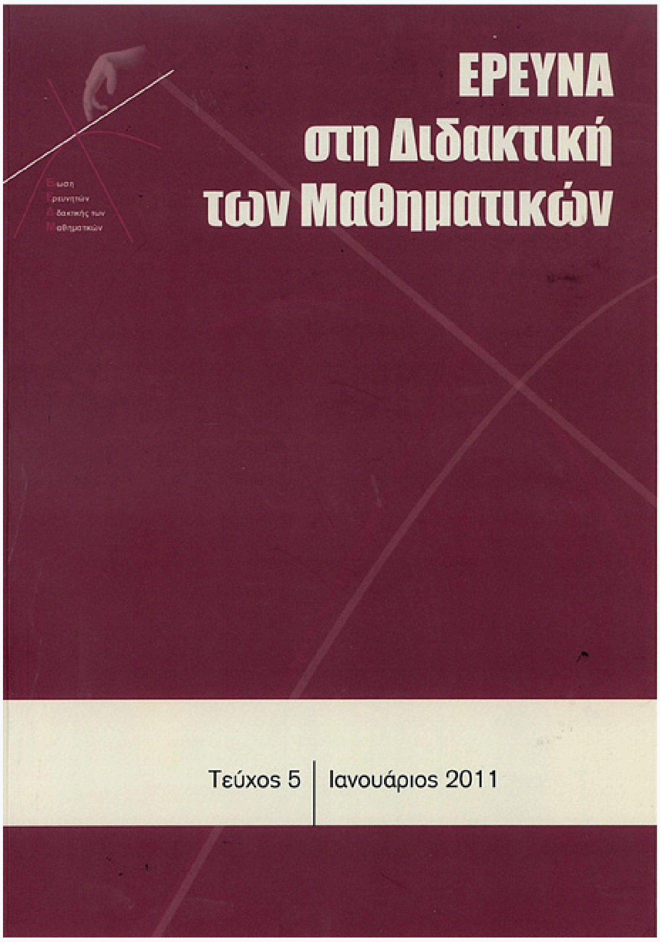
Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 5 (2010)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Η Έννοια του Γεωμετρικού Στερεού: Ψυχολογική, Επιστημολογική και Διδακτική Προσέγγιση

Χρήστος Μαρκόπουλος (Christos Markopoulos)

doi: [10.12681/enedim.15029](https://doi.org/10.12681/enedim.15029)

Η Έννοια του Γεωμετρικού Στερεού: Ψυχολογική, Επιστημολογική και Διδακτική Προσέγγιση

Χρήστος Μαρκόπουλος, Πανεπιστήμιο Πατρών

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η διαμόρφωση ενός θεωρητικού πλαισίου για την δημιουργία ενός περιβάλλοντος διδασκαλίας και μάθησης των γεωμετρικών εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, προτείνεται ότι η διδασκαλία και μάθηση των γεωμετρικών εννοιών θα πρέπει να βασίζεται στην ανάλυση αλλά και σύνθεση τριών βασικών προσεγγίσεων, την ψυχολογική, επιστημολογική και διδακτική. Η ψυχολογική θεώρηση περιλαμβάνει την διερεύνηση των γνωστικών αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με την έννοια του γεωμετρικού στερεού. Η επιστημολογική ανάλυση της έννοιας συμβάλει στην διερεύνηση και ανάδειξη των επιμέρους χαρακτηριστικών της συγκεκριμένης έννοιας. Τέλος η διδακτική προσέγγιση θέτει τα απαραίτητα χαρακτηριστικά ενός μαθησιακού περιβάλλοντος. Η σύνθεση των τριών προσεγγίσεων κρίνεται απαραίτητη για την δημιουργία ενός περιβάλλοντος διδασκαλίας και μάθησης της έννοιας του γεωμετρικού στερεού. Η διαμόρφωση λοιπόν του συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου μελέτης της έννοιας του γεωμετρικού στερεού αποτελεί την βάση ανάπτυξης ενός δυναμικού περιβάλλοντος μάθησης. Τα δεδομένα που παρουσιάζονται στην συγκεκριμένη έρευνα περιορίζονται στην ανάλυση ενός διδακτικού επεισοδίου σε μια Στ΄ τάξη Δημοτικού όπου εφαρμόστηκε το δυναμικό περιβάλλον μάθησης που αναπτύχθηκε. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης του διδακτικού επεισοδίου φανερώνουν ότι η δημιουργία ενός δυναμικού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη συμβάλλει στην ανάπτυξη της γεωμετρικής γνώσης και σκέψης των μαθητών σχετικά με την έννοια του γεωμετρικού στερεού.

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που στοχεύει στη διερεύνηση της σημασίας ενός δυναμικού περιβάλλοντος στην ανάπτυξη και εξέλιξη των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με την έννοια του γεωμετρικού στερεού. Η ανάπτυξη του συγκεκριμένου περιβάλλοντος μάθησης βασίζεται στην διαμόρφωση ενός θεωρητικού πλαισίου μελέτης της έννοιας του γεωμετρικού στερεού.

Το θεωρητικό αυτό πλαίσιο περιλαμβάνει τρεις άξονες: τις ψυχολογικές θεωρήσεις ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, την επιστημολογική ανάλυση της έννοιας του γεωμετρικού στερεού αλλά και την διδακτική προσέγγιση που κρίνεται απαραίτητη. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνει, α) τον τρόπο με τον οποίο "μαθαίνουν" τα παιδιά γεωμετρία, βάσει των κυριοτέρων θεωριών μάθησης των γεωμετρικών εννοιών, β) την έννοια του γεωμετρικού στερεού μέσα από την επιστημολογική ανάλυση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της και γ) την ανάλυση των χαρακτηριστικών του διδακτικού περιβάλλοντος που στοχεύει στην διδασκαλία και μάθηση της συγκεκριμένης έννοιας.

Στη διεθνή βιβλιογραφία παρουσιάζονται αρκετές έρευνες που στοχεύουν στη διερεύνηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών όσον αφορά τα τρισδιάστατα γεωμετρικά στερεά. Παρ' όλα αυτά όμως, στις περισσότερες από αυτές διερευνώνται οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τις αναπαραστάσεις των στερεών στο επίπεδο (Bishop, 1979; Mitchelmore, 1980). Ακόμα όμως και σ' αυτές τις περιπτώσεις οι επίπεδες αναπαραστάσεις των στερεών μελετώνται κυρίως σε στατικά περιβάλλοντα μάθησης (Chiappini & Lemut, 1992). Άλλες έρευνες ξεπερνούν τους περιορισμούς των στατικών περιβαλλόντων μέσα από τη χρήση προγραμμάτων στον υπολογιστή, επικεντρώνονται όμως στη διερεύνηση της σκέψης των μαθητών στα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (Laborde, 1993).

