

zur Anwendung der Theorie der stochastischen Prozessen in der Sozialwissenschaft und insbesondere in der Demometrie

von
Georgios Tzifetas

*Doktor des Fachbereichs für Kybernetik
TU Berlin. Dozent TU Athen*

1. einführende Bemerkungen

Man bezeichnet mit «stochastisch» ein Phänomen, das, mehr oder weniger, mit dem Wahrscheinlichkeitskonzept zusammenhängt. Nun ist die Bedeutung der Idee der Wahrscheinlichkeit sehr umschritten. Betrachtet man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die sich dynamisch verändert werden kann, so erhält man ein stochastischer Prozess. Er ist also eine Familie von zufälligen Grössen, die sich in Abhängigkeit von einem Parameter, meistens der Zeit, nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen entwickeln. Dies bedeutet also, dass man ihre zukünftiges Verhalten nicht mit Sicherheit vorhersagen kann, sondern nur den verschiedenen in der Zukunft möglichen Zuständen zuordnen.

Solche Prozesse sind in der Natur weit verbreitet. Ihre Anwendung gab den Anlass zu einer raschen Entwicklung der Theorie der stochastischen Prozesse während der letzten Jahresende.¹ Eine häufige Anwendung der Theorie erfolgte meistens auf Probleme aus der Physik und Biologie. In anderen Wissenschaften, wie z.B. Wirtschaftswissenschaft, Sozialwissenschaft oder Ökologie und Biometrie ging der Fortschritt langsamer voran. Ein wesentlicher Grund lag darin, dass viele der grundlegenden Messungsprobleme in diesen Wissenschaften ungelöst blieben und somit eine Barriere für die Anwendung der mathematischen Verfahren darstellen.

Trotz dieser Schwierigkeiten wurden einige bemerkenswerte Leistungen erzielt. In der Psychologie z.B. entwickelten Bush und Mosteller (1955) stochastische Lernmodelle. Zehn Jahre später zeigte Steindl (1965) die mögliche Anwendungen der stochastischen Analyse auf dem Gebiet der Volkswirtschaft. Den Grundstock für die stochastische Behandlung vieler Gebiete aus der Theorie der Soziologie legte Coleman (1964) auf, mit seinem Buch *Introduction to Mathematical Sociology*. In dieser Zeit erschien auch die Monographie von Bartlett über *Stochastic Population Models*, in dem die Grundideen von Kendal (1949) und Leslie (1945) in der Biometrie zusammengestellt hat. Den wesentlichen Beitrag, aber, zur Einführung der stochastischen Theorie in der Biometrie, oder besser gesagt in der Humanwissenschaft, hat Chiang (1968) geleistet.

Unser Ziel in dieser Studie besteht darin, einen Beitrag zum besseren Verständnis der Biophänomene anhand der stochastischen Analyse zu leisten und das Konzept der Entwicklung von Modellen aufzulegen, die eine der wichtigsten Grundlagen einer

1. Bharucha-Reid (1960), Gnedenko (1966), Feller (1963), Fisz (1963).

wissenschaftlich fundierten Planung geworden sind. In Anlehnung an die Theorie der stochastischen Prozesse, legen wir durch die Konstruktion mathematischer Modelle den Grundstock für die theoretische Untersuchung.

Der Nichtmathematiker kennt die Anwendung physikalischer Modelle durch den Ingenieur. So werden z.B. Eigenschaften eines Gerätes durch das Verhalten des Modells unter simulierten Bedingungen abgeleitet. Die Genauigkeit der auftretenden Eigenschaften hängt von dem Erfolg ab, mit welchem das Modell die Merkmale des echten Gerätes verkörpert. Es ist daher klar, dass zwischen dem Modell und dem Gerät Unterschiede auftreten können. Die grundlegende Forderung lautet aber, dass sie in allen relevanten Beziehungen ein isomorphes Verhalten zeigen sollten.

Ein mathematisches Modell wird auf die selbe Weise in der Demetrie angewandt. Bei den von uns untersuchenden Bevölkerungssystemen besteht zwischen den konstruierenden Teilen ein wechselseitiger Zusammenhang. Falls eine charakteristische Eigenschaft geändert wird, führt dies folgerechte Änderung in anderen Teilen des Systems. Unter der Voraussetzung, dass sich die in Frage kommenden Änderungen quantitativ erfassen lassen, können die wechselseitigen Zusammenhänge zumindest im Prinzip durch mathematische Gleichungen beschrieben werden. Ein Gleichungssystem zur Beschreibung der Verhaltensweise des Phänomens ist ein mathematisches Modell. Die Angemessenheit des Modells wird danach beurteilt, mit welchem Erfolg die Auswirkungen bei Änderungen im System vorhergesagt werden können. Die Angemessenheit des Modells hängt ferner davon ab, ob den in der Vergangenheit stattgefundenen Änderungen Rechnung getragen werden kann oder nicht. Das Modell stellt also eine Abstraktion der Wirklichkeit dar, wobei die relevanten Beziehungen zwischen den Elementen der Wirklichkeit durch ähnliche Relationen zwischen mathematischen Größen ersetzt werden.

