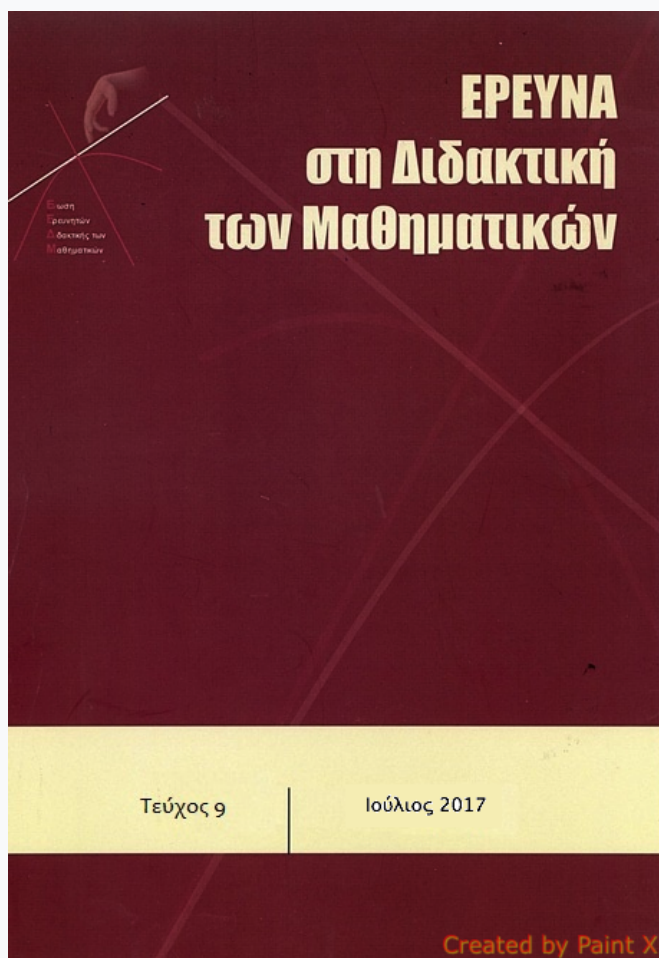


## Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 9 (2017)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



### ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έφη Παπαριστοδήμου (Efi Paparistodimou), Μαρία Μελετίου - Μαυροθέρη (Maria Meletiou- Mavrotheri), Ana Serrado Bayes

doi: [10.12681/enedim.14179](https://doi.org/10.12681/enedim.14179)

Copyright © 2017, ΕΦΗ ΠΑΠΑΡΙΣΤΟΔΗΜΟΥ, ΜΑΡΙΑ ΜΕΛΕΤΙΟΥ- ΜΑΥΡΟΘΕΣΗ, ANNA SERRADO BAYES



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Παπαριστοδήμου (Efi Paparistodimou) Έ., Μελετίου - Μαυροθέρη (Maria Meletiou- Mavrotheri) Μ., & Serrado Bayes, Α. (2017). ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (9), 27–42. <https://doi.org/10.12681/enedim.14179>

## ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έφη Παπαριστοδήμου<sup>1</sup>, Μαρία Μελετίου-Μαυροθέρη<sup>2</sup> και Anna Serrado Bayes<sup>3</sup>

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου<sup>1</sup>, Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου<sup>2</sup>, La Salle-Buen  
Consejo, Spain<sup>3</sup>

e.paparistodemou@cytanet.com.cy<sup>1</sup>, m.mavrotheris@euc.ac.cy<sup>2</sup>, ana.serrado@gm.uca.es<sup>3</sup>

*Περίληψη.* Η συμβολή της μοντελοποίησης μέσω της αξιοποίησης δυναμικών στατιστικών πακέτων για την καλύτερη κατανόηση των στατιστικών εννοιών και την εκτίμηση της πρακτικής τους αξίας κρίνεται ως ιδιαίτερα σημαντική στη σύγχρονη βιβλιογραφία (π.χ., Gil & Ben-Zvi, 2011). Η εργασία εστιάζει στο πώς οι εκπαιδευτικοί ως μεταπτυχιακοί φοιτητές<sup>1</sup> μοντελοποιούν προβλήματα στατιστικού συλλογισμού και παρουσιάζει τα αποτελέσματα έρευνας, η οποία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο μεταπτυχιακού μαθήματος ποσοτικών προσεγγίσεων απευθυνόμενου σε υποψήφιους και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς. Τα ευρήματα της έρευνας καταδεικνύουν ότι η άτυπη προσέγγιση της στατιστικής συμπερασματολογίας που υιοθετήθηκε στο μάθημα, η οποία επικεντρώθηκε στην μοντελοποίηση και προσομοίωση μέσω της χρήσης του λογισμικού δυναμικής στατιστικής TinkerPlots2®, συνέβαλε στην ανάπτυξη τόσο της στατιστικής συλλογιστικής των φοιτητών, όσο και του βαθμού εκτίμησης της πρακτικής αξίας της μοντελοποίησης στη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Η δυνατότητα που προσφέρει το τεχνολογικό εργαλείο για την κατασκευή μοντέλων και στη συνέχεια την προσομοίωσή τους με σκοπό την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων, βοήθησε τους φοιτητές-εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν τη σχέση του μέρους και του όλου στα δεδομένα τους, την επίδραση του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών και τη σύνδεση της θεωρητικής με την εμπειρική πιθανότητα.

**Λέξεις-κλειδιά:** Μοντελοποίηση, Δυναμικά Στατιστικά Εργαλεία, Επαγωγική Στατιστική

*Abstract.* The transition from descriptive to inferential statistics is a known area of difficulties for students. This article shares the experiences from a teaching experiment in a graduate-level quantitative research methods course, which adopted a non-conventional approach to teaching statistics that put models and modelling at the core of the curriculum. Findings indicate that the informal approach to statistical inference adopted in the course, which focused on modelling and simulation using the dynamic statistics software Tinkerplots2 as an investigation tool, promoted powerful ways of thinking statistically, while at the same time also developing students' appreciation for the practical value of statistics. The affordances offered by the technological tool for building data models and for experimenting with these models to make sense of the situation at hand, were instrumental in supporting student understanding of both informal and formal inferential statistics.

**Keywords:** Modelling, Dynamic Statistics Software, Model Eliciting Activities, Inferential Statistics, Informal Statistical Inference

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εκπαιδευτική έρευνα αποτελεί μια συστηματική διαδικασία συλλογής και ανάλυσης δεδομένων με σκοπό την κατανόηση φαινομένων και την επίλυση προβλημάτων εκπαιδευτικού χαρακτήρα. Επομένως, ένα μεταπτυχιακό μάθημα ποσοτικών προσεγγίσεων έρευνας που απευθύνεται σε υποψήφιους ή/και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς δεν πρέπει απλά να αποσκοπεί στην παροχή γνώσεων και δεξιοτήτων που απαιτούνται για τη διεξαγωγή ποσοτικής φύσης έρευνας. Αντίθετα, θα πρέπει να προσφέρει ευκαιρίες εξοικείωσης των εκπαιδευτικών με την πολυπλοκότητα της πειραματικής ερευνητικής μεθοδολογίας, με στόχο να συμβάλλει στην ανάπτυξη της κουλτούρας «του εκπαιδευτικού ως ερευνητή»· το οποίο δε φαίνεται να ισχύει στο παρόντικό πλαίσιο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, οι φοιτητές παιδαγωγικών τμημάτων που παρακολουθούν μαθήματα ποσοτικών προσεγγίσεων έρευνας τείνουν να έχουν αρνητικές στάσεις έναντι στο μάθημα λόγω ελλιπούς θεωρητικού υπόβαθρου στη στατιστική, αλλά και δυσκολιών διασύνδεσης της θεωρίας με την πράξη (Murtonen & Lehtinen, 2003).

