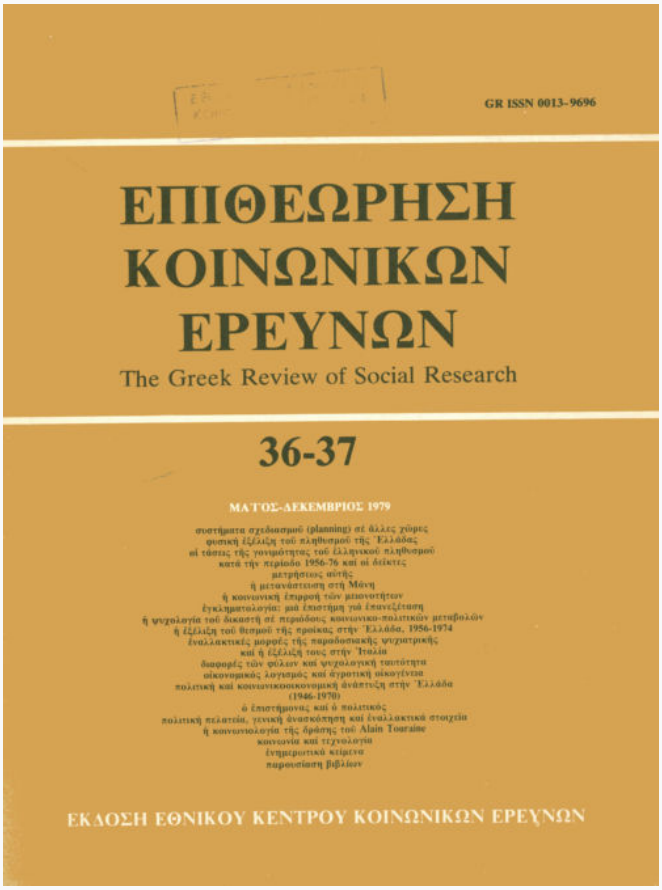
The Greek Review of Social Research

Vol 36 (1979)

36-37



Φυσική εξέλιξη του πληθυσμού της Ελλάδας: Μακροστοχαστική ανάλυση του φαινομένου

Γιώργος Ν. Τζιαφέτας

doi: [10.12681/grsr.454](https://doi.org/10.12681/grsr.454)

φυσική ἐξέλιξη τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδας

μακροστοχαστική ἀνάλυση τοῦ φαινομένου

τοῦ
Γιώργου Ν. Τζιαφέτα
Ἐπιμελητῆ τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου

1. εἰσαγωγικά

Οἱ προσπάθειες τῶν κοινωνιολόγων καί εἰδικότερα τῶν δημογράφων συγκεντρώνονταν μέχρι τήν περασμένη δεκαετία στήν ἀνάλυση χρονοδιαγραμμάτων γιά τά κυριότερα στοιχεῖα τῆς φυσικῆς κινήσεως τοῦ πληθυσμοῦ προκειμένου νά μελετηθεῖ ἡ ἐξέλιξή του. Μέ βάση τά στοιχεῖα αὐτά, ἦταν δυνατό νά ὑπολογιστοῦν ποσοστιαῖες κατανομές καί τά ὑπόλοιπα χαρακτηριστικά μεγέθη τοῦ πληθυσμοῦ. Βέβαια, ἡ μεθοδολογία τέτοιου εἴδους εἶναι ἀρκετά γνωστή, συνήθως εὔχρηστη στούς ὑπολογισμούς, ἀλλά μειονεκτεῖ σέ ἕνα βασικό σημεῖο. Γιά μία οὐσιαστική μελέτη ἀπαιτοῦνται στατιστικά στοιχεῖα, πού εἶναι δύσκολο νά ἀποτιμηθοῦν. Αὐτό ἔχει σάν ἐπακόλουθο τό μεγάλο κόστος τῆς μελέτης, πού γιά μιά ἀναπτυσσόμενη χώρα εἶναι ἀρκετά δύσκολο νά ἀναληφθεῖ. Ἀκόμα, σέ πολλές περιπτώσεις, ἡ λήψη εἰδικῶν στατιστικῶν στοιχείων εἶναι ἀδύνατη γιά πρακτικούς λόγους. Ἔτσι, γιά μιά ἀνάλυση τοῦ φαινομένου οἱ ἐρευνητές εἶναι ὑποχρεωμένοι νά περιοριστοῦν σέ μεθοδολογίες πού στηρίζονται στά στοιχεῖα πού διαθέτουν οἱ στατιστικές ὑπηρεσίες ἀπό τίς ἀπογραφές κατά ὁρισμένα χρονικά διαστήματα.

Οἱ λόγοι πού προαναφέρθηκαν ὑπῆρξαν κατ' ἀρχήν ἀπαγορευτικοί καί γιά πολυπλοκότερες μεθοδολογίες, ὅπως εἶναι ἡ στοχαστική ἀνάλυση πού χρησιμοποιεῖται πλέον σέ μεγάλη κλίμακα τήν τελευταία δεκαετία.[1] Ἡ διεύρυνση, ὅμως, τῶν προτεινόμενων στοχαστικῶν μεθόδων καί κυρίως ἡ χρήση τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν ἔλυσαν ἀρκετά προβλήματα, ὥστε ἡ ἐφαρμογή τῆς νέας μεθοδολογίας νά κρίνεται σέ πολλά σημεῖα προσφορότερη ἀπό τίς κλασικές μεθόδους. Πέρα ἀπό τίς δυνατότητες αὐτές, πρέπει νά τονιστεῖ, ἰδιαίτερα, ὅτι ἡ στοχαστική ἀνάλυση παρέχει μορφές λύσεων στόν ὑπάρχοντα προβληματισμό, πού βρίσκονται πλησιέστερα στήν πραγματικότητα. Γενικά, ἡ ὅλη θέση τοῦ προβλήματος, ὅπως ὑπεισέρχεται στή στοχαστική ἀνάλυση, ἀντικατοπτρίζει κατά ἀρτιότερο τρόπο τή φυσική διαδικασία.

