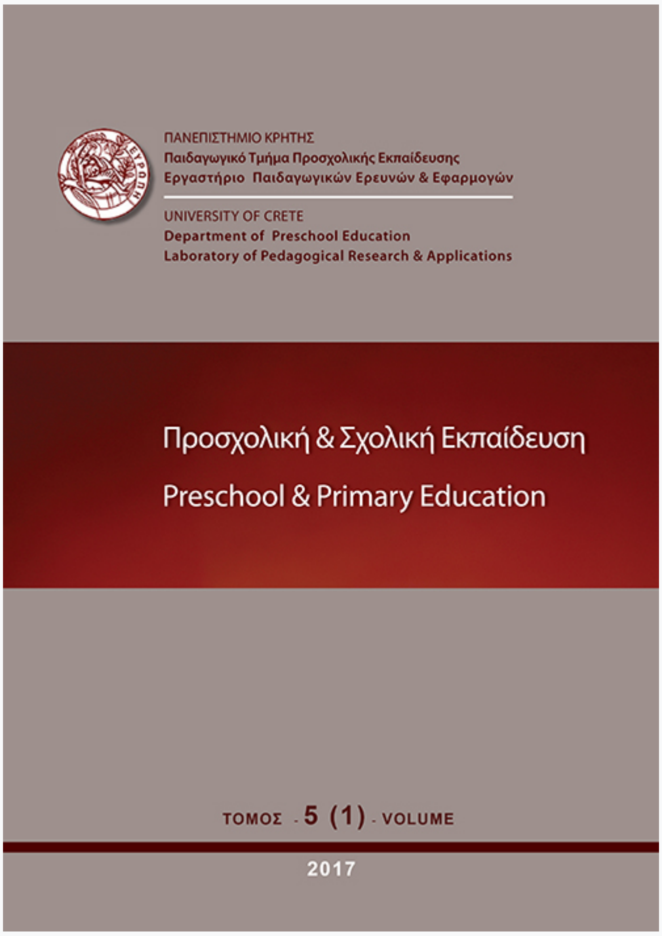
Preschool and Primary Education

Τόμ. 5, Αρ. 1 (2017)



Η κατανόηση των μαθηματικών μοτίβων από παιδιά Γ' και Δ' δημοτικού και οι στρατηγικές σκέψης τους

Despoina Desli, Dimitra Gaitaneri

doi: 10.12681/ppej.10216

Βιβλιογραφική αναφορά:

Desli, D., & Gaitaneri, D. (2017). Η κατανόηση των μαθηματικών μοτίβων από παιδιά Γ' και Δ' δημοτικού και οι στρατηγικές σκέψης τους. *Preschool and Primary Education*, *5*(1), 63–83. https://doi.org/10.12681/ppej.10216

Προσχολική & Σχολική Εκπαίδευση,
2017, Τόμος 5, Τεύχος 1, σσ. 63-83,
e-ISSN: 2241-7206

doi: http://dx.doi.org/10.12681/ppej.10216

Η κατανόηση των μαθηματικών μοτίβων από παιδιά Γ′ και Δ′ τάξης δημοτικού σχολείου και οι στρατηγικές σκέψης τους

Δέσποινα Δεσλή
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Δήμητρα Γαϊτανέρη
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Περίληψη. Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά των μεσαίων τάξεων δημοτικού σχολείου αντιλαμβάνονται και επεκτείνουν μαθηματικά μοτίβα. Για τον σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα σε 48 παιδιά της Γ′ τάξης και 42 παιδιά της Δ′ τάξης, στα οποία παρουσιάστηκαν συνολικά 21 έργα. Τα έργα αφορούσαν δύο κύριες κατηγορίες μοτίβων (οπτικά και αριθμητικά μοτίβα), οι οποίες χωρίζονταν επιμέρους σε: α) επαναλαμβανόμενα οπτικά και αριθμητικά μοτίβα, και β) αναπτυσσόμενα οπτικά και αριθμητικά μοτίβα. Οι συμμετέχοντες έπρεπε να μελετήσουν το μοτίβο σε κάθε έργο και να συμπληρώσουν το στοιχείο που λείπει κάθε φορά ώστε να ισχύει το μοτίβο. Επίσης, στο τελευταίο έργο ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να κατασκευάσουν οι ίδιοι ένα μοτίβο. Τα αποτελέσματα έδειξαν παρόμοιες αρκετά υψηλές επιδόσεις των συμμετεχόντων στα έργα με οπτικά και αριθμητικά μοτίβα. Ωστόσο, όλα τα παιδιά παρουσίασαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα έργα με επαναλαμβανόμενα οπτικά και επαναλαμβανόμενα αριθμητικά μοτίβα σε σχέση με τα έργα που αναφέρονταν σε αναπτυσσόμενα οπτικά και αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα. Η ανάλυση των στρατηγικών που τα παιδιά χρησιμοποίησαν στη συνέχιση των μοτίβων έδειξε ότι αυτές διαφοροποιούνται όταν τα μοτίβα είναι επαναλαμβανόμενα ή αναπτυσσόμενα. Συγκεκριμένα, τα παιδιά αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους κυρίως βασιζόμενα στη στρατηγική των συνδέσεων ανάμεσα σε διαδοχικά βήματα, όταν τα μοτίβα ήταν αναπτυσσόμενα, και πολύ λιγότερο σε μια τυχαία πρόβλεψη. Αντίθετα, όταν τα μοτίβα ήταν επαναλαμβανόμενα, τόσο στα οπτικά όσο και τα αριθμητικά μοτίβα, οι αιτιολογήσεις των παιδιών βασίζονταν κυρίως σε προβλέψεις που γίνονταν με επανάληψη μερών του μοτίβου. Τέλος, η πλειονότητα των συμμετεχόντων κατασκεύασε οπτικά επαναλαμβανόμενα μοτίβα, αναδεικνύοντας την προτίμησή τους σε αυτά.

Λέξεις κλειδιά: οπτικά μοτίβα, αριθμητικά μοτίβα, επαναλαμβανόμενα μοτίβα, αναπτυσσόμενα μοτίβα, στρατηγικές

Summary. The aim of the present study was to examine how children attending the middle years of the primary school understand and extend mathematical patterns. A total of 90 students coming from grades C (N=48) and D (N=42) were asked 21 pattern tasks that were designed on the basis of two main categories (visual patterns and number patterns) and were further divided into: a) repeating visual and repeating number patterns, and b) growing visual and growing number patterns. Participants were asked to identify the pattern rules and extend the patterns by filling the missing steps. They also had to make a pattern on their own. Overall results showed similarly high performance on visual and

Υπεύθυνη επικοινωνίας: *Δέσποινα, Δεσλή*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πύργος Παιδαγωγικής, 54124, Θεσσαλονίκη, e-mail: ddesli@eled.auth.gr

Ηλεκτρονικός εκδότης: *Εθνικό Κέντρο Τεκμηρίωσης, Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών*
URL: http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/education

number pattern tasks. However, the majority of the participants had a higher rate of success in repeating visual patterns and repeating number patterns compared to growing visual patterns and growing number patterns. The analysis of the strategies that children implemented in patterning revealed a great differentiation between their use and the type of pattern. More specifically, students mainly justified their pattern extensions by making reasonable connections within successive steps in the growing pattern tasks, whereas they tended to use techniques related to random predictions following repetitions of the pattern's parts in the repeating pattern tasks. Last, participants' preference for repeating visual patterns was found when making their own patterns.

Keywords: repeating patterns, growing patterns, number patterns, visual patterns, strategies

Εισαγωγή

Η μελέτη των μοτίβων εντάχθηκε σχετικά πρόσφατα ως νέα διδακτική ενότητα του Α.Π.Σ. των Μαθηματικών του δημοτικού σχολείου, αναδεικνύοντας τη μεγάλη σημασία που διεθνώς αποδίδεται στην αντίληψη των Μαθηματικών ως επιστήμης των προτύπων και της τάξης (Schoenfeld, 1992· Steen, 1988). Ο όρος «μοτίβο» έχει υιοθετηθεί ως μετάφραση του αγγλικού όρου «pattern»[1], για να δηλώσει ένα πρότυπο, ένα υπόδειγμα, μία ευδιάκριτη κανονικότητα της φύσης ή ένα τεχνητό σχέδιο. Αναφερόμενοι στη μαθηματική διάσταση των μοτίβων, οι Mulligan και Mitchelmore (2009) περιγράφουν τα μοτίβα ως προβλεπόμενες κανονικότητες που συνήθως περιλαμβάνουν αριθμητικές, χωρικές ή λογικές σχέσεις. Για τις Τζεκάκη και Κούλελη (2007), το μοτίβο αποτελεί ένα σύνολο από μορφικά, γεωμετρικά ή μετρικά χαρακτηριστικά τα οποία παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων' (σελ. 269). Στη μαθηματική εκπαίδευση προτείνεται ως εύρεση μοτίβου η ανακάλυψη ηχητικών, οπτικών και κινητικών κανονικοτήτων που μπορούν να επαναλαμβάνονται, να μεγαλώνουν ή γενικότερα να σχετίζονται μεταξύ τους με έναν κανόνα' (Τζεκάκη, 2007, σ. 251).

Τα μοτίβα κατατάσσονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες αναφορικά με την εξέλιξή τους: τα επαναλαμβανόμενα και τα αναπτυσσόμενα μοτίβα (van de Walle, 2007). Επαναλαμβανόμενα είναι τα μοτίβα που βασίζονται στην επανάληψη και ο πυρήνας τους είναι η μικρότερη επαναλαμβανόμενη αλληλουχία στοιχείων. Ο πυρήνας τους επαναλαμβάνεται πάντοτε τέλεια και ποτέ δεν εμφανίζεται μόνο μερικώς επαναλαμβανόμενος. Τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα έχουν συνήθως κυκλική δομή, δηλαδή ο πυρήνας τους έχει ένα κεντρικό θέμα (π.χ. ΑΒΓ) και υποδεικνύεται η επιστροφή συνεχώς σε αυτό (ΑΒΓ-ΑΒΓ-ΑΒΓ..). Τα αναπτυσσόμενα μοτίβα (ή ακολουθίες) αποτελούνται από μία σειρά ξεχωριστών στοιχείων ή πλαισίων, με το κάθε νέο πλαίσιο να συνδέεται με το προηγούμενο σύμφωνα με έναν κανόνα. Στόχος δεν είναι μόνο η επέκτασή τους αλλά η αναζήτηση γενικεύσεων ή αλγεβρικών σχέσεων που θα δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να γνωρίζουν ποια τροπή θα παίρνει το αναπτυσσόμενο μοτίβο (αριθμητικό ή οπτικό) σε ένα οποιοδήποτε σημείο στην πορεία. Για την κατανόηση των αναπτυσσόμενων μοτίβων είναι απαραίτητη η κατανόηση μίας συναρτησιακής σχέσης ανάμεσα στους όρους του μοτίβου και τη θέση αυτών των όρων, και όχι απλά η αναγνώριση των διαδοχικών όρων μέσα σε ένα μοτίβο. Καθώς, λοιπόν, τα αναπτυσσόμενα μοτίβα αναδεικνύουν την έννοια της συνάρτησης, αρκετοί είναι οι ερευνητές (π.χ. βλ. σχετικά van de Walle, 2007) που προτείνουν ότι αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή της έννοιας αυτής στους μαθητές.

Η έννοια του μοτίβου και ο τρόπος με τον οποίο αυτό επεκτείνεται ή συνεχίζεται εισάγεται στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση, στο εξωτερικό και στην Ελλάδα, από πολύ νωρίς. Θεωρείται δεδομένο ότι η ενασχόληση με τα μοτίβα, επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα, συμβάλλει στην ανάπτυξη τόσο του μαθηματικού συλλογισμού των παιδιών (Mulligan & Mitchelmore, 2009) όσο και της αλγεβρικής τους σκέψης (Warren, 2005).