Εξετάζοντας τις δυσκολίες που παρατηρούνται στη διδασκαλία και μάθηση των ποσοτικών προσεγγίσεων έρευνας, θα πρέπει να γίνει μία διάκριση μεταξύ της περιγραφικής και της επαγωγικής στατιστικής. Η περιγραφική στατιστική εστιάζει στην συλλογή, οργάνωση, επεξεργασία και παρουσίαση των δεδομένων. Κάνει πιο συμπαγή και περιληπτική την υπάρχουσα πληροφορία χρησιμοποιώντας στατιστικά μέτρα, πίνακες και γραφήματα. Αντίθετα, η επαγωγική στατιστική (στατιστική συμπερασματολογία) είναι η επιστημονική προσέγγιση που έχει ως στόχο να καταλήξει σε συμπεράσματα που εκτείνονται πέρα από τα άμεσα δεδομένα. Αποσκοπεί στην εξαγωγή (προσεγγιστικών) συμπερασμάτων για το σύνολο μιας ομάδας (πληθυσμός) με βάση τα δεδομένα ενός υποσυνόλου της υπό μελέτη ομάδας (δείγμα). Η επαγωγική στατιστική αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο των σύγχρονων στατιστικών εννοιών και μεθόδων λόγω του ότι παρέχει εργαλεία που επιτρέπουν την εξαγωγή χρήσιμων και γενικεύσιμων συμπερασμάτων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας, βελτιώνοντας έτσι τη διαδικασία λήψης αποφάσεων σε ένα εύρος πραγματικών καταστάσεων. Εντούτοις, παρά τη σημαντικότητα της, φαίνεται να αποτελεί έναν τομέα που προκαλεί ιδιαίτερη δυσκολία στους φοιτητές (π.χ., Garfield & Ahlgren, 1998· Rubin, Hammerman, & Konold, 2006), σε αντίθεση με τις βασικές τεχνικές ανάλυσης δεδομένων της περιγραφικής στατιστικής που μπορούν να γίνουν πιο εύκολα κατανοητές από τους περισσότερους φοιτητές.

Αποβλέποντας στη δημιουργία μιας γέφυρας που να διευκολύνει τη μετάβαση από την περιγραφική στην επαγωγική στατιστική, τα τελευταία χρόνια έχουν αρχίσει να εξετάζονται οι τρόποι με τους οποίους η μοντελοποίηση μπορεί να συμβάλλει στην ανάπτυξη τόσο της άτυπης όσο και της τυπικής στατιστικής συλλογιστικής των φοιτητών. Η μοντελοποίηση ως μαθηματική πρακτική είναι πρωταρχικής σημασίας για την κατανόηση της βασικής λογικής της στατιστικής συμπερασματολογίας. Ορισμένες από τις ευκαιρίες που μπορούν να παρέχουν τα μοντέλα και η μοντελοποίηση έχουν ήδη διερευνηθεί τόσο σε μαθητές όσο και φοιτητές, συμπεριλαμβανομένων των εξής: (α) παροχή των βάσεων για εισαγωγή αναφορικά με την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης και τον έλεγχο υποθέσεων (Garfield & Ben-

Zvi, 2008), (β) συμβολή αναφορικά με την ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης (Wild & Pfannkuch, 1999), (γ) συμβολή αναφορικά με την καλύτερη κατανόηση εννοιών πιθανότητας (Batanero κ.ά., 2005), (δ) παροχή της δυνατότητας πρόσβασης σε δεδομένα που αφορούν τον πραγματικό κόσμο (Graham, 2006), (ε) χρήση τεχνολογικών εργαλείων αναφορικά με την ενσωμάτωση προσεγγίσεων διερευνητικής ανάλυσης δεδομένων και πιθανολογικών μοντέλων μέσω προσομοιώσεων και οπτικοποίησης (Eichler & Vogel, 2014) και (στ) ανάπτυξη νέων θεωριών μάθησης και υποθετικών τροχιών μάθησης (hypothetical learning trajectories) για την ενημέρωση των μελλοντικών προτύπων και των προγραμμάτων σπουδών στα μαθηματικά και την επιστήμη (Lee, 2013).

Έχοντας υπόψη τα πιο πάνω και υιοθετώντας μία παιδαγωγική προσέγγιση η οποία στοχεύει στη συνεχή αναβάθμιση της διδακτικής διαδικασίας (Serradó κ.ά., 2017), η παρούσα μελέτη αποσκοπούσε στη βελτίωση του σχεδιασμού ενός μεταπτυχιακού μαθήματος ποσοτικών μεθόδων έρευνας απευθυνόμενου σε εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, η μελέτη υιοθέτησε μια μη συμβατική παιδαγωγική προσέγγιση, η οποία βασίζεται στη μοντελοποίηση-προσομοίωση δεδομένων για την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων. Το δυναμικό στατιστικό λογισμικό TinkerPlots2® (Konold & Miller, 2005) χρησιμοποιήθηκε ως ένα ισχυρό εργαλείο για τις δραστηριότητες μοντελοποίησης. Στο πλαίσιο της μελέτης, επιχειρήθηκε να απαντηθούν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- (1) Πώς οι εκπαιδευτικοί ως μεταπτυχιακοί φοιτητές χρησιμοποιούν την μοντελοποίηση σε προβλήματα στατιστικού συλλογισμού επαγωγικής στατιστικής, αξιοποιώντας δυναμικά τεχνολογικά εργαλεία όπως το TinkerPlots2®;
- (2) Σε ποιο βαθμό θεωρούν οι φοιτητές ότι τους βοήθησε η μοντελοποίηση στην κατανόηση στατιστικών εννοιών;

## **ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ**

Η έρευνα στον τομέα της διδακτικής της στατιστικής αναφέρει ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στο να αξιοποιούν την επαγωγική μέθοδο. Συγκεκριμένα, οι φοιτητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν κατάλληλες μεθόδους επαγωγικής στατιστικής σε εφαρμοσμένα προβλήματα. Παραδείγματος χάρη, οι έρευνες που έχουν διεξαχθεί σε σχέση με τα εισαγωγικά μαθήματα στατιστικής σε ανώτερα και ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα καταδεικνύουν ότι ακόμη και οι φοιτητές που μπορούν να εφαρμόσουν με επιτυχία τις διαδικασίες για έλεγχο υποθέσεων και εκτίμηση παραμέτρων, συχνά δεν είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν αυτές τις διαδικασίες σε πρακτικές εφαρμογές της καθημερινής ζωής (π.χ., Gardner & Hudson, 1999· delMas, Garfield, Ooms, & Chance, 2007). Όπως επισημαίνει ο Erickson (2006), "η στατιστική συμπερασματολογία είναι τόσο δύσκολη που ακόμη και επαγγελματίες ερευνητές συχνά τη χρησιμοποιούν λανθασμένα" (σελ.1).

Παραδοσιακά, τα μαθήματα στατιστικής υιοθετούν μια γραμμική, ιεραρχική προσέγγιση στα διάφορα στατιστικά θέματα που εξετάζονται στο μάθημα. Η δομή σχεδόν κάθε μαθήματος εισαγωγικής στατιστικής είναι παρόμοια. Αρχικά το μάθημα ξεκινά με περιγραφική και

διερευνητική ανάλυση δεδομένων, στη συνέχεια ασχολείται με την έννοια της πιθανότητας και των κατανομών πιθανοτήτων και τέλος εστιάζει στην επαγωγική στατιστική. Η στατιστική συμπερασματολογία παρουσιάζεται ως ένα σύνολο φορμαλιστικών ελέγχων και διαδικασιών, μέσω των οποίων οι πληροφορίες που περιέχονται σε δείγματα δεδομένων χρησιμοποιούνται είτε για την εκτίμηση των αντίστοιχων παραμέτρων του πληθυσμού (δηλ. την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης) είτε για τον έλεγχο των ισχυρισμών σχετικά με τις τιμές των παραμέτρων του πληθυσμού (δηλ. τον έλεγχο υποθέσεων).