2. deterministische und stochastische Analyse

Bei den mathematischen Modellen handelt es sich entweder um deterministische oder stochastische Untersuchung Falls die Auswirkung bei irgendeiner Änderung im System mit Sicherheit vorhergesagt werden kann, so spricht man von einem deterministischen System. In der Praxis und vor allem in den Bio-Wissenschaften ist dies nicht der Fall. Hier tritt gewöhnlich bei jeder Prognose ein Unsicherheitsfaktor auf. Denn ist das System entweder nicht genügend spezifiziert oder das menschliche Verhalten ist durch nicht voraussagbare Eigenschaften gekennzeichnet. Diesem Unsicherheitsfaktor kann

man dadurch tragen, dass man dem Modell statt mathematischen Variablen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zugrunde legt. Genauer ausgedrückt besagt dies, dass die Gleichungen des Modells Zufallsgrößen enthalten. In diesem Fall spricht man von einem stochastischen Modell.

Die notwendige Anwendung der stochastischen Modelle in Bevölkerungssysteme sieht man ohne weiteres durch die Betrachtung einiger Wanderungsphänomene ein, die wir prinzipiell in einem folgenden Teil diskutieren werden.

Die Wahlfreiheit des Individuums bringt für das Problem eine charakteristische Ungewissheit mit sich, die uns zur Formulierung der Modelle mittels stochastischer Begriffe zwingt. Man könnte sehen,¹ dass es oft von Vorteil sein kann, deterministische Methoden zur Bestimmung von Näherungen in stochastischen Modellen zu verwenden. Damit wird, aber, die grundlegende Struktur des Prozesses nicht beeinflusst.

Wissenschaftler debattieren häufig über die rivalisierenden Merkmale zwischen deterministischen und stochastischen Methoden. Aufgrund der gesagten sollte Klarheit herrschen, dass jedes Modell, welches ein menschliches Verhalten beschreibt, durch stochastische Begriffe formuliert werden muss. Für die Lösung, aber, des Modells kann es ratsam erscheinen, eine deterministische Näherung zu verwenden. Die ist im allgemeinen einfacher und kann deshalb leichter zum besseren Verständnis für die Beschaffenheit der Phänomene beitragen. Sie sind jedoch taktische Fragen, die keinen Einfluss auf das dargelegte Grundprinzip haben.

Man hört häufig den Einwand, dass zwischen den Naturwissenschaften und den Humanwissenschaften eine fundamentale Kluft besteht. Von diesem Standpunkt aus gesehen ist der Versuch, die Anwendung der stochastischen Theorie auf die Humanwissenschaft auszudehnen, zum Scheitern verurteilt, denn die beiden Zweige der Wissenschaft würden sich in grundlegenden Dingen wesentlich unterscheiden. Es kann sinnvoll sein, dem molekularen oder sogar dem animalen Verhalten stochastische Modelle zugrunde zu legen. Es ist aber unmöglich, so wird argumentiert, die gleichen Gesetzmäßigkeiten auf das menschliche Verhalten anzuwenden. Würde man das menschliche Dasein nach Gesetzmäßigkeiten ablaufen lassen, so wäre dies gleichbedeutend damit, den Menschen seiner Willensfreiheit zu berauben. Dieser Einwand beruht auf einem Missverständnis bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Modellbildung. Da der Mensch einen freien Willen hat, lässt sich sein Verhalten nicht voraussagen, sondern muss mit Hilfe der Wahrschein-

1. Tziafetas (1975).

lichkeitstheorie beschrieben werden. Die einzige Alternative hierzu besteht darin, von einem deterministischen Standpunkt auszugehen. Gerade die deterministische Gesetzmässigkeit und nicht die stochastische zwingt den Menschen ein automatisches Verhalten auf.

Ein Beispiel soll diese Ansicht bekräftigen. In einigen Arbeiten¹ wird über Modelle für die Arbeitsmobilität diskutiert. In einem grundlegenden Teil der Beschreibung des Modells wird ein Zufallsmechanismus vorausgesetzt, um die Bewegung der Arbeitskräfte zu erfassen. Für diesen Fall besteht der Einwand darin, dass ein Arbeitnehmer seine Entscheidung nicht nach einem Würfelspiel trifft.