Επίσης, άλλες έρευνες που μελετούν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών σχετικά με τα γεωμετρικά στερεά επικεντρώνονται στα αναπτύγματα των στερεών (Potari & Spiliotopoulou, 1992; Stylianou, Leikin & Silver, 1999), στις τομές των στερεών (Cooper & Sweller, 1989) και στην ανάπτυξη της έννοιας του όγκου των στερεών (Battista & Clements, 1996).

Η σπουδαιότητα και πρωτοτυπία της παρούσας έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι καταγράφει τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών σχετικά με την έννοια του γεωμετρικού στερεού στο κοινωνικό πλαίσιο της σχολικής τάξης και από την εξέλιξή της όπως αυτή καθορίζεται μέσα από την αλληλεπίδραση με το δυναμικό περιβάλλον.

1. Ψυχολογική προσέγγιση: η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης

Η έρευνα στο χώρο της διδασκαλίας και μάθησης των γεωμετρικών εννοιών έχει βασιστεί κυρίως στις θεωρίες, από τη μια μεριά του Piaget και από την άλλη των van Hiele. Η διαφοροποίηση των δύο θεωριών βασίζεται κυρίως στο γεγονός ότι η θεωρία του Piaget αντιμετωπίζει τη γεωμετρία ως μια επιστήμη του χώρου, ενώ η δεύτερη συνδυάζει τη θεώρηση της γεωμετρίας ως επιστήμης του χώρου αλλά και ως εργαλείου ανάδειξης μιας μαθηματικής δομής (Hershkowitz, 1990).

Ο Piaget, μέσα από τις έρευνές του, προτείνει μια αναπτυξιακή ανάλυση της αναπαράστασης του χώρου από τους μαθητές (Piaget & Inhelder, 1956; Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960). Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι οι νοερές αναπαραστάσεις που δημιουργούν οι μαθητές για το χώρο μέσα στον οποίο ενεργούν, κατασκευάζονται μέσω μιας εξελικτικής οργάνωσης των κινητικών ενεργειών και των αναστοχασμών τους πάνω σε αυτές τις ενέργειες. Επομένως, η νοερή αναπαράσταση του χώρου που κατασκευάζει κάποιος μαθητής δεν αποτελεί απλώς ένα αντιληπτικό «διάβασμα» του χωρικού περιβάλλοντος, αλλά βασίζεται στις προηγούμενες ενέργειές του σε αυτό το περιβάλλον. Συνοπτικά, η θεωρία επικεντρώνεται στην επίδραση της ηλικιακής ανάπτυξης των μαθητών στους μετασχηματισμούς του πραγματικού χώρου σε νοερές αναπαραστάσεις, αλλά και στα χαρακτηριστικά των πραγματικών αντικειμένων, που παραμένουν αμετάβλητα κατά τους μετασχηματισμούς αυτούς.

Επίσης, σημαντική ήταν και η συμβολή της θεωρίας των van Hiele στη διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με τις γεωμετρικές έννοιες. Συγκεκριμένα, διακρίνονται ιεραρχικά και ποιοτικά διαφορετικά επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (van Hiele, 1986; Crowley, 1987; Clements & Battista, 1992). Τα επίπεδα που διακρίνονται είναι τα εξής:

- *Επίπεδο σφαιρικής ή ολικής αντίληψης:* Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές έννοιες με βάση τη φυσική τους εμφάνιση. Για παράδειγμα, τα γεωμετρικά σχήματα αναγνωρίζονται με βάση τη μορφή τους ως ολότητα και όχι με βάση τις επιμέρους ιδιότητές τους.
- *Επίπεδο ανάλυσης:* Οι μαθητές αναγνωρίζουν και περιγράφουν τις ιδιότητες του κάθε σχήματος. Η αναγνώριση σε αυτό το στάδιο δε βασίζεται στη μορφή του σχήματος αλλά στις ιδιότητές του. Παρ' όλα αυτά, οι μαθητές δεν είναι ικανοί να κατασκευάζουν συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών σχημάτων.
- *Επίπεδο άτυπης παραγωγικής σκέψης:* Οι μαθητές κατασκευάζουν συσχετίσεις τόσο μεταξύ του σχήματος και των ιδιοτήτων του όσο και μεταξύ διαφορετικών σχημάτων. Παρ' όλα αυτά, για την αιτιολόγηση των απόψεών τους χρησιμοποιούν άτυπους συλλογισμούς. Έτσι, διαμορφώνονται απλές συνεπαγωγές, που δεν αποτελούν όμως τυπική μαθηματική απόδειξη.
- *Επίπεδο παραγωγικής σκέψης:* Σε αυτό το στάδιο ανάπτυξης οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σπουδαιότητα της συνεπαγωγής ως αποδεικτικής μεθόδου. Οι αιτιολογήσεις τους έτσι έχουν τη μορφή της τυπικής μαθηματικής λογικής.
- *Επίπεδο αυστηρότητας – τυπικής λογικής:* Οι μαθητές σε αυτό το στάδιο μπορούν να εργαστούν σε διαφορετικά αξιωματικά συστήματα, όπως οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Τα επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης που μόλις περιγράψαμε είναι διακριτά και διαφορετικά όσον αφορά τη γνωστική ικανότητα των μαθητών. Επιπλέον, η εξέλιξη από το ένα στάδιο στο επόμενο είναι σειριακή και ιεραρχική και δεν εξαρτάται από την ηλικία ή το βαθμό ωριμότητας του μαθητή. Το πέρασμα από το ένα στάδιο στο επόμενο προϋποθέτει την εμφάνιση και χρήση ενός νέου συστήματος γλωσσικών συμβόλων.

Αρκετοί ερευνητές έχουν αναγνωρίσει τη συμβολή της συγκεκριμένης θεωρίας στην ερευνητική περιοχή με αντικείμενο τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές έννοιες (Wilson, 1986; Hershkowitz, 1989; Warren & English, 1995). Ο Pegg (1997) επέκτεινε τα επίπεδα αυτά στην προσπάθειά του να διερευνήσει τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών σχετικά με τα γεωμετρικά στερεά. Οι έρευνες που ακολούθησαν αξιοποίησαν τα επίπεδα της θεωρίας ως μέθοδο αξιολόγησης και κατηγοριοποίησης των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με την έννοια του γεωμετρικού στερεού (Lawrie, Pegg & Gutierrez, 2002; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991; Pandiscio & Orton, 1998). Επιπλέον, η μεθοδολογία των ερευνών περιλάμβανε τη συγκριτική μελέτη της γνωστικής επίδοσης μαθητών διαφορετικών ηλικιακών ομάδων στα μεθοδολογικά πλαίσια συνεντεύξεων, ερωτηματολογίων ή τεστ. Συμπερασματικά, οι αντίστοιχες έρευνες που μελετούν τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του γεωμετρικού στερεού ασχολούνται με το χαρακτηρισμό και όχι την εξέλιξή τους.

