων (ΠΑΑ, Biplot άξονες, Ιεραρχική Ταξινόμηση σε Συστάδες, χωρική παρεμβολή Kriging), έδωσαν τη δυνατότητα της οπτικοποίησης του φαινομένου σε ένα δισδιάστατο χώρο και της ανάδειξης ενδογενών σχέσεων, ομοιοτήτων και αντιθέσεων στον τρόπο που οι μαθητές χειρίστηκαν τα έργα και χρησιμοποίησαν τις στρατηγικές. Επίσης, η μείωση των διατάσεων του φαινομένου, που επιτεύχθηκε με την προβολή των ποσοστών επιτυχίας στο παραγοντικό επίπεδο που προέκυψε από την ΠΑΑ στον υποπίνακα έργα-στρατηγικές, έδωσε τη δυνατότητα καλύτερης επεξήγησης και ερμηνείας του, που δεν θα μπορούσε να προκύψει από τους πίνακες συμπτώσεων και τα περιγραφικά στατιστικά.

Προτάσεις-Μελλοντικές κατευθύνσεις

Η έρευνα ήταν μικρής κλίμακας και αφορούσε το τοπικό επίπεδο ενός σχολείου, με συγκεκριμένα γεωγραφικά, πολιτισμικά και οικονομικά χαρακτηριστικά, ενώ η βολική δειγματοληψία δεν κατοχυρώνει την πλήρη αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα όμως μπορούν να αποτελέσουν υπόβαθρο για μελλοντικές έρευνες. Προτείνεται να ερευνηθούν:

- οι ίδιες παράμετροι με τις ίδιες μεθόδους σε μεγαλύτερο πληθυσμό, αντιπροσωπευτικό των γεωγραφικών περιοχών της χώρας
- η εισαγωγή παρεμβάσεων με νοερή διαχείριση συναρτήσεων παράλληλα με τη συμβατική διδασκαλία
- η ευελιξία των μαθητών στη σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης σε νοερό πλαίσιο
- ο ρόλος της νοερής επίλυσης οπτικών αναπαραστάσεων συναρτήσεων στην κατανόηση της έννοιας της.

Βιβλιογραφία

Akkoç, H., & Tall, D. (2002). The simplicity, complexity and complication of th function concept. In *PME conference* (Vol. 2, pp. 2-025).

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Boule, F. (2008). *Le calcul mental au quotidien*. SCEREN-CRDP Bourgogne

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο

Department for Education and Skills (DfES).(2005). Leading in learning: Developing thinking skills at Key Stage 3.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G.Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes, 25* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes, 25* (pp. 153-174). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, *8*(1), 49-69.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational psychology, 24(5),* 645-657.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1)*,* 123-134.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E.Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 53-74). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Knuth, E. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 500‑508.

Koutsos, T. M., Menexes, G. C., & Eleftherohorinos, I. G. (2022). The Use of Spatial Interpolation to Improve the Quality of Corn Silage Data in Case of Presence of Extreme or Missing Values. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, *11*(3), 153.

Μάρκος, Ά. (2006). *Βοήθεια στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων της παραγοντικής ανάλυσης των αντιστοιχιών και αλγόριθμοι κατασκευής και ανάλυσης ειδικών πινάκων εισόδου*. Διδακτορική Διατριβή στο Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας. Θεσσαλονίκη.

Markos, A., Menexes, G., & Papadimitriou, I. (2010). The CHIC Analysis Software v1.0. In H. Loracek-Junge & C. Weihs (eds), *Classification as a Tool for Research*, Proceedings of the 11th IFCS Conference. pp. 409--416, Springer.

Markovits, Z., & Hershkowitz, R. (1993). Visual estimation of discrete quantities. *ZDM*, *93*(4), 137-140.

Menexes, G., & Koutsos, T. (2021). Correspondence Analysis and Kriging: Projection of Quantitative Information on the Factorial Maps. In *Conference of the International Federation of Classification Societies* (pp. 159-166). Springer, Cham.

Μενεξές, Γ. (2006). *Πειραματικοί Σχεδιασμοί στην Ανάλυση Δεδομένων*. Διδακτορική Διατριβή στο Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας. Θεσσαλονίκη.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, *40*(2), 118-127.

Presmeg, N. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 25-32.

Proulx, J. (2014). Mental mathematics and operations on functions. In *Proceedings of the Joint Meeting of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 5, pp. 17-24).

Proulx, J. (2015). Mental mathematics with mathematical objects other than numbers: The case of operation on functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 156-176.

Schwartz, J., & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 261-289.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 59-84.

Sierpinska, A. (1992). Theoretical perspectives for development of the function concept. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes*, *25*, 23-58.
Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. Educational studies in Mathematics, *50*(1), 29-47.
Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM, 41*(5), 541-555.
Vergnaud, G. (1998). Comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematics Behavior,* 17(2), 167-181.
Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.
Zachariades, T., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2002, July). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions. In *Proceedings in the 10th ICME Conference, Crete, Greece*.

Strategies for mental solving of graphic tasks with functions, 3rd Lyceum students: Content analysis strategy of interviews with Data Analysis methods

Nikolaos Papafilippou[1], Thomas Koutsos[1], Angelos Markos[2], George Menexes[1]

[1] Laboratory of Agronomy, School of Agriculture, Aristotle University of Thessaloniki, 54124 Thessaloniki
[2] Department of Primary Education, Democritus University of Thrace, 68100 Alexandroupoli

KEYWORDS

Mental Mathematics,
Functions,
Solving Strategies,
Flexibility,
Correspondence Analysis,
Hierarchical Cluster Analysis,
Biplot Analysis,
Kriging Interpolation

CORRESPONDENCE

Nikolaos Papafilippou
Aristotle University of Thessaloniki
Laboratory of Agronomy,
School of Agriculture, 54124
Thessaloniki
Email: npapafil@agro.auth.gr

ABSTRACT

In this study, a methodological scheme for using Data Analysis methods (AFC, HCA, Biplot Analysis, Kriging Interpolation) is presented and proposed for the processing of speech data, which were collected through a clinical interview from 42 3rd grade Lyceum students, regarding their responses to nine graphs of two functions (linear-constant or quadratic-constant or two-linear) and was asked to find mentally the result of their sum or difference. The analysis of the findings showed that the students, during the mental solution of tasks with functions, sometimes developed algebraic/parametric strategies, sometimes graphical/geometric and sometimes graphical/numerical or a combination of these. According to the main results of the work, the choice of strategy depends both on the characteristics of the student (knowledge, preferences, experience) and the nature of the task. In tasks with linear functions, the students chose point-by-point approaches, algebraic-numerical or a combination thereof, while in tasks with curves they chose holistic approaches, graphic-geometric. Also, students with better math performance showed a greater degree of flexibility in the strategies they used and had more success. Through AFC was highlighted, the contrast between the point-by-point approaches, algebraic-numerical strategies and the holistic approaches, graphic-geometric, as well as the contrast between the combined graphic/geometric-graphic/numerical and graphic/geometric-algebraic/parametric strategies. Ordinary Kriging spatial interpolation method was used to estimate and present the students' success rates in the strategies and the result of the interpolation in the form of a contour map was projected to the factorial level of the AFC.