Θεωρητικό πλαίσιο

Αρκετές μελέτες έχουν ασχοληθεί με την υλοποίηση δραστηριοτήτων ή διδακτικών πειραμάτων που στοχεύουν στην ανάπτυξη της κατανόησης των μοτίβων σε διάφορα επίπεδα μαθητών, από το νηπιαγωγείο μέχρι τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ακόμα και σε ενήλικες. Ο στόχος τέτοιων δραστηριοτήτων είναι η επικέντρωση της προσοχής από τη μικρότερη δυνατή ηλικία στην ικανότητα αναγνώρισης, ανακατασκευής, συνέχισης ή συμπλήρωσης μοτίβων (van de Walle, 2007) και η «ανάπτυξη μιας συνήθειας του νου» να οργανώνει καταστάσεις ή φαινόμενα (Clements & Sarama, 2009). Τα τελευταία χρόνια το ερευνητικό ενδιαφέρον για τα μοτίβα επικεντρώθηκε ιδιαίτερα στις μικρές ηλικίες, αναδεικνύοντας τις δυνατότητες και τις προοπτικές των μικρών παιδιών. Τα αποτελέσματα τέτοιων ερευνών επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι παιδιά προσχολικής ηλικίας είναι σε θέση να εντοπίζουν, να επαναλαμβάνουν, να συμπληρώνουν, να συνεχίζουν ή να κατασκευάζουν ένα μοτίβο με τη χρήση διάφορων υλικών (π.χ. Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011· Rittle-Johnson, Fyfe, McLean, & McEldoon, 2013· Skoumpourdi, 2013· Τζεκάκη & Κούλελη, 2007), χωρίς απαραίτητα να μπορούν να προσδιορίζουν τη μονάδα επανάληψης στα μοτίβα (Papic et al., 2011). Ακόμα και σε ελεύθερες δραστηριότητες όπου δεν υπάρχει καθοδήγηση από τον/την εκπαιδευτικό (π.χ. στο παιχνίδι), τα μικρά παιδιά αυθόρμητα κατασκευάζουν μοτίβα, τα οποία λιγότερο συχνά οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν μαθηματικά (Fox, 2005). Ωστόσο, η διερεύνηση των επιδόσεων των μικρών παιδιών δείχνει ότι αυτές συχνά εξαρτώνται και επηρεάζονται από το περιεχόμενο και τη δομή του μοτίβου καθώς και από το είδος του υλικού που εμπλέκεται. Σίγουρα, όμως, οι επιδόσεις των παιδιών εμφανίζονται περισσότερο βελτιωμένες στα επόμενα σχολικά τους χρόνια, ως αποτέλεσμα των προηγούμενων σχετικών εμπειριών τους από την προσχολική ηλικία (Leung, Krauthausen, & Rivera, 2012), ενισχύοντας την άποψη ότι η καθυστέρηση στην ενασχόληση με τα μοτίβα και την αναζήτηση και αναγνώριση δομικών στοιχείων μέσα από αυτά αιτιολογεί τις δυσκολίες των μεγαλύτερων παιδιών στην άλγεβρα (Mulligan & Mitchelmore, 2009· Warren & Cooper, 2008).

Προκειμένου να εντοπιστούν τα στοιχεία εκείνα που διευκολύνουν τα παιδιά να διαχειριστούν ένα μοτίβο, διάφοροι παράγοντες έχουν μελετηθεί. Για παράδειγμα, η Gadzichowski (2012) βρήκε ότι διαφοροποιήσεις στον τρόπο παρουσίασης των μοτίβων, όπως χρήση χρωμάτων, σχημάτων, αριθμών και γραμμάτων με παραλλαγές στην περιστροφή και τον προσανατολισμό (οριζόντια ή κάθετα), δεν επηρεάζουν τις επιδόσεις των εξάχρονων παιδιών. Διαφορές στις ικανότητες σχετικά με τα μοτίβα, ως προς το φύλο, ανέδειξαν οι Patterson, Block, και Pasnak (2015), στην έρευνα των οποίων βρέθηκε υπεροχή των εξάχρονων και επτάχρονων αγοριών σε σχέση με συνομήλικά τους κορίτσια σε έργα με μοτίβα. Ανεξάρτητα, όμως, από επιμέρους παράγοντες, έχει εντοπιστεί η ύπαρξη θετικής συσχέτισης ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών ηλικίας από 6 έως 8 ετών για αναγνώριση και συνέχιση μοτίβων και την επίδοσή τους σε αριθμητικά προβλήματα με σενάριο, ακόμα κι όταν γνωστικοί παράγοντες (όπως εργαζόμενη μνήμη, ταχύτητα επεξεργασίας και γλωσσικές ικανότητες) έχουν ελεγχθεί (Lee, Ng, Bull, Pe, & Ho, 2011).

Η συνέχιση και η αναπαραγωγή ενός μοτίβου, ωστόσο, δεν είναι αρκετή για την ανάπτυξη συλλογισμού για τις κανονικότητες (Τζεκάκη, 2007). Για να γίνει αυτό, απαιτείται η συστηματική μελέτη των κανόνων που διαμορφώνουν τα μοτίβα και η αναγνώριση των δομικών τους στοιχείων, γεγονός που οδηγεί τα παιδιά στη σαφή λεκτική περιγραφή των κανόνων τους. Σύμφωνα με αρκετούς ερευνητές (π.χ. Lannin, 2005), η περιγραφή μιας ορθής ισχυρής αιτιολόγησης του γενικού κανόνα σε ένα μοτίβο αποτελεί απόδειξη της σε βάθος, και όχι επιφανειακής, κατανόησης του μοτίβου. Ο Lannin (2005) διερεύνησε τον τρόπο με τον οποίο μαθητές Στ΄ τάξης ερμηνεύουν και προχωρούν σε γενικεύσεις ενός κανόνα σε μοτίβα με εικονική ή λεκτική αναπαράσταση και παρατήρησε πέντε διαδοχικά επίπεδα, τα οποία βαθμιαία αναπτύσσονταν από ένα πρώτο επίπεδο, όπου τα παιδιά αδυνατούν να δώσουν κάποια εξήγηση, ως ένα πολύ προχωρημένο στάδιο, όπου οι εξηγήσεις τους είναι πολύ συστηματικές.

Επιπρόσθετα, βρήκε ότι οι μαθητές που συνέδεαν τον κανόνα με την εικονική αναπαράσταση έκαναν περισσότερες επιτυχείς γενικεύσεις σε σχέση με τους μαθητές που χρησιμοποιούσαν στρατηγικές βασισμένες στο μάντεμα. Περισσότερο απαισιόδοξα, ωστόσο, είναι τα αποτελέσματα της έρευνας των Guner, Ersoy, και Temiz (2013) με 14-χρονους και 15-χρονους μαθητές στην Τουρκία οι οποίοι δυσκολεύτηκαν να γενικεύσουν αριθμητικά αναπτυσσόμενα μοτίβα. Οι περισσότεροι μάλιστα προσπαθούσαν να μαντέψουν τον κανόνα, ενώ λίγοι είναι αυτοί που ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν τη λύση που έδωσαν.

Διαφοροποιήσεις στην επίδοση των παιδιών Ε′ και της Στ′ τάξης ως προς την αναπαραστασιακή μορφή των μοτίβων εντόπισαν και οι Michael, Elia, Gagatsis, Theoklitou, και Savva (2006), οι οποίοι ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να συνεχίσουν μοτίβα απλής και σύνθετης δομής, να βρουν όρους σε μεγαλύτερες θέσεις και να διατυπώσουν γενικεύσεις. Βρέθηκαν καλύτερες επιδόσεις στην εικονική μορφή αναπαράστασης των μοτίβων σε σχέση με τη λεκτική, εύρημα που αναδείχθηκε εντονότερα όσο η πολυπλοκότητα των μοτίβων αυξανόταν. Μία κλιμακούμενη δυσκολία κατανόησης από τα μοτίβα απλούστερης δομής στα μοτίβα που απαιτούν την εύρεση ενός κανόνα επιβεβαιώνουν και οι Fujita και Yamamoto (2011), οι οποίοι μελέτησαν –στο πλαίσιο διδακτικής παρέμβασης- τις επιδόσεις μικρότερων παιδιών, ηλικίας οκτώ ετών, σε αριθμητικά μοτίβα βασισμένα στην ακολουθία Fibonacci.

Η Warren (2005) προσφέρει στοιχεία από διδακτικό πείραμα με παιδιά ηλικίας εννέα ετών και έξι μηνών που δείχνουν ότι παιδιά αυτής της ηλικίας είναι σε θέση όχι μόνο να σκεφτούν σχεσιακά για τα δεδομένα που παρουσιάζονται σε αναπτυσσόμενα μοτίβα,γεγονός που είχε εντοπιστεί ήδη σε πολύ μικρότερα παιδιά (Blanton & Kaput, 2011) αλλά και να εκφράσουν τις σχέσεις συμβολικά. Προτείνει μάλιστα ότι τα αναπτυσσόμενα μοτίβα θα πρέπει να παρουσιάζονται μέσα από μια ποικιλία μέσων (π.χ. μουσική, γεωμετρικά σχήματα), καθώς έτσι ενισχύεται η ανάπτυξη ικανοτήτων γενίκευσης και αφαίρεσης καθώς και η δυνατότητα αλγεβρικής έκφρασης και αλγεβρικού συλλογισμού. Παρόμοια, οι Moss και McNab (2011) προτείνουν τη χρήση των αναπτυσσόμενων μοτίβων σε παιδιά Β′ τάξης (ηλικίας 7-8 ετών), για τα οποία βρήκαν ότι βελτίωσαν, πολύ μετά από την διδακτική τους παρέμβαση, το σχεσιακό συλλογισμό τους τόσο σε γεωμετρικά όσο και σε αριθμητικά μοτίβα.

Η Rivera στις έρευνές της χρησιμοποιεί εκτεταμένα τα αναπτυσσόμενα μοτίβα ως ένα πλούσιο πλαίσιο για τη διερεύνηση των ικανοτήτων των μικρών παιδιών για τα μοτίβα. Συγκεκριμένα, μελέτησε (Rivera, 2010), κατά τη διάρκεια προγράμματος παρέμβασης, την ικανότητα οκτάχρονων παιδιών για γενίκευση γεωμετρικών μοτίβων τα οποία, για την αποφυγή της χρήσης στρατηγικών όπως "δοκιμής-και-λάθους" από τα παιδιά, παρουσιάζονταν σε εικονιστικό πλαίσιο. Στο τέλος της παρέμβασης, οι μαθητές ήταν σε θέση να εκφράζουν συμβολικά τις σχέσεις που περιγράφουν τα μοτίβα καθώς και να αιτιολογούν τις απαντήσεις τους.

Τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών, ακολουθώντας τα ερευνητικά αποτελέσματα, στρέφουν την προσοχή τους όχι μόνο στην ενθάρρυνση δράσεων που σχετίζονται με τον εντοπισμό και την περιγραφή μοτίβων, αλλά και στην ανάδειξη των σχέσεων, των δομών και των κανόνων τους. Σχεδόν σε όλα τα σύγχρονα προγράμματα για το δημοτικό σχολείο και το νηπιαγωγείο, όπως και στο πρόσφατο ελληνικό (Δαφέρμου, Κουλούρη & Μπασογιάννη, 2005· Ι.Ε.Π., 2003), η αναγνώριση μοτίβων θεωρείται μαθησιακός άξονας που στηρίζει τόσο την αριθμητική όσο και την άλγεβρα. Παρά την εισαγωγή -κυρίως στο δημοτικό σχολείο- της διδασκαλίας των μοτίβων, περιορισμένα είναι τα ερευνητικά δεδομένα που προσφέρουν πληροφορίες για τα είδη των μοτίβων που είναι ευκολότερα ή δυσκολότερα για να μάθουν τα παιδιά ή ποια μοτίβα τα ίδια τα παιδιά θεωρούν περισσότερο ενδιαφέροντα.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά των μεσαίων τάξεων δημοτικού σχολείου αντιλαμβάνονται και επεκτείνουν μαθηματικά μοτίβα. Ο σκοπός αυτός βασίζεται στην προοπτική της συστηματικής άσκησης των παιδιών σε έργα με μοτίβα και τη δημιουργία σειράς δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία των μοτίβων στις μεσαίες τάξεις του δημοτικού σχολείου, με δεδομένο ότι η ερευνητική δουλειά για τη διερεύνηση των μοτίβων τόσο στην Ελλάδα όσο και διεθνώς επικεντρώνεται αφενός στην προσχολική ηλικία, όπου επιδιώκεται η εισαγωγή τους, και αφετέρου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπου συνδέεται η ανάπτυξη των μοτίβων με τη γενίκευση και τον αλγεβρικό συλλογισμό. Τέσσερα είναι τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρεί να διερευνήσει η παρούσα εργασία : α) Ποιες διαφορές υπάρχουν (αν υπάρχουν) ανάμεσα στις επιδόσεις των παιδιών που φοιτούν στις μεσαίες τάξεις του δημοτικού σχολείου; β) Υπάρχει διαφοροποίηση στην επίδοση των παιδιών σε σχέση με παράγοντες όπως η φύση των μοτίβων (αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα), η εξέλιξή τους (επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα) και η συμπλήρωσή τους (εντοπισμός όρου στην επόμενη θέση ή σε μεγαλύτερες θέσεις); γ) Υπάρχει συγκεκριμένη κατηγορία μοτίβων την οποία τα παιδιά προτιμούν να κατασκευάσουν; δ) Ποιες είναι οι στρατηγικές σκέψης των παιδιών που αναδεικνύουν τα επίπεδα κατανόησης των μοτίβων;

Μεθοδολογία

Συμμετέχοντες

Το ερευνητικό δείγμα αποτέλεσαν συνολικά 90 παιδιά, από τα οποία τα 48 ήταν μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης (20 κορίτσια και 28 αγόρια, ηλικίας από 8 ετών και 2 μηνών έως 9 ετών και 6 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 8 έτη και 10 μήνες) και οι 42 ήταν μαθητές/τριες της Δ΄ τάξης (22 κορίτσια και 20 αγόρια, ηλικίας από 9 ετών και 2 μηνών έως 10 ετών και 2 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 9 έτη και 8 μήνες) που φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της ευρύτερης περιοχής της πόλης της Θεσσαλονίκης και ανήκαν σε διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Η επιλογή τους έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας, με τη χρήση των πινάκων τυχαίων αριθμών (Cozby & Bates, 2012)από το συνολικό αριθμό των παιδιών Γ΄ και Δ΄ τάξης των δημοτικών σχολείων που δέχθηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα. Οι συμμετέχοντες δεν είχαν δεχθεί εξειδικευμένη διδασκαλία στα μοτίβα.