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι τα τελευταία χρόνια με την πρόοδο της τεχνολογίας έχουν αναπτυχθεί πιο σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις που μπορούν να βοηθήσουν στην εννοιολογική κατανόηση της επαγωγικής στατιστικής. Ιδιαίτερα η εμφάνιση δυναμικών στατιστικών λογισμικών μάθησης όπως το Fathom<sup>®</sup> (Finzer, 2001) και το TinkerPlots2<sup>®</sup> (Konold & Miller, 2011), έχει προσφέρει εύχρηστα εργαλεία για την καλύτερη κατανόηση της επαγωγικής στατιστικής. Τα συγκεκριμένα εργαλεία έχουν σχεδιαστεί ειδικά για να υποστηρίξουν την ενσωμάτωση προσεγγίσεων διερευνητικής ανάλυσης δεδομένων και πιθανολογικών μοντέλων και να επιτρέψουν τη δημιουργία και τον πειραματισμό με μοντέλα (π.χ., αντλώντας δείγματα από ένα μοντέλο, βελτιώνοντας το μοντέλο, πραγματοποιώντας προσομοιώσεις). Τα ίδια τα εργαλεία αυτά λειτουργούν ως μέσο για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων που ενσωματώνουν βιωματικές και τυπικές γνώσεις, επιτρέποντας στους μαθητές/φοιτητές να κάνουν άμεσες συνδέσεις μεταξύ της φυσικής εμπειρίας και της φορμαλιστικής αναπαράστασης εννοιών (Στυλιανού & Μελετίου-Μαυροθέρη, 2003· Paparistodemou, Noss & Pratt, 2008). Έτσι, οι φοιτητές μπορούν να δημιουργήσουν στατιστικά μοντέλα πραγματικών φαινομένων. Μπορούν επίσης να εκφράσουν τις άτυπες θεωρίες τους μέσα από αυτά τα μοντέλα και να τις χρησιμοποιήσουν για να κάνουν εικασίες. Στη συνέχεια, μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα πειραματικά αποτελέσματα που προκύπτουν μέσα από την προσομοίωση των μοντέλων για να ελέγξουν και να τροποποιήσουν αυτές τις εικασίες. Αρκετοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει τη μοντελοποίηση μέσω της αξιοποίησης λογισμικών δυναμικής στατιστικής για προώθηση της στατιστικής συλλογιστικής μαθητών σχολικής ηλικίας ή φοιτητών, με πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα (π.χ., Biehler & Prömmel, 2010· Erickson, 2013· Garfield, delMas and Zieffler, 2012· Gil & Ben-Zvi, 2011· Konold & Lehrer, 2008). Μερικές από τις μελέτες έχουν δείξει ότι ακόμη και τα μικρά παιδιά μπορούν να αναπτύξουν ισχυρή διαισθητική σκέψη για τη στατιστική συμπερασματολογία, όταν χρησιμοποιούν κατάλληλα εργαλεία οπτικοποίησης και μοντελοποίησης δεδομένων (π.χ., Meletiou-Mavrotheris & Paparistodemou, 2015).

## **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

### ***Πλαίσιο και συμμετέχοντες***

Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο μαθήματος ποσοτικών προσεγγίσεων έρευνας ενός μεταπτυχιακού προγράμματος Επιστημών Αγωγής σε ιδιωτικό πανεπιστήμιο της Κύπρου. Το μάθημα ξεκίνησε τον Οκτώβριο του 2014 και ολοκληρώθηκε στα τέλη Ιανουαρίου του 2015. Στο μάθημα συμμετείχαν δεκαεννέα ( $n = 19$ ) φοιτητές, οι οποίοι χαρακτηρίζονταν από πολυμορφία σε μια σειρά από παραμέτρους όπως τα έτη υπηρεσίας, η

ηλικία και το ακαδημαϊκό υπόβαθρο. Συγκεκριμένα, η ηλικία των συμμετεχόντων κυμαίνονταν μεταξύ 23-42 χρονών. Μερικοί από τους συμμετέχοντες ( $n=7$ ) ήταν υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, ενώ οι υπόλοιποι ήταν εν ενεργεία εκπαιδευτικοί, με αρκετά έτη υπηρεσίας σε κάποιες περιπτώσεις. Οι μισοί περίπου ήταν εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ( $n=10$ ) ενώ οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα. Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων δεν είχε κανένα υπόβαθρο στις ποσοτικές προσεγγίσεις έρευνας. Μικρός αριθμός των φοιτητών ( $n=6$ ) είχαν στο παρελθόν παρακολουθήσει κάποιο εισαγωγικό μάθημα στατιστικής, ωστόσο και σ' αυτήν την περίπτωση είχαν περιορισμένο βαθμό κατανόησης των εννοιών της επαγωγικής στατιστικής και μη πρότερη εξοικείωση με την αξιοποίηση τεχνολογικών εργαλείων στατιστικής παιδείας.

Η ενασχόληση των φοιτητών με την μοντελοποίηση έγινε μέσω της αξιοποίησης του δυναμικού λογισμικού TinkerPlots2<sup>®</sup>. Το συγκεκριμένο λογισμικό υποστηρίζει την ένταξη των προσεγγίσεων της διερευνητικής ανάλυσης των δεδομένων μέσω της μοντελοποίησης, επιτρέποντας την δημιουργία μοντέλων και στη συνέχεια την προσομοίωσή τους (π.χ., τη λήψη δειγμάτων από ένα μοντέλο) και τον πειραματισμό μ' αυτά (π.χ., βελτίωση των μοντέλων, διενέργεια επιπρόσθετων προσομοιώσεων). Καθ' όλη τη διάρκεια του μαθήματος, οι φοιτητές χρησιμοποιούσαν το TinkerPlots2<sup>®</sup> για να εργαστούν, είτε εξατομικευμένα είτε σε ομάδες 3-4 ατόμων, σε μια σειρά ειδικά σχεδιασμένων δραστηριοτήτων μοντελοποίησης (Model-Eliciting Activities) (Lesh κ.ά., 2000). Στις δραστηριότητες αυτές έπρεπε να δημιουργήσουν και να προσομοιώσουν στατιστικά μοντέλα για να επιλύσουν ένα πολύπλοκο, πρόβλημα βασισμένο στην καθημερινή ζωή και να δώσουν απαντήσεις σε ρεαλιστικά ερωτήματα (Garfield, delMas & Zieffler, 2010). Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τρόπο που να υποστηρίζουν την σταδιακή ανάπτυξη των αντιλήψεων των φοιτητών για θεμελιώδεις ιδέες που σχετίζονται με τη στατιστική συμπερασματολογία.

Οι διάφορες κατανομές πιθανοτήτων που διδάχθηκαν οι σπουδαστές στο πλαίσιο του μαθήματος (π.χ. κανονική κατανομή, διωνυμική κατανομή, κατανομή Poisson, κλπ.) παρουσιάστηκαν ως θεωρητικά μοντέλα βασισμένα σε ορισμένες παραδοχές, οι οποίες όταν αλλάζουν πιθανόν να οδηγήσουν σε αλλαγές στην κατανομή. Σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση τόσο στις ομοιότητες όσο και στις διαφορές ανάμεσα στα θεωρητικά, ιδεατά μαθηματικά μοντέλα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κατανόηση φαινομένων της καθημερινής ζωής και στα στατιστικά μοντέλα που βασίζονται σε πειραματικά δεδομένα μέσω προσομοιώσεων. Έγινε επίσης προσπάθεια οι φοιτητές να κατανοήσουν πώς το οποιοδήποτε μοντέλο είναι ουσιαστικά μια υπεραπλούστευση της πραγματικότητας, η οποία συνεπάγεται απώλεια πληροφοριών, και πώς ο βαθμός χρησιμότητας ενός μοντέλου εξαρτάται από τη δυνατότητά του να προσφέρει χρήσιμες απαντήσεις στα ερευνητικά μας ερωτήματα.