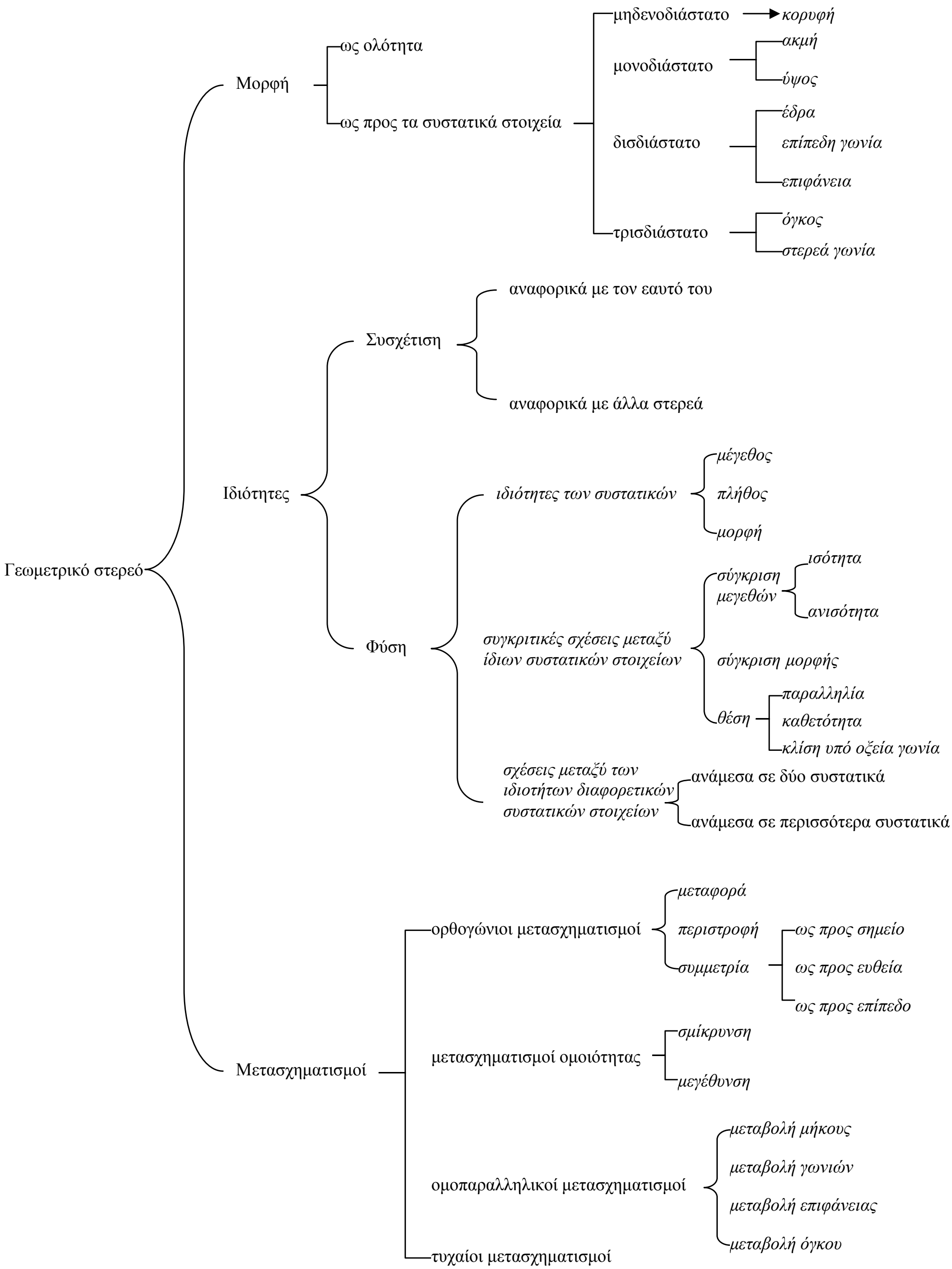
Επιπλέον, πέρα από τις δύο βασικές θεωρίες που επηρέασαν την έρευνα στο χώρο της μελέτης των γεωμετρικών αντιλήψεων των μαθητών, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε και στη φύση των γεωμετρικών εννοιών. Ο Fischbein (1993) εισάγει τον όρο των «σχηματικών εννοιών», υποστηρίζοντας ότι όλα τα γεωμετρικά σχήματα αναπαριστάνουν νοητικές κατασκευές που περιλαμβάνουν τόσο εννοιολογικά όσο και σχηματικά χαρακτηριστικά. Υποστηρίζει ότι το γεωμετρικό σχήμα δεν είναι μια απλή έννοια, αλλά μια έννοια που σχετίζεται με τη νοερή εικόνα της. «Κατέχει μια ιδιότητα που οι υπόλοιπες μαθηματικές έννοιες δεν κατέχουν, δηλαδή περιλαμβάνει τη νοερή αναπαράσταση της ιδιότητας του χώρου» (Fischbein, 1993, σ. 141). Ειδικότερα, η νοερή εικόνα του γεωμετρικού σχήματος πρέπει να συνδέεται με τον ορισμό του, τις απαραίτητες ιδιότητές του, προκειμένου να κατασκευαστεί η έννοια του σχήματος. Η Hershkowitz (1990) στην έρευνά της για τη διαδικασία μάθησης βασικών γεωμετρικών εννοιών διαφοροποιεί την έννοια από τη νοερή εικόνα της. Υποστηρίζει ότι η «έννοια» πηγάζει από το μαθηματικό ορισμό και η νοερή εικόνα της έννοιας από την αναπαράστασή της στο μυαλό κάθε μαθητή. Η γεωμετρική έννοια χαρακτηρίζεται από κρίσιμες και μη κρίσιμες ιδιότητες. Οι κρίσιμες ιδιότητες είναι οι ιδιότητες που ένα παράδειγμα έννοιας πρέπει να έχει, ενώ οι μη κρίσιμες ιδιότητες χαρακτηρίζουν μερικά μόνο παραδείγματα εννοιών. Για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι δυνατόν να έχει τις δύο έδρες του τετράγωνες. Αυτή η ιδιότητα δεν είναι κρίσιμη, καθώς δεν είναι απαραίτητη για όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Από την άλλη μεριά, ο ορισμός της γεωμετρικής έννοιας έχει το ρόλο της ταξινόμησης των σχημάτων σε παραδείγματα και μη παραδείγματα της έννοιας. Η Hershkowitz (1990) τονίζει την εμφάνιση των «πρωτοτυπικών» παραδειγμάτων των γεωμετρικών εννοιών. Συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι κάθε γεωμετρική έννοια έχει ένα ή περισσότερα πρωτοτυπικά παραδείγματα τα οποία κατέχουν όλες τις κρίσιμες ιδιότητες της έννοιας, αλλά ταυτόχρονα έχουν και κάποιες μη κρίσιμες, οι οποίες όμως είναι οπτικά πιο ισχυρές. Οι μαθητές τείνουν να αντιλαμβάνονται πρώτα αυτά τα πρωτοτυπικά παραδείγματα των γεωμετρικών εννοιών. Επιπλέον, τα χρησιμοποιούν ως αντιπροσωπευτικά και ως σημείο αναφοράς για να κρίνουν άλλα παραδείγματα των συγκεκριμένων εννοιών. Οι Vinner και Hershkowitz (1983) συνδέουν τέτοιου είδους κρίσεις που βασίζονται σε πρωτοτυπικά παραδείγματα με τα επίπεδα εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης της θεωρίας των van Hiele. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου οι μαθητές αντιλαμβάνονται το πρωτοτυπικό παράδειγμα ως ολότητα και το εφαρμόζουν σε άλλα παραδείγματα, ανήκουν στο πρώτο επίπεδο ανάπτυξης. Από την άλλη μεριά, όταν οι πρωτοτυπικές κρίσεις βασίζονται στις ιδιότητες των παραδειγμάτων, το αντίστοιχο επίπεδο ανάπτυξης είναι το δεύτερο.