Σχεδιασμός – Εργαλείο μέτρησης

Για τον σκοπό της παρούσας εργασίας, σχεδιάστηκαν συνολικά 21 έργα μοτίβων, τα οποία παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες. Αυτά τα έργα χωρίζονταν σε δύο βασικές κατηγορίες ως προς το περιεχόμενό τους: α) 8 έργα με **οπτικά μοτίβα** και β) 12 έργα με **αριθμητικά μοτίβα**. Τα οπτικά μοτίβα αφορούσαν την επανάληψη ή τη συνέχιση σειράς χρωμάτων, γεωμετρικών σχημάτων, κεφαλαίων γραμμάτων, κουκίδων και σχηματισμών σύμφωνα με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό κανόνα. Τα αριθμητικά μοτίβα ήταν σειρές ακέραιων αριθμών που επαναλαμβάνονταν ή αναπτύσσονταν και βασίζονταν σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό κανόνα. Από τα παιδιά ζητήθηκε να μελετήσουν το μοτίβο σε κάθε έργο και να συμπληρώσουν το στοιχείο που λείπει κάθε φορά ώστε να ισχύει το μοτίβο.

Για κάθε μία από τις δύο κατηγορίες έργων (οπτικά και αριθμητικά μοτίβα), υπήρχαν έργα που αφορούσαν: i) **επαναλαμβανόμενα** οπτικά (4 έργα) και επαναλαμβανόμενα αριθμητικά μοτίβα (4 έργα), ii) **αναπτυσσόμενα** οπτικά (4 έργα) και αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα (8 έργα). Στην κατηγορία των αναπτυσσόμενων αριθμητικών μοτίβων υπήρχαν 4 έργα που αφορούσαν αριθμητικά μοτίβα που αναπτύσσονται από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό (growing up patterns) και 4 έργα που αφορούσαν αριθμητικά μοτίβα τα οποία αναπτύσσονται από τον μεγαλύτερο αριθμό προς τον μικρότερο (growing down patterns). Επιπλέον, για όλες τις κατηγορίες μοτίβων υπήρχαν μοτίβα στα οποία οι συμμετέχοντες καλούνταν να προσδιορίσουν την αμέσως επόμενη θέση (near) καθώς και μοτίβα των οποίων έπρεπε να προσδιορίσουν τη θέση μετά από τέσσερα βήματα (far). Προκειμένου να αποφευχθεί η πιθανότητα η σειρά παρουσίασης των μοτίβων να επηρεάσει τις επιδόσεις των συμμετεχόντων, στους μισούς παρουσιάστηκαν αρχικά τα έργα με τα οπτικά μοτίβα και, στη συνέχεια, τα έργα με τα αριθμητικά μοτίβα, ενώ στους άλλους μισούς το αντίστροφο. Οι Πίνακες 1 και 2 που ακολουθούν περιγράφουν τα 20 έργα που χρησιμοποιήθηκαν στη παρούσα έρευνα.

Υπήρχε, επίσης, ένα τελευταίο έργο στο οποίο ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να κατασκευάσουν ένα μοτίβο δικής τους επιλογής, χωρίς καμία καθοδήγηση ως προς το περιεχόμενό του, προκειμένου να διερευνηθούν οι προτιμήσεις των παιδιών αναφορικά με τα οπτικά ή τα αριθμητικά μοτίβα. Σε αυτό το έργο δόθηκαν στα παιδιά μαρκαδόροι, μολύβια και στυλό για να χρησιμοποιήσουν για την κατασκευή του μοτίβου.

Πίνακας 1 Τα έργα με οπτικά μοτίβα

Α. ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ ΟΠΤΙΚΑ ΜΟΤΙΒΑ (repeating patterns)

Αμέσως επόμενο βήμα (near)

1)

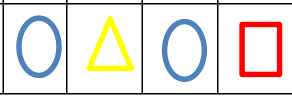
	πρ		κοκ		πρ				
κοκ		μπλ		κοκ					

2)

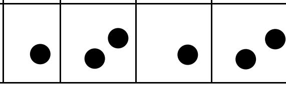
Α	**Β**	**Γ**		**Α**	**Β**	**Γ**				

Μετά από 4 βήματα (far)

3)

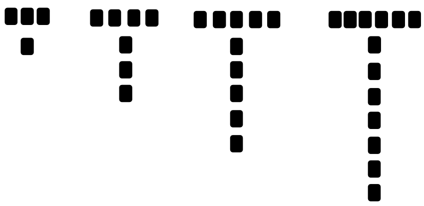
Θέση	1η	2η	3η	4η	. . .	8η
Σχήμα					. . .	

4)

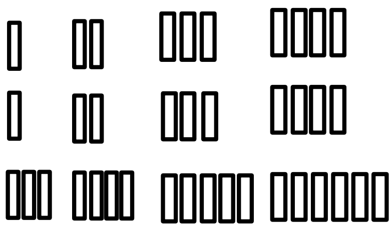
Θέση	1η	2η	3η	4η	. . .	8η
Σχήμα					. . .	

Β. ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΑ ΟΠΤΙΚΑ ΜΟΤΙΒΑ (growing patterns)

1)
Θέση: 1η 2η 3η 4η 5η

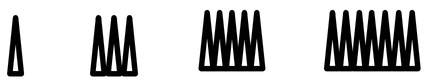


3)
Θέση: 1η 2η 3η 4η. . . 8η



2)
Θέση: 1η 2η 3η 4η5η

4)
Θέση: 1η 2η 3η 4η. . . 8η



Πίνακας 2 Τα έργα με αριθμητικά μοτίβα

Α. ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΜΟΤΙΒΑ (repeating patterns)

Αμέσως επόμενο βήμα (near)

1)

1	3	1	3	1	3	1			

2)

5	7	1	5	7	1	5			

Μετά από 4 βήματα (far)

3)

Θέση	**$1^{η}$**	**$2^{η}$**	**$3^{η}$**	**$4^{η}$**	**. . .**	**$8^{η}$**
Αριθμός	**5**	**2**	**5**	**2**	**. . .**	

4)

Θέση	**$1^{η}$**	**$2^{η}$**	**$3^{η}$**	**$4^{η}$**	**$5^{η}$**	**$6^{η}$**	**$7^{η}$**	**. . .**	**$12^{η}$**
Αριθμός	**4**	**7**	**2**	**4**	**7**	**2**	**4**	**. . .**	

Β. ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΟΥ ΑΝΕΒΑΙΝΟΥΝ (growing up patterns)

1)

2	9	16	23	…

2)

3	6	12	24	…

3)

Θέση	**$1^{η}$**	**$2^{η}$**	**$3^{η}$**	**$4^{η}$**	**. . .**	**$8^{η}$**
Αριθμός	**2**	**4**	**8**	**16**	**. . .**	

4)

Θέση	**$1^{η}$**	**$2^{η}$**	**$3^{η}$**	**$4^{η}$**	**. . .**	**$8^{η}$**
Αριθμός	**1**	**5**	**9**	**13**	**. . .**	

Γ. ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΟΥ ΚΑΤΕΒΑΙΝΟΥΝ (growing down patterns)

1)

100	95	90	85	…

2)

77	66	55	44	…

3)

Θέση	**$1^{η}$**	**$2^{η}$**	**$3^{η}$**	**$4^{η}$**	**. . .**	**$8^{η}$**
Αριθμός	**200**	**180**	**160**	**120**	**. . .**	

4)

Θέση	**$1^{η}$**	**$2^{η}$**	**$3^{η}$**	**$4^{η}$**	**. . .**	**$8^{η}$**
Αριθμός	**896**	**448**	**224**	**112**	**. . .**	

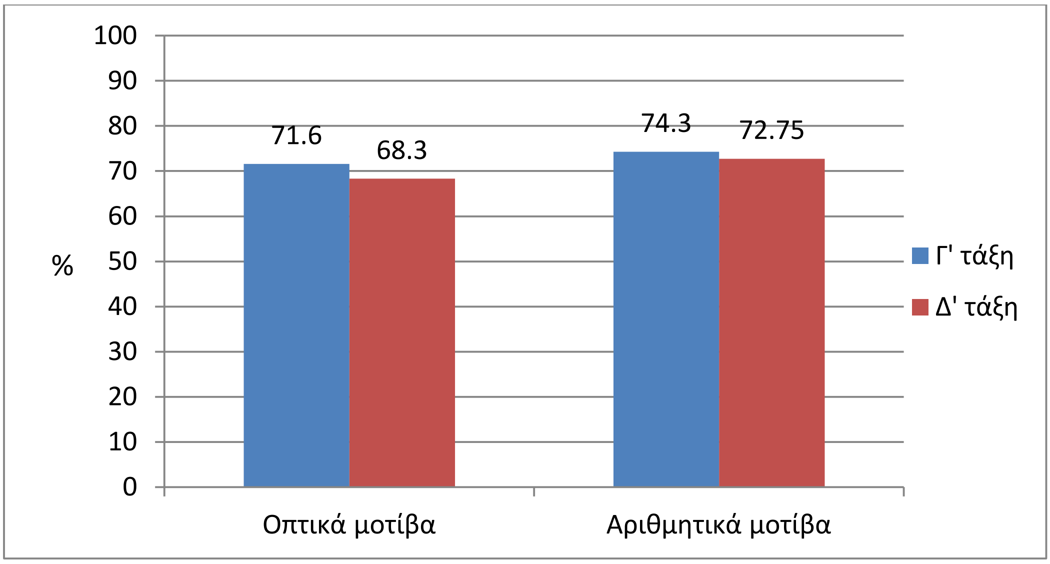
Διαδικασία

Κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά σε ήσυχο χώρο του σχολείου, σε μία συνάντηση που διήρκεσε περίπου 35-40 λεπτά. Πριν από την έρευνα, οι μαθητές-τριες δεν συμμετείχαν συστηματικά σε παρόμοιες δραστηριότητες μοτίβων, παρά μόνο σε αυτές που είχαν διδαχθεί στο πλαίσιο του σχολικού βιβλίου κατά τη διάρκεια της υπόλοιπης σχολικής χρονιάς. Έγινε σαφές στους συμμετέχοντες πως η έρευνα δεν αφορούσε τεστ μαθηματικών ικανοτήτων και ότι μπορούν να απαντήσουν στα έργα χωρίς να προβληματίζονται για την τελική τους επίδοση. Τα παιδιά-συμμετέχοντες ήταν ελεύθερα να εκφράσουν όποια απορία προέκυπτε κατά την επίλυση των έργων,. Τέλος, διατηρήθηκε η ανωνυμία των παιδιών, ενώ η συμμετοχή τους στην έρευνα έγινε σε εθελοντική βάση.

Αποτελέσματα

Γενική επίδοση

Οι συμμετέχοντες και των δύο ηλικιακών ομάδων εμφάνισαν πολύ ικανοποιητικά ποσοστά επιτυχίας (πάνω από 70%) στο σύνολο των έργων που τους παρουσιάστηκαν. Πιο συγκεκριμένα, δε βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές ηλικιακές διαφορές ανάμεσα στην επίδοση των παιδιών της Γ′ τάξης και την επίδοση των παιδιών της Δ′ τάξης (t=0.738, df=88, p=0.463), με το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στα έργα για τα παιδιά της Γ′ τάξης κυμάνθηκε περίπου στο 73%, ενώ για τα παιδιά της Δ′ τάξης περίπου στο 71%. Όταν εξετάστηκε η συνολική επίδοση των παιδιών των δύο τάξεων ξεχωριστά για τα έργα με οπτικά μοτίβα και τα έργα με αριθμητικά μοτίβα, βρέθηκε και πάλι ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των παιδιών ανά τάξη. Ειδικότερα, τόσο τα παιδιά της Γ′ τάξης όσο και αυτά της Δ′ τάξης είχαν παρόμοιες επιδόσεις στα έργα με τα οπτικά μοτίβα (t=0.943, df=88, p=0.348) και στα έργα με τα αριθμητικά μοτίβα (t=0.461, df=88, p=0.646). Αναλυτικά οι επιδόσεις των παιδιών για κάθε τάξη στα έργα με οπτικά μοτίβα και στα έργα με αριθμητικά μοτίβα παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.



