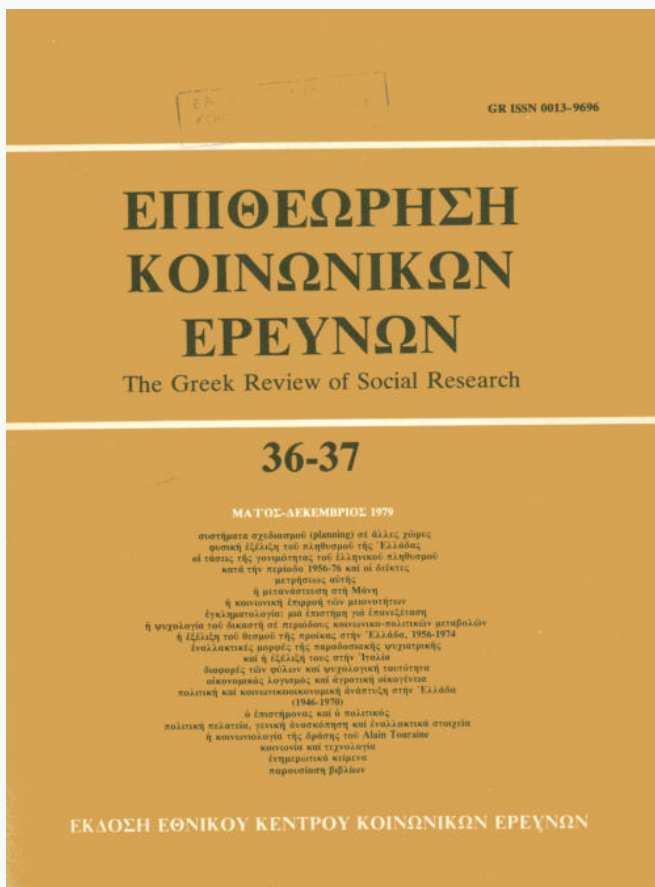


# The Greek Review of Social Research

Vol 36 (1979)

36-37



## Φυσική εξέλιξη του πληθυσμού της Ελλάδας: Μακροστοχαστική ανάλυση του φαινομένου

Γιώργος Ν. Τζιαφέτας

doi: [10.12681/grsr.454](https://doi.org/10.12681/grsr.454)

Copyright © 1979, Γιώργος Ν. Τζιαφέτας



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

### To cite this article:

Τζιαφέτας Γ. Ν. (1979). Φυσική εξέλιξη του πληθυσμού της Ελλάδας: Μακροστοχαστική ανάλυση του φαινομένου. *The Greek Review of Social Research*, 36, 242–247. <https://doi.org/10.12681/grsr.454>

# φυσική εξέλιξη του πληθυσμού της Ελλάδας

μακροστοχαστική ανάλυση  
του φαινομένου

του  
Γιώργου Ν. Τζιαφέτα  
Έπιμελητή του Ε.Μ.  
Πολυτεχνείου

## 1. εισαγωγικά

Οί προσπάθειες των κοινωνιολόγων και ειδικότερα των δημογράφων συγκεντρώνονταν μέχρι την περασμένη δεκαετία στην ανάλυση χρονοδιαγραμμάτων για τὰ κυριότερα στοιχεία τῆς φυσικῆς κινήσεως τοῦ πληθυσμοῦ προκειμένου νά μελετηθεῖ ἡ ἐξέλιξή του. Μὲ βάση τὰ στοιχεία αὐτά, ἦταν δυνατό νά ὑπολογιστοῦν ποσοστιαῖες κατανομές καὶ τὰ ὑπόλοιπα χαρακτηριστικά μεγέθη τοῦ πληθυσμοῦ. Βέβαια, ἡ μεθοδολογία τέτοιου εἶδους εἶναι ἄρκετά γνωστή, συνήθως εὐχρηστέρα στοὺς ὑπολογισμούς, ἀλλὰ μειονεκτεῖ σὲ ἕνα βασικὸ σημεῖο. Γιὰ μίαν οὐσιαστικὴ μελέτη ἀπαιτοῦνται στατιστικὰ στοιχεία, ποὺ εἶναι δύσκολο νά ἀποτιμηθοῦν. Αὐτὸ ἔχει σάν ἐπακόλουθο τὸ μεγάλο κόστος τῆς μελέτης, ποὺ γιὰ μίαν ἀναπτυσσόμενη χώρα εἶναι ἄρκετά δύσκολο νά ἀναληφθεῖ. Ἀκόμα, σὲ πολλές περιπτώσεις, ἡ λήψη ἐδικῶν στατιστικῶν στοιχείων εἶναι ἀδύνατη γιὰ πρακτικούς λόγους. Ἔτσι, γιὰ μίαν ἀνάλυση τοῦ φαινομένου οἱ ἐρευνητές εἶναι ὑποχρεωμένοι νά περιοριστοῦν σὲ μεθοδολογίες ποὺ στηρίζονται στὰ στοιχεία ποὺ διαθέτουν οἱ στατιστικὲς ὑπηρεσίες ἀπὸ τὶς ἀπογραφές κατὰ ὀρισμένα χρονικὰ διαστήματα.