2. Επιστημολογική προσέγγιση της έννοιας του γεωμετρικού στερεού

Η επιστημολογική ανάλυση της έννοιας του γεωμετρικού στερεού που παρουσιάζουμε βασίζεται στη «λογική της σημαντικότητας», που εισάγουν οι Piaget και Garcia (1989), παρά σε μια παραδοσιακή λογική ανάλυση. Σύμφωνα με τη θεωρία του Piaget, η δράση και η κίνηση θεωρούνται πρωταρχικά στοιχεία για τη συγκρότηση των μαθηματικών εννοιών από το μαθητή. Έτσι, η ανάλυση του γεωμετρικού στερεού βασίζεται στις πιθανές ενέργειες και γνωστικές λειτουργίες των μαθητών σχετικά με τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Οι γνωστικές λειτουργίες, σύμφωνα με τον Piaget (1972), αποτελούν νοητικές ενέργειες απαραίτητες για την κατασκευή νοητικών σχημάτων, οι οποίες είναι δυνατόν, αλλά όχι απαραίτητο, να συσχετίζονται με κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο.

Το μοντέλο του Piaget επεκτείνεται και εμπλουτίζεται με τη θεωρία του Freudenthal (1991) σχετικά με τις νοητικές δομές. Ειδικότερα, οι μαθηματικές έννοιες χαρακτηρίζονται ως νοητικές δομές, οι οποίες είναι δυνατόν να ταξινομηθούν σε «φτωχές» αλλά και «πλούσιες». Μια μαθηματική έννοια αντιμετωπίζεται ως νοητική δομή με διάφορες μορφές. Για παράδειγμα, η μελέτη της έννοιας ενός πολυέδρου είναι δυνατόν να μελετηθεί από διάφορες οπτικές και να αποτελέσει, επομένως, νοητική δομή με διάφορες μορφές. Πιο συγκεκριμένα, η συνδυαστική δομή περιλαμβάνει τη θεώρηση του πολυέδρου ως δομής που αποτελείται από τα συστατικά στοιχεία του, όπως, για παράδειγμα, οι ακμές, οι έδρες, οι κορυφές. Από την άλλη μεριά, η γεωμετρική, μετρική δομή του πολυέδρου είναι πλουσιότερη από τη συνδυαστική και περιλαμβάνει τις μετρικές ιδιότητες του στερεού, όπως, για παράδειγμα, τη μέτρηση μηκών, γωνιών ή άλλων μεγεθών, την παραλληλία των ακμών ή των εδρών. Μια πλουσιότερη ακόμη δομή του πολυέδρου θα μπορούσε να ήταν το ξεπέρασμα της μέτρησης και σύγκρισης μεγεθών και η διατήρηση της παραλληλίας και της συγγραμμικότητας των σημείων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αναφερόμαστε στην ομοπαραλληλική δομή του πολυέδρου. Η διατήρηση μόνο της συγγραμμικότητας αναφέρεται σε μια πλουσιότερη δομή του πολυέδρου, στην προβολική.

Η ανάλυση της έννοιας του γεωμετρικού στερεού βασισμένη στο προαναφερθέν θεωρητικό πλαίσιο διακρίνεται σε τρεις άξονες:



Σχήμα 1: Ανάλυση της έννοιας του γεωμετρικού στερεού

α. στα στοιχεία που το αποτελούν,

β. στις ιδιότητες που έχουν αυτά τα στοιχεία και

γ. στους πιθανούς μετασχηματισμούς του στερεού μέσα από τη μεταβολή των ιδιοτήτων του.

Μια τέτοια ανάλυση της έννοιας του γεωμετρικού στερεού κρίνεται απαραίτητη προκειμένου να συσχετιστεί με τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι μαθητές την έννοια αυτή και οδηγούνται στην κατανόησή της. Το γεωμετρικό στερεό αναλύεται ως ολότητα ή ως προς τα συστατικά του στοιχεία, ως προς τις ιδιότητές του και, τέλος, ως προς τους μετασχηματισμούς που δρουν σε αυτό και το τροποποιούν. Η ανάλυση του στερεού παρουσιάζεται μέσα από τη δημιουργία του συστημικού δικτύου του Σχήματος 1. Η ανάλυση του συστημικού δικτύου έχει γίνει σε προηγούμενη εργασία (Μαρκόπουλος & Πόταρη, 2001).