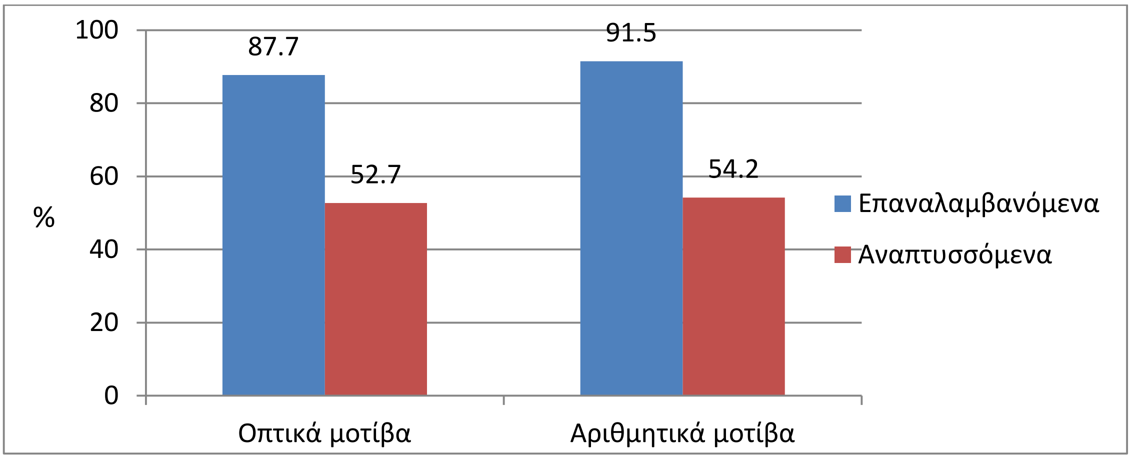
Σχήμα 1 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στα οπτικά και τα αριθμητικά μοτίβα ως προς την τάξη

Η συνολική επίδοση όλων των συμμετεχόντων βρέθηκε ότι δεν επηρεάζεται στατιστικά σημαντικά από τη σειρά παρουσίασης των έργων (t=-0.488, df=88, =0.627): είτε παρουσιάστηκαν πρώτα τα έργα με τα οπτικά μοτίβα και μετά τα έργα με τα p αριθμητικά μοτίβα είτε το αντίστροφο, δεν έπαιξε ρόλο στο σύνολο των σωστών απαντήσεων που έδωσαν τα παιδιά. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώθηκε και στην ανάλυση των δεδομένων για κάθε τάξη ξεχωριστά. Τόσο για τα παιδιά της Γ′ τάξης όσο και για εκείνα της Δ′ τάξης δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοσή τους αναφορικά με τη σειρά παρουσίασης των έργων (t =-1.338, df=50, p=0.187 και t=0.921, df=36, p=0.363 για τη Γ′ και τη Δ′ τάξη, αντίστοιχα).

Επίδοση στα είδη των μοτίβων

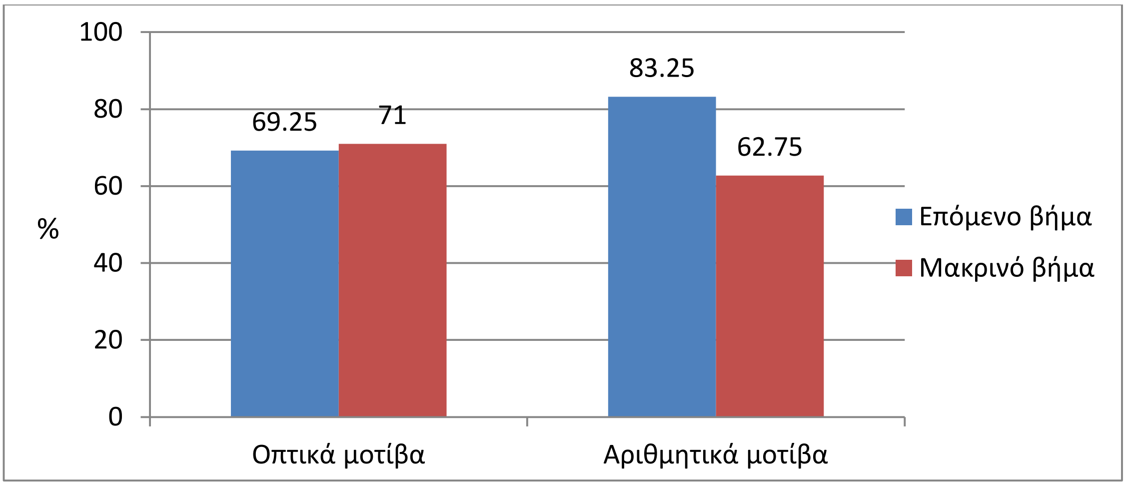
Προκειμένου να εξεταστεί αν το περιεχόμενο των μοτίβων επηρεάζει τη συνολική επίδοση των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες, το οποίο έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στα έργα που αφορούσαν οπτικά ή αριθμητικά μοτίβα (t=1.536, df=89, p=0.128). Συγκεκριμένα, όλα τα παιδιά παρουσίασαν πολύ καλή συνολική επίδοση τόσο στα έργα με τα οπτικά μοτίβα όσο και στα έργα με τα αριθμητικά μοτίβα (με ποσοστό επιτυχίας 70% και 73%, αντίστοιχα). Καλό θα ήταν να επισημανθεί ότι στα έργα με τα αριθμητικά μοτίβα για τη συγκεκριμένη στατιστική ανάλυση δεν συμπεριλήφθηκε η κατηγορία των αριθμητικών μοτίβων που κατεβαίνουν, καθώς δεν υπήρχε αντίστοιχη κατηγορία στα έργα με τα οπτικά μοτίβα.

Στατιστικά σημαντικές διαφορές, ωστόσο, εντοπίστηκαν στις επιδόσεις των παιδιών στα αναπτυσσόμενα και τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, ανεξάρτητα από το αν αυτά ήταν οπτικά ή αριθμητικά (t=14.004, df=89, p<0.001): τα παιδιά και των δύο ηλικιακών ομάδων είχαν καλύτερη επίδοση στα έργα με επαναλαμβανόμενα μοτίβα (89,6%) σε σχέση με τα έργα που αφορούσαν αναπτυσσόμενα μοτίβα (53,5%). Οι ίδιες στατιστικά σημαντικές διαφορές βρέθηκαν και όταν η επίδοση των παιδιών στα αναπτυσσόμενα και τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα εξετάστηκε ξεχωριστά για τα οπτικά (t=9.981, df=89, p<0.001) και τα αριθμητικά μοτίβα (t=12.454, df=89, p<0.001), επιβεβαιώνοντας την υπεροχή των παιδιών στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Το Σχήμα 2 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



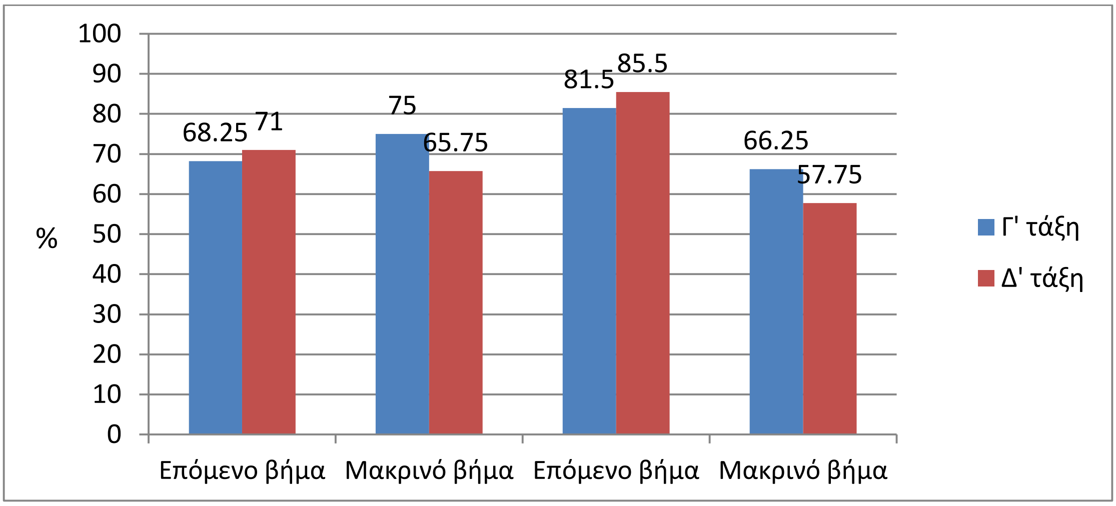
Σχήμα 2 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στα οπτικά και τα αριθμητικά μοτίβα ως προς την εξέλιξή τους

Ένας επιπλέον παράγοντας που εξετάστηκε ήταν η ικανότητα των παιδιών να επεκτείνουν τα διάφορα είδη των μοτίβων (οπτικά και αριθμητικά: επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα) στο αμέσως επόμενο βήμα (near) και μετά από 4 ή 5 βήματα (far). Βρέθηκε ότι για τα παιδιά και των δύο τάξεων στο σύνολό τους υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις επιδόσεις τους (t=-11.858, df=89, p<0.001), με τη συμπλήρωση του όρου στην αμέσως επόμενη θέση να είναι πιο εύκολη σε σχέση με τη συμπλήρωση του μοτίβου σε μεγαλύτερες θέσεις. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν όταν εξετάστηκαν ξεχωριστά οι επιδόσεις των παιδιών στα έργα που αφορούσαν την επέκταση του αριθμητικού μοτίβου στο επόμενο βήμα και αυτά που αφορούσαν την επέκταση του αριθμητικού μοτίβου στα επόμενα 4 ή 5 βήματα (t=-6.377, df=89, p<0.001). Αντίθετα, όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε για τα οπτικά μοτίβα, δε βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές (t=0.570, df=89, p=0.570), δείχνοντας ότι τα παιδιά είχαν παρόμοιες επιδόσεις στην επέκταση των οπτικών μοτίβων, ανεξάρτητα από το αν έπρεπε να συμπληρώσουν το αμέσως επόμενο βήμα ή τα επόμενα 4 ή 5 βήματα. Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 3 που ακολουθεί.



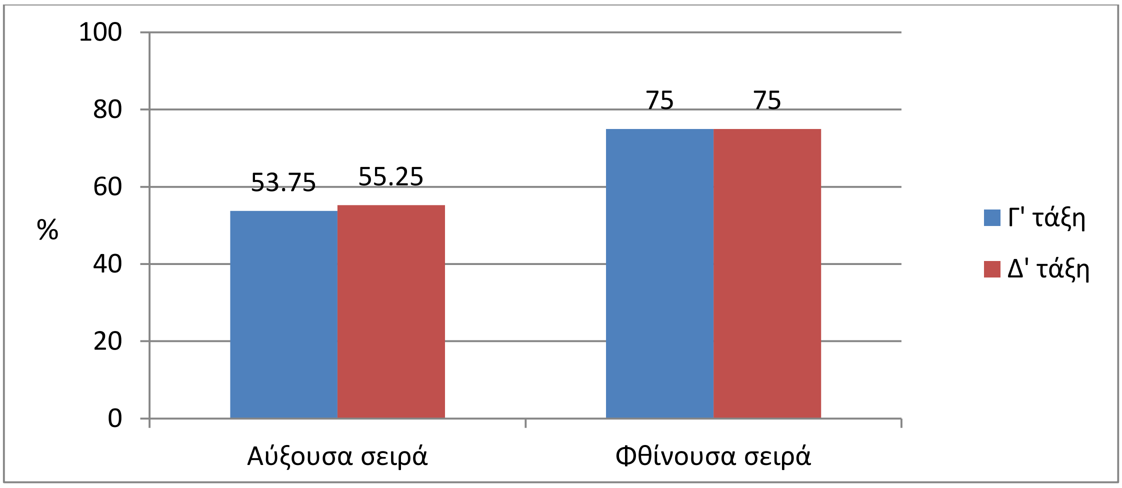
Σχήμα 3 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στα οπτικά και τα αριθμητικά μοτίβα ως προς την επέκτασή τους στο αμέσως επόμενο ή στο μακρινότερο βήμα

Οι διαφορές αυτές ανάμεσα στην επίδοση για τον εντοπισμό του όρου στην επόμενη ή σε μεγαλύτερες θέσεις, για τα παιδιά της Γ΄ τάξης εντοπίστηκαν τόσο στα έργα που αφορούσαν αριθμητικά μοτίβα (t=-4.382, df=51, p<0.001) όσο και στα έργα που αφορούσαν οπτικά μοτίβα (t=2.039, df=51, p<0.05), δείχνοντας ότι αυτός ο παράγοντας επηρεάζει την επίδοσή τους. Τα παιδιά, όμως, της Δ΄ τάξης δυσκολεύτηκαν περισσότερο στη συμπλήρωση του μοτίβου σε μεγαλύτερες θέσεις, σε σχέση με τη συμπλήρωση του αμέσως επόμενου όρου, μόνο στα έργα που αφορούσαν αριθμητικά μοτίβα (t=-4.767, df=37, p<0.001), ενώ δεν επηρεάστηκαν από αυτό τον παράγοντα στα έργα που αφορούσαν οπτικά μοτίβα (t=-1.034, df=37, p=0.308). Το Σχήμα 4 που ακολουθεί δείχνει αυτές τις διαφορές ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα.