Vielmehr wägt der Mensch die Vor- und Nachteile seines gegenwärtigen Arbeitsverhältnisses ab und trifft damit verantwortungsvolle und vernunftgemässe Entscheidung. Man behaupten nicht, dass der Arbeitnehmer tatsächlich seine Entscheidung nach einem Zufallsmerkmal trifft, sondern, dass sich die Gemeinschaft so verhält, als ob jedes ihrer Glieder nach der obigen Strategie handle. Die Funktion der Wahrscheinlichkeitstheorie besteht einfach darin, die beobachteten Veränderungen zu beschreiben.

Ein zweiter Einwand ergibt sich aus der Komplexität der Bio-Phänomene. Man hört häufig die Meinung, die Situationen seien viel zu kompliziert, um sie einer mathematischen Untersuchung zugänglich zu machen und weiterhin die Nichtbeachtung dieser Tatsache würde zu einer gefährlichen Vereinfachung führen. Die Prämisse dieses Einwandes muss akzeptiert werden. Die Bio-Phänomene sind oft überaus komplex und unseren Modellen liegen vereinfachte Annahme zugrunde. Die, vielleicht, einzige Möglichkeit, eine zu grosse Vereinfachung zu vermeiden, besteht darin, nicht nur ein Modell, sondern eine Folge von Modellen zu untersuchen. Jedes einzelne Modell müsste einen Sonderfall des komplexeren darstellen, welches zur Erlangung der vollständigen Realität notwendig ist.

Diese Bemerkungen sollten natürlich nicht als Rechtfertigung für eine unbegrenzte Vereinfachung angesehen werden. In früheren Jahren wurden Modelle mit allerhand Mitteln in einer Form gebracht, die auf eine übersichtliche mathematische Lösung führte. Die Situation hat sich durch Anwendung des Hochgeschwindigkeitsrechners radikal geändert. Es ist keineswegs mehr notwendig, dass die Lösung in einer geschlossenen Form mit einfachen Funktionen vorliegen soll, wenn eine nützliche Information über den Prozess gewünscht wird.

Vom praktischen Standpunkt aus gesehen können die Ergebnisse viel leichter und schneller Mit-

hilfe eines Simulationsverfahrens auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage gewonnen werden. Falls man nur an einer raschen Antwort interessiert, stellt die Simulation gewöhnlich die beste Methode für die Lösung des Problems dar. Wenn andererseits ihr primäres Interesse an den stochastischen Modellen darin besteht, einen Einblick in die Wirkungsweise der Phänomene zu erlangen, so ist hierfür die Simulation weniger geeignet. In diesem Fall sucht man nämlich nach allgemeinen Lösungen, während die Simulation nur eine Lösung für Sonderfälle liefert.

3. zur Konstruktion der Modelle

In veröffentlichten Arbeiten wurden stochastische Modelle unter verschiedenen Gesichtspunkten konstruiert. Für unsere Zwecke erweist sich die Unterscheidung von vier Hauptfunktionen der Modelle als nützlich. Die erste Funktion besteht darin, einen Einblick in das untersuchte Phänomen zu vermitteln und zu dessen Verständnis beizutragen. Das ist die Aktivität, die für den Wissenschaftler charakteristisch ist. Die Untersuchung beginnt mit der Erhebung der Daten für den Prozess und mit der Formulierung eines Modells, das die beobachteten Eigenschaften des Systems verkörpert. Dies nennt man das Stadium der Modellbildung. Der nächste Schritt besteht darin, Mithilfe des Modells Prognosen für das System zu treffen, die ausschliessend durch Beobachtungen getestet werden können. Dann aus dem Modell müssen Schlussfolgerungen gezogen werden. In diesem Fall spricht man von der Modelllösung. Die letzte Phase besteht darin, die Schlussfolgerungen mit der Wirklichkeit zu vergleichen und das Modell zu modifizieren, falls es sich als unzulänglich erweisen sollte. Man spricht in diesem Fall von dem Verfahren des Modelltestes. Eine derartige Untersuchung ist so lange unvollständig, wenn die Wirksamkeit des Systems nicht hinreichend genau und umfassend mit mathematischen Begriffen beschrieben ist und die Lösung der entstehenden Gleichungen nicht vorliegt.