Ένα τυπικό παράδειγμα των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν στο μάθημα είναι η δραστηριότητα με τίτλο: 'Πόσες υπερκρατήσεις πρέπει να κάνει η Air Zland;' (προσαρμοσμένο από <http://new.censusatschool.org.nz/resource/using-tinkerplots-for-probability-modelling/>), η οποία παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

**Πίνακας 1: Σενάριο: “Πόσες υπερκρατήσεις πρέπει να κάνει η Air Zland;”**

Η αεροπορική εταιρεία Air Zland έχει βρει ότι, κατά μέσο όρο, 2.9% των επιβατών της που αγοράζουν εισιτήρια για εσωτερικές πτήσεις δεν εμφανίζονται για να πάρουν την πτήση που έχουν κλείσει. Ως αποτέλεσμα του φαινομένου αυτού, η εταιρεία έχει αποφασίσει να εφαρμόσει την πρακτική της υπερκράτησης θέσεων (seat overbooking). Το Airbus A320, που χρησιμοποιείται στις εσωτερικές πτήσεις της εταιρείας, διαθέτει 171 θέσεις. Πόσα επιπλέον εισιτήρια θεωρείτε ότι πρέπει να εκδίδει η Air Zland στις πτήσεις της που είναι πλήρως κρατηθείσες (fully-booked), ούτως ώστε να αυξήσει τα κέρδη της, χωρίς όμως να προκαλεί ταλαιπωρία ή/και δυσaréσκεια στο επιβατικό της κοινό;

1. Ποιοι μπορεί να είναι κάποιοι από τους λόγους για τους οποίους ορισμένοι επιβάτες, ενώ είναι εφοδιασμένοι με εισιτήρια, δεν εμφανίζονται για να πάρουν τη πτήση που έχουν κλείσει;
2. Πόσοι περίπου επιβάτες, πιστεύετε ότι δεν θα προσέλθουν για επιβίβαση σε μια συγκεκριμένη πτήση της Airbus A320 που είναι πλήρως κρατηθείσα (fully-booked);
3. Πόσα επιπλέον εισιτήρια πιστεύετε ότι θα ήταν λογικό να εκδώσει η αεροπορική εταιρεία;
4. Ποιες μπορεί να είναι οι συνέπειες της υπερβολικής εφαρμογής της πρακτικής της υπερκράτησης (δηλ. του μεγάλου αριθμού διπλοκρατήσεων);
5. Ποιες μπορεί να είναι οι συνέπειες της μη εφαρμογής της πρακτικής της υπερκράτησης;

*Μοντελοποίηση Πτήσης με Χρήση TinkerPlots*

6. Τώρα θα χρησιμοποιήσετε τις δυνατότητες μοντελοποίησης φαινομένων που προσφέρει το Tinkerplots, για να κάνετε προσομοίωση του αριθμού των εφοδιασμένων με εισιτήρια επιβατών που δεν προσέρχονται (ή που προσέρχονται) για μία εσωτερική πτήση με Airbus A320 για την οποία έχουν κλείσει εισιτήρια.
7. Ποιες υποθέσεις χρειάζεται να κάνετε για την κατανομή την οποία θα μοντελοποιήσετε; Πόσο πιθανό είναι να ισχύουν στην πραγματικότητα αυτές οι υποθέσεις;
8. Κατασκευάστε το μοντέλο του πειράματος στο TinkerPlots (δηλ. το μοντέλο μίας πτήσης) και εκτελέστε (κάντε RUN) την προσομοίωση.
9. Επαναλάβετε το ίδιο πείραμα. Εξηγήστε πώς και γιατί τα αποτελέσματα που παίρνετε διαφέρουν από αυτά της προηγούμενης προσομοίωσης.
10. Επαναλάβετε την προσομοίωση με μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.
11. Κατασκευάστε κατάλληλο διάγραμμα της κατανομής του αριθμού/ποσοστού των ατόμων που δεν προσέρχονται (ή που προσέρχονται) για την πτήση τους και περιγράψτε την κατανομή.
12. Υπάρχει κάτι σχετικά με τη κατανομή που προέκυψε από την προσομοίωση που σας εξέπληξε;
13. Αν κρίνετε σκόπιμο, κάντε αλλαγές στο μοντέλο σας (π.χ. καθορίστε διαφορετική τιμή για τον αριθμό εισιτηρίων που έχουν εκδοθεί) και επαναλάβετε την προσομοίωση.
14. Ποιες εισηγήσεις θα κάνατε στον αερομεταφορέα Air Zland σχετικά με τον αριθμό των υπερκρατήσεων στις οποίες θα πρέπει να προβαίνει (δηλ. τον αριθμό των επιπλέον εισιτηρίων που θα πρέπει να πωλεί); Δικαιολογήστε τις εισηγήσεις σας με επιχειρήματα στηριζόμενα σε δεδομένα.

*Μοντελοποίηση Πτήσης με Χρήση Θεωρητικής Κατανομής Πιθανότητας*

15. Υπάρχει κάποια θεωρητική κατανομή, την οποία θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε ως μοντέλο για τον αριθμό των επιβατών που δεν προσέρχονται (ή προσέρχονται) για επιβίβαση σε εσωτερική πτήση που έχουν κλείσει με την Air Zland; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

16. Ποιες είναι οι υποθέσεις που πρέπει να κάνετε; Είναι αυτές οι υποθέσεις οι ίδιες ή διαφορετικές από τις υποθέσεις που κάνατε για την προσομοίωση; Πόσο πιθανό είναι να ισχύουν;
17. Ποια/ποιες είναι η/οι παράμετρος/οι της κατανομής;
18. Υπολογίστε τις πιθανότητες που προκύπτουν με βάση τη θεωρητική κατανομή, και χρησιμοποιήστε τις για να αποφασίσετε σχετικά με τον αριθμό των επιπλέον εισιτηρίων που ενδείκνυται να πουλάει η Air Zland.
19. Συγκρίνετε τις πιθανότητες με βάση τη θεωρητική κατανομή, με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που είχατε κάνει.
20. Με βάση τις θεωρητικές πιθανότητες, θα αλλάζατε τις αρχικές σας εισηγήσεις προς την Air Zland σε σχέση με τον αριθμό των υπερκρατήσεων που πρέπει να κάνουν;
21. Σε τι διαφέρει η θεωρητική προσέγγιση που μόλις εφαρμόσατε από την εμπειρική προσέγγιση μέσω της χρήσης προσομοιώσεων;
22. Εξηγήστε εάν και με ποιο τρόπο σας έχει βοηθήσει το Tinkerplots για να κατασκευάσετε την θεωρητική κατανομή πιθανότητας (*probability distribution*).

### Μέθοδοι συλλογής και ανάλυσης δεδομένων

Χρησιμοποιώντας παρατήρηση στην τάξη, οπτικογράφηση διδακτικών επεισοδίων, συνεντεύξεις και δείγματα εργασιών των συμμετεχόντων, η παρούσα έρευνα εξέτασε τις αλληλεπιδράσεις των φοιτητών-εκπαιδευτικών με το λογισμικό TinkerPlots2<sup>©</sup> στο πλαίσιο της ενασχόλησής τους με τις διάφορες δραστηριότητες μοντελοποίησης στατιστικών φαινομένων που χρησιμοποιήθηκαν στο μάθημα.

Η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν είχε διερευνητικό χαρακτήρα. Δεν αποσκοπούσε στην επαλήθευση υποθέσεων ή στη γενίκευση σε ένα μεγαλύτερο πληθυσμό, αλλά στην εις βάθος διερεύνηση του πώς η εμπλοκή της συγκεκριμένης ομάδας φοιτητών σε δραστηριότητες μοντελοποίησης, επηρέασε την κατανόηση των βασικών εννοιών που σχετίζονται με την επαγωγική στατιστική.

### ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των δεδομένων κατέδειξε ότι η προσέγγιση που υιοθέτησε η μελέτη προώθησε την ικανότητα των φοιτητών να αξιολογούν τα δεδομένα τους και να εξάγουν κατάλληλα συμπεράσματα. Συγκεκριμένα, ο πειραματισμός με το περιβάλλον του δυναμικού στατιστικού περιβάλλοντος για την επίλυση ρεαλιστικών στατιστικών προβλημάτων μέσω της μοντελοποίησής τους, βοήθησε τους φοιτητές να αναπτύξουν τον άτυπο στατιστικό συλλογισμό τους (Ben-Zvi, 2006). Η εμπειρία αυτή συνέβαλε ουσιαστικά στην ομαλότερη μετάβαση από την άτυπη στην τυπική επαγωγική συλλογιστική.

Μέσα από την ανάλυση πραγματικών δεδομένων ή / και την εκτέλεση προσομοιώσεων στο λογισμικό TinkerPlots2<sup>©</sup>, οι συμμετέχοντες πειραματίστηκαν ενεργά με τις στατιστικές ιδέες και εξέτασαν την αλληλεπίδραση μεταξύ των εμπειρικών δεδομένων και των θεωρητικών μοντέλων. Φυσικά, όπως και άλλοι ερευνητές (π.χ., Konold, Harradine, & Kazak, 2007· Pratt, 2011· Zieffler, delMas, & Garfield, 2014), έτσι κι εμείς εντοπίσαμε διαφορετικά επίπεδα



στατιστικού συλλογισμού των συμμετεχόντων, τα οποία παρατηρήθηκαν τόσο κατά την αλληλεπίδρασή τους με το δυναμικό λογισμικό, όσο και στο πλαίσιο του αναστοχασμού στον οποίο εμπλέκονταν οι ίδιοι στο τέλος κάθε δραστηριότητας. Ενώ κάποιοι φοιτητές μπορούσαν εύκολα να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό για να προσομοιάσουν το σενάριο του προβλήματος και επεξηγούσαν με σαφήνεια την όλη διαδικασία που ακολούθησαν, σε άλλους φοιτητές χρειάστηκε να δοθεί εξατομικευμένη βοήθεια για να αναγνωρίσουν τι προσομοίωση να κάνουν και για να τεκμηριώσουν τη σκέψη τους,

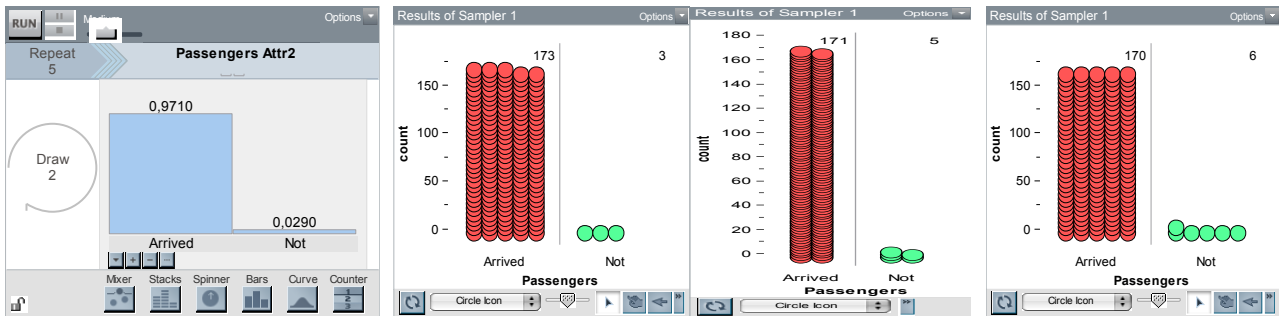
Στη συνέχεια, καταγράφουμε κάποιους σπό τους τρόπους με τους οποίους οι συμμετέχοντες προσέγγισαν την δραστηριότητα μοντελοποίησης: 'Πόσες υπερκρατήσεις πρέπει να κάνει η Air Zland;' (βλέπε Πίνακα 1). Η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν στο πλαίσιο της ενασχόλησης των φοιτητών με αυτή την δραστηριότητα, κατέδειξε σημαντικές διαφορές στις στρατηγικές προσέγγισης του προβλήματος.

### **Μοντελοποίηση δεδομένων**

Αλληλοεπιδρώντας με το λογισμικό TinkerPlots2®, οι φοιτητές κατασκεύασαν διάφορα μοντέλα προτού καταλήξουν στον βέλτιστο αριθμό των υπερκρατήσεων που πρέπει να κάνει η εταιρεία Air Zland στις εσωτερικές της πτήσεις που είναι πλήρως κρατηθείσες (fully-booked), ούτως ώστε να αυξήσει τα κέρδη της χωρίς όμως να προκαλεί δυσαρέσκεια στο επιβατικό της κοινό.

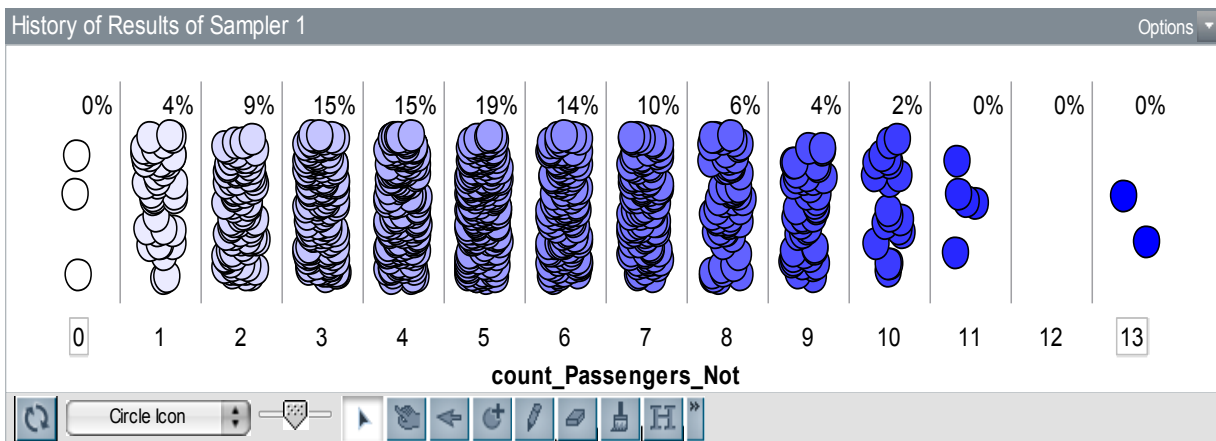
Με βάση την πληροφορία που τους δόθηκε, ότι δηλαδή κατά μέσο όρο, 2.9% των επιβατών της Air Zland που αγοράζουν εισιτήρια για εσωτερικές πτήσεις δεν εμφανίζονται για να πάρουν την πτήση που έχουν κλείσει, οι φοιτητές υπολόγισαν τον αριθμό των επιπλέον εισιτηρίων που θεώρησαν ότι θα ήταν λογικό να εκδώσει η αεροπορική εταιρεία. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες μοντελοποίησης που προσφέρει το Tinkerplots2®, έκαναν προσομοίωση του αριθμού των εφοδιασμένων με εισιτήρια επιβατών που προσέρχονται (ή δεν προσέρχονται) για μία εσωτερική πτήση για την οποία έχουν κλείσει εισιτήριο. Αρχικά, κατασκεύασαν το μοντέλο του πειράματος και εκτέλεσαν μία προσομοίωσή του (δηλ. την προσομοίωση μίας πτήσης). Ακολούθως επανέλαβαν την προσομοίωση με μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

Στην Εικόνα 1 και στην Εικόνα 2 παρουσιάζονται, ως χαρακτηριστικό παράδειγμα του πώς οι φοιτητές προσέγγισαν το πρόβλημα, τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης που έκανε μία ομάδα φοιτητών για την πώληση 176 εισιτηρίων (δηλ. 5 υπεράριθμα εισιτήρια) σε μία και σε 1005 προσομοιώσεις αντίστοιχα.