Σχήμα 4 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στα οπτικά και τα αριθμητικά μοτίβα ως προς την επέκτασή τους στο αμέσως επόμενο ή στο μακρινότερο βήμα και την τάξη

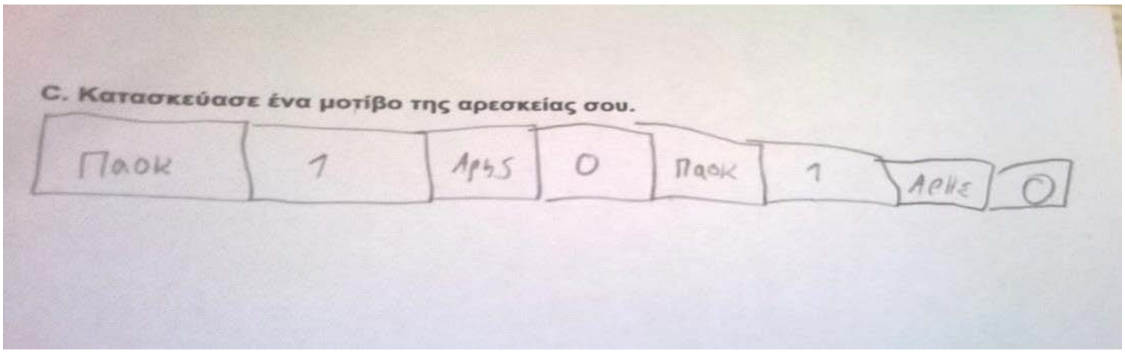
Τέλος, στα έργα με αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα υπήρχαν μοτίβα που αναπτύσσονται με αύξουσα σειρά (προς τα πάνω) και μοτίβα που αναπτύσσονται με φθίνουσα σειρά (προς τα κάτω). Συγκρίνοντας τις επιδόσεις όλων των παιδιών (βλ. Σχήμα 5), βρέθηκε πως υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά (t=-9.410, df=89, p<0.001), με τα αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα που κατεβαίνουν να είναι πιο εύκολα από τα αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα που ανεβαίνουν (ποσοστά επιτυχίας: 75% και 55%, αντίστοιχα). Αυτές οι διαφορές παρέμειναν και όταν η ανάλυση αυτή έγινε ξεχωριστά για τα παιδιά της Γ΄ και της Δ΄ τάξης (t=-7.390, df=51, p<0.001 και t=-5.771, df=37, p<0.001, αντίστοιχα).



Σχήμα 5 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στα αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα με αύξουσα και φθίνουσα σειρά ως προς την τάξη

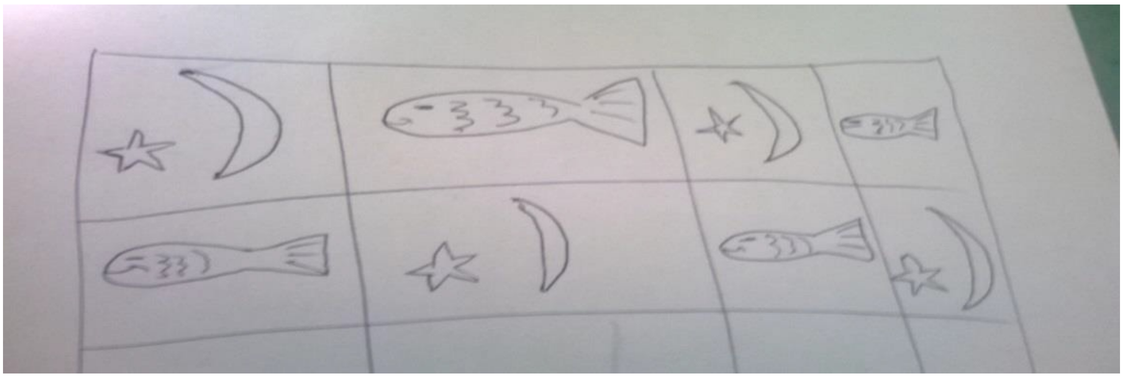
Κατασκευή μοτίβου

Στο τελευταίο έργο που δόθηκε, ζητήθηκε από τα παιδιά να κατασκευάσουν ένα μοτίβο της αρεσκείας τους. Οι απαντήσεις των παιδιών αναλύθηκαν και ταξινομήθηκαν σε κάποια από τις εξής τέσσερις κατηγορίες: α) επαναλαμβανόμενα οπτικά μοτίβα, β) αναπτυσσόμενα οπτικά μοτίβα, γ) επαναλαμβανόμενα αριθμητικά μοτίβα, και δ) αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα. Η πλειονότητα των παιδιών τόσο της Γ′ όσο και της Δ′ τάξης επέλεξαν να κατασκευάσουν επαναλαμβανόμενα οπτικά μοτίβα (73,1% και 78,9%, αντίστοιχα), όπως αυτά που παρουσιάζονται στις Εικόνες 1-3. Δε βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επιλογή των κατασκευασμένων μοτίβων ως προς την τάξη ($\chi^2(3)=3{,}125$, $p=0.373$).

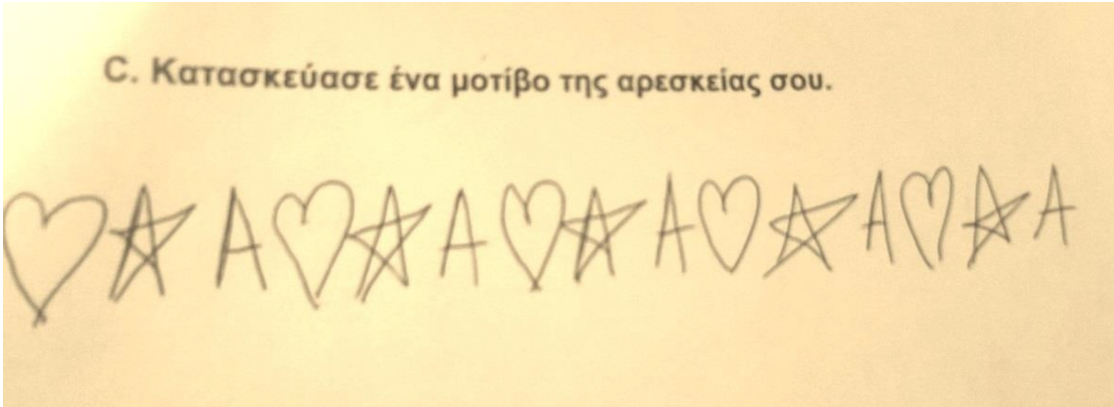


Εικόνα 1 Επαναλαμβανόμενο οπτικό μοτίβο – *Αγόρι, Γ′ τάξη*

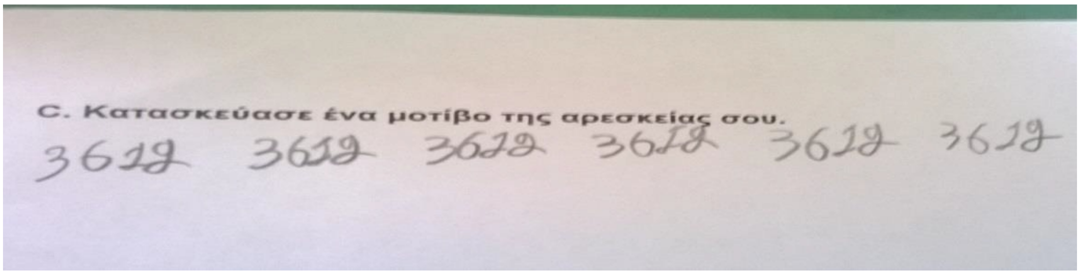
Πολύ λιγότερες ήταν οι κατασκευές των τριών άλλων κατηγοριών μοτίβου από τα παιδιά. Για παράδειγμα, 4 ήταν τα παιδιά της Γ′ τάξης και 3 τα παιδιά της Δ′ τάξης (μόλις 8% στο σύνολο όλων των συμμετεχόντων) που κατασκεύασαν επαναλαμβανόμενο αριθμητικό μοτίβο (βλ. Εικόνα 4). Δύο παιδιά μόνο, τα οποία προέρχονταν από την Γ′ τάξη, κατασκεύασαν αναπτυσσόμενα οπτικά μοτίβα (βλ. Εικόνα 5), ενώ αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα επέλεξαν να κατασκευάσουν δύο παιδιά, που προέρχονταν ισάριθμα από τις δύο τάξεις (βλ. Εικόνα 6). Στο Σχήμα 6, που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αναφορικά με τις κατασκευές μοτίβων που τα παιδιά και των δύο τάξεων επέλεξαν να κατασκευάσουν.



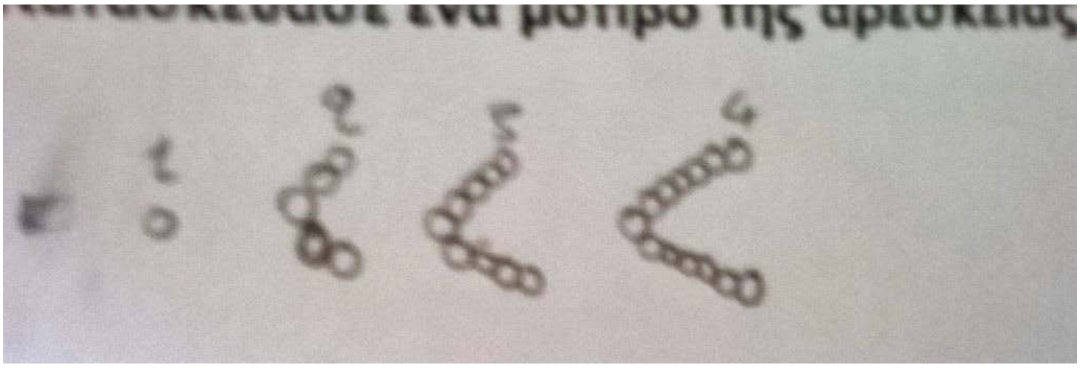
Εικόνα 2 Επαναλαμβανόμενο οπτικό μοτίβο – *Κορίτσι, Γ΄ τάξη*



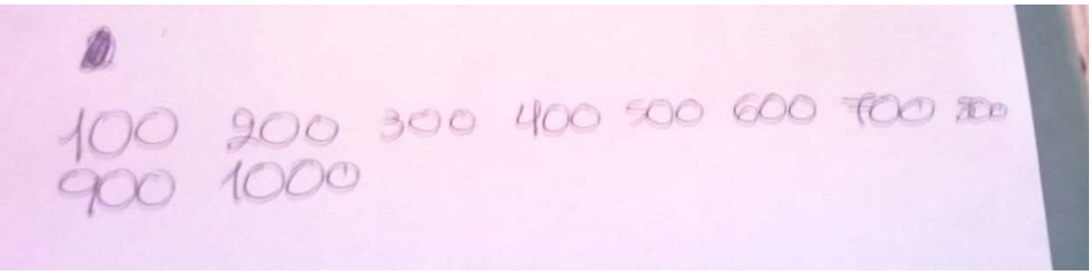
Εικόνα 3 Επαναλαμβανόμενο οπτικό μοτίβο – *Κορίτσι, Δ΄ τάξη*



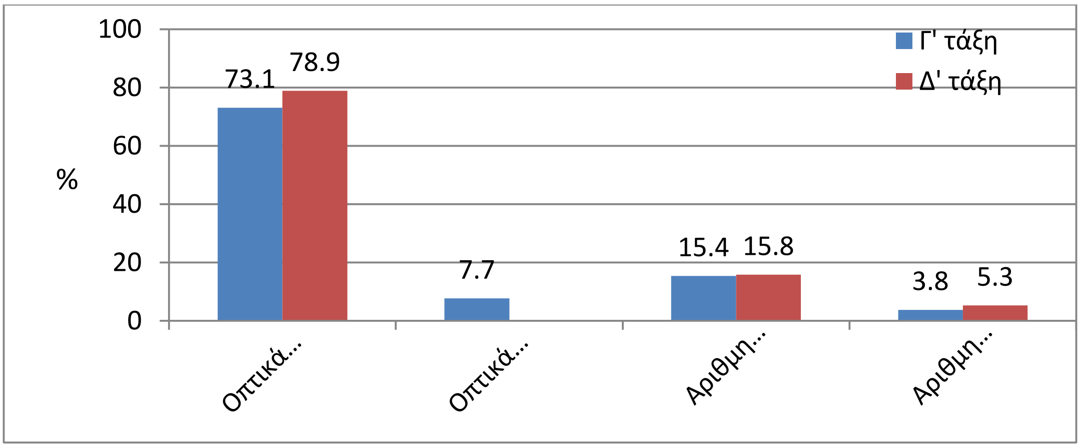
Εικόνα 4 Επαναλαμβανόμενο αριθμητικό μοτίβο – *Αγόρι, Δ΄ τάξη*



Εικόνα 5 Αναπτυσσόμενο οπτικό μοτίβο – *Αγόρι, Δ΄ τάξη*



Εικόνα 6 Αναπτυσσόμενο οπτικό μοτίβο – *Κορίτσι, Γ΄ τάξη*



Σχήμα 6 Ποσοστό επιλογής κατασκευής μοτίβου ως προς την τάξη

Στρατηγικές των παιδιών

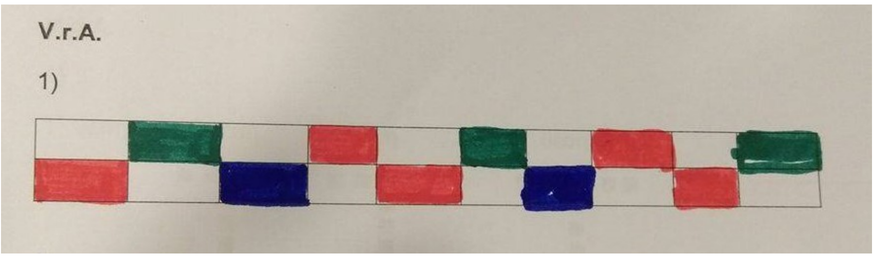
Από όλους τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους, ανεξάρτητα από το αν αυτές ήταν σωστές ή λανθασμένες. Οι απαντήσεις αυτές των παιδιών αναδείκνυαν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν και ταξινομήθηκαν στις εξής τέσσερις κατηγορίες κατανόησης, ακολουθώντας το μοντέλο που πρότεινε ο Redden (1996 παράθεση σε Warren, 2006):

α) *στρατηγική 0 – καμία απάντηση*. Σε αυτή την κατηγορία στρατηγικής εντάχθηκαν όσοι συμμετέχοντες δεν αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους ή η απάντησή τους δεν βασιζόταν σε κάποια στρατηγική.