Trotz der mannigfaltigen Modelle und Verfahren liegt einer Diskussion über jedes Modell ein gemeinsamer Leitfaden zugrunde. Die Glieder des untersuchenden Systems befinden sich zu jedem gegebenen Zeitpunkt in einem Zustand aus einer Menge von möglichen «Zuständen». Es kann sich um diskrete Zustände handeln oder um kontinuierliche. Das Hauptziel in einer solchen Untersuchung besteht darin, zu jedem Zeitpunkt die Erwartungswerte der Anzahl der betrachteten Individuen in jedem Zustand zu bestimmen. Nach einer Einführung wird gewöhnlich das Grundmodell beschrieben. Dabei ist eine Beschreibung des Systems und der Wahrscheinlich-

1. Bartholomew (1972), Silcock (1954), Rice u.a. (1950).

keitstheoretischen Gesetze eingeschlossen, welche die Übergänge zwischen den Zuständen charakterisieren. Wo es möglich ist, sind auch die auf den betreffenden Stufe gemachten Voraussetzungen mit Daten getestet worden. Im Anschluss daran sind die Überlegungen der Modellösung für das Problem beigefügt und mit möglichen Verallgemeinerungen sowie mit einer Diskussion, die die Analyse vermittelt, abgeschlossen.

Eine Methode der Klassifizierung richtet sich danach, ob das Modell abgeschlossen oder offen ist. Diese Begriffe scheinen verschiedene Nebenbedeutungen zu haben. Sie werden hier in einer unmittelbaren und offensichtlichen Bedeutung gebracht, die kein Werturteil nach sich zieht. Die Mitgliederzahl eines abgeschlossenen Systems ändert sich nicht mit der Zeit; kein Individuum verlässt das System und kein kommt hinzu. Unser Interesse richtet sich auf die wechselhafte interne Struktur des Systems. Ein offenes System dagegen bietet Vor- und Nachteile. Auch hier sind interne Änderungen von Interesse. Es müssen aber doch zusätzlich die Änderungen des Inputs und Outputs und des Gesamtfumfangs betrachtet werden.

Bei einigen der betrachteten Systeme gehen Glieder verloren, ohne dass ein Input von neuen Gliedern erfolgt. Solche Systeme werden als abgeschlossene Systeme behandelt, wenn man einen Zustand einführt, der alle Abgänge oder Verlüste einschliesst und der als Teil des Systems betrachtet wird. Durch diesen Kunstgriff kann natürlich ein offenes System in ein abgeschlossenes transformiert werden.

Eine zweite Methode der Klassifizierung hängt davon ab, ob die Zeit als diskrete oder stetige Variable betrachtet wird. Die Wahl zwischen diesen beiden Möglichkeiten ist zum Teil eine Frage der Bequemlichkeit. Bei einigen Anwendungsfällen können Zustandsänderungen nur in bestimmten Zeitintervallen stattfinden. Betrachtet man z. B. Modelle für die Arbeitsmobilität, so können Stellenwechsel zu jedem Zeitpunkt vorgenommen werden und deshalb ist die Anwendung einer stetigen Skala geeigneter. Manchmal kann man jedoch einen beträchtlichen Vorteil aus der Tatsache ziehen, dass ein Modell mit diskreter Zeit als Approximation eines Systems mit stetiger Zeit verwandt werden kann und umgekehrt. Bei praktischen Untersuchungen, bei denen die Berechnung von Lösungen erforderlich ist, bietet sich die diskrete Version eines Modells an. Wenn man aber in erster Linie an der mathematischen Untersuchung des Modells interessiert ist, so stellt man häufig fest, dass das Verfahren zur Bearbeitung der Version mit stetiger Zeit leichter benutzbar ist.

Anschliessend lassen sich die Modelle danach unterscheiden, ob sie die markoffsche Eigenschaft besitzen oder nicht. Diese Eigenschaft besteht im

wesentlich darin, dass die zukünftige Entwicklung des Prozesses aus der Kenntnis über seinen gegenwertigen Zustand hergeleitet werden kann. Eine Information über die Vergangenheit des Systems wird die Prognose nicht verwandt. Dies bedeutet also eine strenge und manchmal unrealistische Einschränkung. Der Vorteil bei der Anwendung der markoffschen Modelle liegt darin, dass die mathematische Analyse leichter bewältigt werden kann. Die Theorie der markoffschen Prozesse ist aus diesen Gründe weiter entwickelt. Selbst wenn die markoffsche Voraussetzung nicht gilt, kann sie durch eine erneute Definition der Zustände des Systems realistischer geschaffen werden. Wo es notwendig ist, verwendet man auch semi-markoffsche Modelle, wobei die Aufenthaltsdauer in irgendwelchem Zustand mitberücksichtigt worden ist.

