Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 9 (2017)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤ΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Αγγελική Τσαμπουράκη (Aggeliki Tsampouraki), Σόνια Καφούση (Sonia Kafousi)

doi: 10.12681/enedim.14180

http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/index

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤ΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Αγγελική Τσαμπουράκη και Σόνια Καφούση

12ο Δημοτικό Σχολείο Κορίνθου, aggelikitsampouraki29@gmail.com

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, kafoussi@aegean.gr

Περίληψη: Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται στοιχεία μιας έρευνας η οποία πραγματοποιήθηκε με τη συμμετοχή μαθητών της ΣΤ΄ τάξης δημοτικού για την μαθηματική έννοια του "άπειρου", με την οποία δεν έχουν ασχοληθεί στη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών, σύμφωνα με τα ΔΕΠΣ και ΑΠΣ. Σκοπός της έρευνας ήταν η διερεύνηση και καταγραφή των πεποιθήσεών τους, όπως υποβάλλονται από συνειδητούς ή και υποσυνείδητους κανόνες, ιδέες, γνώσεις, αναπαραστάσεις και ερμηνείες σε έμμεση ή άμεση σχέση με την καθαρά μαθηματική εμπειρία. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το άπειρο γίνεται αντιληπτό από τους μαθητές αυτής της ηλικίας με ποικίλους τρόπους σε διαφορετικά πλαίσια.

Λέξεις κλειδιά: μαθηματικό άπειρο, πρωτοβάθμια εκπαίδευση, πεποιθήσεις μαθητών

Abstract: This paper presents survey data as held with the participation of students of sixth grade of primary school on the mathematical concept of infinite, which are not been addressed during the course of mathematics, accordance with the curricula. The purpose of this research was to investigate and record their belief, as submitted by conscious or subconscious rules, ideas, knowledge, representations and interpretations in direct or indirect relation with the purely mathematical experience. The results showed that infinity conceived by the students of this age in various ways in different contexts.

Keywords: mathematical infinity, primary education, students' beliefs

Εισαγωγή

Με την έννοια του άπειρου ασχολήθηκαν πρώτοι οι Ίωνες Φιλόσοφοι, οι εκπρόσωποι της Ελεατικής φιλοσοφικής σχολής στην κάτω Ιταλία, οι Πυθαγόρειοι, ο Αριστοτέλης, και πολλοί φιλόσοφοι του αρχαίου κόσμου. Έτσι για τον Αριστοτέλη η αναζήτηση για το άπειρο προέρχεται από την πίστη μας ότι ο χρόνος είναι άπειρος, από τη δυνατότητα συνεχούς τμήσης εκτεταμένων μεγεθών, από την αέναη παρουσία της γέννησης και της φθοράς, από την αντίληψη ότι καθετί οριοθετείται από κάτι άλλο ώστε η ολότητα να μην έχει όρια (Αναπολιτάνος, 2005).

Το άπειρο υπήρξε πηγή πολλών διαφωνιών μεταξύ των φιλοσόφων και μεταξύ των μαθηματικών σε όλους τους αιώνες, γι' αυτό κατά καιρούς αναγκάστηκαν να το ''εξορίσουν'' από τη σκέψη τους για να αποφύγουν τις δυσκολίες και τα παράδοξά του. Το άπειρο απασχολεί συνεχώς το ανθρώπινο πνεύμα και είναι η αιτία αρκετών από τα μαθηματικά σοφίσματα, παράδοξα και αντινομίες, χωρίς να είναι μαθηματικά παράλογα. Υπάρχει η τάση να θεωρείται το άπειρο ως ένας πολύ μεγάλος αριθμός, μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θα μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά, αν θελήσουμε να εμβαθύνουμε στην έννοια του άπειρου, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η διαφορά του από τους πεπερασμένους αριθμούς, δεν είναι μόνο ποσοτική αλλά και ποιοτική (Barrow, 2007). Σύμφωνα με τον Καντ η έννοια του πραγματικού απείρου λειτουργεί θαυμάσια στα πλαίσια του λογισμού μας, επομένως μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο μαθηματικής επεξεργασίας, στα πλαίσια μια γενικής μη-κατασκευαστικής μαθηματικής θεωρίας. Ο Cantor, ως ο δημιουργός της θεωρίας συνόλων, υπέδειξε με το θεώρημά του την ύπαρξη του άπειρου, άλλοτε μετρήσιμου και άλλοτε υπεραριθμήσιμου, προάγοντας τα μαθηματικά από επιστήμη του σχήματος και του αριθμού σε επιστήμη του απείρου (Davis & Hersh, 1981). Η συνολοθεωρία συνέβαλε στη δημιουργική έκρηξη του προηγούμενου αιώνα στην επιστήμη της Μαθηματικής Λογικής, με τα μεγάλα επιτεύγματα των Frege, Russell και Godel.

Σκοπός της έρευνας που πραγματοποιήσαμε ήταν η διερεύνηση και καταγραφή των πεποιθήσεων των μαθητών της ΣΤ δημοτικού για το άπειρο. Η διερεύνηση αυτή μας επιτρέπει να μελετήσουμε τη δυνατότητα ή όχι εμπλοκής των μαθητών σε δραστηριότητες που σχετίζονται με αυτή την έννοια στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Θεωρητικό πλαίσιο

Σύμφωνα με τον Monaghan (Monaghan, 1986, βλ. Monaghan, 2001), η διαισθητική αντίληψη, βοηθά τους μαθητές να αναγνωρίζουν τη μαθηματική έννοια του άπειρου, πέρα από τις παρανοήσεις που δημιουργεί η εγγενώς αντιφατική και ασταθής αυτή έννοια. Τις γνώσεις των μαθητών, καθώς και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για την προσέγγιση παρόμοιων ερωτημάτων, υποστηρίζει η κατανόηση των φυσικών αριθμών ως ένα αρχικό εννοιολογικό πλαίσιο, το οποίο ξεκινούν να διαμορφώνουν οι μαθητές πολύ πριν από την είσοδό τους στην τυπική εκπαίδευση. Η μέτρηση, η ύπαρξη του επόμενου αριθμού, η σύγκριση και η διάταξη των φυσικών αριθμών, αποτελούν ένα επεξηγηματικό πλαίσιο επάνω στο οποίο θα ενσωματωθούν, εμπλουτίζοντάς το, όλες οι νέες πληροφορίες για τους αριθμούς, μέχρι την οποιαδήποτε σταδιακή, εννοιολογική αλλαγή. Επιπλέον οι ιδιαίτερες εμπειρίες των μαθητών στο ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο συμμετέχουν καθώς και η προσωπική ερμηνεία των πολλαπλών σχετικών ακουσμάτων, συνθέτουν ένα πλέγμα γνώσεων για τους αριθμούς, ως βάση για κάθε περαιτέρω ανάπτυξη και επηρεάζουν τον τρόπο αντιμετώπισης των μαθηματικών προβλημάτων με τα οποία έρχονται σε επαφή (Καφούση & Χαβιάρης, 2013).

Ο Duval (1983) πραγματοποίησε μια έρευνα σε μαθητές 12-13 ετών, χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις άπειρων συνόλων όπως για παράδειγμα το σύνολο Α={1,2,3,4,5,…} των φυσικών αριθμών και το σύνολο Β={1,4,9,16,25,…} των τέλειων τετράγωνων και διαπίστωσε ότι οι αποφάσεις των μαθητών σχετικά με την ισοδυναμία δύο άπειρων συνόλων, επηρεάζονται από τον τρόπο παρουσίασης αυτών των συνόλων (Duval, 1983, βλ.Tsamir, 1999). Η οριζόντια αριθμητική αναπαράσταση (A={1,2,3,4,5,…}, B={1,4,9,16,25,…}) ενθάρρυνε το κριτήριο μέρος- όλο, ενώ η κάθετη αριθμητική αναπαράσταση,

(A={1,2,3, 4, 5,…},

B={1,4,9,16,25,…}) , ενθάρρυνε την ένα προς ένα αντιστοιχία.