3. Διδακτική προσέγγιση της έννοιας του γεωμετρικού στερεού

3.1 Η διερεύνηση της σχολικής τάξης

Η μαθηματική γνώση, σύμφωνα με τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού (constructivism) δεν υφίσταται ως συγκροτημένη αντικειμενική πραγματικότητα την οποία καλούνται οι δάσκαλοι να μεταδώσουν στους μαθητές τους (von Glasersfeld, 1990). Αντίθετα, η γνώση οικοδομείται από τις ενέργειες των μαθητών και τους αναστοχασμούς τους πάνω σ' αυτές. Το να γνωρίζεις κάτι σημαίνει να ενεργείς πάνω σ' αυτό (Confrey, 1995). Έτσι, η μαθηματική γνώση δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητη από αυτόν που προσπαθεί να τη μάθει και να αποτελείται από αυστηρούς ορισμούς, αρχές και διαδικασίες. Αντίθετα, τα μαθηματικά αποτελούν μια δραστηριότητα όπου οι μαθητές μέσα από τις ενέργειές τους κατασκευάζουν συσχετίσεις και νοητικά σχήματα τα οποία εμπλουτίζονται αλλά και ανακατασκευάζονται μέσα από τον αναστοχασμό των ενεργειών (Brown & Wheatley, 1997). Η μαθηματική γνώση αποτελεί κατασκεύασμα μιας δυναμικής σκοποθετικής δραστηριότητας μέσα από την αλληλεπίδραση του υποκειμένου –του μαθητή– σ' ένα περιβάλλον. Μέσα σ' αυτό το περιβάλλον ο μαθητής δρα, αποκτά εμπειρίες, κατασκευάζει νοητικά σχήματα, αλλά και ανακατασκευάζει ή εμπλουτίζει τα σχήματα που προϋπάρχουν (Steffe, 1990).

Η Confrey (1995) ισχυρίζεται ότι η μάθηση αφορά τις αλληλεπιδράσεις των μαθητών με τα διδακτικά αντικείμενα αλλά και με τους άλλους μαθητές. Οι αλληλεπιδράσεις με τα αντικείμενα αλλά και μεταξύ των συμμετεχόντων θεωρείται ένα κρίσιμο σημείο συνδυασμού των δύο θεωριών. Αναγνωρίζεται η σπουδαιότητα των ενεργειών των μαθητών και η ενασχόλησή τους με διάφορα υλικά και εργαλεία. Η επιλογή των διδακτικών υλικών και εργαλείων και οι ενέργειες των μαθητών πάνω σε αυτά επηρεάζει, επομένως, και τις νοητικές λειτουργίες και κατασκευές των μαθητών. Είναι απαραίτητο, επίσης, να αναγνωριστεί και η σπουδαιότητα του αναστοχασμού ως μιας μεθόδου μετατροπής των φυσικών ενεργειών σε νοητικές λειτουργίες. Ο αναστοχασμός στις φυσικές ενέργειες του μαθητή αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο στην νοητική ανάπτυξη του μαθητή, καθώς το μοναδικό σύνολο των χαρακτηριστικών της προσωπικότητας κάθε μαθητή διαμορφώνεται από τις μοναδικές εμπειρίες καθενός. Επίσης, η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση και η ανταλλαγή απόψεων και ιδεών μεταξύ των μαθητών είναι άλλο ένα σημαντικό στοιχείο που συμβάλλει στη διαδικασία της μάθησης και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στη μελέτη και παρατήρηση της σχολικής τάξης (Daniels, 2001).

Η χρήση των διδακτικών υλικών και εργαλείων θεωρούμε ότι αποκτά κυρίαρχο ρόλο στη διαμόρφωση των κατάλληλων πλαισίων συμφραζομένων προκειμένου να μελετηθούν οι ενέργειες και οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη γεωμετρική έννοια του γεωμετρικού στερεού. Όπως υποστηρίζει όμως ο Bauersfeld (1995), τα διδακτικά υλικά καθαυτά και οι ιδιότητές τους δε συντελούν από μόνα τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Αντίθετα, θεωρούμε ότι οι φυσικές ενέργειες των μαθητών πάνω σε αυτά, η αλληλεπίδραση μεταξύ τους αλλά και οι αναστοχαστικοί συλλογισμοί πάνω στις ενέργειες αυτές συμβάλλουν στην κατασκευή ή και ανακατασκευή νοητικών σχημάτων και λειτουργιών των μαθητών σχετικά με τη γεωμετρική έννοια του στερεού (Markopoulos & Potari, 1999).

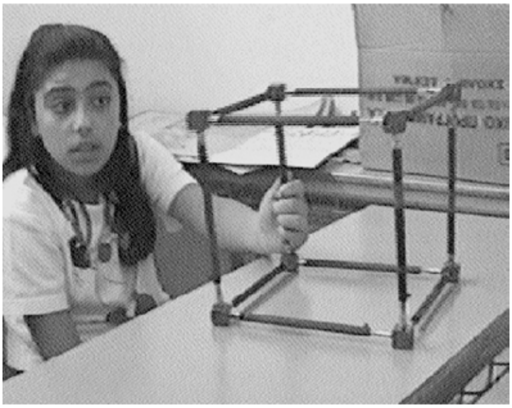
3.2 Τα διδακτικά – δυναμικά εργαλεία

Τα ερευνητικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν για την δυναμική προσέγγιση των γεωμετρικών στερεών είναι: φυσικά μοντέλα και αναπαραστάσεις στον υπολογιστή. Όπως τονίσαμε στα προηγούμενα, για τη διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων αναπτύχθηκαν πλαίσια δραστηριοτήτων τα οποία εξελίσσονται και διαμορφώνονται σε συνδυασμό με τις ενέργειες και τις αλληλεπιδράσεις των συμμετεχόντων στη μαθησιακή διαδικασία. Σημαντικό ρόλο στον καθορισμό των πλαισίων παίζει η ανάπτυξη και χρήση των διδακτικών εργαλείων.

Τα διδακτικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν αποτελούν μοντέλα των γεωμετρικών στερεών. Το κύριο χαρακτηριστικό αυτών των δυναμικών μοντέλων είναι η δυνατότητα που έχουν οι μαθητές να μεταβάλλουν κάποιες από τις ιδιότητές τους και να κατασκευάζουν έτσι διαφορετικά στερεά. Ειδικότερα, οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν και να μεταβάλουν, για παράδειγμα, τα μήκη των ακμών ενός στερεού, τις γωνίες του, τις έδρες του και να μελετήσουν τις αλλαγές που επιφέρουν αυτές οι μεταβολές τόσο στις υπόλοιπες ιδιότητες όσο και στην όλη μορφή του στερεού.