Οἱ λόγοι ποὺ προαναφέρθηκαν ὑπῆρξαν κατ' ἀρχὴν ἀπαγορευτικοί καὶ γιὰ πολυπλοκότερες μεθοδολογίες, ὅπως εἶναι ἡ στοχαστικὴ ἀνάλυση ποὺ χρησιμοποιεῖται πλέον σὲ μεγάλη κλίμακα τὴν τελευταία δεκαετία.<sup>1</sup> Ἡ διεύρυνση, ὅμως, τῶν προτεινόμενων στοχαστικῶν μεθόδων καὶ κυρίως ἡ χρῆση τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν ἔλυσαν ἄρκετά προβλήματα, ὥστε ἡ ἐφαρμογὴ τῆς νέας μεθοδολογίας νά κρίνεται σὲ πολλὰ σημεία προσηγορότερη ἀπὸ τὶς κλασικὲς μεθόδους. Πέρα ἀπὸ τὶς δυνατότητες αὐτές, πρέπει νά τονιστεῖ, ἰδιαίτερα, ὅτι ἡ στοχαστικὴ ἀνάλυση παρέχει μορφές λύσεων στὸν ὑπάρχοντα προβληματισμὸ, ποὺ βρίσκονται πλησιέστερα στὴν πραγματικότητα. Γενικά, ἡ ὄλη θέση τοῦ προβλήματος, ὅπως ὑπεισέρχεται στὴ στοχαστικὴ ἀνάλυση, ἀντικατοπτρίζει κατὰ ἀρτιότερο τρόπο τὴ φυσικὴ διαδικασίαν.

Μὲ βάση ὅσα ἀναφέρθηκαν παραπάνω, ἡ ἐργασία αὐτὴ ἀποσκοπεῖ στὴ μελέτη τοῦ δημογραφικοῦ προβλήματος τῆς Ἑλλάδος καὶ ἰδιαίτερα στὸν προσδιορισμὸ τῆς ποσοστιαίας κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ καὶ τὶς προοπτικὲς τῆς ἐξελίξεως αὐτῆς μὲ τὴ βοήθεια μακρο-στοχαστικῶν μεθόδων.<sup>2</sup>

## 2. μεθοδολογία

Ἡ ἐπεξήγηση, ἡ περιγραφή καὶ ἡ πρόγνωση τῶν δημογραφικῶν φαινομένων παραμένει πάντα ὁ κύριος σκοπὸς τῶν ἐρευνῶν. Τὸ πρόβλημα ἀρχίζει

1. Boudon R., 1973.  
2. Tziafetas G., 1976.

μέ την έπεξήγηση και κυρίως μέ τό έρώτημα πώς μετασχηματίζονται οι παρατηρούμενες τιμές που άφορούν δημογραφικές μεταβλητές ποσότητες. Είναι γεγονός ότι πληθυσμιακά χαρακτηριστικά είναι πάντοτε δυνατόν νά προκύψουν άπό τή θεωρήση ένός στοχαστικού συστήματος μεταβλόν.<sup>3</sup> Κατ' αυτόν τόν τρόπο, οι παρατηρούμενες τιμές μπορεί νά θεωρηθούν σάν τιμές τυχαίων μεταβλητών, πού μεταβάλλονται χρονικά μέ βάση πιθανοθεωρητικούς νόμους. Έτσι, τό πρόβλημα μετατίθεται στόν προσδιορισμό τής στοχαστικής άνελιξέως, πού περιγράφει ίκανοποιητικά τό διερευνώμενο δημογραφικό φαινόμενο. Ξεκινώντας άπό τίς άπλούστερες μορφές στοχαστικών άνελιξέων καί έχοντας τίς παρατηρούμενες τιμές κατά κατηγορία ή κατά παρατηρούμενη κατάσταση, εξετάζουμε τήν έφαρμογή κατάλληλης μαρκοβιανής άλυσίδας. Βέβαια, πάντα υπάρχει τό έρώτημα κατά πόσον τά φαινόμενα διέπονται άπό τή μαρκοβιανή ιδιότητα.<sup>4</sup> Προσεγγιστικά, σέ πρώτο βήμα, λαμβάνουμε στατικές, πρώτης τάξεως, μαρκοβιανές άλυσίδες, άν και είναι δυνατόν τό σύστημα νά απαιτεί μη σταθερές πιθανότητες μεταφοράς μεταξύ τών θεωρούμενων καταστάσεων.

Στήν περίπτωση πού ήταν γνωστά μικροδεδομένα, δηλαδή ό αριθμός τών συσχείων του πληθυσμού πού διαφεύγουν άπό μία κατάσταση τής άλυσίδας και έρχονται σέ μία άλλη γειτονική ή μη, τότε όλες οι ύπόθεσεις πού έγιναν παραπάνω μπορεί νά έλεγχθούν συνολικά μέ τήν έφαρμογή γνωστών στατιστικών μεθόδων.<sup>5</sup> Τό πρόβλημα, όμως, είναι άρκετά πολυπλοκότερο. Δυστυχώς, τέτοιου είδους στατιστικά δεδομένα είναι δύσκολο νά ληφθούν άπό τή στατιστική ύπηρεσία, ιδίως στήν περίπτωση πού οι θεωρούμενες καταστάσεις τής άλυσίδας αντιπροσωπεύουν κοινωνικές ή δημογραφικές καταστάσεις. Έτσι, στήν εισαγόμενη νέα μεθοδολογία θά πρέπει νά στηριχθούμε άποκλειστικά σέ μακροδεδομένα, δηλαδή στίς ποσοστιαίες κατανομές συχνότητας του πληθυσμού πού δίνονται για κάθε θεωρούμενη χρονική στιγμή.