Ερωτήματα σχετικά με το άπειρο σε παιγνιώδη μορφή, έθεσαν σε έρευνα που πραγματοποίησαν το 1986 οι Falk, Gassner, Ben Zoor, Ben Sinon σε παιδιά 5-12 ετών, όπως ποιος θα πει τον μεγαλύτερο αριθμό, τον μικρότερο φυσικό ή ρητό, με σκοπό να προξενήσουν μια συζήτηση για το αν τελειώνουν οι αριθμοί (Falk et al., 1986, βλ. Monaghan, 2001). Σημείωσαν γενικά μια αναπτυξιακή τάση, παρατηρώντας ότι τα μικρότερα παιδιά δεν μπορούν να συνεχίσουν το παιχνίδι γιατί δεν καταλαβαίνουν ότι οι ακέραιοι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ, πόσο μάλλον οι φθίνοντες ακέραιοι, αφού αγνοούν τους αρνητικούς και τους ρητούς.

Οι Βαμβακούση και Βοσνιάδου σε έρευνα που πραγματοποίησαν το 2007 σε μαθητές της Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου με ερωτήσεις της μορφής «πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς» βρήκαν ότι ένα μεγάλο μέρος των παιδιών αυτής της ηλικίας δεν έχουν κατακτήσει την ιδέα ότι υπάρχει άπειρο πλήθος ενδιάμεσω αριθμών--αντίθετα, θεωρούν ότι οι ρητοί αριθμοί είναι, παρόμοια με τους φυσικούς, διακριτοί.

Ο Núñez (1994) ερεύνησε το ‘‘μικρό άπειρο’’ εμπνεόμενος από το παράδοξο της διχοτομίας του Ζήνωνα. Η έρευνά του πραγματοποιήθηκε σε 32 μαθητές αγόρια και κορίτσια 8, 10, 12 και 14 ετών. Το πρόβλημα που τους δόθηκε ήταν το εξής: «Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πάμε από την μια πλευρά του τραπεζιού στην άλλη και ότι μας δίνεται η οδηγία να καλύψουμε στην αρχή τη μισή απόσταση και στη συνέχεια τη μισή της υπολειπόμενης κ.ο.κ. Θα φτάσουμε τελικά στην άκρη του τραπεζιού;». Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των προσωπικών συνεντεύξεων στο πλαίσιο του μαθήματος της ψυχολογίας. Η προσέγγιση που έγινε από τους μαθητές εμφανίζει την τάση αλλαγής των συνθηκών του προβλήματος, χώρου ή δράσης, με απαντήσεις όπως θα φτάσουμε τελικά γιατί ο χώρος θα μικρύνει πολύ και δεν θα μπορέσουμε να κάνουμε ολόκληρο βήμα, ή θα φέρουμε το σημείο άφιξης πιο κοντά για να είμαστε σίγουροι ότι θα φτάσουμε, ή ότι η επανάληψη των βημάτων κάποτε θα τελειώσει γιατί θα κολλήσουμε, ή ότι με την φαντασία μας θα φτάσουμε κ.ά.. Εκφράζουν μια δυσκολία κατανόησης της παραδοξολογίας του θέματος όπου χάνεται η αυστηρότητα των μαθηματικών (ό,τι είναι παράδοξο για μας δεν αντιμετωπίζεται ως παράδοξο και από τους μαθητές).

Οι Mamolo και Zazkis (2008), διερεύνησαν τις αντιλήψεις φοιτητών για το άπειρο μέσω της εμπλοκής τους με παράδοξα όπως το «ξενοδοχείο του Χίλμπερτ». Απευθύνθηκαν σε 36 φοιτητές δημιουργώντας δύο ομάδες ανάλογα με τη διαφορετικού βαθμού εξοικείωσή τους με τα μαθηματικά. Η πρώτη ομάδα αποτελούνταν από 16 καθηγητές που δίδασκαν μαθηματικά στο γυμνάσιο και παρακολουθούσαν ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα στη Διδακτική των Μαθηματικών. Η δεύτερη ομάδα αποτελούνταν από 20 φοιτητές κοινωνικών επιστημών, των οποίων οι μαθηματικές γνώσεις είχαν εμπλουτιστεί στο πλαίσιο διαλέξεων γύρω από την έννοια του άπειρου. Ζητήθηκε από τους φοιτητές να μαγνητοφωνήσουν τις ιδέες τους ο καθένας ξεχωριστά και να συζητήσουν έπειτα σε ομάδες και στο τέλος όλοι μαζί. Οι δύο ομάδες είχαν παρόμοια αντιμετώπιση του προβλήματος και μεγάλη δυσκολία να δεχτούν την ιδέα ότι ένα άπειρων δωματίων ξενοδοχείο είναι γεμάτο. Μετά την παρουσίαση της σωστής μαθηματικά λύσης η δεύτερη ομάδα συνέχισε να έχει πρόβλημα στην αποδοχή της.

Οι Fischbein et al. (1979), έθεσαν το ακόλουθο πρόβλημα: «Έστω ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Μπορούμε χωρίζοντάς το στο μέσον του να έχουμε δύο ίσα, μικρότερα από το αρχικό, ευθύγραμμα τμήματα. Έπειτα μπορούμε να χωρίσουμε καθένα από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα στο μέσον τους και να έχουμε 4 μικρότερα ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Αυτή η διαδικασία θα σταματούσε κάπου;» σε έρευνα που πραγματοποίησαν σε 470 μαθητές ηλικίας 10-15 ετών. Μετά τις απαντήσεις τους οι μαθητές χωρίστηκαν στους περατοκράτες (finitist) που θεωρούν ότι δεν μπορεί ένα ευθύγραμμο τμήμα να διαιρείται επ' άπειρο ή ότι το όλο δε μπορεί να είναι ίσο με το μέρος του, και τους απειριστές (non finitist), που θεωρούν ότι η επ' άπειρο διαίρεση είναι εφικτή και ότι κάθε άπειρο υποσύνολο ενός απειροσύνολου είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύνολο, με τους περατοκράτες να υπερτερούν ανεξάρτητα από ηλικία και επίπεδο μαθηματικής επίδοσης.

Το παρακάτω πρόβλημα δόθηκε από τις Tirosh και Tsamir (1996), ως μια δραστηριότητα τριών σταδίων όπου χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές αναπαραστάσεις απειροσυνόλων: «Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά ενός μέτρου, (οπότε το εμβαδόν του θα είναι 1^2=1τ.μ.). Αν αυξάνουμε κάθε φορά την πλευρά του τετραγώνου κατά ένα μέτρο, τότε θα έχουμε τετράγωνα με εμβαδά 2^2τ.μ., 3^2τ.μ., 4^2τ.μ., …κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία θα σταματήσει κάποτε;». Η διάρκεια ήταν 40 λεπτά και συμμετείχαν 32 μαθητές ηλικίας 16-18 ετών. Η δεύτερη δραστηριότητα περιελάμβανε μια γεωμετρική αναπαράσταση με το ερώτημα: «Σκεφτείτε ένα σύνολο τετραγώνων κάθε στοιχείο του οποίου είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1εκ., 2εκ., 3εκ., κ.ο.κ., αντίστοιχα. Είναι το πλήθος των τετραγώνων ίσο με το πλήθος των τμημάτων»; Οι απαντήσεις των περισσότερων μαθητών ήταν αντιφατικές και γενικά μπροστά στις διαφορετικές αναπαραστάσεις οδηγήθηκαν σε διαφορετικά συμπεράσματα.