Φυσικά μοντέλα

Τα δυναμικά φυσικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν και καθορίζουν τα δυναμικά πλαίσια είναι τρία γεωμετρικά στερεά που χαρακτηρίζονται από τη δυνατότητα της δυναμικής μεταβολής των ιδιοτήτων τους. Το δυναμικό μοντέλο του κύβου (εικόνα 1), που ονομάζουμε εξαιτίας των χαρακτηριστικών του «αρθρωτό κύβο», είναι ένα εξάεδρο σχηματιζόμενο μόνο από τις 12 μεταλλικές ακμές του.



Εικόνα 1: Ο αρθρωτός κύβος

Εικόνα 2: Το δυναμικό μοντέλο του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Το δεύτερο στερεό μοντέλο (εικόνα 2) είχε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και αποτελείται από 2 παράλληλες ορθογώνιες έδρες και 4 μεταλλικές ακμές με σταθερό μήκος. Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να μεταβάλλουν τις 8 γωνίες των δύο απέναντι εδρών που σχημάτιζαν οι τέσσερις μεταλλικές ακμές με τις δύο παράλληλες ορθογώνιες έδρες, οι οποίες ήταν αμετάβλητες. Οι τέσσερις μεταλλικές ακμές ήταν οι ακμές της παράπλευρης επιφάνειας, ενώ οι δύο ορθογώνιες μεταλλικές έδρες ήταν οι δύο βάσεις του στερεού. Ένα ζευγάρι από τις έδρες της παράλληλης επιφάνειας ήταν δυνατόν να μεταβληθούν, ενώ το άλλο ζευγάρι παρέμενε αμετάβλητο και άλλαζε μόνο ο προσανατολισμός του.

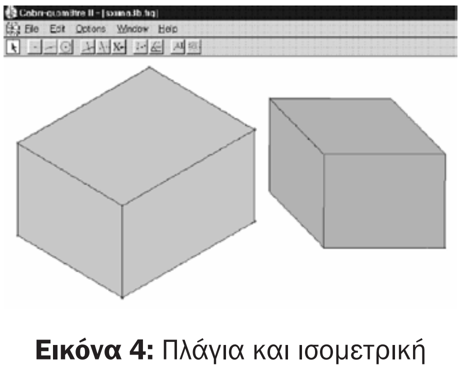
Αναπαραστάσεις των στερεών στον υπολογιστή

Οι δυναμικές αναπαραστάσεις των στερεών στον υπολογιστή, μολονότι χαρακτηρίζονται και αυτές, όπως τα φυσικά δυναμικά μοντέλα, από τη δυνατότητα της δυναμικής μεταβολής των στερεών, διαφοροποιούνται όσον αφορά τις νοητικές λειτουργίες που απαιτούνται. Η χρήση των δυναμικών αναπαραστάσεων στον υπολογιστή δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να περάσουν από τις φυσικές ενέργειες σε περισσότερο νοητικές. Για παράδειγμα, ακόμα και η απλή αναγνώριση των συστατικών στοιχείων του στερεού και των ιδιοτήτων τους απαιτεί νοητικές λειτουργίες και ενέργειες πολυπλοκότερες από τις αντίστοιχες που απαιτούνται στην περίπτωση των φυσικών δυναμικών μοντέλων. Επιπλέον, τα μοντέλα που αναπτύσσονται στο περιβάλλον του υπολογιστή αποτελούν δισδιάστατες αναπαραστάσεις των γεωμετρικών στερεών και η δημιουργία των νοερών εικόνων από τους μαθητές πιθανόν απαιτεί μεγαλύτερο βαθμό αφαίρεσης, καθώς απαιτείται και η κατανόηση της έννοιας της δισδιάστατης αναπαράστασης (Chiappini & Lemut, 1992; Gutierrez, 1996).

Η ανάπτυξη των δυναμικών αναπαραστάσεων στον υπολογιστή βασίστηκε στους δύο τύπους αναπαράστασης των γεωμετρικών στερεών που ακολουθούνται στο σχολικό βιβλίο: την πλάγια προβολή και την ισομετρική προβολή. Τα στερεά αναπαρίστανται στα σχολικά εγχειρίδια κυρίως σε πλάγια προβολή, και αυτός είναι και ο μοναδικός τύπος αναπαράστασης που χρησιμοποιείται τόσο από τους δασκάλους όσο και από τους μαθητές των σχολικών τάξεων. Η ισομετρική προβολή παρουσιάζεται σε μικρότερη συχνότητα και, λόγω της δυσκολίας που περιέχει, δε χρησιμοποιείται στη σχολική τάξη. Η επιλογή των δύο αυτών τύπων θεωρήθηκε απαραίτητη τόσο εξαιτίας της χρήσης τους στο σχολικό εγχειρίδιο όσο και εξαιτίας των διαφοροποιήσεων που έχει η κάθε προβολή.

Η ανάπτυξη και χρήση των δυναμικών αναπαραστάσεων πραγματοποιήθηκαν στο υπολογιστικό περιβάλλον Cabri Geometre II. Το συγκεκριμένο περιβάλλον έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορες διεθνείς έρευνες, όπου αναδείχθηκαν οι δυνατότητές του αλλά και η συμβολή της χρήσης του στην ανάπτυξη διδακτικών δραστηριοτήτων με στόχο την εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (Hoyles, 1995). Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά την πειραματική εφαρμογή του δυναμικού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη ήταν η πλάγια και η ισομετρική προβολή ενός κύβου και ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Και οι τέσσερις αυτές δυναμικές αναπαραστάσεις, δύο διαφορετικές για καθένα από τα στερεά (κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) χαρακτηρίζονται από τη δυνατότητα μεταβολής των διαστάσεων των στερεών. Η δυναμική μεταβολή κάθε διάστασης επιτυγχάνεται μέσα από τη χρήση του δείκτη «κατάδειξης» και μετακίνησης της μίας από τις κορυφές των ακμών που ανήκουν στη συγκεκριμένη διάσταση. Η μετακίνηση της κορυφής έχει ως αποτέλεσμα την παράλληλη μεταβολή του μήκους των τεσσάρων παράλληλων ακμών που ορίζουν την κάθε διάσταση.