Μέ βάση τίς παραπάνω προϋποθέσεις, στίς εφαρμογές θεωρούμε σάν καταστάσεις  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) τής μαρκοβιανής άλυσίδας μεγάλα διαστήματα ηλικίας, για τά όποια μās δίνεται ή συχνότητα κατανομής του πληθυσμού  $Y_i(t)$  για κάθε χρονική στιγμή  $t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ). Συνήθως, τέτοιου είδους ύποδείγματα θεωρούνται ιεραρχικά ή κλειστά. Αντίθετα, στό ύπόδειγμα πού περιγράφουμε, θεωρούμε ότι οι άλλες πού παρατηρούνται στή συχνότητα κατανομής, προέρχονται άπό όλα τά στοιχεία τής φυσικής κινήσεως του πληθυσμού, δηλαδή θανάτους, γεννή-

σεις και μεταναστεύσεις. Έτσι, όπως θά έπεξηγηθεί παρακάτω, οι πιθανότητες μεταφοράς  $p_{ij}$  για  $j \neq i$  δέν είναι μηδενικές.

Έάν συμβολίσουμε μέ  $q_j(t)$  τή μη δεσμευμένη πιθανότητα, ώστε στοιχείο του πληθυσμού νά βρεθεί στήν κατάσταση  $i$  τή χρονική στιγμή  $t$ , τότε τό προτεινόμενο ύπόδειγμα έχει τή μορφή

$$\text{για } t = 1, 2, \dots, T \text{ και } j = 1, 2, \dots, r. \quad (2.1)$$

Τό βασικό πρόβλημα πού έχουμε στό ύπόδειγμα είναι ή έκτίμηση τών παραμέτρων πού υπεισέρχονται ύπό τή μορφή τής πιθανότητας μεταφοράς  $p_{ij}$ . Για τήν έπίλυση του προβλήματος, καταφεύγουμε στή μέθοδο τής μεγίστης πιθανοφάνειας, όποτε ύπολογίζουμε πρώτα τή συνάρτηση πιθανοφάνειας  $L$  και ύστερα τίς παραγώγους τής συναρτήσεως  $\log L$ . Τελικά, ή έκτιμήτρια του πίνακα μεταφοράς  $P = (p_{ij})$  έχει τή μορφή

$$\hat{P}^* = (X \sum_{t=1}^T X_t)^{-1} X \sum_{t=1}^T Y^* \quad (2.2)$$

όπου  $\Sigma$  είναι ό πίνακας συνδιασπορών τών συχνοτήτων  $Y_j(t)$ . Οι  $(r-1)$  ύποπίνακες  $\Sigma^{ij}$  έχουν σάν στοιχεία τίς ποσότητες

$$-[q_i(t)q_j(t)]/N(t)$$

$$[q_i(t)[1-q_i(t)]]/N(t), \quad N(t)Y_i(t) = n_i(t).$$

$Y^*$  είναι διάνυσμα στήλη μέ στοιχεία  $Y_j(t)$  για  $t = 1, 2, \dots, T$ .

$P^*$  είναι διάνυσμα στήλη μέ  $r-1$  ύποδιανύσματα και  $X$  είναι  $(T(r-1) \times r(r-1))$  διαγώνιος πίνακας, του όποιου οι ύποπίνακες  $X_i$  έχουν σάν στοιχεία τά παρατηρούμενα ποσοστά  $Y_j(t-1)$  για  $t = 1, 2, \dots, T$  και  $j = 1, 2, \dots, r$ .

$$[T(r-1) \times r(r-1)]$$

Πρέπει έδώ νά σημειώσουμε ότι ή έκτίμηση πού δόθηκε μέ τή σχέση (2.2) μπορεί νά χρησιμοποιηθεί μόνον όταν ό πίνακας  $\Sigma$  είναι γνωστός. Συνήθως, όμως, ό πίνακας συνδιασπορών είναι συνάρτηση τής άγνωστης πιθανότητας  $q_j(t)$ . Ό προσφορότερος τρόπος νά έκτιμήσουμε τόν πίνακα  $\Sigma$  είναι νά αντικαταστήσουμε τίς πιθανότητες  $q_j(t)$  μέ τίς παρατηρούμενες συχνότητες  $Y_j(t)$ , όποτε σέ πρώτη προσέγγιση λαμβάνουμε τήν έκτίμηση ( $\hat{p}_{ij}^*$ ). Μέ βάση τή σχέση (2.1), ύπολογίζουμε άναδρομικά τή νέα πιθανότητα  $\hat{q}_i^*(t)$ , πού οδηγεί στή νέα έκτίμηση  $\hat{p}_{ij}^*(2)$ . Η άναδρομική αυτή διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου προκύψει