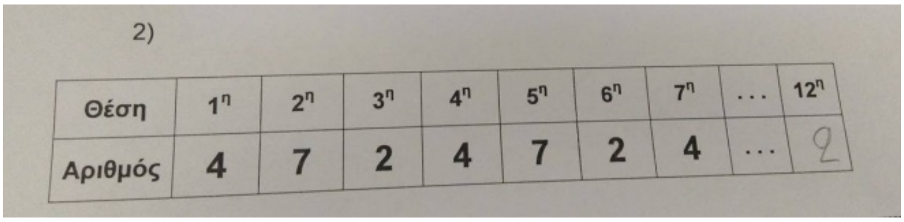
β) *στρατηγική 1 – πρόβλεψη*. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα ενός βήματος ή μερικών μόνο βημάτων του μοτίβου, τα παιδιά έδωσαν απάντηση για τη θέση που τους ζητιόταν στο μοτίβο. Συγκεκριμένα, στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, η αιτιολόγηση βασίστηκε στην επανάληψη μέρους των βημάτων του μοτίβου, χωρίς οι συμμετέχοντες να βρίσκουν τον πυρήνα του μοτίβου. Για παράδειγμα, ένα αγόρι της Γ΄ τάξης σε επαναλαμβανόμενο οπτικό μοτίβο λέει: «*Κάνω το ίδιο από την αρχή, ξεκινώντας από το μπλε*», δείχνοντας ότι ακολουθεί τα προηγούμενα βήματα για να συμπληρώσει το μοτίβο. Παρόμοια, ένα κορίτσι της Γ΄ τάξης σε επαναλαμβανόμενο αριθμητικό μοτίβο λέει: «*Μετά το 4 είναι το 7 και μετά το 2*», χωρίς να επαναλαμβάνει το μοτίβο στις ενδιάμεσες θέσεις (βλ. Εικόνα 7).

Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, η αιτιολόγηση στηρίχθηκε σε τυχαία πρόβλεψη. Για παράδειγμα, ένα κορίτσι της Δ΄ τάξης σε αναπτυσσόμενο οπτικό μοτίβο λέει: «*Το μοτίβο ανεβαίνει, αλλά δεν ξέρουμε πόσο. Θα βάλω +3 σε κάθε πλευρά*», επιλέγοντας τυχαία να βάλει τρεις κουκίδες. Σε αναπτυσσόμενο αριθμητικό μοτίβο, ένα αγόρι της Δ΄ τάξης λέει: «*Το μοτίβο ανεβαίνει ανά 8, άρα η 8η θέση θα έχει 4 φορές το 8, ίσον 32 παραπάνω, 16+32=48*» και γράφει το 48 στη 12η θέση του μοτίβου, δείχνοντας ότι λαμβάνει υπόψη του μόνο το 3ο και το 4ο βήμα (βλ. Εικόνα 8).

επαναλαμβανόμενο οπτικό μοτίβο



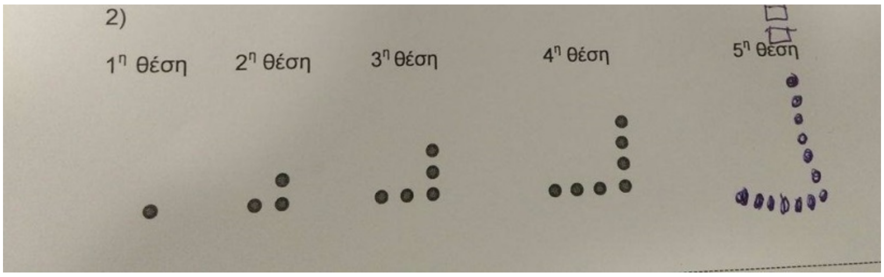
επαναλαμβανόμενο αριθμητικό μοτίβο


2)

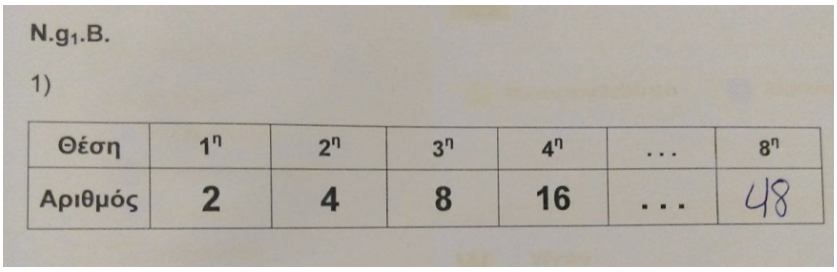
Θέση	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	...	12η
Αριθμός	4	7	2	4	7	2	4	...	2

Εικόνα 7 Παραδείγματα χρήσης της στρατηγικής 1 σε επαναλαμβανόμενα μοτίβα

αναπτυσσόμενο οπτικό μοτίβο



αναπτυσσόμενο αριθμητικό μοτίβο

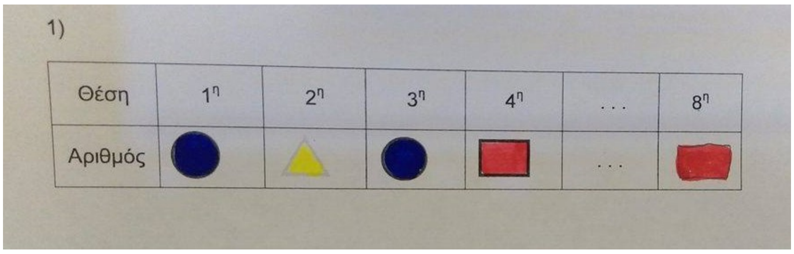

N.g1.B.
1)

Θέση	1η	2η	3η	4η	...	8η
Αριθμός	2	4	8	16	...	48

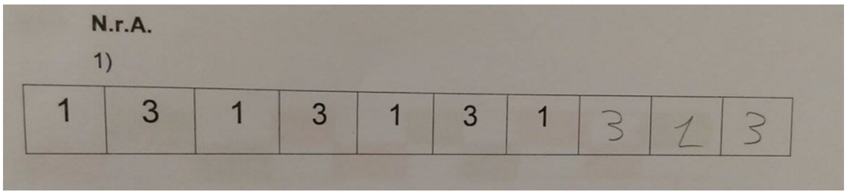
Εικόνα 8 Παραδείγματα χρήσης της στρατηγικής 1 σε αναπτυσσόμενα μοτίβα

γ) *στρατηγική 2 – στρατηγική συνδέσεων.* Σε αυτή την κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών που πραγματοποιούσαν συνδέσεις ανάμεσα στα διαδοχικά βήματα που τους παρουσιάζονταν και έβρισκαν τη σχέση του μοτίβου . Τόσο στα επαναλαμβανόμενα όσο και στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, τα παιδιά που χρησιμοποίησαν αυτή τη στρατηγική, αφού αναγνώρισαν τον κανόνα του μοτίβου, προκειμένου να βρουν τη ζητούμενη θέση υπολόγισαν τις ενδιάμεσες θέσεις νοερά και έγραφαν μόνο τη ζητούμενη θέση. Για παράδειγμα, ένα κορίτσι της Γ' τάξης σε επαναλαμβανόμενο οπτικό μοτίβο λέει: «*Τα σχήματα επαναλαμβάνονται, κύκλος-τρίγωνο-κύκλος-τετράγωνο, άρα μετά το τετράγωνο είναι κύκλος-τρίγωνο-κύκλος-τετράγωνο, ….*» και υπολογίζει τα επόμενα βήματα νοερά χρησιμοποιώντας τα δάχτυλα μέχρι την 8η θέση. Ένα αγόρι της Γ′ τάξης βρίσκει τον πυρήνα του μοτίβου, «*Το μοτίβο πάει 1-3-1-3, οπότε μετά το 1 είναι 3-1-3,…*» και συνεχίζει το μοτίβο (βλ. Εικόνα 9). Ένα κορίτσι της Δ′ τάξης λέει: «*Σε* *κάθε θέση μπαίνει ένα τετράγωνο σε κάθε γραμμή, μετά από τέσσερις θέσεις θα μπαίνουν τέσσερα τετράγωνα σε κάθε γραμμή*» και βρίσκει την 8η θέση σε αναπτυσσόμενο αριθμητικό μοτίβο. Τις ενδιάμεσες θέσεις υπολογίζει και ένα αγόρι της Γ΄ τάξης που αναφέρει: «*Κάθε φορά ανεβαίνει 4*» (βλ. Εικόνα 10).

επαναλαμβανόμενο οπτικό μοτίβο

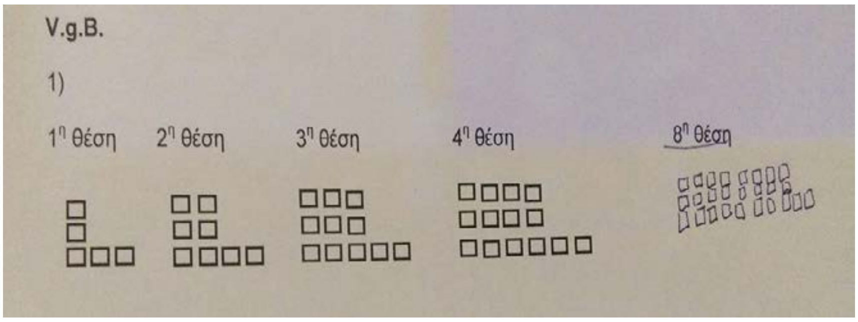


επαναλαμβανόμενο αριθμητικό μοτίβο

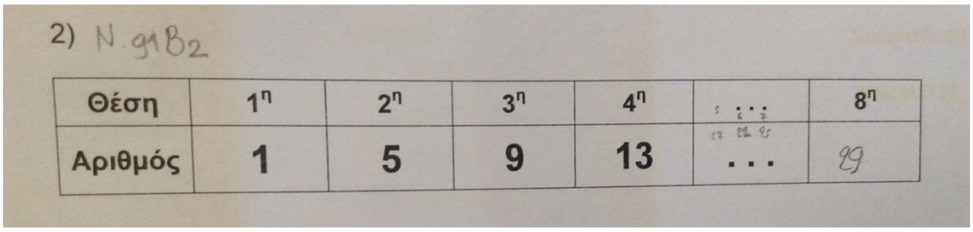


Εικόνα 9 Παραδείγματα χρήσης της στρατηγικής 2 σε επαναλαμβανόμενα μοτίβα

αναπτυσσόμενο οπτικό μοτίβο

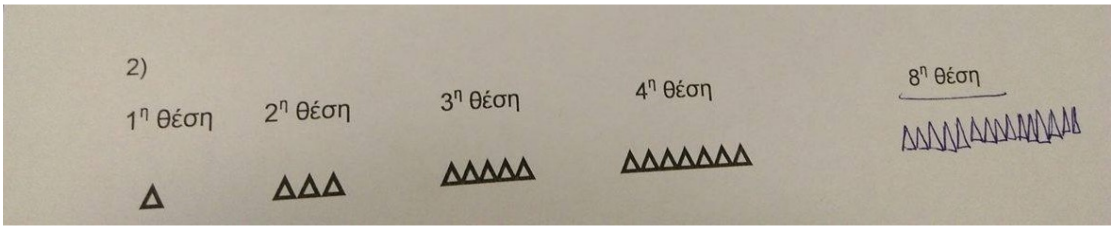


αναπτυσσόμενο αριθμητικό μοτίβο



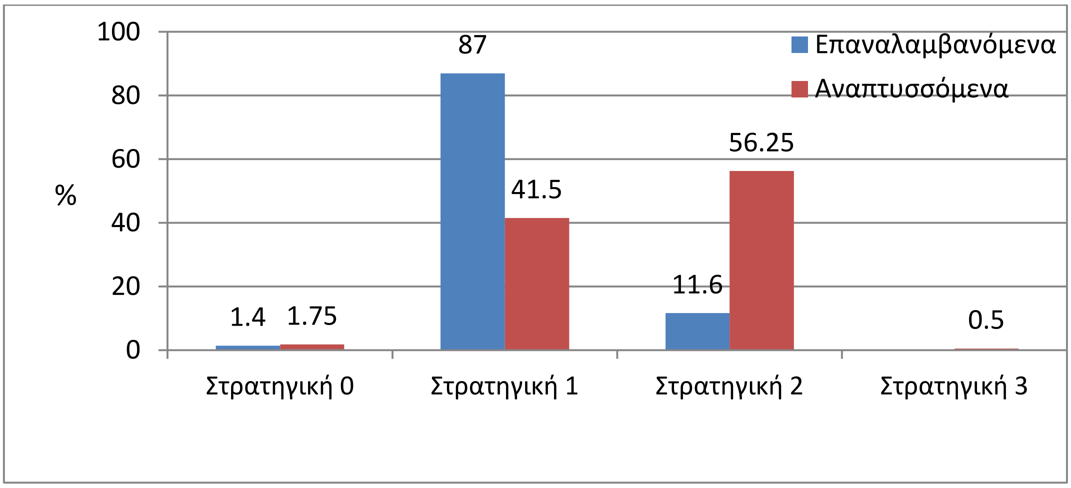
Εικόνα 10 Παραδείγματα χρήσης της στρατηγικής 2 σε αναπτυσσόμενα μοτίβα