Εικόνα 3: Πλάγια και ισομετρική προβολή του κύβου



Εικόνα 4: Πλάγια και ισομετρική προβολή του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

4. Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την επίτευξη των ερευνητικών στόχων αποτελεί μια ποιοτική ερευνητική προσέγγιση που στοχεύει στη διερεύνηση του ρόλου του δυναμικού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη, και συγκεκριμένα στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Η σχολική τάξη αποτελεί ένα πολύπλοκο κοινωνικό περιβάλλον, στα πλαίσια του οποίου λαμβάνει χώρα η διαδικασία της μάθησης. Επομένως, κάθε έρευνα που στοχεύει στη διερεύνηση της διαδικασίας αυτής προϋποθέτει τον αναστοχασμό και την ενσωμάτωση της συγκεκριμένης πολυπλοκότητας (Clarke, 1998). Η πολυπλοκότητα της σχολικής τάξης περιλαμβάνει την κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ όλων των συμμετεχόντων στη μαθησιακή διαδικασία, δηλαδή του δασκάλου, του ερευνητή και των μαθητών. Από την άλλη μεριά, καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση του κοινωνικού περιβάλλοντος της τάξης έχει και η αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων με τα διδακτικά υλικά αλλά και με το αναλυτικό πρόγραμμα. Έτσι, οι δραστηριότητες και ο τρόπος με τον οποίο αυτές εξελίσσονται και προσαρμόζονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, οι ενέργειες του δασκάλου μέσα από τις ερωτήσεις που θέτει, η αλληλεπίδρασή του με τους μαθητές και ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αλληλεπιδρούν μεταξύ τους είναι στοιχεία που συντελούν στη διαμόρφωση του δυναμικού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη.

Παράλληλα με τη μελέτη του κοινωνικού περιβάλλοντος που διαμορφώνεται με τη συγκεκριμένη ερευνητική προσέγγιση, η ατομική γνωστική ανάπτυξη του κάθε μαθητή παραμένει στο επίκεντρο της ερευνητικής διαδικασίας. Όπως προτείνει και η Confrey (1995), μέσα από τη διερεύνηση της εφαρμογής του δυναμικού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη συνεξετάζονται τα κοινωνικο-πολιτισμικά φαινόμενα που εμφανίζονται και η γνωστική εξέλιξη των μαθητών. Σύμφωνα με την κονστρουκτιβιστική θεώρηση, οι ενέργειες των μαθητών και η ενασχόλησή τους με τα διδακτικά εργαλεία κατέχουν κυρίαρχη θέση στην εξέλιξη των αντιλήψεών τους. Επιπλέον, οι αναστοχαστικοί αφαιρετικοί συλλογισμοί των ενεργειών οδηγούν στην κατασκευή ανεπτυγμένων νοητικών σχημάτων.

Η έρευνα, λοιπόν, επικεντρώθηκε στη διερεύνηση της επίδρασης των χαρακτηριστικών του δυναμικού περιβάλλοντος τόσο στις αλληλεπιδράσεις που αναπτύσσονται όσο και στην εξέλιξη των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με την έννοια του γεωμετρικού στερεού.

4.1 Η μεθοδολογία της ανάλυσης των διδακτικών επεισοδίων

Η ποιοτική ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων πραγματοποιείται στο πλαίσιο μιας «θεωρίας στήριξης» (grounded theory). Η θεωρία, όπως υποστηρίζουν οι Strauss και Corbin (1998), απορρέει από τα ίδια τα ερευνητικά δεδομένα, τα οποία έχουν συστηματικά συλλεχθεί και αναλυθεί κατά τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας. Είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι, σύμφωνα με αυτό το μεθοδολογικό εργαλείο, η συλλογή και ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων και η θεωρία που προκύπτει βρίσκονται σε στενή σχέση μεταξύ τους. Όπως προτείνεται, ο ερευνητής δεν ξεκινά την ερευνητική διαδικασία με μια προκαθορισμένη θεωρία, την οποία μέσα από την ανάλυση των δεδομένων επιδιώκει να επιβεβαιώσει ή να απορρίψει. Αντίθετα, ο ερευνητής ξεκινά με μια περιοχή μελέτης και επιτρέπει την ανάδειξη της θεωρίας από τα ερευνητικά δεδομένα.

Συγκεκριμένα, στην παρούσα έρευνα η ανάλυση της διδακτικής προσέγγισης στοχεύει στη διερεύνηση του ρόλου του δυναμικού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη. Η διερεύνηση αυτή αφορά:

- στο πώς υλοποιείται το περιβάλλον αυτό στην τάξη·
- στην επίδρασή του στις ενέργειες και αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με το γεωμετρικό στερεό.

Ο καθορισμός του πλαισίου ανάλυσης της ερευνητικής προσέγγισης στη σχολική τάξη επιτεύχθηκε αρχικά μέσα από μια «τρέχουσα ανάλυση» (on-going analysis) κατά τη διάρκεια της συλλογής των δεδομένων. Αυτού του είδους η αρχική ανάλυση περιλάμβανε μια επαγωγική και περιγραφική διαδικασία. Τα συμπεράσματα για την πειραματική εφαρμογή στις σχολικές τάξεις εξήχθησαν κατά τη διάρκεια της παρατήρησης των σχολικών τάξεων και στηρίχθηκαν στην ανάγνωση των σημειώσεων του ερευνητή και στην παρακολούθηση των μαγνητοσκοπημένων ταινιών. Στη διαμόρφωση των συμπερασμάτων αυτών συνέβαλε και η επικοινωνία με τους εκπαιδευτικούς πριν και μετά από κάθε διδασκαλία.

Αυτή η αρχική μορφή ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων, μολονότι δεν μπορεί να θεωρηθεί πλήρης και σχολαστική, μας δίνει μια γενικότερη άποψη για την πειραματική εφαρμογή στις σχολικές τάξεις, ώστε να αποκτήσουμε μια πρώτη αίσθηση του όγκου και της ποιότητας των δεδομένων, προκειμένου να ακολουθήσει στη συνέχεια η διεξοδική ανάλυσή τους στην επόμενη φάση, στο πλαίσιο της «μικρο-ανάλυσης» (micro-analysis).

Η ανάλυση των χαρακτηριστικών του περιβάλλοντος στη σχολική τάξη είναι δυνατή μόνο μέσα από μια, γραμμή προς γραμμή, εξονυχιστική διερεύνηση των αλληλεπιδράσεων που αναπτύσσονται στη σχολική τάξη μεταξύ των συμμετεχόντων (Bauersfeld, 1988; Voigt, 1996). Η λεπτομερής (γραμμή προς γραμμή) ανάλυση των διδακτικών επεισοδίων κρίνεται απαραίτητη για την κωδικοποίηση των γεγονότων, φαινομένων, ενεργειών ή αλληλεπιδράσεων που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια των διδακτικών επεισοδίων. Η κωδικοποίηση των στοιχείων αυτών θα μας βοηθήσει στην κατηγοριοποίηση τους, προκειμένου να ακολουθήσει η διερεύνηση των συσχετίσεων μεταξύ των κατηγοριών (Cobb & Whitenack, 1996; Strauss & Corbin, 1998).