**Εικόνα 1: Τα αποτελέσματα μιας προσομοίωσης πτήσης όπου έχουν εκδοθεί 176 εισιτήρια**

Η Εικόνα 1 δείχνει τρεις επαναλήψεις μίας προσομοίωσης πτήσης όπου έχουν πωληθεί 176 εισιτήρια. Στο πρώτο εικονίδιο παρουσιάζεται το μοντέλο στο οποίο στηρίχθηκε η προσομοίωση (δηλ. πιθανότητα μη εμφάνισης του επιβάτη ίση με 0.029), ενώ στα υπόλοιπα εικονίδια ο πληθικός αριθμός των επιβατών που έχουν/δεν έχουν εμφανιστεί στην πτήση.

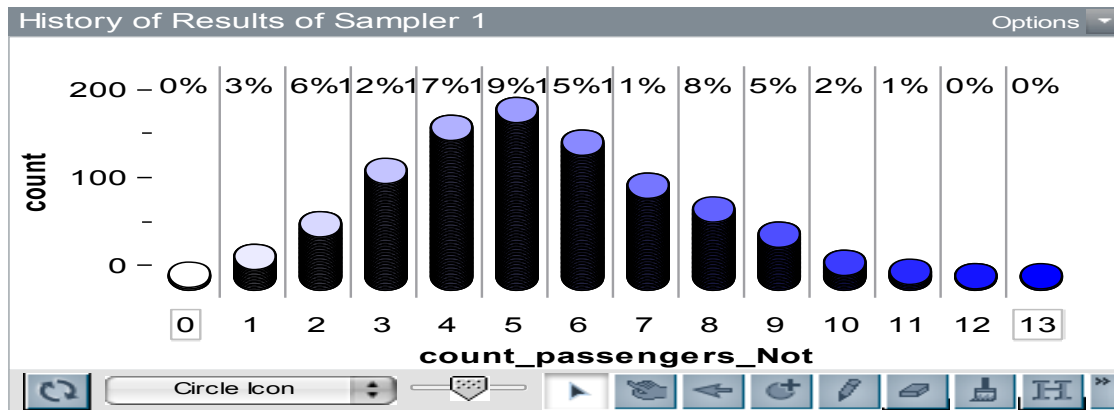


**Εικόνα 2: Αποτελέσματα 1005 προσομοιώσεων πτήσης όπου έχουν εκδοθεί 176 εισιτήρια**

Η Εικόνα 2 δείχνει το ποσοστό και τον πληθικό αριθμό των επιβατών που δεν έχουν εμφανιστεί στην πτήση, μετά από 1005 προσομοιώσεις της πτήσης, όταν η εταιρεία πώλησε 176 εισιτήρια.

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πιο πάνω μοντέλο, οι φοιτητές διερωτήθηκαν κατά πόσο θα ήταν προτιμότερο να διαφοροποιήσουν το μοντέλο τους, δεδομένου ότι όταν πωλούνται 176 εισιτήρια, περίπου 43% των πτήσεων θα έχουν έναν τουλάχιστον επιβάτη που θα μείνει χωρίς θέση.

Στην Εικόνα 3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν όταν οι φοιτητές επανέλαβαν την προσομοίωση 1005 πτήσεων, όπου όμως αυτή την φορά γινόταν πώληση 175 εισιτηρίων και όχι 176 εισιτηρίων όπως προηγουμένως.



Εικόνα 3: Αποτελέσματα των 1005 προσομοιώσεων για 175 εισιτήρια

Εξετάζοντας την Εικόνα 3, οι συγκεκριμένοι φοιτητές παρατήρησαν ότι όταν πωλούνται 175 εισιτήρια, ο αριθμός των πτήσεων στις οποίες τουλάχιστον ένας επιβάτης μένει χωρίς θέση μειώνεται στο 21%. Με βάση αυτή την παρατήρηση, δήλωσαν:

Εκπαιδευτικός 1: ...Με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα αποφασίσαμε να συμβουλέψουμε την AirZland να πωλεί 175 εισιτήρια, 4 εισιτήρια περισσότερα, ούτως ώστε να έχει μικρότερο ποσοστό παραπονούμενων επιβατών. Είναι σημαντικό η εταιρεία να βρει λύσεις για αυτούς τους επιβάτες, αν τελικά παρουσιαστούν τη μέρα της αναχώρησης, όπως να δοθεί διανυκτέρευση σε ξενοδοχείο, αναβάθμιση θέσης στην επόμενη πτήση, κτλ.

Στο πιο πάνω απόσπασμα παρατηρούμε ότι οι φοιτητές με βάση τα αποτελέσματα της προσομοίωσής τους με 175 εισιτήρια αποφάσισαν να εισηγηθούν στην εταιρεία να κάνει υπερκράτηση 4 εισιτηρίων και να δώσουν λύσεις στην εταιρεία σε περίπτωση που η πτήση είναι υπερπλήρης.

Στο τέλος της συγκεκριμένης δραστηριότητας, οι φοιτητές κλήθηκαν να αναστοχαστούν σχετικά με τη χρησιμότητα των μοντέλων. Συγκεκριμένα, τους ζητήθηκε να απαντήσουν στην ερώτηση: «Ήταν χρήσιμη για εσάς η διαδικασία μοντελοποίησης του προβλήματος χρησιμοποιώντας το TinkerPlots2®; Να εξηγήσετε γιατί ναι ή γιατί όχι.» Η πλειοψηφία των εκπαιδευομένων (n=15) θεώρησαν ότι η μοντελοποίηση του προβλήματος ήταν πολύ χρήσιμη. Ωστόσο, τα μέλη μίας από τις ομάδες των συμμετεχόντων (n=4) υποστήριξαν ότι η μοντελοποίηση του προβλήματος χρησιμοποιώντας το TinkerPlots2® δεν ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού χρησιμοποίησαν απευθείας τον τύπο της διωνυμικής κατανομής. Οι συγκεκριμένοι φοιτητές προέρχονταν από διαφορετικό θεωρητικό υπόβαθρο και εκπαιδευτική βαθμίδα (μία νηπιαγωγός, ένας δάσκαλος, μία φυσικός, μία φιλόλογος).

Οι συμμετέχοντες που εκφράστηκαν θετικά για την όλη διαδικασία μοντελοποίησης με το λογισμικό TinkerPlots2®, τόνισαν την συμβολή της μοντελοποίησης στην κατανόηση της σχέσης του μέρους και του όλου των δεδομένων τους, στην κατανόηση του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών και στη σύνδεση της θεωρητικής με την εμπειρική πιθανότητα.

Οι φοιτητές έδωσαν ιδιαίτερη έμφαση στην κατανόηση του ρόλου της κάθε περίπτωσης των δεδομένων και πώς η κάθε περίπτωση επηρέαζε το γενικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα κάποιοι ανέφεραν τα ακόλουθα:

Εκπαιδευτικός 1: Οι διαδικασίες που έκανα στο TinkerPlots με βοήθησαν να κατανοήσω τις παραμέτρους του προβλήματος και πώς κάθε περίπτωση επηρέασε το γενικό αποτέλεσμα. Έτσι, ήταν ευκολότερο για μένα να λύσω το πρόβλημα της διωνυμικής κατανομής.

Εκπαιδευτικός 2: Είναι σημαντικό ότι είδα πώς λειτουργούν τα γραφήματα. Είχα άμεση πρόσβαση στα δεδομένα και μπορούσα να κάνω αλλαγές και να δω πώς αυτές οι αλλαγές επηρέασαν τη γραφική παράσταση. Αυτό έκανε τα πράγματα ξεκάθαρα για μένα.