δ) *στρατηγική 3 – αφαιρετική στρατηγική.* Σε αυτή την κατηγορία εντάχθηκαν όσες απαντήσεις έδειχναν ότι τα παιδιά διαμόρφωναν ξεκάθαρη συναρτησιακή σχέση μεταξύ των δεδομένων δύο βημάτων[2]. Αν και σε κανένα έργο δε ζητήθηκε η πλήρης έκφραση της συναρτησιακής σχέσης, η τελευταία κατηγορία (στρατηγική 3) συμπεριλήφθηκε στην ταξινόμηση των απαντήσεων των παιδιών, καθώς ένα πολύ μικρό ποσοστό των παιδιών μπόρεσε να οδηγηθεί σε αυτό. Χαρακτηριστικά, ένα αγόρι της Δ΄ τάξης, μελετώντας τη σχέση μεταξύ των διαδοχικών βημάτων και του αριθμού της θέσης που θέλει να υπολογίσει, εντοπίζει τον κανόνα και λέει: «*Ανεβαίνει δύο, αλλά επίσης κάθε θέση έχει τρίγωνα ίσα με 2 φορές τον αριθμό της προηγούμενης θέσης συν ένα, δηλαδή η 3η* *θέση έχει 2+2+1, ίσον 5, η 4η θέση έχει 3+3+1, ίσον 7, άρα η 8η θέση θα έχει 7+7+1, ίσον 15, άρα 15 τριγωνάκια»* (βλ. Εικόνα 11).



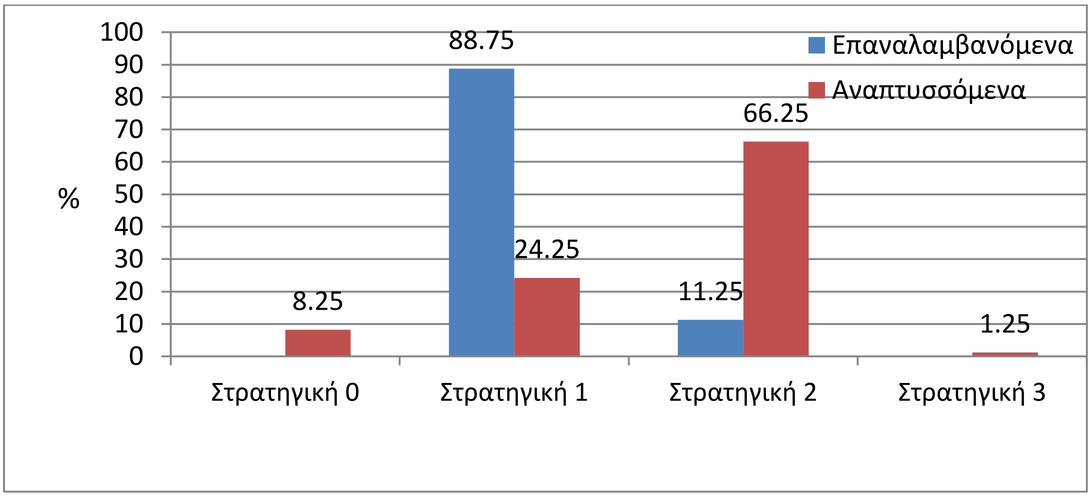
Εικόνα 11 Παράδειγμα χρήσης της στρατηγικής 3 σε αναπτυσσόμενο οπτικό μοτίβο

ε) *Συχνότητα χρήσης των στρατηγικών των παιδιών.* Στα έργα με οπτικά μοτίβα κυρίαρχη είναι η χρήση των στρατηγικών 1 και 2, με έντονη διαφοροποίηση στα ποσοστά συχνότητάς τους ανάλογα με το αν τα οπτικά μοτίβα που οι συμμετέχοντες έπρεπε να διαχειριστούν ήταν επαναλαμβανόμενα ή αναπτυσσόμενα (βλ. Σχήμα 7). Συγκεκριμένα, στα οπτικά επαναλαμβανόμενα μοτίβα, τα παιδιά και των δύο ηλικιακών ομάδων στην πλειοψηφία τους αιτιολογούσαν τις απαντήσεις τους στηριζόμενα σε ένα μέρος του μοτίβου (85,8% και 88%, αντίστοιχα για Γ΄ και Δ΄ τάξη) και πολύ λιγότερο στη στρατηγική των συνδέσεων (t=15.439, df=89, p<0.001). Στα οπτικά αναπτυσσόμενα μοτίβα περίπου τα μισά παιδιά χρησιμοποίησαν τη στρατηγική 1 (45% και 38%, αντίστοιχα για Γ΄ και Δ΄ τάξη) και τα άλλα μισά τη στρατηγική 2 (52% και 60,5%, αντίστοιχα για Γ΄ και Δ΄ τάξη), χωρίς να υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη συχνότητα χρήσης των δύο αυτών στρατηγικών (t=-1.786, df=89, p=0.078). Όταν εξετάστηκε ξεχωριστά η χρήση καθεμίας στρατηγικής από τις δύο ηλικιακές ομάδες, δε βρέθηκε καμία στατιστικά σημαντική διαφορά, δείχνοντας ότι όσα παιδιά χρησιμοποίησαν την καθεμία στρατηγική δεν εμφάνισαν διαφορετικά ποσοστά ως προς την τάξη τους.



Σχήμα 7 Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών στα οπτικά μοτίβα ως προς την εξέλιξή τους

Στα έργα με αριθμητικά μοτίβα (βλ. Σχήμα 8) η πρόβλεψη με νοερό υπολογισμό των ενδιάμεσων θέσεων (στρατηγική 1) αποτελεί την κύρια στρατηγική όλων των παιδιών στις περιπτώσεις που τα μοτίβα είναι επαναλαμβανόμενα (85,5% και 92%, αντίστοιχα για Γ΄ και Δ΄ τάξη). Αντίθετα, στα αριθμητικά αναπτυσσόμενα μοτίβα το 66% των παιδιών χρησιμοποιούν τη στρατηγική των συνδέσεων (στρατηγική 2), η οποία είναι στατιστικά σημαντικά συχνότερη από τη στρατηγική του μαντέματος (στρατηγική 1) (t=-8.679, df=89, p<0.001). Καμία διαφοροποίηση δε βρέθηκε στη χρήση καθεμιάς στρατηγικής ξεχωριστά ως προς την τάξη, δείχνοντας ότι παρόμοια χρησιμοποιήθηκαν οι στρατηγικές από τα παιδιά των δύο ηλικιακών ομάδων.



Σχήμα 8 Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών στα αριθμητικά μοτίβα ως προς την εξέλιξή τους

Συμπεράσματα – Συζήτηση

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση των επιδόσεων των παιδιών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου σε μία ποικιλία έργων με μοτίβα, καθώς ο αριθμός των ερευνών για το συγκεκριμένο ηλικιακό φάσμα είναι αρκετά περιορισμένος. Ανεξάρτητα από την ηλικία των παιδιών, τα αποτελέσματα της έρευνας συμφωνούν με πολλά από τα ευρήματα ερευνών από τον διεθνή χώρο, αναδεικνύοντας τη χρησιμότητα των μοτίβων στη διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. Τέσσερα είναι τα κύρια ευρήματα:

Πρώτον, το περιεχόμενο των μοτίβων που παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες δεν βρέθηκε να επηρεάζει την ορθότητα των απαντήσεών τους: συγκεκριμένα, η γενική επίδοση των παιδιών στα έργα με οπτικά μοτίβα και στα έργα με αριθμητικά μοτίβα υπήρξε παρόμοια, με τις σωστές απαντήσεις να ξεπερνούν το 70%. Ούτε όμως και οι ηλικιακές διαφορές επηρέασαν τη γενική επίδοση των παιδιών, με τους συμμετέχοντες από τις δύο τάξεις να εμφανίζουν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας. Το εύρημα αυτό αποτελεί ένδειξη ότι στις μεσαίες τάξεις του δημοτικού σχολείου έχει κατακτηθεί σε ικανοποιητικό βαθμό η εννοιολογική προσέγγιση των μαθηματικών μοτίβων και, σε συνδυασμό με τις στρατηγικές που οι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν, τα παιδιά εμφανίζονται αρκετά έτοιμα γνωστικά να προχωρήσουν στην εισαγωγή πιο αφηρημένων μαθηματικών εννοιών. Οι υψηλές επιδόσεις τους, μάλιστα, στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, στα οποία οι συμμετέχοντες μέσα από τις αιτιολογήσεις τους φάνηκε ότι αναγνώριζαν (περισσότερο από το 60%) τον κανόνα του μοτίβου, φανερώνουν πως οι δραστηριότητες με μοτίβα θα μπορούσαν να αποτελέσουν μια καλή βάση για την εισαγωγή στην άλγεβρα, όπως προτείνεται, άλλωστε, από ερευνητές (Lannin, 2005 · Warren, 2005). Μπορεί, βέβαια, οι επιδόσεις των δύο ηλικιακών ομάδων να μην διαφοροποιήθηκαν ιδιαίτερα, ωστόσο βρέθηκαν διαφορές στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν, για τις οποίες θα γίνει αναφορά στη συνέχεια.

Δεύτερον, η πλειονότητα των συμμετεχόντων παρουσίασε υψηλότερες επιδόσεις στα έργα με επαναλαμβανόμενα μοτίβα συγκριτικά με τα έργα με αναπτυσσόμενα μοτίβα (περίπου 90% και 53% τα ποσοστά επιτυχίας, αντίστοιχα), τόσο στα οπτικά όσο και τα αριθμητικά μοτίβα. Στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, που η επαναλαμβανόμενη φύση τους είναι αυτή που τα διακρίνει από ένα οποιοδήποτε τυχαίο σχέδιο, τα παιδιά στο σύνολό τους εντοπίζουν και επικεντρώνονται με επιτυχία στη μονάδα επανάληψης. Το εύρημα αυτό εξηγείται αφενός γιατί πολλά από τα μοτίβα στην καθημερινότητα των παιδιών είναι επαναλαμβανόμενα (Τζεκάκη, 2007) και αφετέρου γιατί τα αναπτυσσόμενα μοτίβα απαιτούν μία πιο σύνθετη αφαιρετική σκέψη, με απαραίτητη προϋπόθεση τη χρήση μεθοδευμένης στρατηγικής γενίκευσης (van de Walle, 2007).