Μέ βάση ὅσα ἀναφέρθηκαν παραπάνω, ἡ ἐργασία αὐτή ἀποσκοπεῖ στή μελέτη τοῦ δημογραφικοῦ προβλήματος τῆς Ἑλλάδος καί ἰδιαίτερα στόν προσδιορισμό τῆς ποσοστιαίας κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ καί τίς προοπτικές τῆς ἐξελίξεως αὐτῆς μέ τή βοήθεια μακρο-στοχαστικῶν μεθόδων.[2]

2. μεθοδολογία

Ἡ ἐπεξήγηση, ἡ περιγραφή καί ἡ πρόγνωση τῶν δημογραφικῶν φαινομένων παραμένει πάντα ὁ κύριος σκοπός τῶν ἐρευνητῶν. Τό πρόβλημα ἀρχίζει

1. Boudon R., 1973.
2. Tziafetas G., 1976.

μέ τήν ἐπεξήγηση καί κυρίως μέ τό ἐρώτημα πῶς μετασχηματίζονται οἱ παρατηρούμενες τιμές πού ἀφοροῦν δημογραφικές μεταβλητές ποσότητες. Εἶναι γεγονός ὅτι πληθυσμιακά χαρακτηριστικά εἶναι πάντοτε δυνατόν νά προκύψουν ἀπό τή θεώρηση ἑνός στοχαστικοῦ συστήματος μεταβολῶν.[3] Κατ' αὐτόν τόν τρόπο, οἱ παρατηρούμενες τιμές μπορεῖ νά θεωρηθοῦν σάν τιμές τυχαίων μεταβλητῶν, πού μεταβάλλονται χρονικά μέ βάση πιθανοθεωρητικούς νόμους. Ἔτσι, τό πρόβλημα μετατίθεται στόν προσδιορισμό τῆς στοχαστικῆς ἀνελίξεως, πού περιγράφει ἱκανοποιητικά τό διερευνώμενο δημογραφικό φαινόμενο. Ξεκινώντας ἀπό τίς ἁπλούστερες μορφές στοχαστικῶν ἀνελίξεων καί ἔχοντας τίς παρατηρούμενες τιμές κατά κατηγορία ἤ κατά παρατηρούμενη κατάσταση, ἐξετάζουμε τήν ἐφαρμογή κατάλληλης μαρκοβιανῆς ἁλυσίδας. Βέβαια, πάντα ὑπάρχει τό ἐρώτημα κατά πόσον τά φαινόμενα διέπονται ἀπό τή μαρκοβιανή ἰδιότητα.[4] Προσεγγιστικά, σέ πρῶτο βῆμα, λαμβάνουμε στατικές, πρώτης τάξεως, μαρκοβιανές ἁλυσίδες, ἄν καί εἶναι δυνατόν τό σύστημα νά ἀπαιτεῖ μή σταθερές πιθανότητες μεταφορᾶς μεταξύ τῶν θεωρουμένων καταστάσεων.

Στήν περίπτωση πού ἦταν γνωστά μικροδεδομένα, δηλαδή ὁ ἀριθμός τῶν στοιχείων τοῦ πληθυσμοῦ πού διαφεύγουν ἀπό μία κατάσταση τῆς ἁλυσίδας καί ἔρχονται σέ μία ἄλλη γειτονική ἤ μή, τότε ὅλες οἱ ὑπόθεσεις πού ἔγιναν παραπάνω μπορεῖ νά ἐλεγχθοῦν συνολικά μέ τήν ἐφαρμογή γνωστῶν στατιστικῶν μεθόδων.[5] Τό πρόβλημα, ὅμως, εἶναι ἀρκετά πολυπλοκότερο. Δυστυχῶς, τέτοιου εἴδους στατιστικά δεδομένα εἶναι δύσκολο νά ληφθοῦν ἀπό τή στατιστική ὑπηρεσία, ἰδίως στήν περίπτωση πού οἱ θεωρούμενες καταστάσεις τῆς ἁλυσίδας ἀντιπροσωπεύουν κοινωνικές ἤ δημογραφικές καταστάσεις. Ἔτσι, στήν εἰσαγόμενη νέα μεθοδολογία θά πρέπει νά στηριχθοῦμε ἀποκλειστικά σέ μακροδεδομένα, δηλαδή στίς ποσοστιαῖες κατανομές συχνότητας τοῦ πληθυσμοῦ πού δίνονται γιά κάθε θεωρούμενη χρονική στιγμή.