Στηριζόμενοι στις παραπάνω έρευνες μελετήσαμε τις πεποιθήσεις των μαθητών της ΣΤ τάξης για την έννοια του μαθηματικού άπειρου ως αριθμό, ως διαδικασία, ως αντικείμενο, τα απειροελάχιστα, το άπειρο του χρόνου και του χώρου, τη μαθηματική γλώσσα και τις ιδιότητες των απειροσύνολων. Πιο συγκεκριμένα μελετήσαμε πώς απαντούν οι μαθητές σε ερωτήματα που αφορούν την έννοια του μαθηματικού άπειρου (Τσαμπουράκη & Καφούση, 2014):

α) ως ο μεγαλύτερος ή ο μικρότερος αριθμός (Falk et al., 1986), β) μέσα από τη σύγκριση ισοδύναμων συνόλων (Duval, 1983) ή μέσα από τη σύγκριση συνόλων όπου το ένα είναι υποσύνολο του άλλου (Tirosh & Tsamir, 1996; Tsamir, 1999)

γ) πώς μια άπειρη διαδικασία οδηγεί σε έναν ορισμό-αντικείμενο (Tall & Schwarzenbeger, 1978).

Επίσης μελετήσαμε την επίλυση προβλημάτων σχετικών με το άπειρο από τους μαθητές. Με τα προβλήματα διερευνήσαμε αν το άπειρο οδηγεί σε αντιφάσεις την εμπειρία τους, τη μεταφορά της εμπειρίας τους από τους φυσικούς αριθμούς για το χειρισμό απειροσυνόλων, το απειροελάχιστο και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός απειροσύνολου, καθώς και το άπειρο του χώρου.

Χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές αναπαραστάσεις άπειρων συνόλων, όπως οριζόντια, κάθετη, αναλυτική αριθμητική ή γεωμετρική μορφή (Duval, 1983, Tirosh & Tsamir, 1996). Σύμφωνα με το επίσημο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, οι μαθητές δεν έχουν ασχοληθεί με την έννοια του μαθηματικού άπειρου στη διάρκεια του χρόνου φοίτησής τους, από το νηπιαγωγείο μέχρι και την τελευταία τάξη του δημοτικού σχολείου.

Μέθοδος έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε πέντε δημόσια δημοτικά σχολεία, διαφορετικών περιοχών της πόλης της Κορίνθου. Συνολικά χορηγήθηκαν 140 ερωτηματολόγια σε μαθητές της έκτης τάξης, από τους οποίους 73 ήταν αγόρια και 67 κορίτσια. Η συλλογή των δεδομένων στηρίχτηκε στην συμπλήρωση ενός ερωτηματολογίου, το οποίο διαμορφώθηκε σε τρία μέρη: α) ερωτήσεις, β) προβλήματα και γ) αναγνώριση εκφράσεων – εννοιών σχετικές με το άπειρο. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το Φεβρουάριο του 2012.

Στην παρούσα εργασία αναφερόμαστε στο πρώτο και στο δεύτερο μέρος της έρευνας, όπου τέθηκαν τα παρακάτω ερωτήματα και προβλήματα αντίστοιχα. Σε κάθε ερώτημα ή πρόβλημα, ζητείται ο τρόπος σκέψης του μαθητή, το οποίο εξηγήθηκε αρκετά πριν τη χορήγηση του ερωτηματολογίου.

Τα ερωτήματα στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου ήταν τα ακόλουθα:

Α1.Ποιος νομίζεις ότι είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός;

Α2.Ποιος νομίζεις ότι είναι ο μικρότερος δεκαδικός αριθμός;

Α3.Ποιοι αριθμοί νομίζεις ότι είναι περισσότεροι:

οι περιττοί 1,3,5,7,9,11,.. , ή οι άρτιοι 2,4,6,8,10,12, .. ;

Α4. Ποιοι αριθμοί νομίζεις ότι είναι περισσότεροι: τα πολλαπλάσια του 2 ή τα πολλαπλάσια του3;

Πολλαπλάσια του 2 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, …

Πολλαπλάσια του 3 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, …

Α5. Υπάρχουν περισσότεροι κλασματικοί αριθμοί:

Α. ανάμεσα στους αριθμούς 1 έως 2, διότι………………………..

Β. ανάμεσα στους αριθμούς 1 έως 3, διότι………………………..

Γ.το πλήθος των κλασματικών αριθμών είναι ίδιο και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, διότι……………………………………

Α6. Είναι ο δεκαδικός 0,999…ίσος με τη μονάδα, ναι ή όχι;

0,99999999…=1

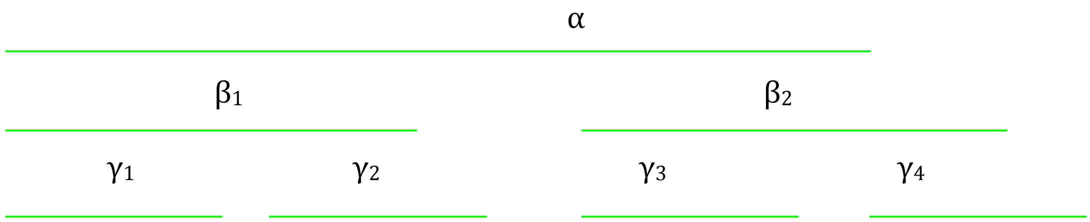
Τα προβλήματα στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου ήταν τα ακόλουθα:

Πρόβλημα 1: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πάμε από τη μια πλευρά του δωματίου στην άλλη. Μας δίνεται η οδηγία να καλύψουμε στην αρχή τη μισή απόσταση και στη συνέχεια τη μισή της υπολειπόμενης κ.ο.κ. Θα φτάσουμε τελικά στην άλλη πλευρά του δωματίου; α) Θα φτάσουμε διότι…, β) Δεν θα φτάσουμε διότι… .

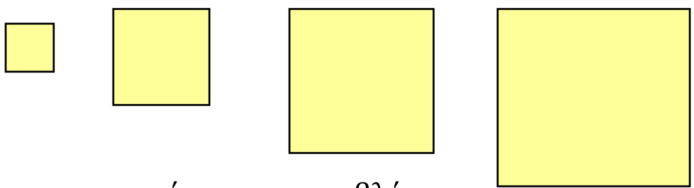
Πρόβλημα 2: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια και είναι όλα γεμάτα, δηλαδή έχει άπειρους πελάτες. Έτσι κανένα δωμάτιο από τα άπειρα που διαθέτει δεν είναι άδειο. Έστω ότι έρχονται σε αυτό το ξενοδοχείο ακόμη 10 πελάτες. Θα μπορούσαν να φιλοξενηθούν, και με ποιο τρόπο θα γινόταν αυτό; α) Ναι, και ο τρόπος θα ήταν…, β) Όχι, διότι….

Πρόβλημα 3: Έστω ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Μπορούμε χωρίζοντάς το στο μέσον του να έχουμε δύο ίσα, μικρότερα από το αρχικό, ευθύγραμμα τμήματα. Έπειτα μπορούμε να χωρίσουμε καθένα από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα στο μέσον τους και να έχουμε 4 μικρότερα ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Αυτή η διαδικασία θα σταματούσε κάπου; Εξήγησε τη σκέψη σου.