3. Rogers A., 1975.

4. Ginsberg R., 1972.

5. Anderson T.W. and L.A. Goodman, 1957.

$$p_{ij}^c(n+1) = \hat{p}_{ij}^c(n) \quad (2.3)$$

Η μεθοδολογία μπορεί να επεκταθεί σε μερικά σημεία, αν ληφθούν υπ' όψη οι εκ των προτέρων πληροφορίες που άφορούν τις πιθανότητες μεταφοράς  $p_{ij}$ . Υποτίθεται, π.χ., ότι οι πληροφορίες αυτές συγκεντρώνονται σε μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, που δίνεται εκ των προτέρων και που ακολουθεί την πολυδιάστατη Β-κατανομή. Έχοντας λοιπόν υπ' όψη τη δειγματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, όπως υπολογίστηκε στη συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας, και κάνοντας χρήση του γνωστού θεωρήματος του Bayes, λαμβάνουμε την εκ των υστέρων συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σαν συνάρτηση των πιθανοτήτων μεταφοράς. Παραγωγίζοντας ως προς  $p_{ij}$  τη συνάρτηση αυτή, βρίσκουμε τη νέα εκτίμηση κατά Bayes με την ακόλουθη μορφή

$$\hat{p}^* = (X' \sum_1^r X + \sum_0^1 J)^{-1} (X' \sum_1^r Y^* + \sum_0^1 L) \quad (2.4)$$

όπου J είναι  $[r(r-1) \times r(r-1)]$  διαγώνιος πίνακας με στοιχεία

$$(a_{ij} - r) / (a_{ij} + 1), i = 1, 2, \dots, r$$

( $a_{ij}$  είναι οι εκ των προτέρων γνωστοί παράμετροι της Β-κατανομής), L είναι  $(r(r-1) \times 1)$  διάνυσμα στήλη με στοιχεία

$$(a_{ij} - 1) / (a_{ij} + 1), i = 1, 2, \dots, r \quad \text{και} \quad j = 1, 2, \dots, r-1$$

Στήν όλη μαθηματική επεξεργασία μέχρι τώρα, δεν λάβαμε υπ' όψη τις ιδιότητες που πρέπει να έχουν οι πιθανότητες μεταφοράς  $p_{ij}$ . Δηλαδή πρέπει

$$\sum_{j=1}^r p_{ij} = 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (2.5)$$

Οι προϋποθέσεις αυτές εισάγουν βασικές δυσκολίες στον προβληματισμό. Μπορεί όμως να βρεθεί νέα, υπό τους περιορισμούς (2.5), εκτίμηση των πιθανοτήτων μεταφοράς με βάση το γνωστό θεώρημα περιστολής και το δυαδικό θεώρημα του μη γραμμικού προγραμματισμού. Η εκτίμηση που λαμβάνεται κατ' αυτό τον τρόπο για τον πίνακα των πιθανοτήτων μεταφοράς καλείται ιδιαίτερα περιορισμένη.

### 3. Αποτελέσματα της ανάλυσεως

Σε πρόσφατη έκδοση της Έθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας,<sup>6</sup> γίνεται πρόβλεψη της πληθυσμιακής

κατανομής στην Ελλάδα κατά μεγάλες ομάδες ηλικιών με βάση τις παρατηρούμενες τιμές στη χρονική περίοδο 1950-1975. Στην άναφερόμενη εργασία χρησιμοποιήθηκε η γνωστή μεθοδολογία στη δημογραφία με ανάλυση των στοιχείων της φυσικής κινήσεως του πληθυσμού. Ξεχάριση αποτέλεσε η μετανάστευση για την οποία δεν υπήρχαν αρκετά στοιχεία.

Χρησιμοποιώντας τις παρατηρούμενες τιμές για την πληθυσμιακή κατανομή από την εργασία που προαναφέρθηκε, υποθέτωμε ότι τα δεδομένα μετασχηματίζονται με βάση μία στατική μαρκοβιανή άλυσίδα πρώτης τάξεως στην οποία υπάρχουν τέσσερες καταστάσεις, όσες δηλαδή οι ομάδες ηλικιών που θεωρήθηκαν.

Κάθε στοιχείο του πληθυσμού έχει τη δυνατότητα να βρεθεί σε μία από τις θεωρούμενες ομάδες ηλικιών και μπορεί να μεταπηδήσει σε μία άλλη κατά τη διάρκεια των χρονικών στιγμών  $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , που αντιστοιχούν στα έτη λήψεως της πληθυσμιακής κατανομής, δηλαδή ανά πενταετία στο χρονικό διάστημα 1950-1975.

Είναι κατανοητό ότι η άλυσίδα έχει ιεραρχικό χαρακτήρα, δηλαδή ένα στοιχείο του πληθυσμού μπορεί να μεταπηδήσει σε μία χρονική περίοδο από μία μικρότερη ηλικία, ουσιαστικά μία μικρότερη κατά άριθμηση κατάσταση, σε μία μεγαλύτερη. Στις εφαρμογές που θεωρούμε, μπορεί ένα στοιχείο του πληθυσμού να εξέλθει από το σύστημα στην περίπτωση θανάτου-μεταναστεύσεως ή να εισέλθει στην περίπτωση γεννήσεως-μεταναστεύσεως. Με άλλα λόγια, θεωρούμε το σύστημα κλειστό με την ευρύτερη έννοια, ότι συμπεριλαμβάνει τις καταστάσεις γέννηση-θάνατος-μεταναστευση και ότι ένα στοιχείο που άποκόπτεται από μία κατάσταση μπορεί να άντικατασταθεί από ένα νέο που εισέρχεται σε οποιαδήποτε κατάσταση μικρότερη ή πολύ μεγαλύτερη.