Μέ βάση τίς παραπάνω προϋποθέσεις, στίς ἐφαρμογές θεωροῦμε σάν καταστάσεις i ($i = 1, 2, ..., r$) τῆς μαρκοβιανῆς ἁλυσίδας μεγάλα διαστήματα ἡλικίας, γιά τά ὁποῖα μᾶς δίνεται ἡ συχνότητα κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ $Y_i(t)$ γιά κάθε χρονική στιγμή t ($t = 1, 2, ..., T$). Συνήθως, τέτοιου εἴδους ὑποδείγματα θεωροῦνται ἱεραρχικά ἤ κλειστά. Ἀντίθετα, στό ὑπόδειγμα πού περιγράφουμε, θεωροῦμε ὅτι οἱ ἀλλαγές πού παρατηροῦνται στή συχνότητα κατανομῆς, προέρχονται ἀπό ὅλα τά στοιχεῖα τῆς φυσικῆς κινήσεως τοῦ πληθυσμοῦ, δηλαδή θανάτους, γεννήσεις καί μεταναστεύσεις. Ἔτσι, ὅπως θά ἐπεξηγηθεῖ παρακάτω, οἱ πιθανότητες μεταφορᾶς p_{ij} γιά j i δέν εἶναι μηδενικές.

Ἐάν συμβολίσουμε μέ $q_j(t)$ τή μή δεσμευμένη πιθανότητα, ὥστε στοιχεῖο τοῦ πληθυσμοῦ νά βρεθεῖ στήν κατάσταση i τή χρονική στιγμή t, τότε τό προτεινόμενο ὑπόδειγμα ἔχει τή μορφή

γιά $\quad t = 1, 2, \ldots, T \quad$ καί $\quad j = 1, 2, \ldots, r. \qquad$ (2.1)

Τό βασικό πρόβλημα πού ἔχουμε στό ὑπόδειγμα εἶναι ἡ ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων πού ὑπεισέρχονται ὑπό τή μορφή τῆς πιθανότητας μεταφορᾶς p_{ij}. Γιά τήν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος, καταφεύγουμε στή μέθοδο τῆς μεγίστης πιθανοφάνειας, ὁπότε ὑπολογίζουμε πρῶτα τή συνάρτηση πιθανοφάνειας L καί ὕστερα τίς παραγώγους τῆς συναρτήσεως logL. Τελικά, ἡ ἐκτιμήτρια τοῦ πίνακα μεταφορᾶς $P = (p_{ij})$ ἔχει τή μορφή

$$\hat{P}^* = (X \sum^{-1} X_i)^{-1} X \sum^{1} Y^* \qquad (2.2)$$

ὅπου Σ εἶναι ὁ πίνακας συνδιασπορῶν τῶν συχνοτήτων $Y_j(t)$. Οἱ $(r-1)$ ὑποπίνακες Σ^{ij} ἔχουν σάν στοιχεῖα τίς ποσότητες

$$-[q_i(t) q_j(t)] / N(t)$$

$$[q_i(t)[1 - q_i(t)]] / N(t), \qquad N(t) Y_i(t) = n_i(t),$$

Y^* εἶναι διάνυσμα στήλη μέ στοιχεῖα $Y_i(t)$ γιά $t = 1, 2, ..., T$.
$\hat{P}^*$ εἶναι διάνυσμα στήλη μέ $r-1$ ὑποδιανύσματα καί X εἶναι $(T(r-1) \times r(r-1))$ διαγώνιος πίνακας, τοῦ ὁποίου οἱ ὑποπίνακες X_j ἔχουν σάν στοιχεῖα τά παρατηρούμενα ποσοστά $Y_j(t-1)$ γιά $t = 1, 2, ..., T$ καί $j = 1, 2, ..., r$.

$$[T(r-1) \times r(r-1)]$$

Πρέπει ἐδῶ νά σημειώσουμε ὅτι ἡ ἐκτίμηση πού δόθηκε μέ τή σχέση (2.2) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μόνον ὅταν ὁ πίνακας Σ εἶναι γνωστός. Συνήθως, ὅμως, ὁ πίνακας συνδιασπορῶν εἶναι συνάρτηση τῆς ἄγνωστης πιθανότητας $q_j(t)$. Ὁ προσφορότερος τρόπος νά ἐκτιμήσουμε τόν πίνακα Σ εἶναι νά ἀντικαταστήσουμε τίς πιθανότητες $q_j(t)$ μέ τίς παρατηρούμενες συχνότητες $Y_j(t)$, ὁπότε σέ πρώτη προσέγγιση λαμβάνουμε τήν ἐκτίμηση $(\hat{p}^c_{ij}(1))$. Μέ βάση τή σχέση (2.1), ὑπολογίζουμε ἀναδρομικά τή νέα πιθανότητα $\hat{q}^c_j(t)$, πού ὁδηγεῖ στή νέα ἐκτίμηση $\hat{p}^c_{ij}(2)$. Ἡ ἀναδρομική αὐτή διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ὅτου προκύψει

3. Rogers A., 1975.
4. Ginsberg R., 1972.
5. Anderson T.W. and L.A. Goodman, 1957.

$$\upsilon_{ij}^{c}(n+1)=\hat{p}_{ij}^{c}(n) \qquad (2.3)$$

Ἡ μεθοδολογία μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ σέ μερικά σημεῖα, ἄν ληφθοῦν ὑπ' ὄψη οἱ ἐκ τῶν προτέρων πληροφορίες πού ἀφοροῦν τίς πιθανότητες μεταφορᾶς p_{ij}. Ὑποτίθεται, π.χ., ὅτι οἱ πληροφορίες αὐτές συγκεντρώνονται σέ μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, πού δίνεται ἐκ τῶν προτέρων καί πού ἀκολουθεῖ τήν πολυδιάστατη Β-κατανομή. Ἔχοντας λοιπόν ὑπ' ὄψη τή δειγματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, ὅπως ὑπολογίστηκε στή συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας, καί κάνοντας χρήση τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος τοῦ Bayes, λαμβάνουμε τήν ἐκ τῶν ὑστέρων συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σάν συνάρτηση τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς. Παραγωγίζοντας ὡς πρός p_{ij} τή συνάρτηση αὐτή, βρίσκουμε τή νέα ἐκτίμηση κατά Bayes μέ τήν ἀκόλουθη μορφή

$$\hat{P}^{*}=\left(X'\Sigma^{-1}X+\Sigma_{0}^{-1}J\right)^{-1}\left(X'\Sigma^{-1}Y^{*}+\Sigma_{0}^{-1}L\right) \qquad (2.4)$$