(Στα παιδιά δόθηκε η παρακάτω εικόνα)



Πρόβλημα 4: Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά ενός μέτρου, (οπότε το εμβαδόν του θα είναι $1^2=1$τ.μ.). Αν αυξάνουμε κάθε φορά την πλευρά του τετραγώνου κατά ένα μέτρο, τότε θα έχουμε τετράγωνα με εμβαδά 2^2τ.μ., 3^2τ.μ., 4^2τ.μ., …κ.ο.κ. υτή η διαδικασία θα σταματήσει κάποτε; Εξήγησε τη σκέψη σου. (Στα παιδιά δόθηκε η παρακάτω εικόνα).



…

Τα παραπάνω προβλήματα διαμορφώθηκαν με βάση τα προβλήματα που έχουν δοθεί από άλλους ερευνητές, όπως παρουσιάστηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας. Το πρώτο πρόβλημα μελετά μια παραλλαγή του παράδοξου της διχοτομίας του Ζήνωνα και οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν παράλογα σχετικά με την εμπειρία τους αποτελέσματα, όπως ότι δεν θα φτάσουν ποτέ στην άλλη άκρη ενός δωματίου ή ότι μένουμε πρακτικά ακίνητοι, λόγω της επαναλαμβανόμενης επ' άπειρο διαδικασίας. Το δεύτερο πρόβλημα μελετά την αλληλεπίδραση πρακτικών και μαθηματικών εμπειριών και τη χρήση ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών στους υπερπεπερασμένους. Επίσης το ίδιο το ξενοδοχείο το ''άπειρο'' αντιστοιχεί στο ενεργεία άπειρο, καθώς κάθε άπειρη διαδικασία με την οποία τακτοποιούνται κάθε φορά, μια άπειρη σειρά νέων ενοίκων, ολοκληρώνεται με επιτυχία. Αυτό έχει ως συνέπεια την αποδοχή του άπειρου ως αντικείμενο, ως μια ολοκληρωμένη άπειρη οντότητα. Το τρίτο πρόβλημα μελετά με τη βοήθεια μιας γεωμετρικής αναπαράστασης τη σύγκριση ενός απειροσύνολου με μέρος του που είναι επίσης απειροσύνολο, το άπειρο ως διαδικασία, και ως αντικείμενο, αφού το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα άπειρο σύνολο σημείων και το απειροελάχιστο όπου σταδιακά οδηγούμαστε. Το τέταρτο πρόβλημα μελετά την αναπαράσταση του ίδιου απειροσύνολου των τετραγώνων των φυσικών αριθμών με αναλυτική αριθμητική και γεωμετρική αναπαράσταση, το άπειρο του χώρου και τη συνέπεια ενός σχήματος ως προς τις χαρακτηριστικές του ιδιότητες καθώς εκτείνεται στον άπειρο χώρο.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έγινε με τη φαινομενογραφική μέθοδο (Marton, 1981). Οι κατηγορίες των απαντήσεων των μαθητών προέκυψαν εκ των υστέρων με βάση τις ομοιότητες στις εξηγήσεις που έδωσαν προκειμένου να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις και τα προβλήματα.

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους της έρευνας σχετικά με τα ερωτήματα Α1 και Α2 παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα. (στον Πίνακα 1 όπως και σε επόμενους πίνακες το άθροισμα όλων των ποσοστών δεν είναι 100 καθώς υπάρχει και ένα ποσοστό μαθητών που δεν έχουν απαντήσει στο συγκεκριμένο ερώτημα κάθε φορά).

Ερωτήματα	Απαντήσεις	Αριθμός μαθητών %
Α1: Ποιος ο μεγαλύτερος φυσικός;	Δεν υπάρχει	35,7%
	Το άπειρο	29,3%
	Συγκεκριμένος φυσικός αριθμός	32,8%
Α2: Ποιος ο μικρότερος δεκαδικός;	Συγκεκριμένος δεκαδικός	55,7%
	Είναι άπειροι	25%
	Δεν υπάρχει	17,8%

Πίνακας 1: Απαντήσεις των μαθητών στα ερωτήματα Α1 και Α2.

Σχετικά με την ερώτηση Α1, περίπου τα δύο τρίτα των μαθητών αναφέρουν ή ότι δεν υπάρχει κανένας (50 μαθητές, 35,7%), ή ότι είναι το άπειρο (41 μαθητές, 29,3%). Η απάντηση ότι δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός δικαιολογείται με τις σκέψεις ότι ''ίσως δεν το έμαθαν ακόμη'', ή ότι ''όλοι χρησιμοποιούν μέχρι έναν σχεδόν συγκεκριμένο αριθμό γιατί δεν γνωρίζουν το όνομα του πιο μεγάλου'', ή ότι ''η επιστήμη δεν το έχει απαντήσει ακόμη''. Επίσης, καθώς η αρίθμηση δεν σταματά ποτέ, πάντα μπορούμε να βρούμε ένα μεγαλύτερο αριθμό, αν και τελικά, κάθε αριθμός που χρησιμοποιούμε, πρέπει να συνδέεται με κάποιο τρόπο με την πραγματικότητα. Πρέπει επομένως να ψάχνουμε ένα ''χρηστικό'' αριθμό, ''χρησιμοποιήσιμο'', που εκφράζει κάτι πολύ συγκεκριμένο και κατανοητό. Οι μαθητές που προτείνουν το άπειρο το ονομάζουν ως τον μεγαλύτερο αριθμό γιατί έχει τα περισσότερα μηδενικά ή ίσως ''επειδή είναι και κάτι περισσότερο από αριθμός''. Εκφράζουν και την ιδέα ότι οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ γιατί είναι άπειροι, επομένως δεν μπορούμε να κατονομάσουμε τον μεγαλύτερό τους.

Συγκεκριμένο αριθμό προτείνουν 46 μαθητές (32,8%). Η δυναμική της ιδέας ότι κάθε αριθμός έχει τον μεγαλύτερό του και ότι όλο αυτό το φάσμα των αριθμών στηρίζεται στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, οδηγεί τους μαθητές σε συγκεκριμένες προτάσεις-στρατηγικές διερεύνησης, αν υπάρχει ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, ποιος είναι ή πώς μοιάζει. Επομένως σύμφωνα με τους μαθητές η μονάδα (1) μπορεί να είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός γιατί ως αρχικός ή ελάχιστος συμβάλλει στη δημιουργία όλων των επόμενων. Επίσης ο μεγαλύτερος αριθμός είναι το 9 γιατί είναι ο τελευταίος στη σειρά των μονοψήφιων αριθμών, βάσει των οποίων δημιουργούνται έπειτα όλοι οι αριθμοί, ή το 10 γιατί μέχρι εκεί μαθαίνουμε στην πρώτη τάξη και γιατί από το 10 και μετά φαίνεται να υπάρχει μια διαρκής επανάληψη, συνδυασμοί των ίδιων ψηφίων. Μορφή που εμπνέει ως ο μεγαλύτερος αριθμός είναι είτε το 1 με πολλά, μηδενικά, είτε το 9 με πολλά, μηδενικά ή εννιάρια.

Στην ερώτηση Α2, σε αντίθεση με την ερώτηση Α1, οι περισσότεροι μαθητές (78 μαθητές, 55,7%), απάντησαν μ' ένα συγκεκριμένο αριθμό. Η επικρατούσα μορφή είναι ο 0,000…0001, ένας αριθμός που πρακτικά, όπως σκέφτονται οι μαθητές, δε μετρά τίποτα. Είναι παράξενο που την ίδια άποψη συναντάμε και για τα χιλιοστά: ''το 0,001 δείχνει χιλιοστά, και είναι πάρα πολύ μικρό, δεν μπορείς να μετρήσεις τίποτα'', πόσο μάλλον ένας ακόμη μικρότερος όπως ο 0,00000…1 που ''στις πράξεις δεν μετράει'', αλλά που δεν γνωρίζουν επίσης πώς θα τον διάβαζαν. Αναφέρουν ακόμη και το 0, καθώς ως φυσικός αριθμός είναι ο μικρότερος που γνωρίζουν.