Die Bestimmung nur der mittleren Werte der betrachteten Zufallsgrößen ist manchmal nicht genügend zur Untersuchung des Systems. Bei physikalischen Anwendungsfällen, wenn z. B. die Anzahl der Molekülen in einem System sehr gross ist, genügen die mittlere Werte. In einem System in der Demometrie kann die Anzahl der Glieder verhältnismässig klein sein. Deshalb können die mittlere Werte allein ein unvollständiges und vielleicht irreführendes Bild des Prozesses wiedergeben.

In der Phase des Modelltestes entstehen Probleme der statistischen Folgerungen. Oftmals sind Verfahren zur Schätzung der Parameter eines Modells und für den Test ihrer Eignung erforderlich. Die statistische Theorie der markoffschen Ketten ist in den letzten Jahren weitgehend entwickelt. Einige zusammenstehenden Bemerkungen für die Schätzung von Parametern und Prüfung von Hypothesen sind also immer beizufügen.

4. zur Beschreibung demographischer Modelle

Modelle für die Bevölkerungsentwicklung und insbesondere für Wanderungsprozesse in der Demographie wurden in den letzten Jahren oft behandelt.¹ Diese Modelle sind sicher dynamisiert; sie ziehen mindestens die Zeit in Betracht, aber es sind doch deterministische Modelle das berühmte dynamische Modell für die Bevölkerungsentwicklung von Leslie (1945) nimmt durchaus altersspezifische Strukturen an. Es fand aber keine stochastische Verallgemeinerung.

Stochastische Prozesse sollten Versuchsweise in der Humanwissenschaft angewandt werden.² Leider ist es keine einfache Aufgabe. Demographische Zeitreihen zeigen typischerweise Trends und irreguläre

1. Lopez (1961), Keyfitz (1964), Goodman (1967).
2. Kendall (1949), Pollard (1966) und (1969).

Schwangungen. Wenn man sich auf die ziemlich gut entwickelte Theorie der stationären stochastischen Prozesse beschränkt, macht ausserordentlich unrealistische Annahmen. Ein stationärer stochastische Prozess hat die Eigenschaft, dass seine Merkmale durch lineare Transformation der Zeitachse nicht verändert werden können, und dass Zeitdifferenzen eine Rolle spielen. Wenn man auch auf den stationären stochastischen Prozessen verbleibt hat man keine Möglichkeit Erscheinungen zu behandeln, welche mit der Theorie des evolutionären Bevölkerungswachstums zusammenhängen.

Bedauerlicherweise ist aber die Theorie evolutionärer stochastischen Prozesse noch nicht zufriedenstellend behandelt worden. Es fehlt besonders eine befriedigende statistische Methode für die Schätzung und Prüfung von Hypothesen. Es soll auch nicht verschwiegen werden, dass hier ausserordentlich schwierige mathematische und statistische Probleme vorliegen.

Trotzdem, obwohl solche Schwierigkeiten auftreten, ist die Anwendung der Theorie stochastischer Prozesse auf demographische Ereignisse mit Sicherheit vorteilhaft. Dies erscheint, wie gesagt, vorwiegend von entscheidender Bedeutung in der sogenannten Mikrotheorie, wo individuelle Verschiedenheiten nur durch Einbeziehung von Zufallsbetrachtungen im Griff zu bekommen sind.

Nun zur Analyse des Wanderungsphänomens kann man als erstes ein sehr einfaches Modell für die Entwicklung einer Bevölkerungsverteilung in einem interregionales System betrachten. Die fundamentale Forderung bei einer Modellbildung besteht darin, dass es die Art und Weise spezifizieren muss, nach der sich Veränderungen in einer Region ereignen. Man nimmt an, diese lassen sich in einer ersten Annäherung durch zeitunabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben.

Ein typisches Beispiel einer markoffschen Kette in diesem Untersuchungsbereich stellt die Wanderung eines Individuums dar. Je nach persönlichem Wunsch zieht das Individuum im Laufe der Zeit von einem Wohnort in einem anderen. Der Zustand des Modells kann hier beschrieben werden, durch die geographischen Koordinaten des Ortes, an dem sich das Individuum gerade aufhält. Der Übergang von einem Zustand in einen anderen ist offenbar identisch mit der Abwanderung des Individuums, die als Fortzug bezeichnet wird.

In einem ersten Schritt solcher Untersuchung beschäftigt man sich mit Prozessen, die auf einem diskreten Parameterraum definiert sind. Ebenso beschränkt man sich zuerst auf eine Menge der Zustände, die eine endliche Anzahl von Elementen enthält.