ὅπου J εἶναι $[r(r-1)\times r(r-1)]$ διαγώνιος πίνακας μέ στοιχεῖα

$$(a_i-r)/(a_i+1),\ i=1,2,\ldots,r$$

(a_i εἶναι οἱ ἐκ τῶν προτέρων γνωστοί παράμετροι τῆς Β-κατανομῆς), L εἶναι $(r(r-1)\times 1)$ διάνυσμα στήλη μέ στοιχεῖα

$$(a_{ij}-1)/(a_i+1),\ i=1,2,\ldots,r \quad \text{καί} \quad j=1,2,\ldots,r-1$$

Στήν ὅλη μαθηματική ἐπεξεργασία μέχρι τώρα, δέν λάβαμε ὑπ' ὄψη τίς ἰδιότητες πού πρέπει νά ἔχουν οἱ πιθανότητες μεταφορᾶς p_{ij}. Δηλαδή πρέπει

$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij}=1 \quad \text{καί} \quad 0\leq p_{ij}\leq 1 \qquad i,j=1,2,\ldots,r \qquad (2.5)$$

Οἱ προϋποθέσεις αὐτές εἰσάγουν βασικές δυσκολίες στόν προβληματισμό. Μπορεῖ ὅμως νά βρεθεῖ νέα, ὑπό τούς περιορισμούς (2.5), ἐκτίμηση τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς μέ βάση τό γνωστό θεώρημα περιστολῆς καί τό δυαδικό θεώρημα τοῦ μή γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ ἐκτίμηση πού λαμβάνεται κατ' αὐτό τόν τρόπο γιά τόν πίνακα τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς καλεῖται ἰδιαίτερα περιορισμένη.

3. ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως

Σέ πρόσφατη ἔκδοση τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας,[6] γίνεται πρόβλεψη τῆς πληθυσμιακῆς κατανομῆς στήν Ἑλλάδα κατά μεγάλες ὁμάδες ἡλικιῶν μέ βάση τίς παρατηρούμενες τιμές στή χρονική περίοδο 1950-1975. Στήν ἀναφερόμενη ἐργασία χρησιμοποιήθηκε ἡ γνωστή μεθοδολογία στή δημογραφία μέ ἀνάλυση τῶν στοιχείων τῆς φυσικῆς κινήσεως τοῦ πληθυσμοῦ. Ἐξαίρεση ἀποτέλεσε ἡ μετανάστευση γιά τήν ὁποία δέν ὑπῆρχαν ἀρκετά στοιχεῖα.

Χρησιμοποιώντας τίς παρατηρούμενες τιμές γιά τήν πληθυσμιακή κατανομή ἀπό τήν ἐργασία πού προαναφέρθηκε, ὑποθέτουμε ὅτι τά δεδομένα μετασχηματίζονται μέ βάση μία στατική μαρκοβιανή ἁλυσίδα πρώτης τάξεως στήν ὁποία ὑπάρχουν τέσσερες καταστάσεις, ὅσες δηλαδή οἱ ὁμάδες ἡλικιῶν πού θεωρήθηκαν.

Κάθε στοιχεῖο τοῦ πληθυσμοῦ ἔχει τή δυνατότητα νά βρεθεῖ σέ μία ἀπό τίς θεωρούμενες ὁμάδες ἡλικιῶν καί μπορεῖ νά μεταπηδήσει σέ μία ἄλλη κατά τή διάρκεια τῶν χρονικῶν στιγμῶν $t=1, 2, 3, 4, 5, 6$, πού ἀντιστοιχοῦν στά ἔτη λήψεως τῆς πληθυσμιακῆς κατανομῆς, δηλαδή ἀνά πενταετία στό χρονικό διάστημα 1950-1975.

Εἶναι κατανοητό ὅτι ἡ ἁλυσίδα ἔχει ἱεραρχικό χαρακτήρα, δηλαδή ἕνα στοιχεῖο τοῦ πληθυσμοῦ μπορεῖ νά μεταπηδήσει σέ μία χρονική περίοδο ἀπό μία μικρότερη ἡλικία, οὐσιαστικά μία μικρότερη κατά ἀρίθμηση κατάσταση, σέ μία μεγαλύτερη. Στίς ἐφαρμογές πού θεωροῦμε, μπορεῖ ἕνα στοιχεῖο τοῦ πληθυσμοῦ νά ἐξέλθει ἀπό τό σύστημα στήν περίπτωση θανάτου-μεταναστεύσεως ἤ νά εἰσέλθει στήν περίπτωση γεννήσεως-μεταναστεύσεως. Μέ ἄλλα λόγια, θεωροῦμε τό σύστημα κλειστό μέ τήν εὐρύτερη ἔννοια, ὅτι συμπεριλαμβάνει τίς καταστάσεις γέννηση-θάνατος-μετανάστευση καί ὅτι ἕνα στοιχεῖο πού ἀποκόπτεται ἀπό μία κατάσταση μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἕνα νέο πού εἰσέρχεται σέ ὁποιαδήποτε κατάσταση μικρότερη ἤ πολύ μεγαλύτερη.