Οι πιο πάνω φοιτητές αναφέρονται στη χρησιμότητα που είχε το λογισμικό για τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Με βάση τα αποσπάσματα φαίνεται ότι θεώρησαν σημαντικά στοιχεία της διαδικασίας την άμεση πρόσβαση που είχαν στα δεδομένα και το δυναμικό χαρακτήρα του λογισμικού αφού τους επέτρεπε να 'βλέπουν' τις αλλαγές να επηρεάζουν τα γραφήματά τους.

Επιπρόσθετα, πολλοί από τους συμμετέχοντες τόνισαν τη χρησιμότητα των μοντέλων παραπέμποντας στον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών.

Εκπαιδευτικός 3: [Το λογισμικό] προσομοίωνε περισσότερες από 3.000 πτήσεις σε λίγα λεπτά, έτσι πήραμε πολλά δεδομένα και καταλάβαμε πώς λειτουργεί η κατανομή.

Εκπαιδευτικός 4: Ήταν χρήσιμο για μένα, γιατί κατάλαβα πώς μια τυχαία διαδικασία, με μεγάλους αριθμούς μπορεί να λειτουργήσει. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για την κατανόηση της πιθανότητας.

Είναι σημαντικό ότι οι ίδιοι οι φοιτητές αντιλαμβάνονται από μόνοι τους τη σημασία της σύνδεσης μεταξύ θεωρητικής και εμπειρικής πιθανότητας και πώς ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών συνέβαλε στη σύνδεση αυτή. Από την άλλη, οι εκπαιδευτικοί που δεν βρήκαν χρήσιμη τη μοντελοποίηση του προβλήματος, ήταν αυτοί που είχαν πλήρη εμπιστοσύνη στους τύπους των κατανομών.

Εκπαιδευτικός 10: Συνειδητοποιήσαμε σε μια πρώτη ματιά ότι είχαμε μια διωνυμική κατανομή εδώ, είχαμε «αφίξεις» και «no shows» και την ανεξαρτησία = 0.029. Έτσι, χρησιμοποιήσαμε τους τύπους και λύσαμε το πρόβλημα.

Όπως μπορούμε να διακρίνουμε, ο τρόπος με τον οποίο οι φοιτητές επεξηγούν την εμπειρία τους από τη χρήση μοντέλων παρουσιάζει ενδιαφέρον, αφού υπήρχαν διάφορες απόψεις για την αξιοποίηση της μοντελοποίησης. Οι επεξηγήσεις τους έδειξαν πώς η μοντελοποίηση λειτούργησε διαφορετικά για τον καθένα.

Κατά τη διάρκεια του μαθήματος οι συμμετέχοντες ασχολήθηκαν με διάφορα προβλήματα παρόμοιας φύσης με τη δραστηριότητα 'Πόσες υπερκρατήσεις πρέπει να κάνει η Air Zland;', όπως π.χ. το πρόβλημα «Αντιπρόσωπος Πωλήσεων της Amazon», όπου προέβησαν σε προσομοίωση ενός πραγματικού σεναρίου που αφορά στα κριτήρια εξουσιοδότησης ενός νέου αντιπροσώπου της Amazon να πουλάει παιχνίδια στη διάρκεια των γιορτών των Χριστουγέννων (βλέπε <https://tamebay.com/2015/10/selling-toys-on-amazon-over-christmas-2015.html>). Χρησιμοποιώντας το TinkerPlots2<sup>©</sup>, δημιούργησαν και τροποποίησαν τα δικά τους μοντέλα πραγματικών φαινομένων και τα χρησιμοποίησαν για να ελέγξουν

άτυπα τις υποθέσεις τους και να καταλήξουν σε συμπεράσματα. Η ενασχόλησή τους αυτή συνέβαλε στην άτυπη κατανόηση της λογικής του ελέγχου υποθέσεων και συναφών στατιστικών εννοιών, όπως το επίπεδο σημαντικότητας, το παρατηρηθέν επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας ( $p$ -value), τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση. Αυτό, λειτούργησε ως ισχυρή βάση για την μελέτη και κατανόηση των εννοιών της τυπικής επαγωγικής στατιστικής που στη συνέχεια εισήχθησαν στο πλαίσιο του μαθήματος.

Συνεπώς φαίνεται ότι η προσέγγιση της μοντελοποίησης-προσομοίωσης έδωσε στους συμμετέχοντες πλούσιες γνώσεις και εμπειρίες που τους βοήθησαν να κατανοήσουν και να εκτιμήσουν καλύτερα το νόημα και τη χρησιμότητα θεμελιωδών στατιστικών εννοιών της επαγωγικής στατιστικής, όπως το κεντρικό οριακό θεώρημα και τον έλεγχο υποθέσεων. Παρά το γεγονός αυτό όμως, η μετάβαση από την άτυπη στην τυπική επαγωγική στατιστική προκάλεσε δυσκολίες σε αρκετούς από αυτούς. Ειδικότερα, ενώ σχεδόν όλοι οι συμμετέχοντες στο μάθημα φαίνονταν πολύ άνετοι με τη διαδικασία άτυπης κατασκευής δειγματοληπτικών κατανομών στατιστικών δειγμάτων, αρκετοί από αυτούς αντιμετώπισαν σημαντικές δυσκολίες όταν εισήχθησαν στην τυπική επαγωγική στατιστική και την σημειογραφία της. Στην αρχή, οι πλείστοι φοιτητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στη κατανόηση και χρήση στατιστικών κριτηρίων (π.χ.  $t$ -test, ANOVA, κλπ.). Σταδιακά όμως, η βασισμένη στην μοντελοποίηση-προσομοίωση προσέγγιση που είχε υιοθετήσει το μάθημα, βοήθησε τους φοιτητές να κατανοήσουν καλύτερα και να εκτιμήσουν την αξία των «επίσημων» ελέγχων που χρησιμοποιούνται στην στατιστική συμπερασματολογία. Η σύγκριση των εμπειρικών με τις θεωρητικές πιθανότητες συνέβαλε στη δημιουργία άμεσων συνδέσεων μεταξύ της τυπικής και της άτυπης στατιστικής συμπερασματολογίας εκ μέρους των φοιτητών.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αρκετές μελέτες (π.χ., delMas, Garfield, Ooms & Chance, 2007) που εξετάζουν τα μαθησιακά αποτελέσματα έδειξαν ότι ακόμη και φοιτητές οι οποίοι έχουν ολοκληρώσει επιτυχώς ένα ή και περισσότερα μαθήματα στατιστικής δεν έχουν αναπτύξει σε ικανοποιητικό βαθμό τον στατιστικό τους συλλογισμό. Επιπλέον, έρευνες έδειξαν ότι ακόμη και οι φοιτητές που μπορούν να εφαρμόσουν με επιτυχία τις διαδικασίες για έλεγχο υποθέσεων και εκτίμηση παραμέτρων μπορεί να μην είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν αυτές τις διαδικασίες κατάλληλα σε πρακτικές εφαρμογές (π.χ., Gardner & Hudson, 1999). Έτσι, φαίνεται να υπάρχει ερευνητικό ενδιαφέρον για βελτίωση της διδασκαλίας και της εκμάθησης των στατιστικών εννοιών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Garfield κ.ά., 2012). Η παρούσα μελέτη παρέχει μερικές πληροφορίες σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους η μοντελοποίηση, η γενίκευση και η αιτιολόγηση μπορούν να βοηθήσουν τους φοιτητές να αναπτύξουν την εκτίμηση του σημαντικού ρόλου των μοντέλων και της μοντελοποίησης στη στατιστική συμπερασματολογία.