Es sei nun P eine Matrix, deren Elemente p_{ij} die

Wahrscheinlichkeit angeben, dass eine demographische Einheit, d.h. in üblichen Fall ein Individuum, sich zwischen den Zeitpunkten t und $t+1$ von i nach j niederlässt. Diese Matrix kann zweifach interpretiert werden. Man kann den Akzent entweder auf die Verteilung der Gesamtbevölkerung legen oder auf den individuellen Aspekt des Prozesses. Im ersten Fall nimmt man, dass die p_{ij} den Bruchteil der Bevölkerung repräsentieren, der, nachdem er die Region i am Anfang der Periode verlassen hat, sich am Ende der Periode wiederfindet. Man spricht hierbei von einem kollektiven Prozess. Bei der zweiten Interpretation, die die häufigste ist, gibt jedes p_{ij} die Wahrscheinlichkeit an, dass ein zufällig aus der Bevölkerung der Region i ausgewähltes Individuum, sich während einer Periode in j niederlässt. Es handelt sich dann um einen individuellen Prozess. Die beiden Interpretationen treffen sich offensichtlich, wenn man den Wandernden Unabhängigkeit unterstellt.

Bei der Untersuchung des ersten Typs von markoffschen Modellen, d.h. abgeschlossene Modelle, soll man zwei von ihnen implizierten grundlegenden Hypothesen hervorheben.

- a) Man soll zuerst unterstellen, dass die früheren Wanderungsraten keinen Einfluss auf die zukünftige Mobilität haben, d.h. die Gültigkeit der markoffschen Eigenschaft.
- b) Das Modell soll ebenfalls die Konstanz der Wanderungsraten beibehalten.

Die Gültigkeit solcher Hypothesen kann man anhand des χ^2 -Testes überprüfen. Weiterhin ist es möglich gewisse Methode angeandt werden, um die betreffenden Parameter zu schätzen. Es ergibt sich z.B. anhand der Likelihood-Methode die beste Schätzung für p_{ij} mit Mikro-Daten¹ in der folgenden Form

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_t M_{ij}(t)}{\sum_j \sum_t M_{ij}(t)}$$

wobei $M_{ij}(t)$ die beobachtete Anzahl der Abwandernden von i nach j zur Zeit $(t, t+1)$ repräsentiert.

Der Bevölkerungsanteil $p_j(t)$ lässt sich zunächst rekursiv anhand der Beziehung $p(t) = p(t-1)P$, wobei $p(t)$ der Reihenvektor von $p_j(t)$ ist, berechnen. Die wiederholte Anwendung dieser Gleichung führt zu der Formel

$$p(t) = p(0)P^t$$

wobei zur Berechnung der Potenzen P^t schon gewisse Methode existieren.

Bei vielen Anwendungsfällen existiert die Bevölkerung seit langer Zeit, so dass der gegenwertige Zustand einem grossen Wert entspricht. Deshalb interessiert man in der Praxis die Untersuchung der Grenzwahrscheinlichkeiten. Man kann leicht beweisen, dass eine reguläre Matrix P Grenzwerte zustrebt. Es gilt also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = A,$$

wobei die Reihenvektoren a der Matrix A durch die Gleichung $aP = a$ bestimmt werden können.

Diese stabile Verteilung, ausgedrückt durch a , erscheint somit als unabhängig von der Anfangsverteilung der Bevölkerung. Man kann annehmen, dass diese Gleichgewichtsverteilung das Ziel ist, welches die Bevölkerung als Antwort auf die aktuellen sozioökonomischen Bedingungen verfolgt. Man kann also glauben, dass allein diese tendenziell stabile Verteilung auf die aktuell beobachteten sozioökonomischen Fakten bezogen werden sollte.

Der markoffsche Ansatz gestattet ebenso, die Anpassungsgeschwindigkeit der Bevölkerung zu untersuchen, sowie den von dieser Bevölkerung beschriebenen Wanderungsweg. Man kann z. B. die Anzahl der Etappen berechnen, die notwendig sind, um von einer Region i zu einer Region j zu gelangen. Dies erhält man durch die fundamentale Matrix $N = \{I - (P - A)\}^{-1}$. Ebenfalls bestimmt man auch die Varianzen und die Kovarianzen dieser Etappen.

Eine erste Erweiterung zu diesem Grundmodell besteht darin, die Zustandsmenge in zwei sich ausschliessende Klassen zu unterscheiden. Die erste davon schliesst die transienten Zustände und die zweite die absorbierenden, die in diesem Fall der Abwanderung über die Grenze des Systems und dem Todeszustand entsprechen. Im zweiten Teil erweitert man das Modell strukturell, in dem altersspezifizierungen mitberücksichtigt werden.

Für eine vollständige Spezifizierung des Modells ist die Aussage erforderlich, auf welche Weise die Neuzugänge in den verschiedenen Regionen eingeordnet werden. Es ist wohl bekannt¹ dass Einwanderungen bzw. Neugeborene durch einen Poisson-Prozess beschrieben werden können.