Αρκετοί μαθητές (35 μαθητές, 25%), σκέφτονται ότι αναλογικά με τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό που δεν υπάρχει, γιατί οι φυσικοί είναι άπειροι, επίσης, ούτε ο μικρότερος δεκαδικός υπάρχει, διότι και οι δεκαδικοί αριθμοί είναι άπειροι: ''Όπως οι φυσικοί αριθμοί δεν έχουν τέλος οι δεκαδικοί δεν έχουν αρχή'', θεωρώντας προφανώς ως αρχή τον μικρότερο δεκαδικό. Επίσης, οι υπόλοιποι 25 μαθητές (17,8%), συμπληρώνουν ότι δεν πρέπει να υπάρχει ο μικρότερος δεκαδικός: ''Ούτε και οι επιστήμονες έχουν βρει την κατάλληλη λύση σε αυτό το ερώτημα, αφού δυσκολεύονται να μετρήσουν, μια που πάντα υπάρχει μικρότερο από το μικρό και πρέπει να ερευνούν χρόνια''.

Ο πίνακας 2 δείχνει τις απαντήσεις των μαθητών στα ερωτήματα Α3, Α4, Α5 και Α6.

Ερωτήματα	Απαντήσεις	Αριθμός μαθητών %
Α3: Ποιοι είναι περισσότεροι οι περιττοί ή οι άρτιοι;	Ίσοι στο πλήθος	52,1%
	Οι άρτιοι	37,1%
	Οι περιττοί	8,5%
Α4: Ποια είναι περισσότερα τα πολ. του 2 ή του 3;	Ίσα στο πλήθος	45%
	Του 2	27,1%
	Του 3	27,1%
Α5: Υπάρχουν περισσότεροι κλασματικοί ανάμεσα:	Στο 1 έως το 3	47,1%
	Στο 1 έως το 2	9,3%
	Ίσοι στο πλήθος	25%
Α6: Είναι ο δεκαδικός 0,999… ίσος με τη μονάδα;	Όχι	63,5%
	Ναι	32,1%

Πίνακας 2: Απαντήσεις των μαθητών στα ερωτήματα Α3, Α4, Α5 και Α6.

Στην ερώτηση Α3 αναπτύσσουν ενδιαφέρουσες τεχνικές για τη μέτρηση ή την σύγκριση άρτιων με περιττούς όπως το να μοιράζεται στη μέση το “ άπειρο”, ή ότι “ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς περιττούς υπάρχει ένας άρτιος” και αντίστροφα. Έτσι περισσότεροι από τους μισούς μαθητές (73 μαθητές, 52,1%) σκέφτονται ότι “οι περιττοί αριθμοί είναι ίσοι στο πλήθος με τους άρτιους”. Περιττοί και άρτιοι “ανεβαίνουν ” ανά δύο και “πάει” ένας περιττός ένας άρτιος, επομένως αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο. Η μέτρησή τους, τόσο των περιττών όσο και των άρτιων είναι αδύνατη αφού οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ επομένως και οι δύο κατηγορίες έχουν άπειρους αριθμούς και έτσι έχουν το ίδιο πλήθος.

Αρκετοί μαθητές (52 μαθητές, 37,1%) πιστεύουν ότι περισσότεροι είναι οι άρτιοι από τους περιττούς δίνοντας την απάντηση ότι “το 2, ως πρώτος άρτιος, είναι μεγαλύτερος από το 1 που είναι ο πρώτος περιττός”. Επίσης αναφέρουν ότι “επειδή οι άρτιοι όλοι διαιρούνται με το 2, είναι πολλαπλάσια του 2, και το 2 έχει τα περισσότερα πολλαπλάσια από κάθε άλλο αριθμό”. Κάποιοι λίγοι μαθητές σκέφτονται ότι οι περιττοί είναι περισσότεροι “γιατί αρχίζουν νωρίτερα από τους άρτιους, αρχίζουν από το 1”.

Στην ερώτηση Α4, περίπου οι μισοί μαθητές (63 μαθητές, 45%), απάντησαν ότι τα πολλαπλάσια των δύο ακεραίων είναι ίσα στο πλήθος, “γιατί είναι άπειρα”. Οι μαθητές σκέφτηκαν ότι “δεν υπάρχει ένα όριο όπου σταματούν τα πολλαπλάσια του 2 ή του 3”, ή θεωρούν ότι σταματούν ‘‘ σ’ ένα συγκεκριμένο αριθμό στο άπειρο’’, το οποίο ερμηνεύουν ότι ‘‘οι αριθμοί και τα πολλαπλάσιά τους δεν τελειώνουν ποτέ’’. Επίσης είναι ίσα στο πλήθος, γιατί ‘‘μπορούμε με την πράξη του πολλαπλασιασμού να φτιάχνουμε ίδιο αριθμό πολλαπλασίων αφού πολλαπλασιάζουμε το 2 ή το 3 αντίστοιχα με τους ίδιους φυσικούς αριθμούς’’. ‘‘Έτσι είναι φτιαγμένη η προπαίδεια και τα πολλαπλάσια των αριθμών είναι ίσα’’. Με ανάλογο συλλογισμό οι μαθητές αναφέρουν ότι είναι ίσα ‘‘διότι για παράδειγμα μόλις φτάσουμε στο 20 (2Χ10) ή στο 30 (3Χ10), έχουμε από δέκα πολλαπλάσια για κάθε αριθμό, και έχουμε πολλαπλασιάσει τον αριθμό ακριβώς μέχρι το δέκα’’.

Σε αντίθεση με τα ερωτήματα Α3 και Α4 στην ερώτηση Α5, οι περισσότεροι μαθητές, (47,1%, 66 μαθητές) απάντησαν ότι από το 1 έως το 3 οι ευκαιρίες να φτιάξουμε κλασματικούς αριθμούς είναι περισσότερες. Σκέφτονται ότι από το 1 έως το 3 ο ‘‘χώρος’’ ;ή το ‘‘διάστημα’’ για τους κλασματικούς αριθμούς είναι μεγαλύτερος, γιατί είναι μεγαλύτερο το ‘‘κενό’’ ανάμεσά τους ή ‘‘το 3 είναι μεγαλύτερο από το 2’’ και από το 1 έως το 3 διανύουμε και τους κλασματικούς αριθμούς από το 1 έως το 2. Ακόμη παρουσιάζεται η άποψη ότι αφού οι αριθμοί 1, 2, 3 είναι περισσότεροι από τους αριθμούς 1, 2 επομένως μπορούμε να έχουμε περισσότερους συνδυασμούς όπως 1|3, 2|3…’’. Προκύπτουν βέβαια ερωτήματα τι εννοούν οι μαθητές όταν αναφέρονται στο διάστημα μεταξύ των αριθμών, στο χώρο ή στο κενό που υπάρχει.

Λίγοι μαθητές (13 μαθητές, 9,3%) απαντούν ότι ανάμεσα στο 1 έως 2 υπάρχουν περισσότεροι κλασματικοί αριθμοί γιατί ‘‘είναι οι αρχικοί αριθμοί’’, ή ‘‘όσο μικρότεροι είναι οι αριθμοί τόσο και πιο πολλοί αριθμοί υπάρχουν ανάμεσά τους’’.