Ύστερα από τις προϋποθέσεις αυτές, δίνονται στον πίνακα (3.1)<sup>7</sup> οι παρατηρούμενες και οι ευρεθείσες τιμές για την πληθυσμιακή κατανομή, καθώς και οι προβλεπόμενες για τις χρονικές στιγμές  $t = 7, 8, 9, 10$ , δηλαδή για τα έτη 1980, 1985, 1990, 1995. Οι άπολογισμοί έγιναν με τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, όπου ή εκτιμήτρια για τον πίνακα των πιθανοτήτων μεταφοράς άπολογίστηκε με δύο διαδοχικές έπαναλήψεις.

Είναι φανερό, άπό τη μεθοδολογία που δόθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ότι ή ανάλυση με τις μαρκοβιανές άλυσίδες δίνει μία πρόγνωση στην πληθυσμιακή εξέλιξη με βάση τις προϋποθέσεις

7. Οι άπολογισμοί έγιναν με τον Ηλεκτρονικό Άπολογιστή του Άπουργείου Γεωργίας.

6. V. Valaoras, 1974.

πού υπήρχαν ή δημιουργήθηκαν κατά τη θεωρούμενη χρονική διάρκεια. Δηλαδή, με άλλα λόγια, οι έξι ηλικιακές τάξεις είναι άπορροια της όλης πολιτικής που ασκήθηκε πάνω στα στοιχεία που καθορίζουν τη φυσική εξέλιξη του πληθυσμού.

Πρέπει να τονίσουμε σ' αυτό τό σημείο, ότι δεν είναι δυνατόν να γίνει έλεγχος των προγνώσεων. Είναι, όμως, δυνατόν να ελεγχθούν όλες οι υποθέσεις που τέθηκαν παραπάνω. Δηλαδή κατά πόσον ή μεθοδολογία έδωσε άποτελέσματα που προσεγγίζουν ίκανοποιητικά τις παρατηρούμενες τιμές. Έχοντας λοιπόν τις παρατηρούμενες τιμές  $Y(t)$  και τις εκτιμηθείσες  $\hat{Y}(t)$ , μπορούμε να κάνουμε χρήση του έλέγχου στατιστικών υποθέσεων κατά Pearson με βάση την τετραγωνική μορφή

$$\chi^2_{(r-1)T} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^r N(t) [Y_i(t) - \hat{Y}_i(t)]^2 / \hat{Y}_i(t) \quad (3.1)$$

ή όποια άκολουθεί την  $\chi^2$ -κατανομή με  $(r-1)T$  βαθμούς έλευθερίας. Όπως φαίνεται από τον πίνακα (3.1), ή τιμή που βρέθηκε για τη συνάρτηση  $\chi^2$  είναι πολύ μικρότερη από τις αντίστοιχες τιμές της  $\chi^2$ -κατανομής για 18 βαθμούς έλευθερίας. Έτσι, μπορεί να γίνει άνεπιφύλακτα δεκτική ή υπόθεση ότι οι παρατηρούμενες ποσοστιαίες συχνότητες άκολουθούν την ίδια κατανομή με τις εκτιμηθείσες.

Σε μία δεύτερη εφαρμογή, θεωρούμε πάλι τις παρατηρούμενες τιμές για την κατανομή του άστικού

πληθυσμού στην Ελλάδα από την έκδοση της ΕΣΥΕ που προαναφέρθηκε. Υποθέτουμε, πάλι, ότι τα δεδομένα μετασχηματίζονται με βάση μία στατική μαρκοβιανή άλυσίδα πρώτης τάξεως, στην όποια υπάρχουν τέσσερες καταστάσεις που αντιστοιχούν σε τέσσερες μεγάλες ηλικιακές ομάδες (πίνακας 3.2). Παρόμοια, υποτίθεται ότι κάθε στοιχείο του πληθυσμού είναι δυνατόν να βρεθεί σε μία από τις θεωρούμενες καταστάσεις και μπορεί να μεταπηδήσει σε μία άλλη κατά τη διάρκεια των χρονικών στιγμών  $t=1, 2, 3, 4, 5, 6$ , που αντιστοιχούν στα έτη λήψεως της πληθυσμιακής κατανομής, δηλαδή ανά πενταετία στο χρονικό διάστημα 1950-1975. Τέλος, κάνουμε την ίδια υπόθεση, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, για την ιεραρχικότητα και τό κλειστό του συστήματος.