Ειδικότερα, μέσω της παρούσας μελέτης προσφέρονται ορισμένες χρήσιμες γνώσεις σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο η αξιοποίηση της τεχνολογίας μπορεί να συμβάλει στην εις βάθος κατανόηση πολύπλοκων στατιστικών εννοιών. Τα ευρήματα της έρευνας καταδεικνύουν ότι

η διδακτική προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στο μάθημα, αξιοποιώντας ως μαθηματική πρακτική την μοντελοποίηση, γενίκευση και αιτιολόγηση, βελτίωσε την ικανότητα των συμμετεχόντων να προβαίνουν σε έλεγχο υποθέσεων και σε εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων με βάση τα δεδομένα.

Η υιοθέτηση μιας άτυπης προσέγγισης στη στατιστική συμπεραματολογία, χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό στατιστικό πακέτο, όπως το TinkerPlots2®, ως εργαλείο για τη διερεύνηση αυθεντικών πλαισίων ανοικτού τύπου, μπορεί να συμβάλει στην προώθηση ισχυρών τρόπων στατιστικής συλλογιστικής, ενώ παράλληλα να αναπτύξει την διαδικασία λήψης αποφάσεων. Φυσικά, οι εννοιολογικές δυσκολίες που πρέπει να ξεπεράσουν οι εκπαιδευόμενοι όταν εργάζονται με πειραματικές πιθανότητες είναι παρόμοιες με εκείνες που συναντούν όταν ασχολούνται με θεωρητικές πιθανότητες (π.χ. δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της κατανομής δειγματοληψίας ή του κεντρικού οριακού θεωρήματος). Πρέπει ακόμα να κατανοήσουν το πραγματικό πρόβλημα και να το μοντελοποιήσουν σωστά χρησιμοποιώντας την κατάλληλη θεωρητική κατανομή πιθανότητας. Ωστόσο, η πειραματική προσέγγιση δίνει στους φοιτητές μια πιο απτή αντιμετώπιση των προβλημάτων. Μέσω της δημιουργίας μοντέλων μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα την κατάσταση, να πειραματιστούν ενεργά με στατιστικές ιδέες, να εξετάσουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των δεδομένων και της θεωρητικής προσέγγισης και να κατασκευάσουν πιο ισχυρές έννοιες επαγωγικής στατιστικής.

Συμπερασματικά, όπως επισημαίνουν οι Garfield και Ben-Zvi (2008), τα μοντέλα αποτελούν μία από τις σημαντικότερες, αλλά λιγότερο κατανοητές ιδέες που συναντούν οι φοιτητές στα μαθήματα στατιστικής. Παρά τη σπουδαιότητα της μοντελοποίησης δεδομένων και την πολύ συχνή αξιοποίηση μοντέλων και προσομοιώσεων στη στατιστική πρακτική, η πλειοψηφία των φοιτητών που παρακολουθούν μαθήματα στατιστικής δεν έχουν την ευκαιρία να κατανοήσουν την έννοια του στατιστικού μοντέλου και το πώς αυτό χρησιμοποιείται. Επιπλέον, ο αριθμός των ερευνών που έχουν διεξαχθεί διεθνώς με στόχο να φωτίσουν τον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές χρησιμοποιούν στατιστικά μοντέλα και μαθαίνουν μέσω της αξιοποίησης τους εξακολουθεί να είναι πολύ περιορισμένος. Συνεπακόλουθα, τα ευρήματα της παρούσας μελέτης έχουν τόσο πρακτική όσο και θεωρητική σημασία για την κοινότητα της μαθηματικής παιδείας.

**Σημείωση:** Στο παρόν άρθρο για πρακτικούς λόγους έγινε χρήση μόνο του αρσενικού γένους των ονομάτων αντί του αρσενικού/θηλυκού.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Dordrecht: Kluwer.
- Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students' informal inference and argumentation. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education: Proceedings of the Seventh International Conference of Teaching Statistics (ICOTS-7)*, Salvador, Brazil.

- Biehler, R., & Prömmel, A. (2010). Developing students' computer-supported simulation and modelling competencies by means of carefully designed working environments. In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-8)*, Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- delMas, R. C., Garfield, J., Ooms, A., & Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58.
- Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking* (pp. 75-100). Dordrecht: Springer.
- Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inference. In Rossman, A. & Chance, B. (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education: Proceedings of the Seventh International Conference of Teaching Statistics (ICOTS-7)*, Salvador, Brazil. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Erickson, T. (2013). Designing games for understanding in a data analysis environment. *Technology Innovations in Statistics Education*, 7(2).
- Finzer, W. (2001). *fathom dynamic statistics (v1.0) [Current version is 2.1]*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Gardner, H., & Hudson, I. (1999). university students' ability to apply statistical procedures. *Journal of Statistics Education*, 7(1). Online: [www.amstat.org/publications/jse/secure/v7n1/gardner.cfm](http://www.amstat.org/publications/jse/secure/v7n1/gardner.cfm)
- Garfield, J., & Ahlgren, A. (1998). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 44-63.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*. New York: Springer.
- Garfield, J., delMas, R., & Zieffler, A. (2010). Developing tertiary-level students' statistical thinking through the use of model-eliciting activities. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010)*, Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Online: [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php)
- Garfield, J., delMas, R., & Zieffler, A. (2012). Developing statistical modelers and thinking in an introductory, tertiary - level statistics course. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 44 (7), 883 – 898.
- Gil, E., & Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students' informal inferential reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 13, 87–108.
- Graham, A. (2006). *Developing thinking in statistics*. London: Paul Chapman Publishing.
- Konold, C., Harradine, A. & Kazak, S. (2007). Understanding distribution by modelling them, *International Journal for Computers and Mathematical Learning*, 12, 217-230.

- Konold, C., & Lehrer, R. (2008). Technology and mathematics education: An essay in honor of Jim Kaput. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2<sup>nd</sup> ed., pp. 49–72). New York, NY: Routledge.
- Konold, C., & Miller, C. D. (2005). *TinkerPlots: dynamic data exploration (v1.0) [Current version is 2.1]*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Konold, C., & Miller, C. (2011). *TinkerPlots (Version v2.0)* [Computer software]. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Lee, H. (2013). Quantitative reasoning in digital world: laying the pebbles for future research frontiers. In R.L. Mayes & L.L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning in mathematics and science education: Papers from an international STEM research symposium, WISDOM e Mongraph # 3* (pp. 65-82). Laramie, Wyoming: University of Wyoming College of Education.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Meletiou-Mavrotheris, M., and Paparistodemou, E. (2015). Developing young learners' reasoning about samples and sampling in the context of informal inferences. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 385-404.
- Murtonen, M., & Lehtinen, E. (2003). Difficulties experienced by education and sociology students in quantitative methods courses. *Studies in Higher Education*, 28 (2), 171-185.
- Paparistodemou, E., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2008). Enhancing reasoning about statistical inference in 8 year-old students. *Statistics Education Research Journal*, 7 (2), 83–106.
- Paparistodemou, E., Noss, R., & Pratt, D. (2008). The interplay between fairness and randomness in a spatial computer game. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 89–110.
- Pratt, D. (2011). Re-connecting probability and reasoning about data in secondary school teaching. In *Proceedings of the 58th World Statistics Conference of the International Statistical Institute* (pp. 880-899), Dublin Ireland.
- Rubin, A., Hammerman, J., & Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education: Proceedings of the Seventh International Conference of Teaching Statistics (ICOTS-7)*, Salvador, Brazil.
- Serrado, B., Meletiou-Mavrotheris, M., and Paparistodemou, E. (2017). A study on statistical technological and pedagogical content knowledge on an innovative course on quantitative research methods. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, and U. Gellert (Eds.), *Mathematics and technology* (pp. 467-494). Springer.
- Στυλιανού, Δ., & Μελετίου-Μαυροθήρη, Μ. (2003). Δυναμικά λογισμικά: νέες προοπτικές για τη χρήση τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 132, 27-37.



- Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.
- Zieffler, A., delMas, R., & Garfield, J. (2014). The symbiotic, mutualistic relationship between modelling and simulation in developing students' statistical reasoning about inference and uncertainty. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Online: [www.iase-web.org](http://www.iase-web.org).