Περίπου το ένα τέταρτο των μαθητών (35 μαθητές, 25%), δίνει την απάντηση ότι το πλήθος των κλασματικών αριθμών στις παραπάνω περιπτώσεις είναι ίδιο γιατί ανάμεσα στο 1 έως 2 και στο 1 έως 3 οι κλασματικοί αριθμοί είναι αμέτρητοι, άπειροι και ‘‘άπειρο=άπειρο’’, ή ‘‘επειδή οι αριθμοί 1, 2, 3 έχουν ίδια πολλαπλάσια’’. Επίσης αναφέρουν ότι ‘‘ανάμεσα στους παραπάνω αριθμούς έχουμε ακριβώς ίδια κλάσματα και θα βοηθηθούμε να τα βρούμε αν τα κάνουμε ομώνυμα ή ισοδύναμα’’.

Τέλος στην ερώτηση Α6 οι περισσότεροι μαθητές (89 μαθητές, 63,5%) θεωρούν ότι αν και διαφέρουν κατά μια ‘‘απειροελάχιστη’’ ποσότητα ο δεκαδικός 0,9999999… δεν είναι ίσος με την μονάδα, γιατί ένας δεκαδικός δεν μπορεί να είναι ίσος με ένα ακέραιο. Αναφέρονται σε ‘διαφορά απόστασης’’ μεταξύ των αριθμών 0,9999999… και 1, ελάχιστη αλλά υπαρκτή, ή οποία τελικά περιέχει τον αριθμό που υπολείπεται της μορφής 0,000…1 ή και κάτι αδιευκρίνιστο (τι τελικά περιέχει το διάστημα ανάμεσα στους δύο αριθμούς είναι ερώτημα προς διερεύνηση), αλλά που δεν επιτρέπει την ισότητα του δεκαδικού με τη μονάδα. Για την μικρή διαφορά μεταξύ των αριθμών δίνουν και τις απαντήσεις 0,1 ή 0,111… . Αρκετοί μαθητές (45 μαθητές, 32,1%), θεωρούν ότι ο δεκαδικός 0,9999999… ‘‘εξισώνεται’’ με τη μονάδα λόγω πολύ ελάχιστης διαφοράς και ‘‘των άπειρων 9 που συνεχώς προσθέτουμε στο τέλος του’’, όπως επίσης χάρη της στρογγυλοποίησης και ότι πρακτικά, ‘‘στη ζωή δεν υπολογίζουμε ποτέ τόσο μικρές διαφορές’’. Επομένως οι δύο αριθμοί εξισώνονται λόγω χρήσης και όχι λόγω μαθηματικής πρακτικής.

Συνοπτικά στα παραπάνω ερωτήματα οι περισσότεροι μαθητές: α) έχουν απαντήσει ότι δεν υπάρχει ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, β) έχουν προτείνει ένα δεκαδικό αριθμό ως μικρότερο από όλους τους δεκαδικούς, γ) αναφέρουν ότι το πλήθος των άρτιων με τους περιττούς είναι το ίδιο, δ) προτείνουν ίσο το πλήθος των πολλαπλασίων του 2 με τα πολλαπλάσια του 3, ε) θεωρούν ότι στο διάστημα 1 έως 3 θα έχουμε περισσότερους κλασματικούς αριθμούς, και στ) σχετικά με την ερώτηση Α6 πολύ περισσότεροι από τους μισούς δεν θεωρούν τον αριθμό 0,999999999 … ίσο με τη μονάδα. Τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια του μαθηματικού άπειρου είτε ως αριθμό είτε ως μια συνεχιζόμενη διαδικασία και επηρεάζονται από τη διατύπωση του ερωτήματος (π.χ. φυσικοί – δεκαδικοί). Επίσης η σύγκριση ισοδύναμων συνόλων φαίνεται να είναι πιο πρόσφορη γι’ αυτούς σε σχέση με τη σύγκριση συνόλων όπου το ένα είναι υποσύνολο του άλλου (ερωτήματα 3,4,5). Τέλος, αναμενόμενη δυσκολία φαίνεται να υπάρχει στο πώς μια άπειρη διαδικασία οδηγεί σε ένα μαθηματικό αντικείμενο (ερώτημα 6).

Τα αποτελέσματα του δεύτερου μέρους της έρευνας παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα (Πίνακας 3) εμφανίζοντας συνοπτικά τις απαντήσεις των μαθητών σε κάθε πρόβλημα.

Προβλήματα	Απαντήσεις	Αριθμός μαθητών %
Πρόβλ. 1^{0} (το δωμάτιο)	Διασχίζουμε το δωμάτιο	60,7%
	Δεν το διασχίζουμε	32,8%
Πρόβλ. 2^{0} (ξενοδοχείο το άπειρο)	Θα φιλοξενηθούν	51,4%
	Δεν θα φιλοξενηθούν	43,5%
Πρόβλ. 3^{0} (το ευθ.τμήμα)	Η διαδικασία σταματά	49,2%
	Η διαδικασία δε σταματά	40,7%
Πρόβλ. 4^{0} (το τετράγωνο)	Η διαδικασία σταματά	10,1%
	Η διαδικασία δε σταματά	85,7%

Πίνακας 3: Απαντήσεις των μαθητών στα τέσσερα προβλήματα

Στο πρώτο πρόβλημα “της μετακίνησης από την μια άκρη ενός δωματίου στην άλλη”, 85 μαθητές (60,7%) απαντούν σύμφωνα με την εμπειρία τους: “με όποιο τρόπο και να το κάνουμε κάποτε θα φτάσουμε στην άλλη άκρη του δωματίου”. Πρακτικά κάπου υπάρχει το “τέλος” του δωματίου, και κάποια στιγμή η “υπολειπόμενη απόσταση” θα είναι τόσο μικρή “που πιθανά δεν θα χωρά καν το πόδι μας και ήδη θα ακουμπάμε τον απέναντι τοίχο”. Αφού μας δίνονται “άπειρες ευκαιρίες” ενώ το δωμάτιο δεν είναι “άπειρο”, η απόσταση δεν είναι “ανεξάντλητη” και θα φτάσουμε στην άλλη άκρη χωρίς να μπορούμε να υπολογίσουμε σε πόσο χρόνο και με την προϋπόθεση ότι δεν θα ‘‘χαθούμε στο μέτρημα’’ και ότι ‘‘δεν θα πάμε προς τα πίσω’’.

Οι 46 μαθητές (32,8%) που ισχυρίζονται ότι δεν θα φτάσουμε ποτέ στην άλλη άκρη επιχειρηματολογούν ότι ‘‘το μισό και το μισό του μισού κ.λπ. ποτέ δεν θα φτάσει να είναι ολόκληρο’’ και δίνουν σειρές αριθμών για την απόσταση που πάντα θα περισσεύει (π.χ. αν το δωμάτιο είναι μήκους 100, τότε έχουμε αρχική απόσταση 100 και στη συνέχεια 50, 75, 87,5, …). Ενδιαφέρουσα είναι η σκέψη ότι καθώς μειώνεται το διάστημα μειώνεται και ο απαιτούμενος χρόνος άρα και η ταχύτητα κίνησης και επομένως βαίνουμε προς μια ‘‘ακινησία’’, ‘‘εκτός και αν η ταχύτητα δεν αλλάζει, επομένως κάποια στιγμή, μέσα στον χρόνο, θα εξαντληθεί το δεδομένο διάστημα’’.