Τα αποτελέσματα αναφορικά με τον εντοπισμό του όρου σε ένα μοτίβο στην αμέσως επόμενη θέση ή σε μεγαλύτερες θέσεις έδειξαν ότι η πρώτη περίπτωση είναι εμφανώς πιο εύκολη για τους μαθητές συγκριτικά με τη δεύτερη, μόνο για την περίπτωση των αριθμητικών μοτίβων. Οι συμμετέχοντες στο σύνολό τους συνάντησαν αρκετές δυσκολίες, ορισμένοι, μάλιστα, ενώ είχαν ανακαλύψει τον κανόνα, δεν μπόρεσαν να συνεχίσουν σε μεγαλύτερα βήματα εξαιτίας των πράξεων που απαιτούνταν ή γιατί αδυνατούσαν να οδηγηθούν στη γενίκευση. Θεωρούσαν, δηλαδή, αυτονόητο πως, για να βρουν τον όρο σε μεγαλύτερες θέσεις, θα πρέπει να δίνονται οι προηγούμενες θέσεις. Οι περισσότεροι από αυτούς που κατάφεραν να συνεχίσουν το εκάστοτε μοτίβο σε μεγαλύτερη θέση το έκαναν αφού πρώτα είχαν υπολογίσει νοερά ή γραπτά όλες τις ενδιάμεσες θέσεις. Το γεγονός αυτό ήταν, άλλωστε, αναμενόμενο με δεδομένο ότι η συνέχιση ενός μοτίβου σε μεγαλύτερες θέσεις αποτελεί ουσιαστικά τον συνδετικό κρίκο για την ανάπτυξη αφαιρετικής σκέψης που οδηγεί στη γενίκευση του κανόνα και, κατά συνέπεια, αποτελεί προοίμιο της άλγεβρας. Παρόμοια, οι Orton και Orton (1999) ανέφεραν ως σημαντικό εμπόδιο για την επιτυχή γενίκευση των μοτίβων την αριθμητική ανεπάρκεια των μαθητών, δηλαδή τη δυσκολία των παιδιών για ορθή εκτέλεση πράξεων, και την προσκόλληση σε αναδρομικές προσεγγίσεις, οι οποίες, παρόλο που είναι αποτελεσματικές για τις περιπτώσεις κοντινής γενίκευσης, δεν συμβάλλουν στην κατανόηση της δομής των μοτίβων (Zazkis & Liljedahl, 2002). Τέλος, οι υψηλότερες επιδόσεις των παιδιών στα αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα που αναπτύσσονται προς τα κάτω σε σχέση με τα αντίστοιχα μοτίβα που αναπτύσσονται προς τα πάνω ενδεχομένως επιβεβαιώνει την αριθμητική αδυναμία των συμμετεχόντων με τις αριθμητικές πράξεις, αφού φαίνεται ότι σε αυτά εμπλέκονται αριθμοί τέτοιοι που επιτρέπουν στους μαθητές τον καλύτερο χειρισμό τους. Ωστόσο, είναι πιθανόν η μεγαλύτερη επιτυχία των παιδιών στα αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα που κατεβαίνουν να οφείλεται σε κάποιο βαθμό στο γεγονός ότι στα προβλήματα με αυτού του είδους τα μοτίβα στην παρούσα έρευνα περιλαμβάνονταν μοτίβα κυρίως αριθμητικών προόδων, ενώ στα προβλήματα με αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα που ανεβαίνουν, τα μοτίβα ήταν στην πλειοψηφία τους μοτίβα γεωμετρικών προόδων, τα οποία ενδεχομένως να είναι πιο δύσκολα. Αν και η σύγκριση ανάμεσα σε μοτίβα αριθμητικών προόδων και μοτίβα γεωμετρικών προόδων δεν ήταν στους σκοπούς της παρούσας έρευνας, θα μπορούσε να αποτελέσει ένα ενδιαφέρον στοιχείο για περαιτέρω έρευνα που θα εξηγούσε καλύτερα και τις διαφορές –αν υπάρχουν- στις επιδόσεις των παιδιών σε αύξοντα και φθίνοντα αναπτυσσόμενα αριθμητικά μοτίβα.

Τρίτον, η μεγαλύτερη εξοικείωση των συμμετεχόντων με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα επιβεβαιώνεται και από τις προτιμήσεις τους σε αυτά, και κυρίως με τα οπτικά, όταν τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν τα δικά τους μοτίβα. Συγκεκριμένα, τα παιδιά προτιμούν περισσότερο τα επαναλαμβανόμενα οπτικά μοτίβα, αμέσως μετά τα επαναλαμβανόμενα αριθμητικά μοτίβα, ενώ τελευταία και πολύ λιγότερο προτιμούν τα αναπτυσσόμενα, αριθμητικά και οπτικά, μοτίβα. Η προτίμησή τους αυτή επιτρέπει την πρόταση για ένταξη δραστηριοτήτων με επαναλαμβανόμενα μοτίβα αρχικά ως προέκταση της καθημερινότητας των παιδιών και στη συνέχεια με αναπτυσσόμενα μοτίβα. Άλλωστε, πλήθος προηγούμενων ερευνών (π.χ. Blanton & Kaput, 2011 · Rittle-Johnson et al., 2013· Τζεκάκη & Κούλελη, 2007) έχουν καταγράψει την ενασχόληση με μοτίβα ως μία αυθόρμητη δράση των παιδιών, κάτι που θα ήταν καλό να αξιοποιηθεί προς όφελος της καλλιέργειας της μαθηματικής σκέψης, ενώ άλλοι ερευνητές προτείνουν την αξιοποίηση των αναπτυσσόμενων μοτίβων (π.χ. Rivera, 2010· Warren, 2005) για την ανάπτυξη ικανοτήτων γενίκευσης και αλγεβρικού συλλογισμού.

Τέταρτον, η ανάλυση των στρατηγικών που τα παιδιά χρησιμοποίησαν δείχνει μία έντονη διαφοροποίηση τόσο στη χρήση όσο και τη συχνότητά τους ανάλογα με το περιεχόμενο των μοτίβων. Συγκεκριμένα, η στρατηγική των συνδέσεων ανάμεσα στα διαδοχικά βήματα ενός μοτίβου αναδείχθηκε σε μεγάλο βαθμό από τους συμμετέχοντες, κυρίως στα αναπτυσσόμενα μοτίβα (περισσότερο από 56% και 66% στα οπτικά και τα αριθμητικά μοτίβα, αντίστοιχα). Αντίθετα, στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, οι απαντήσεις της πλειοψηφίας των παιδιών στηρίχθηκαν στην πρόβλεψη της ζητούμενης θέσης του μοτίβου με την επανάληψη αυτού που έβλεπαν όσες φορές χρειαζόταν μέχρι να φτάσουν στη ζητούμενη θέση (περισσότερο από 87% και 88% στα οπτικά και τα αριθμητικά μοτίβα, αντίστοιχα). Συνδυάζοντας το περιεχόμενο και την εξέλιξη των μοτίβων, φαίνεται ότι τα αριθμητικά μοτίβα -και μάλιστα τα αναπτυσσόμενα- ήταν αυτά που «διευκόλυναν» τους μαθητές να συμπληρώσουν ένα μοτίβο στην επόμενη θέση ή στις μεγαλύτερες θέσεις χρησιμοποιώντας τη στρατηγική των συνδέσεων. Το συγκεκριμένο είδος μοτίβου ευνοεί περισσότερο τη χρήση της συγκεκριμένης στρατηγικής ενδεχομένως γιατί επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίσουν κάποιες σχέσεις (στη συγκεκριμένη περίπτωση, αριθμητικές) που δεν είναι ορατές στα άλλα είδη μοτίβων (π.χ. οπτικά μοτίβα). Άλλωστε, σε σύγκριση με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, στα αναπτυσσόμενα υπάρχει μεγαλύτερη η «ανάγκη» για τα παιδιά να βρουν έναν κανόνα για να «μεγαλώσουν» ή να «μικρύνουν» το μοτίβο. Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται σε συμφωνία με τα ευρήματα του Lannin (2005), της Rivera (2010) και των Michael κ.ά. (2006), οι οποίοι εισηγούνται ότι τέτοιες καταστάσεις επιτρέπουν στους μαθητές να συσχετίσουν τους όρους σε ένα μοτίβο και να αναγνωρίσουν τη δομή του. Τέλος, ένας πολύ μικρός αριθμός μαθητών ήταν σε θέση να διατυπώσει έναν κανόνα διαμορφώνοντας συναρτησιακή σχέση μεταξύ των όρων σε ένα μοτίβο (περίπου 1%).

Συμπερασματικά, μέσα από την παρούσα εργασία αναδεικνύεται η σημαντικότητα της έννοιας των μοτίβων και υποστηρίζεται η ένταξή τους ως εργαλείων για την ανάπτυξη της επαγωγικής σκέψης των παιδιών και της κατανόησης των αφαιρετικών σχέσεων που εμπεριέχονται στις μαθηματικές δομές. Θα ήταν ενδιαφέρουσα η διεξαγωγή περαιτέρω έρευνας, η οποία θα εξετάζει τον βέλτιστο τρόπο αξιοποίησης των μοτίβων μέσα στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η παραδοσιακή διδασκαλία της άλγεβρας στο σχολείο έχει κατακριθεί για την απλή ενασχόληση με σύμβολα που δεν έχουν πάντα πραγματικό νόημα για τους μαθητές. Οι δραστηριότητες με μοτίβα μπορούν να αποτελέσουν μία εναλλακτική προοδευτική προσέγγιση, ακόμα και μέσα από περιεχόμενα διαφορετικά από τα μαθηματικά, όπως μέσα από τη λαϊκή παράδοση (Μιχαήλ & Λεμονίδης, 2007) ή τη μουσική (Warren, 2005). Το γεγονός ότι τα μοτίβα συνδέονται άμεσα με την καθημερινότητα των παιδιών θα πρέπει να τα καθιστά πρώτα στις προτιμήσεις των εκπαιδευτικών ως εργαλεία για την εισαγωγή στην πρώιμη άλγεβρα, τη στιγμή, μάλιστα, που οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί εμφανίζονται να έχουν περιορισμένη αίσθηση της χρήσης τους και της αποτελεσματικότητάς τους στις μαθηματικές δραστηριότητες που ενισχύουν τον αλγεβρικό συλλογισμό (Chick & Harris, 2007).

Σημειώσεις

[1] Σύμφωνα με το λεξικό ‘Oxford English Dictionary’ (www.oed.com), άλλες σημασίες της λέξης pattern είναι: κανονικότητα, τύπος, μοντέλο, σχέδιο, αχνάρι, δείγμα (υφάσματος κ.λ.π.), (διακοσμητικό) σχέδιο, παράσταση, μοτίβο, σχήμα, διάταξη.

[2] Η στρατηγική 3 εμφανίζεται μόνο στα αναπτυσσόμενα μοτίβα καθώς σε αυτά παρουσιάζεται η έννοια της συνάρτησης.

Αναφορές

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary years. In J. Cai. & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.

Chick, H. L., & Harris, K. (2007). Grade 5/6 teachers' perceptions of algebra in the primary school curriculum. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121-128). Seoul, Korea: PME.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* New York, NY: Routledge.

Cozby, P. C., & Bates, S. (2012). *Methods in behavioral research*. New York, NY: McGraw-Hill.

Δαφέρμου, Χ., Κουλούρη, Ρ., & Μπασογιάννη, Ε. (2005). *Οδηγός νηπιαγωγού. Εκπαιδευτικοί σχεδιασμοί. Δημιουργικά περιβάλλοντα μάθησης*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΟΕΣΒ.

Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. In H. Chick,& J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 313-320). Melbourne, Australia: PME.

Fujita, T., & Yamamoto, S. (2011). The development of children's understanding of mathematical patterns through mathematical activities. *Research in Mathematics Education*, *13*, 249-267.

Gadzichowski, K. M. (2012). Patterning abilities of first grade children: Effects of dimension and type. *Creative Education*, *3*, 632-635.

Guner, P., Ersoy, E., & Temiz, T. (2013). 7th and 8th grade students' generalization strategies of patterns. *International Journal of Global Education*, *2*, 38-54.

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*, 231-258.

Lee, K., Ng, S. F., Bull, R., Pe, M. L., & Ho, R. H. M. (2011). Are patterns important? An investigation of the relationships between proficiency in patterns, computation, executive functioning, and algebraic word problems. *Journal of Educational Psychology,103*, 269-281.

Leung, C. K. E., Krauthausen, G., & Rivera, F. D. (2012). First grade students' early patterning competence on figural and numerical sequences: Cross-country comparisons between Hongkong and the United States. *Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education (ICME).* Seoul: Korea. Retrieved 25 April2016 from http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0472.pdf

Michael, S., Elia, I., Gagatsis, A., Theoklitou, A., & Savva, A. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representations. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 161-168). Prague, Chech: PME.

Μιχαήλ, Μ., & Λεμονίδης, Χ. (2007). Τα εθνομαθηματικά και η διδασκαλία μοτίβων: Μια ερευνητική μελέτη σε μαθητές Ε' τάξης. Στα *Πρακτικά του 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 291-303). Πάφος, Κύπρος: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Moss, J., & McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai. & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*, 33-49.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London, England: Cassell.

Papic, M., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*, 237-268.

Patterson, A., Bock, A., & Pasnak, P. (2015). Executive function and academic skills in first grade: Evidence for a male advantage in patterning. *Journal of Education and Human Development*, *4*, 58-62.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., & McEldoon, K. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, *14*, 375-395.

Rivera, F. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 81-88). Belo Horizante, Brazil: PME.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: McMillan.

Skoumpourdi, C. (2013). Kindergartners' performance on patterning. Hellenic Mathematical Society: *International Journal for Mathematics in Education*, *5*, 108-131.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, *240*, 611-616.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.

Τζεκάκη, Μ., & Κούλελη, Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επιμ.), *Πρακτικά του 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (σσ. 268-278). Αθήνα: Τυπωθήτω.

Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά*. (Δ. Ασημακοπούλου & Στ. Σταφυλίδου, Επιμ., Β. Αράπογλου, Μτφρ.).Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In H. Chick. & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne, Australia: PME.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.5, pp. 377-384). Prague, Chech: PME.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 171-185.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Παρελήφθη: 1.6.2016, Αναθεωρήθηκε: 30.9.2016, Εγκρίθηκε: 13.10.2016