Όστερα από τις υποθέσεις αυτές, δίνουμε στον πίνακα (3.2) τις τιμές για την πληθυσμιακή κατανομή του άστικού πληθυσμού με βάση την εκτίμηση κατά Bayes, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Οι εκ των προτέρων πιθανότητες μεταφοράς (πίνακας 3.3) έχουν υπολογιστεί σε σχέση με τις πραγματικές δυνατότητες για τη μεταπήδηση ενός στοιχείου του πληθυσμού από μία κατάσταση σε άλλη. Έτσι, θεωρήσαμε, π.χ., ότι ή πιθανότητα για να παραμείνει ένα στοιχείο του πληθυσμού στην πρώτη ομάδα ηλικίας (0-14 έτη) κατά τη διάρκεια μιας πενταετίας είναι ίση περίπου με 2/3. Με τό ίδιο σκεπτικό υπολόγισαμε τά άλλα διαγώνια στοιχεία του πίνακα και τις πιθανότητες μεταπήδησως  $p_{12}, p_{23}, p_{34}$ . Για τον υπολογισμό της εκ των προτέρων πιθανότητας  $p_{41}$ , θεωρήσαμε ότι ή πιθανότητα

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1. Πληθυσμιακή κατανομή της Ελλάδας κατά μεγάλες ομάδες ηλικιών

t	r	1 (0-14 έτη)		2 (15-44 έτη)		3 (45-64 έτη)		4 (65 + έτη)		Μέγεθος δείγματος (100.000)
		A	B	A	B	A	B	A	B	
1(1950)		0,2856		0,4759		0,1736		0,0649		75.810
2(1955)		0,2636	0,2650	0,4747	0,4687	0,1904	0,1897	0,0713	0,0764	79.570
3(1960)		0,2642	0,2647	0,4496	0,4473	0,2052	0,2037	0,0810	0,0839	83.240
4(1965)		0,2518	0,2516	0,4442	0,4375	0,2094	0,2163	0,0946	0,0940	85.850
5(1970)		0,2483	0,2486	0,4236	0,4240	0,2161	0,2192	0,1120	0,1085	87.620
6(1975)		0,2387	0,2375	0,3968	0,4116	0,2321	0,2244	0,1324	0,1263	88.100
7(1980)		0,2284	0,2232	0,3925	0,3913	0,2349	0,2374	0,1442	0,1478	
8(1985)		0,2177	0,2204	0,4002	0,3746	0,2395	0,2413	0,1426	0,1636	
9(1990)		0,2180	0,2113	0,4125	0,3648	0,2263	0,2440	0,1432	0,1796	
10(1995)		0,2240	0,2061	0,4097	0,3521	0,2128	0,2456	0,1535	0,1958	

A: Παρατηρούμενες τιμές και πρόγνωση κατά V. Valaoras, 1974.  
 B: Εκτιμώμενες τιμές και πρόγνωση κατά ή μέθοδο μεγιστής πιθανοφάνειας.  
 Άθροισμα τετρ. σφάλματος 0,000511658  
 Μέσον τετρ. σφάλμα 0,00025583  
 Τιμή  $\chi^2$  0,182558029

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2. Κατανομή τοῦ ἀστικού πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος κατὰ μεγάλες ὁμάδες ἡλικιῶν

r t	1 (0-14 ἔτη)		2 (15-44 ἔτη)		3 (45-64 ἔτη)		4 (65+ ἔτη)		Μέγεθος δειγματος
	A	B	A	B	A	B	A	B	
1(1950)	0,2292		0,5306		0,1832		0,0570		27.548
2(1955)	0,2158	0,2108	0,5221	0,4933	0,1990	0,2325	0,0631	0,0634	31.223
3(1960)	0,2221	0,2072	0,4926	0,4841	0,2126	0,2445	0,0727	0,0640	35.280
4(1965)	0,2230	0,2171	0,4800	0,4649	0,2128	0,2533	0,0848	0,0647	39.887
5(1970)	0,2284	0,2250	0,4630	0,4565	0,2126	0,2529	0,0960	0,0655	45.611
6(1975)	0,2289	0,2356	0,4405	0,4461	0,2218	0,2519	0,1088	0,0663	51.032
7(1980)	0,2266	0,2442	0,4231	0,4306	0,2292	0,2579	0,1215	0,0672	
8(1995)	0,2210	0,2267	0,4197	0,4256	0,2351	0,2836	0,1242	0,0641	
9(1990)	0,2196	0,2149	0,4235	0,4174	0,2269	0,3031	0,1300	0,0654	
10(1995)	0,2156	0,2087	0,4237	0,4087	0,2257	0,3182	0,1450	0,0644	

A: Παρατηρούμενες τιμές καί πρόγνωση κατὰ V. Valaoras, 1974.

B: Ἐκτιμώμενες τιμές καί πρόγνωση κατὰ τή μέθοδο Bayes.

\* Ἀθροισμα τετρ. σφάλματος 0,011049389

Μέσων τετρ. σφάλμα 0,000552469

Τιμή  $\chi^2$  3,494544134

νότητα νά διαφυγῆ ἀπό τήν τέταρτη ὁμάδα ἡλικίας ἓνα στοιχείο τοῦ πληθυσμοῦ λόγω θανάτου ἢ μεταναστεύσεως καί νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἓνα νέο στήν πρώτη ὁμάδα λόγω γεννήσεως ἢ μεταναστεύσεως σέ μία πενταετία, εἶναι περίπου ἴση μέ 1/3, δηλαδή ἴση μέ τήν πιθανότητα διαφυγῆς ἀπό τήν τέταρτη ὁμάδα. Τέλος, γιά τίς πιθανότητες  $P_{13}$ ,  $P_{14}$ ,  $P_{21}$ ,  $P_{24}$ ,  $P_{31}$ ,  $P_{32}$ ,  $P_{42}$ ,  $P_{43}$ , κάναμε τήν ὑπόθεση ὅτι εἶναι σταθερές καί ἴσες πρὸς 0,05 καί ἀντιπροσωπεύουν τήν

πιθανότητα, ὥστε ἓνα στοιχείο τοῦ πληθυσμοῦ νά διαφυγῆ ἀπό μία ὁμάδα ἡλικίας λόγω μεταναστεύσεως ἢ θανάτου καί νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἓνα ἄλλο λόγω μεταναστεύσεως ἢ γεννήσεως, ὅταν τό στοιχείο καταφυγεῖ στήν πρώτη ὁμάδα ἡλικίας.