Ὕστερα ἀπό τίς προϋποθέσεις αὐτές, δίνονται στόν πίνακα (3.1)[7] οἱ παρατηρούμενες καί οἱ εὑρεθεῖσες τιμές γιά τήν πληθυσμιακή κατανομή, καθώς καί οἱ προβλεπόμενες γιά τίς χρονικές στιγμές $t=7, 8, 9, 10$, δηλαδή γιά τά ἔτη 1980, 1985, 1990, 1995. Οἱ ὑπολογισμοί ἔγιναν μέ τή μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, ὅπως ἀναλύθηκε στήν προηγούμενη παράγραφο, ὅπου ἡ ἐκτιμήτρια γιά τόν πίνακα τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς ὑπολογίστηκε μέ δύο διαδοχικές ἐπαναλήψεις.

Εἶναι φανερό, ἀπό τή μεθοδολογία πού δόθηκε στήν προηγούμενη παράγραφο, ὅτι ἡ ἀνάλυση μέ τίς μαρκοβιανές ἁλυσίδες δίνει μία πρόγνωση στήν πληθυσμιακή ἐξέλιξη μέ βάση τίς προϋποθέσεις

6. V. Valaoras, 1974.

7. Οἱ ὑπολογισμοί ἔγιναν μέ τόν Ἠλεκτρονικό Ὑπολογιστή τοῦ Ὑπουργείου Γεωργίας.

πού ὑπῆρχαν ἤ δημιουργήθηκαν κατά τή θεωρούμενη χρονική διάρκεια. Δηλαδή, μέ ἄλλα λόγια, οἱ ἐξελικτικές τάσεις εἶναι ἀπόρροια τῆς ὁλικῆς πολιτικῆς πού ἀσκήθηκε πάνω στά στοιχεῖα πού καθορίζουν τή φυσική ἐξέλιξη τοῦ πληθυσμοῦ.

Πρέπει νά τονίσουμε σ' αὐτό τό σημεῖο, ὅτι δέν εἶναι δυνατόν νά γίνει ἔλεγχος τῶν προγνώσεων. Εἶναι, ὅμως, δυνατόν νά ἐλεγχθοῦν ὅλες οἱ ὑποθέσεις πού τέθηκαν παραπάνω. Δηλαδή κατά πόσον ἡ μεθοδολογία ἔδωσε ἀποτελέσματα πού προσεγγίζουν ἱκανοποιητικά τίς παρατηρούμενες τιμές. Ἔχοντας λοιπόν τίς παρατηρούμενες τιμές Y (t) καί τίς ἐκτιμηθεῖσες $\hat{Y}(t)$, μποροῦμε νά κάνουμε χρήση τοῦ ἐλέγχου στατιστικῶν ὑποθέσεων κατά Pearson μέ βάση τήν τετραγωνική μορφή

$$\chi^2_{(r-1)T} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{r} N(t)\left[Y_i(t) - \hat{Y}_i(t)\right]^2 / \hat{Y}_i(t) \qquad (3.1)$$

ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ τήν χ^2-κατανομή μέ (r−1)T βαθμούς ἐλευθερίας. Ὅπως φαίνεται ἀπό τόν πίνακα (3.1), ἡ τιμή πού βρέθηκε γιά τή συνάρτηση χ^2 εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς χ^2-κατανομῆς γιά 18 βαθμούς ἐλευθερίας. Ἔτσι, μπορεῖ νά γίνει ἀνεπιφύλακτα δεκτή ἡ ὑπόθεση ὅτι οἱ παρατηρούμενες ποσοστιαῖες συχνότητες ἀκολουθοῦν τήν ἴδια κατανομή μέ τίς ἐκτιμηθεῖσες.

Σέ μία δεύτερη ἐφαρμογή, θεωροῦμε πάλι τίς παρατηρούμενες τιμές γιά τήν κατανομή τοῦ ἀστικοῦ πληθυσμοῦ στήν Ἑλλάδα ἀπό τήν ἔκδοση τῆς ΕΣΥΕ πού προαναφέρθηκε. Ὑποθέτουμε, πάλι, ὅτι τά δεδομένα μετασχηματίζονται μέ βάση μία στατική μαρκοβιανή ἁλυσίδα πρώτης τάξεως, στήν ὁποία ὑπάρχουν τέσσερες καταστάσεις πού ἀντιστοιχοῦν σέ τέσσερες μεγάλες ὁμάδες ἡλικιῶν (πίνακας 3.2). Παρόμοια, ὑποτίθεται ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι δυνατόν νά βρεθεῖ σέ μία ἀπό τίς θεωρούμενες καταστάσεις καί μπορεῖ νά μεταπηδήσει σέ μία ἄλλη κατά τή διάρκεια τῶν χρονικῶν στιγμῶν t=1, 2, 3, 4, 5, 6, πού ἀντιστοιχοῦν στά ἔτη λήψεως τῆς πληθυσμιακῆς κατανομῆς, δηλαδή ἀνά πενταετία στό χρονικό διάστημα 1950-1975. Τέλος, κάνουμε τήν ἴδια ὑπόθεση, ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, γιά τήν ἱεραρχικότητα καί τό κλειστό τοῦ συστήματος.