Selbstverständlich in solchen inhomogenen markoffschen Ketten ist die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten in jeder Zeitperiode und in der Folge für einen längeren Abschnitt immer möglich anhand einer Aufzählung in jeder Region. Zu diesem Thema stehen schon gewisse Methode, wie

man solche Daten am besten erheben kann, zu Verfügung. Im allgemeinen aber bekommt man Daten sehr selten oder überhaupt nicht aus statistischen Ämtern. Dies zwingt also uns, eine Annahme über die Verteilung der Übergangs- bzw. Ausgangswahrscheinlichkeiten aufzustellen, um ein sinnvolles Ergebnis im Vergleich mit der Wirklichkeit zu erhalten.

Man nimmt an, die Zeitpunkte, zu denen sich ein Individuum zu einem weiteren Aufenthalt in einer Region entschliesst, ohne inzwischen vom Todes-Risiko absorbiert zu werden, seien exponentialverteilt². Geht man davon aus der Zeitliche Abstand zwischen zwei Ausscheidungen entspreche durchschnittlich der Länge einer Periode, so kann man die Wahrscheinlichkeit für das weitere Verbleiben des Individuums in der Region i während des Zeitintervalles $(t, t + 1)$ als die Übergangswahrscheinlichkeit von i nach j interpretieren.

Ähnlicherweise nimmt man an, die Zeitpunkte, zu denen ein Individuum vom Todes-Zustand absorbiert wird, ohne inzwischen nach einer Region fortzuziehen, seien nach gewissen Gesetzen verteilt.³ So sind die absorbierenden markoffschen Kette für zwei Zustände vollständig definiert.

Der Ausbau aber des Modells zu einem leistungsfähigen Instrument der Analyse und Prognose des Wanderungsverhaltens lässt sich in zwei Richtungen verfolgen. Zu einem soll die Zahl der Zustände des inhomogenen markoffschen Kette erweitert werden, um die Wanderungsmöglichkeit nach vielen Regionen simultan beschreiben zu können. Zum andern soll ein Verfahren angegeben werden, welches zu einer Schätzung der Parameter der Verteilung führt.

Nun zur Bestimmung der einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(t, t+1)}$ wird angenommen, dass sie sich, wie die Elemente der Hauptdiagonale der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix zueinander, verhalten. D. h. je grösser die Wahrscheinlichkeit ist, dass Individuen bei einer Region verbleiben, desto grösser ist die Wahrscheinlichkeit, dass weitere Individuen hinzukommen bzw. umgekehrt.

Damit ist die inhomogene markoffsche Kette vollständig definiert. Da die $p_{ij}^{(t, t+1)}$ für sehr grosses t gegen Null streben, ist die Ergodizitätsbedingung nicht erfüllt und keine stationäre Grenzverteilung existiert.

Anschliessend eine Erweiterung des Grundmodells besteht, darin, dass man die Übergangswahr-

2. Tatsächlich stützt die Annahme einer Exponentialverteilung auf die Annahme einer konstanten Ausscheidungsintensität.

3. Es soll hier z. B. die Weibul-Verteilung angepasst werden und weiterhin andere, wie z.B. die Competz-Verteilung oder die Modifikation von Makeman.

1. Kendall (1949).

scheinlichkeiten abhängig von der Aufenthaltsdauer in der Herkunftsregion betrachtet. D.h. also, dass die Informationen über den Abwanderungsprozess durch die sogenannten semi-markoffschen Prozesse weitgehend erweitern können. Solche Modelle beruhen hauptsächlich auf die eingeführte Theorie von Pyke (1961).

Bei der Untersuchung der Mobilität darf man zwei besondere Effekte nicht ignorieren. Zunächst soll die Heterogenität berücksichtigt werden, d.h. die unabhängige Änderung der Anzahl der Entscheidungspunkte für jedes Individuum in der Form der Verteilung der Aufenthaltsdauer. Die Anwendung z.B. einer geometrischen Verteilung in kontinuierlicher Formulierung einer Exponentialverteilung

$$f(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

setzt zwei Gruppe voraus. Wenn also $\lambda_1 = 0$ ist, beschreibt die Verteilung einen aggregierten Prozess, während dagegen, wenn $\lambda_1 > 0$ ist, hat man eine Verallgemeinerung des «Mover-Stayer» Modells von Blumen u.a. (1953) mit Wahrscheinlich-Abwandernden und Wahrscheinlich-Verbleibenden.