Μέ βάση τίς παραπάνω ὑποθέσεις, ὅσον ἀφορᾶ τίς ἐκ τῶν προτέρων πιθανότητες μεταφορᾶς, ὑπολογίσαμε τόν ἐκ τῶν ὑστέρων πίνακα τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς μέ τή γνωστή ἀναδρομική μέθοδο, ὅπως ἀναφέρθηκε στήν προηγούμενη παράγραφο. Στόν πίνακα (3.3) δίνουμε τήν πρώτη, τρίτη καί ἕκτη ἐπαναληπτική λύση. Ἀπό τόν ἴδιο πίνακα μπορούμε νά δοῦμε, ἀμέσως, ὅτι τό ἐπαναληπτικό σφάλμα, πού ὑπολογίστηκε σάν ἀπόλυτή ἀπόκλιση τῆς ἐκτιμῆσεως στή νέα λύση ἀπό αὐτή τῆς προηγούμενης, τείνει πρὸς τό μηδέν.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3. Οἱ ἐκ τῶν προτέρων πιθανότητες μεταφορᾶς καί ἡ ἐκτίμηση κατὰ Bayes μέ τήν ἐπαναληπτική διαδικασία

	Πίνακας τῶν πιθανοτήτων μεταφορᾶς				Ἐπ. σφάλμα
Ἐκ τῶν προτέρων πιθανότητες μεταφορᾶς	0,6000	0,3000	0,0500	0,0500	
1η ἐπαναληπτική λύση	0,0500	0,7500	0,1500	0,0500	0,304503
3η ἐπαναληπτική λύση	0,0500	0,0500	0,7000	0,2000	0,099354
6η ἐπαναληπτική λύση	0,3000	0,0500	0,0500	0,7000	0,026040
1η ἐπαναληπτική λύση	0,6188	0,2983	0,0384	0,0446	0,304503
	0,0441	0,7795	0,1266	0,0498	
	0,0534	0,0521	0,8289	0,0656	
	0,5408	0,0768	0,0748	0,3076	
3η ἐπαναληπτική λύση	0,6139	0,3000	0,0385	0,0477	0,099354
	0,0424	0,7746	0,1254	0,0575	
	0,0528	0,0524	0,8322	0,0625	
	0,6363	0,0883	0,0847	0,1908	
6η ἐπαναληπτική λύση	0,6116	0,3008	0,0385	0,0491	0,026040
	0,0417	0,7717	0,1249	0,0617	
	0,0524	0,0524	0,8311	0,0641	
	0,6823	0,0942	0,0895	0,1340	

Ἐχοντας λοιπόν τίς ἐκτιμῆσεις γιά τήν πληθυσμιακή κατανομή στό χρονικό διάστημα 1950-1975 μέ βάση τήν ἕκτη ἐπαναληπτική λύση, ὑπολογίζουμε παρατέρα τίς τιμές γιά τήν πληθυσμιακή κατανομή γιά τό χρονικό διάστημα 1980-1995 ἀνά πενταετία (πίνακας 3.2). Ὅπως φαίνεται ἀπό τόν πίνακα προγνώσεων (3.2), γιά τήν πρώτη καί δεύτερη ὁμάδα ἡλικίας δέν ἀναμένονται οὐσιώδεις ἀλλαγές στή συχνότητα κατανομῆς γιά τό χρονικό διάστημα τῆς προγνώσεως. Ἀντίθετα, ἡ τρίτη ὁμάδα ἡλικίας, ὅπως ὑπολογίσαμε μέ τή μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, ἀναμένεται νά ἔχει πολύ μεγαλύτερη συμμετοχή ἀπ' ὅ,τι εἶχε κατὰ τή χρονική περίοδο 1950-1975 καί ἀπ' ὅ,τι προβλέπεται κατὰ τίς ἐκτιμῆσεις τῆς ΕΣΥΕ στήν ἐργασία πού προαναφέρθηκε. Ἡ διαφορά στό σημείο αὐτό προέρχεται κυρίως ἀπό τή μεθοδολογία πού ἐφαρμόσαμε. Ὅπως προαναφέραμε, ἡ θεωρία τῶν μαρκοβιανῶν ἄλυσιδῶν δίνει προγνώσεις μέ βάση τήν ὅλη πληθυσμιακή πο-