Ὕστερα ἀπό τίς ὑποθέσεις αὐτές, δίνουμε στόν πίνακα (3.2) τίς τιμές γιά τήν πληθυσμιακή κατανομή τοῦ ἀστικοῦ πληθυσμοῦ μέ βάση τήν ἐκτίμηση κατά Bayes, ὅπως περιγράφτηκε στήν προηγούμενη παράγραφο. Οἱ ἐκ τῶν προτέρων πιθανότητες μεταφορᾶς (πίνακας 3.3) ἔχουν ὑπολογιστεῖ σέ σχέση μέ τίς πραγματικές δυνατότητες γιά τή μεταπήδηση ἑνός στοιχείου τοῦ πληθυσμοῦ ἀπό μία κατάσταση σέ ἄλλη. Ἔτσι, θεωρήσαμε, π.χ., ὅτι ἡ πιθανότητα γιά νά παραμείνει ἕνα στοιχεῖο τοῦ πληθυσμοῦ στήν πρώτη ὁμάδα ἡλικίας (0-14 ἔτη) κατά τή διάρκεια μιᾶς πενταετίας εἶναι ἴση περίπου μέ 2/3. Μέ τό ἴδιο σκεπτικό ὑπολογίσαμε τά ἄλλα διαγώνια στοιχεῖα τοῦ πίνακα καί τίς πιθανότητες μεταπηδήσεως p_{12}, p_{23}, p_{34}. Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἐκ τῶν προτέρων πιθανότητας p_{41}, θεωρήσαμε ὅτι ἡ πιθα-

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1. *Πληθυσμιακή κατανομή τῆς Ἑλλάδας κατά μεγάλες ὁμάδες ἡλικιῶν*

t \ r	1 (0-14 ἔτη)		2 (15-44 ἔτη)		3 (45-64 ἔτη)		4 (65+ἔτη)		Μέγεθος δείγματος (100.000)
	A	B	A	B	A	B	A	B	
1(1950)	0,2856		0,4759		0,1736		0,0649		75.810
2(1955)	0,2636	0,2650	0,4747	0,4687	0,1904	0,1897	0,0713	0,0764	79.570
3(1960)	0,2642	0,2647	0,4496	0,4473	0,2052	0,2037	0,0810	0,0839	83.240
4(1965)	0,2518	0,2516	0,4442	0,4375	0,2094	0,2163	0,0946	0,0940	85.850
5(1970)	0,2483	0,2486	0,4236	0,4240	0,2161	0,2192	0,1120	0,1085	87.620
6(1975)	0,2387	0,2375	0,3968	0,4116	0,2321	0,2244	0,1324	0,1263	88.100
7(1980)	0,2284	0,2232	0,3925	0,3913	0,2349	0,2374	0,1442	0,1478	
8(1985)	0,2177	0,2204	0,4002	0,3746	0,2395	0,2413	0,1426	0,1636	
9(1990)	0,2180	0,2113	0,4125	0,3648	0,2263	0,2440	0,1432	0,1796	
10(1995)	0,2240	0,2061	0,4097	0,3521	0,2128	0,2456	0,1535	0,1958	

A: Παρατηρούμενες τιμές καί πρόγνωση κατά V. Valaoras, 1974.
B: Ἐκτιμώμενες τιμές καί πρόγνωση κατά τή μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας.
Ἄθροισμα τετρ. σφάλματος 0,000511658
Μέσον τετρ. σφάλμα 0,000025583
Τιμή χ^2 0,182558029

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2. *Κατανομή τοῦ ἀστικοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδας κατά μεγάλες ὁμάδες ἡλικιῶν*

t \ r	1 (0-14 ἔτη)		2 (15-44 ἔτη)		3 (45-64 ἔτη)		4 (65 + ἔτη)		Μέγεθος δείγματος
	A	B	A	B	A	B	A	B	
1(1950)	0,2292		0,5306		0,1832		0,0570		27.548
2(1955)	0,2158	0,2108	0,5221	0,4933	0,1990	0,2325	0,0631	0,0634	31.223
3(1960)	0,2221	0,2072	0,4926	0,4841	0,2126	0,2445	0,0727	0,0640	35.280
4(1965)	0,2230	0,2171	0,4800	0,4649	0,2128	0,2533	0,0848	0,0647	39.887
5(1970)	0,2284	0,2250	0,4630	0,4565	0,2126	0,2529	0,0960	0,0655	45.611
6(1975)	0,2289	0,2356	0,4405	0,4461	0,2218	0,2519	0,1088	0,0663	51.032
7(1980)	0,2266	0,2442	0,4231	0,4306	0,2292	0,2579	0,1215	0,0672	
8(1995)	0,2210	0,2267	0,4197	0,4256	0,2351	0,2836	0,1242	0,0641	
9(1990)	0,2196	0,2149	0,4235	0,4174	0,2269	0,3031	0,1300	0,0654	
10(1995)	0,2156	0,2087	0,4237	0,4087	0,2257	0,3182	0,1450	0,0644	

A: Παρατηρούμενες τιμές καί πρόγνωση κατά V. Valaoras, 1974.
B: Ἐκτιμώμενες τιμές καί πρόγνωση κατά τή μέθοδο Bayes.
Ἄθροισμα τετρ. σφάλματος 0,011049389
Μέσον τετρ. σφάλμα 0,000552469
Τιμή χ^2 3,494544134