Im Prinzip aber liegt diese einfache diskrete Gruppierung selten vor. Dies bedeutet, dass eine unregelmässige oder nicht fällige Änderung der Entscheidungspunkte für jedes Individuum selbst vorkommt.

Eine direkte Möglichkeit, die Realität in Erklärung zu bringen, besteht nach Einführung der Gamma-Verteilung für den Parameter λ . So ergibt sich die Zusammengesetzte Verteilung

$$f(t) = \frac{b}{c} \left(1 + \frac{t}{c}\right)^{-b+1}$$

Weiterhin lässt sich das semi-markoffsche Modell mit kumulativer Trägheit¹ vom «Mover-Stayer» Modell anhand der Korrelation zwischen der Aufenthaltsdauer von zwei sukzessiven Bewegungen unterscheiden. Das «Mover-Stayer» Modell z.B. setzt voraus, dass diese Zeitintervalle abhängig voneinander sind, wobei Individuen mit höherer Abwanderungsneigung mit zwei kürzeren Zeitintervallen verbunden sind, während bei Individuen mit niedrigerer Abwanderungsneigung längere Zeitintervalle nacheinandern folgen.

Ein wesentlich einwirkender Faktor in demographischen Vorgängen ist die Nicht-Homogenität des semi-markoffschen Prozesses, die mit chronologischen Änderungen und insbesondere Altersspezifizierungen verbunden sind. Leider ist bis jetzt nicht

gelungen ein solches Modell zu entwickeln. Es wäre vielleicht möglich die entsprechende Prozedur der inhomogenen markoffschen Kette anzuwenden, sie führt aber ihrerseits zu einer ausserordentlich schwieriger mathematischen Aufgabe.

LITERATUR

1. Bartholomew, D. J. (1972), *Stochastic Models for Social Processes*, J. Wiley, New York.
2. Bharucha-Reid, A. T. (1960), *The Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications*, McGraw Hill, New York.
3. Bush, R. R. and F. Mosteller (1955), *Stochastic Models for Learning*, J. Wiley, New York.
4. Blumen, I., M. Kogan and P. J. McCarthy (1955), *The Industrial Mobility of Labour as a Probability Process*, Cornell Univ. Press, Ithaca, New York.
5. Chiang, C. L. (1968), *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*, J. Wiley, New York.
6. Coleman, J. (1964), *Introduction to Mathematical Sociology*, Free Press, New York.
7. Feichtinger, G. (1972), *Stochastische Modelle demographischer Prozesse*, Springer-Verlag, Berlin.
8. Feller, W. (1966), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, McGraw Hill, New York.
9. Fisz, M. (1963), *Probability Theory and Mathematical Statistic*, J. Wiley, New York.
10. Gnedenko, G. (1966), *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Akademie Verlag, Berlin.
11. Goodman, L. A. (1967), «On the Reconciliation of Mathematical Theories of Population Growth», *Journal of the Roy. Stat. Soc. A*, 130, 541-553.
12. Kendall, D. G. (1949), «Stochastic Processes and Population Growth», *Journal of the Royal Stat. Soc. B*, 11, 230-264.
13. Keyfitz, N. (1964), «The Population Projection as a Matrix Operator», *Demography* 1, 56-73.
14. Leslie, P. H. (1945), «On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics», *Biometrika* 33, 182-212.
15. Lopez, A. (1961), *Problems in Stable Population Theory*, Office of Population Research.
16. Pollard, J. H. (1966), «On the Use of the Direct Matrix Product in Analysing Stochastic Population Models», *Biometrika* 53, 397-415.
17. Pollard, J. H. (1969), «Continuous Time and Discrete Time Models of Population Growth», *Journal of the Royal Stat. Soc. A*, 132, 80-88.
18. Pyke, R. (1961), «Markov Renewal Processes with Finitely Many States», *Annals of Math. Statistics* 32, 1243-1259.
19. Rice, A. K., J. M. Hill and E. L. Trist (1950), «The Representation of Labour Turnover as a Social Process», *Human Relations*, 3, 349-381.
20. Silcock, H. (1954), «The Phenomenon of Labour Turnover», *Journal of the Royal Stat. Soc. A* 117, 429-440.
21. Steindl, J. (1965), *Random Processes and the Growth of Firms*, Hafner, New York.
22. Tzifafetas, G. (1975), *Stochastische Modelle von Wanderungsprozessen*, Dissertation TU Berlin.

1. D.h. die dauerspezifische Rate $r(t) = \frac{f_{ij}(t)}{1 - F_{ij}(t)}$,

wobei $F_{ij}(t)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Verteilung $f_{ij}(t)$ ist, eine nichtzunehmende Funktion repräsentiert.