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4. Πληθυσμιακή κατανομή του αγροτικού πληθυσμού της Ελλάδας κατά μεγάλες ομάδες ηλικιών

t	r	1 (0-14 έτη)			2 (15-44 έτη)			3 (45-64 έτη)			4 (65 + έτη)			Μέγεθος δείγματος (100.000)		
		A	B	Γ	A	B	Γ	A	B	Γ	A	B	Γ			
1(1950)	0,3177				0,4448				0,1681				0,694			48.262
2(1955)	0,2945	0,2953	0,2709		0,4440	0,4322	0,4400		0,1849	0,1882	0,2164		0,0766	0,0842	0,0726	48.356
3(1960)	0,2951	0,2930	0,2622		0,4180	0,4131	0,4342		0,1988	0,2010	0,2300		0,0871	0,0928	0,0735	47.964
4(1965)	0,2768	0,2773	0,2693		0,4132	0,4034	0,4166		0,2064	0,2146	0,2399		0,1036	0,1046	0,0742	45.963
5(1970)	0,2700	0,2729	0,2691		0,3809	0,3866	0,4095		0,2199	0,2,186	0,2455		0,1292	0,1217	0,0758	42.014
6(1975)	0,2522	0,2527	0,2814		0,3366	0,3685	0,3862		0,2462	0,2302	0,2544		0,1650	0,1485	0,0791	37.075
7(1980)	0,2316	0,2244	0,2938		0,3488	0,3366	0,3524		0,2430	0,2523	0,2728		0,1766	0,1866	0,0809	
8(1985)	0,2129	0,2221	0,2652		0,3711	0,3140	0,3701		0,2458	0,2548	0,2911		0,1698	0,2088	0,0735	
9(1990)	0,2157	0,2083	0,2443		0,3962	0,3033	0,3753		0,2254	0,2568	0,3069		0,1627	0,2312	0,0749	
10(1995)	0,2366	0,2007	0,2334		0,4036	0,2880	0,3741		0,1937	0,2571	0,3200		0,1661	0,2537	0,0737	

A: Παρατηρούμενες τιμές και πρόγνωση κατά V. Valaoras, 1974.

B: Παρατηρούμενες τιμές με τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας.

Γ: Παρατηρούμενες τιμές με τη μέθοδο Bayes.

\*Άθροισμα τετρ. σφάλματος (μέθοδος μεγ. πιθαν.) 0.002077214 (μέθοδος Bayes) 0.021381157

Μέσον τετραγωνικών σφάλμα (μέθοδος μεγ. πιθαν.) 0.00103861 (μέγεθος Bayes) 0.001069058

Τμήμα  $\chi^2$  (μέγεθος μεγ. πιθαν.) 0.333839401 (μέθοδος Bayes) 7.374328809

λιτική που άσκηθηκε στο διερευνώμενο χρονικό διάστημα, χωρίς να είναι δυνατόν να γίνουν υποθέσεις για έναλλακτική μελλοντική συμπεριφορά των ατόμων του πληθυσμού.

Σε μία τελευταία εφαρμογή, θεωρούμε τις παρατηρούμενες τιμές για την κατανομή του αγροτικού πληθυσμού στην Ελλάδα από την ίδια έκδοση της ΕΣΥΕ. Υποθέτουμε, πάλι, ότι τα δεδομένα μετασχηματίζονται με βάση μία στατική μαρκοβιανή άλυσίδα πρώτης τάξεως με τέσσερες καταστάσεις, όπως ακριβώς στον αστικό πληθυσμό. Στόν πίνακα (3.4) δίνουμε τις τιμές για την πληθυσμιακή κατανομή του αγροτικού πληθυσμού με τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας και με τη μέθοδο Bayes. Στόν υπολογισμό με τη δεύτερη μέθοδο, θεωρήσαμε ότι ο πίνακας για τις εκ των προτέρων πιθανότητες μεταφοράς είναι ο ίδιος, όπως ακριβώς στον αστικό πληθυσμό. Επίσης, για τον υπολογισμό της εκτιμήσεως κατά Bayes, λάβαμε την έκτη επαναληπτική λύση, ενώ κατά τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας τη δεύτερη επαναληπτική λύση.

Με τον προσδιορισμό της εκτιμήσεως των πιθανοτήτων μεταφοράς κατά Bayes, προκύπτει βασική διαφοροποίηση της θεωρούμενης μαρκοβιανής α-

λυσίδας. Ένώ κατά τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας προκύπτουν απορροφητικές καταστάσεις, δεν συμβαίνει τό ίδιο στη μέθοδο Bayes, όπου η εκτίμηση των πιθανοτήτων μεταφοράς οδηγεί στη δημιουργία άλλης άλυσίδας. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τις όριακές συχότητες μετά από άπειρο θεωρητικά χρόνο.

#### BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Boudon, R., *Mathematical Structures of Social Mobility*, Elsevier (1973).
2. Ginsberg, R., «Critique of Probabilistic Models: Application of the Semi-Marcov Model to Migration», *Journal of Mathematical Sociology* 2,63-82 (1972).
3. Lee, T.C., G.G. Judge and A. Zellner, *Estimating the Parameters of the Marcov Probability Models from Aggregate Time Series Data*, North-Holland (1970).
4. Rogers, A., *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, J. Wiley (1975).
5. Tziafetas, Geor., «Zur Anwendung der Theorie der stochastischen Prozessen in der Sozialwissenschaft und insbesondere in der Demometrie», *National Center for Social Research*, no 26-27 (1976).
6. Valaoras, V., *Urban-Rural Population Dynamics of Greece*, Ed. of the National Statistical Service of Greece (1974).