Στο πρόβλημα του ξενοδοχείου, 72 μαθητές (51,4%) ξεκινούν από τη βασική σκέψη που επιβάλλει η εμπειρία, ότι από τους άπειρους πελάτες κάποιοι θα φύγουν, θα αναχωρήσουν, εκτός αν μείνουν περισσότεροι από τους προβλεπόμενους σε κάποια δωμάτια, ή εκτός και αν χρησιμοποιηθούν και άλλοι χώροι όπως σαλόνια, διάδρομοι, κ.ά. Φαίνεται να ψάχνουν να δημιουργήσουν προϋποθέσεις, ώστε να οριοθετήσουν ένα πλαίσιο ‘‘γνωστού προβλήματος’’ (π.χ. τα μέλη μιας οικογένειας μένουν στο ίδιο δωμάτιο ή δύο φίλοι που θα μείνουν μαζί). Κάποιοι καταφεύγουν στις παράξενες ιδιότητες του άπειρου, όπως για παράδειγμα ότι ο αριθμός των δωματίων δεν είναι συγκεκριμένος, είναι άπειρος, επομένως αυτή η αοριστία αφήνει περιθώριο για να τακτοποιηθούν και ‘‘άλλοι πελάτες’’ να μπουν στο χώρο και άλλοι αριθμοί, διότι ‘‘το άπειρο δεν τελειώνει ποτέ, απλά θα γίνει μεγαλύτερο’’, ‘‘άπειρα δωμάτια και δέκα δωμάτια χωρούν άπειρους πελάτες και δέκα πελάτες’’. Οι 61 μαθητές (43,5%) που απαντούν αρνητικά, δηλώνουν ότι αφού δεν υπάρχουν κενά δωμάτια, δεν χωρούν άλλοι πελάτες. Δυσκολεύονται να δώσουν μια μαθηματική λύση στο ποιος θα ήταν ο τρόπος, και απορρίπτουν το πρόβλημα ως αδύνατο.

Στο τρίτο πρόβλημα, σχετικά με το ‘‘χωρισμό ενός ευθυγράμμου τμήματος στο μέσον του, και τη διαρκή επανάληψη της διαδικασίας για κάθε ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει’’, 69 μαθητές (49,2%) προτείνουν ότι η διαδικασία θα σταματήσει, γιατί το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα συγκεκριμένο μήκος, κατά μήκος της κόλλας αναφοράς, οπότε ‘‘ο χώρος θα τελειώσει’’ ή θα γίνει τόσο μικρός που ούτε τις τελίτσες που χρησιμοποιούμε για το χωρισμό στη μέση των συνεχόμενων ευθυγράμμων τμημάτων που προκύπτουν, δεν θα χωρά: ‘‘θα τελειώσει γιατί το μήκος της γραμμής δεν είναι ανεξάντλητο, και κάποια στιγμή δεν θα έχουμε χώρο για να χωρίσουμε στη μέση’’ ή ‘‘γιατί αυτό το ευθύγραμμο τμήμα κάποια στιγμή θα έχει γίνει τόσο μικρό (μια κουκίδα) ώστε να μην μπορεί να διακοπεί άλλο’’.

Λιγότεροι μαθητές (57, 40,7), σκέφτονται ότι αυτή η διαδικασία δεν θα σταματήσει γιατί ψάχνοντας το μισό του μισού οδηγούμαστε σε μια διαδικασία συνεχή, άπειρη, ατέλειωτη ή ‘‘γιατί δημιουργούνται άπειρα ευθύγραμμα τμήματα και χωρίζουμε άπειρες φορές’’. Οι μαθητές σκέφτονται ότι δεν υπάρχει ένα ‘‘όριο’’ (όπως όλοι οι αριθμοί έχουν μισό και διπλάσιο), επομένως όσο μικρό και να μας φαίνεται ‘‘με γυμνό μάτι’’, το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που προκύπτουν, θα δούμε στο μικροσκόπιο ότι ‘‘ η διαδικασία του τεμαχισμού δεν θα σταματάει ποτέ γιατί όλα τα κομμάτια θα έχουν μια μέση’’. Κάποιοι μαθητές σκέφτονται με αριθμητικά δεδομένα: ‘‘το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων συνεχίζει να μικραίνει γιατί υπάρχουν άπειροι αριθμοί όπως: 0,5 ή 0,333 ή 0,888…’’ .

Στο τελευταίο πρόβλημα ‘‘σχετικά με το συνεχώς αυξανόμενο εμβαδόν ενός τετραγώνου’’, η συντριπτική πλειοψηφία (120 μαθητές, 85,7%), απάντησε ότι αυτή η διαδικασία δεν θα τελειώσει ποτέ, γιατί οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι και δημιουργούνται άπειρα εμβαδά (‘‘αυτή η διαδικασία δεν θα σταματήσει ποτέ γιατί θα φτάσει μέχρι το άπειρο[2]’’). Επίσης, αναφερόμενοι στο χώρο θεωρούν ότι το τετράγωνό μας για παράδειγμα ‘‘θα μπορεί να φτάσει όσο μια πόλη ή σε όλο τον κόσμο και ακόμη πιο πέρα, θα μπορεί να γίνει ένα γιγαντιαίο τετράγωνο γιατί είναι ένα άπειρο σχήμα’’. Οι 14 μαθητές (10,1%) που θεωρούν ότι αυτή η διαδικασία θα τελειώσει θέτουν ως όριο το άπειρο ή το αδύνατο της εποπτείας ενός τόσο ‘‘ατέλειωτου σχήματος’’ το οποίο χάνει τελικά το χαρακτήρα του (‘‘γιατί αν αυτό το συνεχίσουμε κάποια στιγμή το τετράγωνο θα μεγαλώσει τόσο πολύ που δεν θα το βλέπουμε ολόκληρο άρα δεν θα είναι τετράγωνο’’).

Στα προβλήματα 1 και 2 που σχετίζονται άμεσα με τις εμπειρίες των μαθητών παρατηρούμε ότι περισσότεροι μαθητές αποδέχονται την επαναλαμβανόμενη άπειρη διαδικασία, ως ολοκληρωμένη –τελειωμένη σε κάποια χρονική στιγμή, που μας αποκαλύπτει τη διαισθητική αντίληψη του άπειρου ως αντικείμενο. Στα προβλήματα 3 και 4 που αναφέρονται σε μια συνεχιζόμενη μαθηματική διαδικασία οι απαντήσεις των μαθητών φαίνεται να επηρεάζονται από το πλαίσιο του προβλήματος. Το τρίτο πρόβλημα μελετά με τη βοήθεια μιας γεωμετρικής αναπαράστασης (ευθύγραμμο τμήμα) τη σύγκριση ενός απειροσύνολου με ένα μέρος του που είναι επίσης απειροσύνολο και το απειροελάχιστο όπου σταδιακά οδηγούμαστε, ενώ το τέταρτο πρόβλημα μελετά την αναπαράσταση του ίδιου απειροσύνολου των τετραγώνων των φυσικών αριθμών με αναλυτική αριθμητική και γεωμετρική αναπαράσταση και το άπειρο του χώρου. Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας το τέταρτο πρόβλημα φαίνεται να είναι πιο πρόσφορο για την ενασχόληση των μαθητών με το άπειρο.