νότητα νά διαφύγει ἀπό τήν τέταρτη ὁμάδα ἡλικίας ἕνα στοιχεῖο τοῦ πληθυσμοῦ λόγω θανάτου ἤ μεταναστεύσεως καί νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἕνα νέο στήν πρώτη ὁμάδα λόγω γεννήσεως ἤ μεταναστεύσεως σέ μία πενταετία, εἶναι περίπου ἴση μέ 1/3, δηλαδή ἴση μέ τήν πιθανότητα διαφυγῆς ἀπό τήν τέταρτη ὁμάδα. Τέλος, γιά τίς πιθανότητες $p_{13}, p_{14}, p_{21}, p_{24}, p_{31}, p_{32}, p_{42}, p_{43}$, κάναμε τήν ὑπόθεση ὅτι εἶναι σταθερές καί ἴσες πρός 0,05 καί ἀντιπροσωπεύουν τήν

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3. *Οἱ ἐκ τῶν προτέρων πιθανότητες μεταφορᾶς καί ἡ ἐκτίμηση κατά Bayes μέ τήν ἐπαναληπτική διαδικασία*

	Πίνακας τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς				Ἐπ. σφάλμα
Ἐκ τῶν	0,6000	0,3000	0,0500	0,0500	
προτέρων	0,0500	0,7500	0,1500	0,0500	
πιθανότητες	0,0500	0,0500	0,7000	0,2000	
μεταφορᾶς	0,3000	0,0500	0,0500	0,7000	
1η	0,6188	0,2983	0,0384	0,0446	0,304503
ἐπαναλη-	0,0441	0,7795	0,1266	0,0498	
πτική	0,0534	0,0521	0,8289	0,0656	
λύση	0,5408	0,0768	0,0748	0,3076	
3η	0,6139	0,3000	0,0385	0,0477	0,099354
ἐπαναλη-	0,0424	0,7746	0,1254	0,0575	
πτική	0,0528	0,0524	0,8322	0,0625	
λύση	0,6363	0,0883	0,0847	0,1908	
6η	0,6116	0,3008	0,0385	0,0491	0,026040
ἐπαναλη-	0,0417	0,7717	0,1249	0,0617	
πτική	0,0524	0,0524	0,8311	0,0641	
λύση	0,6823	0,942	0,0895	0,1340	

πιθανότητα, ὥστε ἕνα στοιχεῖο τοῦ πληθυσμοῦ νά διαφύγει ἀπό μία ὁμάδα ἡλικίας λόγω μεταναστεύσεως ἤ θανάτου καί νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἕνα ἄλλο λόγω μεταναστεύσεως ἤ γεννήσεως, ὅταν τό στοιχεῖο καταφεύγει στήν πρώτη ὁμάδα ἡλικίας.

Μέ βάση τίς παραπάνω ὑποθέσεις, ὅσον ἀφορᾶ τίς ἐκ τῶν προτέρων πιθανότητες μεταφορᾶς, ὑπολογίσαμε τόν ἐκ τῶν ὑστέρων πίνακα τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς μέ τή γνωστή ἀναδρομική μέθοδο, ὅπως ἀναφέρθηκε στήν προηγούμενη παράγραφο. Στόν πίνακα (3.3) δίνουμε τήν πρώτη, τρίτη καί ἕκτη ἐπαναληπτική λύση. Ἀπό τόν ἴδιο πίνακα μποροῦμε νά δοῦμε, ἀμέσως, ὅτι τό ἐπαναληπτικό σφάλμα, πού ὑπολογίστηκε σάν ἀπόλυτη ἀπόκλιση τῆς ἐκτιμήσεως στή νέα λύση ἀπό αὐτή τῆς προηγούμενης, τείνει πρός τό μηδέν.

Ἔχοντας λοιπόν τίς ἐκτιμήσεις γιά τήν πληθυσμιακή κατανομή στό χρονικό διάστημα 1950-1975 μέ βάση τήν ἕκτη ἐπαναληπτική λύση, ὑπολογίζουμε παραπέρα τίς τιμές γιά τήν πληθυσμιακή κατανομή γιά τό χρονικό διάστημα 1980-1995 ἀνά πενταετία (πίνακας 3.2). Ὅπως φαίνεται ἀπό τόν πίνακα προγνώσεων (3.2), γιά τήν πρώτη καί δεύτερη ὁμάδα ἡλικίας δέν ἀναμένονται οὐσιώδεις ἀλλαγές στή συχνότητα κατανομῆς γιά τό χρονικό διάστημα τῆς προγνώσεως. Ἀντίθετα, ἡ τρίτη ὁμάδα ἡλικίας, ὅπως ὑπολογίσαμε μέ τή μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, ἀναμένεται νά ἔχει πολύ μεγαλύτερη συμμετοχή ἀπ' ὅ,τι εἶχε κατά τή χρονική περίοδο 1950-1975 καί ἀπ' ὅ,τι προβλέπεται κατά τίς ἐκτιμήσεις τῆς ΕΣΥΕ στήν ἐργασία πού προαναφέρθηκε. Ἡ διαφορά στό σημεῖο αὐτό προέρχεται κυρίως ἀπό τή μεθοδολογία πού ἐφαρμόσαμε. Ὅπως προαναφέραμε, ἡ θεωρία τῶν μαρκοβιανῶν ἁλυσίδων δίνει προγνώσεις μέ βάση τήν ὅλη πληθυσμιακή πο-