Συζήτηση

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας το άπειρο δεν φαίνεται να προκαλεί εμπόδια στους μαθητές παρά τις εγγενείς δυσκολίες που παρουσιάζει. Χωρίς πολλές αμφιταλαντεύσεις ενεργοποιούν την όποια γνώση τους πάνω στους αριθμούς και απαντούν με επιχειρήματα. Η πρώτη αντιμετώπιση του άπειρου, ως διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ, ή ως ο μεγαλύτερος ή μικρότερος αριθμός, γίνεται ένα ευχάριστο παιχνίδι ώστε να αναπτύξουν σκέψεις και να συλλογιστούν, χωρίς να αναζητούν τη χρησιμότητα που οδηγεί, αν οδηγεί, μετέπειτα σε εφαρμογές. Παρατηρούμε ότι συγκλίνουν τόσο στον τρόπο σκέψης ‘‘δεν υπάρχει ο μεγαλύτερος φυσικός γιατί οι αριθμοί είναι άπειροι’’, ή ‘‘ο μεγαλύτερος αριθμός είναι ο … με άπειρα μηδενικά’’, όσο και στον τρόπο κατανόησης των τάξεων του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και του ρόλου των βασικών του ψηφίων, (‘‘το 9 είναι ο μεγαλύτερος μονοψήφιος’’, ‘‘το 0 είναι ο μικρότερος’’). Το άπειρο ‘‘δεν έχει όριο’’, ή είναι η απάντηση όταν δεν υπάρχει όριο. Ωστόσο, πολλές φορές το μηδέν ή το κενό παρουσιάζονται ως όρια του άπειρου και η μονάδα ως βασικό δομικό συστατικό του, (‘‘το 1 είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός γιατί υπάρχει σε όλους, τους διαιρεί όλους και κάποια στιγμή εκεί καταλήγουν οι αριθμοί’’). Το άπειρο επομένως συνδυάζεται περισσότερο με κάποιους αριθμούς όπως το μηδέν ως, η αρχή των αριθμών, το ξεκίνημα ή το τέλος ενός κύκλου, και μπορεί να δίνει απαντήσεις-λύσεις, μια που με την επαναλαμβανόμενη παρουσία του, μέσα στους αριθμούς, αλλάζει τις ιδιότητές τους κάνοντάς τους άπειρους. Εντυπωσιακή είναι η φιλοσοφική προέκταση των σκέψεων των μικρών μαθητών, όταν δηλώνουν: ‘‘ποτέ και πουθενά δεν υπάρχει τέλος, το τέλος κάθε δρόμου είναι η αρχή κάποιου άλλου’’.

Ενδιαφέρουσες είναι οι ιδιότητες που προσδίδουν οι μαθητές στην έννοια του άπειρου συνόλου, καθώς και οι τεχνικές σύγκρισης που αναπτύσσουν για το απειροσύνολα ώστε να δώσουν ικανοποιητικές εξηγήσεις στις προτεινόμενες από τους ίδιους, λύσεις-απαντήσεις. Το άπειρο μπορεί να ανανεώνεται και να αυξάνεται συνεχώς καθώς είναι ανεξάντλητο. Δημιουργεί επίσης πράξεις και συσχετισμούς με τον ίδιο του τον εαυτό, πολλαπλασιαζόμενο με τον εαυτό του, (άπειρο Χ άπειρο), ή δεχόμενο την πρόσθεση μιας ποσότητας (άπειρο + 10 = άπειρο) ώστε να μην αλλοιώνεται ποσοτικά και να συνεχίζει να είναι σε σχέση ισότητας με τον εαυτό του (π.χ. στο πρόβλημα με το ξενοδοχείο το άπειρο). Ένα άπειρο μπορεί να διατάσσεται σε σχέση με κάποιο άλλο άπειρο, να είναι περισσότερο ή λιγότερο από ένα άλλο άπειρο (π.χ. στη σύγκριση ισοδυνάμων συνόλων).

Παρατηρούμε επίσης ότι σχετικά με το άπειρο του χώρου, η εμπειρία βοηθά τους μαθητές να προσανατολιστούν σε λύσεις στα δύο πρώτα προβλήματα (*της διάσχισης δωματίου και του ξενοδοχείο το άπειρο*), ενώ στο δύο επόμενα (*του χωρισμού ευθυγράμμου τμήματος και του αυξανόμενου τετραγώνου*), όπου υπάρχει καθαρά μαθηματική απεικόνιση, δεν αντλούν στοιχεία άμεσα από την εμπειρία τους, αλλά βοηθούνται με την αναφορά σε αριθμητικά δεδομένα, όπως ότι κάθε αριθμός έχει το μισό του και ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι. Επίσης στο πρώτο και τρίτο πρόβλημα, (που είναι ουσιαστικά η μαθηματική αναπαράστασή του πρώτου), τους προβληματίζει το περιορισμένο του χώρου, του δωματίου από τη μία και της σελίδας από την άλλη, ενώ αντίθετα στο τελευταίο πρόβλημα αναφέρονται στον απεριόριστο χώρο όπου προεκτείνεται συνεχώς το τετράγωνο.

Σύμφωνα με τον Monaghan (2001), η παρουσίαση της έννοιας του άπειρου με τη μορφή προβλημάτων βοηθά περισσότερο τους μαθητές να εκφραστούν με δεδομένο ότι η έννοια του άπειρου δεν υπάρχει στον πραγματικό κόσμο των παιδιών και οι ερευνητές δυσκολεύονται να αναπτύξουν παραδείγματα μέσα από την εμπειρία των μαθητών,

Κλείνοντας θεωρούμε ότι μελλοντικές έρευνες μπορούν να εστιάσουν στη διερεύνηση των χαρακτηριστικών στοιχείων αποτελεσματικών μαθησιακών δραστηριοτήτων για μαθητές αυτής της ηλικίας μέσα στη σχολική τάξη. Η διερεύνηση αυτών των στοιχείων μπορεί να επιτρέψει τη διατύπωση προτάσεων για τη βελτίωση του σχεδιασμού της μαθηματικής εκπαίδευσης και της εμπλοκής των μαθητών με την έννοια του άπειρου.

Αναφορές (References)

Αναπολιτάνος, Δ. Α. (2005). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών.* Αθήνα*:* Εκδόσεις Νεφέλη.

Βαμβακούση, Ξ., & Βοσνιάδου, Σ. (2007). Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα…; Όψεις της κατανόησης των παιδιών για τους ρητούς αριθμούς και το συμβολισμό τους. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή

(Επιμ.), *Πρακτικά του 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ.145-155). Αθήνα: Τυπωθήτω.

Barrow, J. D. (2007*). Άπειρο: Τα μαθηματικά της αθανασίας*. Αθήνα: Εκδόσεις Τραυλός.

Davis, P.I., & Hersh, R. (1981). *Η μαθηματική εμπειρία.* Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 385- 414.

Falk, R., Gassner, D., Ben Zoor, F., & Ben Simon, K. (1986). How do children cope with the infinity of numbers? *In Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 13-18). London, England: University of London Institute of Education.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 3-40.

Καφούση, Σ., & Χαβιάρης, Π. (2013). *Σχολική τάξη, οικογένεια, κοινωνία και μαθηματική εκπαίδευση.* Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Mamolo, A., & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education, 10*(2), 167-182.

Monaghan, J. (1986) *Adolescents' understanding of limits and infinity.* Unpublished PhD thesis, University of Warwick.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 239-257.

Núñez, R. (1994). Cognitive development and infinity in the small: Paradoxes and consensus. *http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/publications.html*

Tall, D., & Schwarzenberger, L.(1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82,* 44-49.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (1996). The role of representations in student's intuitive thinking about infinity. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27*, 33-40.

Tsamir, P. (1999). When 'the same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics, 38* , 289-307.

Τσαμπουράκη, Α., & Καφούση, Σ. (2014). Η έννοια του απείρου-Σκέψεις και προσεγγίσεις από μαθητές της Στ τάξης Δημοτικού. *Πρακτικά 31ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, 940-949.*