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4. *Πληθυσμιακή κατανομή τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδας κατά μεγάλες ὁμάδες ἡλικιῶν*

r / t	1 (0-14 ἔτη)			2 (15-44 ἔτη)			3 (45-64 ἔτη)			4 (65+ἔτη)			Μέγεθος δείγματος (100.000)
	Α	Β	Γ	Α	Β	Γ	Α	Β	Γ	Α	Β	Γ	
1(1950)	0,3177			0,4448			0,1681			0,694			48.262
2(1955)	0,2945	0,2953	0,2709	0,4440	0,4322	0,4400	0,1849	0,1882	0,2164	0,0766	0,0842	0,0726	48.356
3(1960)	0,2951	0,2930	0,2622	0,4180	0,4131	0,4342	0,1988	0,2010	0,2300	0,0871	0,0928	0,0735	47.964
4(1965)	0,2768	0,2773	0,2693	0,4132	0,4034	0,4166	0,2064	0,2146	0,2399	0,1036	0,1046	0,0742	45.963
5(1970)	0,2700	0,2729	0,2691	0,3809	0,3866	0,4095	0,2199	0,2,186	0,2455	0,1292	0,1217	0,0758	42.014
6(1975)	0,2522	0,2527	0,2814	0,3366	0,3685	0,3862	0,2462	0,2302	0,2544	0,1650	0,1485	0,0791	37.075
7(1980)	0,2316	0,2244	0,2938	0,3488	0,3366	0,3524	0,2430	0,2523	0,2728	0,1766	0,1866	0,0809	
8(1985)	0,2129	0,2221	0,2652	0,3711	0,3140	0,3701	0,2458	0,2548	0,2911	0,1698	0,2088	0,0735	
9(1990)	0,2157	0,2083	0,2443	0,3962	0,3033	0,3753	0,2254	0,2568	0,3069	0,1627	0,2312	0,0749	
10(1995)	0,2366	0,2007	0,2334	0,4036	0,2880	0,3741	0,1937	0,2571	0,3200	0,1661	0,2537	0,0737	

Α: Παρατηρούμενες τιμές καί πρόγνωση κατά V. Valaoras, 1974.
Β: Παρατηρούμενες τιμές μέ τή μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας.
Γ: Παρατηρούμενες τιμές μέ τή μέθοδο Bayes.
῎Αθροισμα τετρ. σφάλματος (μέθοδος μεγ. πιθαν.) 0.002077214 (μέθοδος Bayes) 0.021381157
Μέσον τετραγωνικόν σφάλμα (μέθοδος μεγ. πιθαν.) 0.00103861 (μέγεθος Bayes) 0.001069058
Τιμή χ^2 (μέγεθος μεγ. πιθαν.) 0.333839401 (μέθοδος Bayes) 7.374328809

λιτική πού ἀσκήθηκε στό διερευνώμενο χρονικό διάστημα, χωρίς νά εἶναι δυνατόν νά γίνουν ὑποθέσεις γιά ἐναλλακτική μελλοντική συμπεριφορά τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ.

Σέ μία τελευταία ἐφαρμογή, θεωροῦμε τίς παρατηρούμενες τιμές γιά τήν κατανομή τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ στήν Ἑλλάδα ἀπό τήν ἴδια ἔκδοση τῆς ΕΣΥΕ. Ὑποθέτουμε, πάλι, ὅτι τά δεδομένα μετασχηματίζονται μέ βάση μία στατική μαρκοβιανή ἁλυσίδα πρώτης τάξεως μέ τέσσερες καταστάσεις, ὅπως ἀκριβῶς στόν ἀστικό πληθυσμό. Στόν πίνακα (3.4) δίνουμε τίς τιμές γιά τήν πληθυσμιακή κατανομή τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ μέ τή μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας καί μέ τή μέθοδο Bayes. Στόν ὑπολογισμό μέ τή δεύτερη μέθοδο, θεωρήσαμε ὅτι ὁ πίνακας γιά τίς ἐκ τῶν προτέρων πιθανότητες μεταφορᾶς εἶναι ὁ ἴδιος, ὅπως ἀκριβῶς στόν ἀστικό πληθυσμό. Ἐπίσης, γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἐκτιμήσεως κατά Bayes, λάβαμε τήν ἕκτη ἐπαναληπτική λύση, ἐνῶ κατά τή μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας τή δεύτερη ἐπαναληπτική λύση.

Μέ τόν προσδιορισμό τῆς ἐκτιμήσεως τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς κατά Bayes, προκύπτει βασική διαφοροποίηση τῆς θεωρούμενης μαρκοβιανῆς ἁλυσίδας. Ἐνῶ κατά τή μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας προκύπτουν ἀπορροφητικές καταστάσεις, δέν συμβαίνει τό ἴδιο στή μέθοδο Bayes, ὅπου ἡ ἐκτίμηση τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς ὁδηγεῖ στή δημιουργία ἁπλῆς ἁλυσίδας. Στήν περίπτωση αὐτή, μποροῦμε πλέον νά ὑπολογίσουμε τίς ὁριακές συχνότητες μετά ἀπό ἄπειρο θεωρητικά χρόνο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Boudon, R., *Mathematical Structures of Social Mobility,* Elsevier (1973).
2. Ginsberg, R., «Critique of Probabilistic Models: Application of the Semi-Marcov Model to Migration», *Journal of Mathematical Sosiology* 2,63-82 (1972).
3. Lee, T.C., G.G. Judge and A. Zellner, *Estimating the Parameters of the Marcov Probability Models from Aggregate Time Series Data,* North-Holland (1970).
4. Rogers, A., *Introduction to Multiregional Mathematical Demography,* J. Wiley (1975).
5. Tziafetas, Geor., «Zur Anwendung der Theorie der stochastischen Prozessen in der Sozialwissenschaft und insbesondere in der Demometrie», *National Center for Social Research,* no 26-27 (1976).
6. Valaoras, V., *Urban-Rural Population Dynamics of Greece,* Ed. of the National Statistical Service of Greece (1974).