Πιο συγκεκριμένα, η αρχική επεξεργασία των αποβιντεοσκοπημένων διδασκαλιών είχε ως αποτέλεσμα την καταγραφή των δραστηριοτήτων που αναπτύχθηκαν και, παράλληλα, των ενεργειών και αντιλήψεων των μαθητών πάνω σ' αυτές τις δραστηριότητες. Ειδικότερα, οι δραστηριότητες που ο δάσκαλος έθετε εντοπίστηκαν και καταγράφηκαν σε σχέση με το αντικείμενο μελέτης τους, τις νοητικές δηλαδή ή φυσικές ενέργειες και λειτουργίες που απαιτούνταν από τους μαθητές.

4.2 Η ανάλυση των διδακτικών επεισοδίων

Η μικρο-ανάλυση των αποβιντεοσκοπημένων διδακτικών επεισοδίων περιλαμβάνει αρχικά τον εντοπισμό και την καταγραφή των δραστηριοτήτων που τίθενται κάθε φορά από το δάσκαλο. Στη συνέχεια ακολουθεί η καταγραφή του πλαισίου δραστηριοτήτων, τα είδη των μετασχηματισμών που τυχόν περιλαμβάνουν και το είδος του ερευνητικού εργαλείου που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές κάθε φορά.

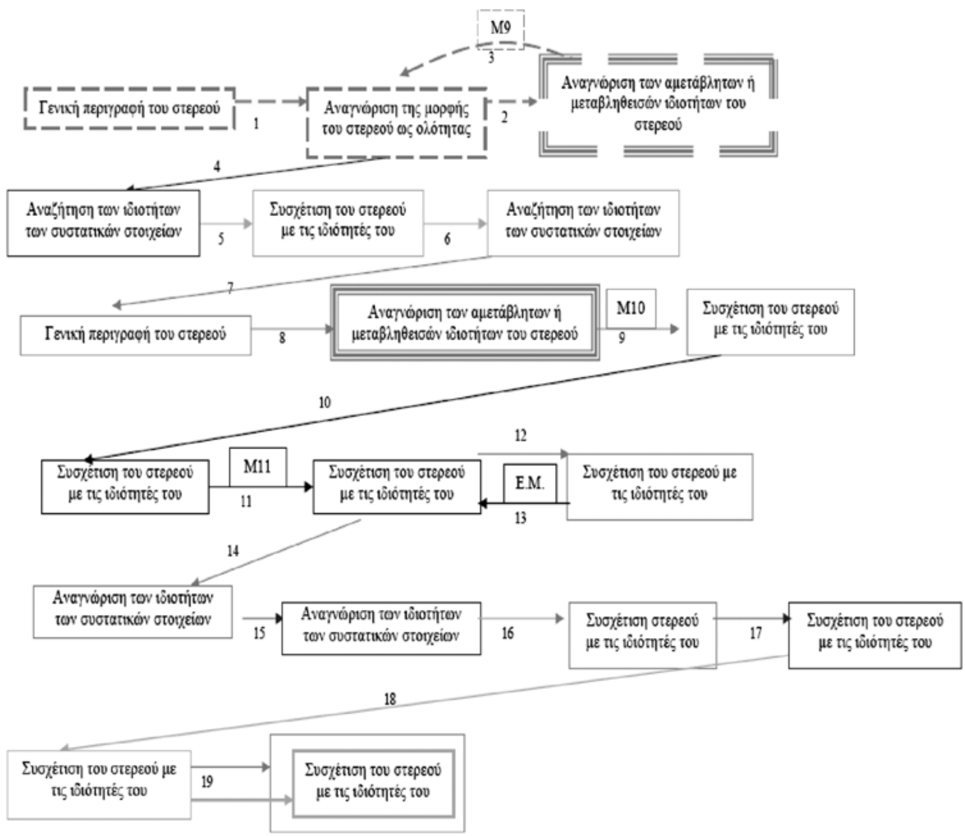
Η μελέτη της αρχικής καταγραφής των κατηγοριών των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται και ο τρόπος εξέλιξής τους είχε ως αποτέλεσμα τη διάκριση ενός πλήθους δραστηριοτήτων, οι οποίες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αντίθετα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αποτελούν ομάδες δραστηριοτήτων στις οποίες μια αρχική δραστηριότητα εξελίσσεται σε άλλες δραστηριότητες και διαμορφώνουν έτσι τη δομή μιας ενιαίας, αυτοτελούς δραστηριότητας. Έτσι, διακρίθηκαν ομάδες δραστηριοτήτων, η καθεμία από τις οποίες αποτελείται από έναν αριθμό δραστηριοτήτων, ο τρόπος εξέλιξης των οποίων διαμορφώνεται σε ένα δίκτυο δραστηριοτήτων που έχουν κοινά χαρακτηριστικά σχετικά με το αντικείμενο διερεύνησης της έννοιας του γεωμετρικού στερεού.

Κάθε διδακτικό επεισόδιο περιλαμβάνει ένα δίκτυο δραστηριοτήτων. Σε κάθε δίκτυο δραστηριοτήτων εμφανίζονται οι κατηγορίες δραστηριοτήτων σε σχέση με το γνωστικό τους αντικείμενο, η σειρά με την οποία εμφανίζονται, το πλαίσιο που τις χαρακτηρίζει και καθορίζεται από τη χρήση του κάθε ερευνητικού εργαλείου, αλλά και οι μετασχηματισμοί που πιθανόν εμφανίζονται. Στην αναπαράσταση κάθε δικτύου χρησιμοποιούνται βέλη με αρίθμηση, προκειμένου να δείξουμε τη χρονολογική εξέλιξη των δραστηριοτήτων σε ένα διδακτικό επεισόδιο. Το γνωστικό αντικείμενο των δραστηριοτήτων που αναπτύσσονται εμφανίζεται σε ορθογώνια πλαίσια. Από την άλλη μεριά, το πλαίσιο δραστηριοτήτων διακρίνεται από το είδος της γραμμής που πλαισιώνει τα ορθογώνια με το γνωστικό αντικείμενο της δραστηριότητας. Επιπλέον, παρουσιάζονται στο δίκτυο των δραστηριοτήτων και οι μετασχηματισμοί που επιχειρούν οι μαθητές, με το σύμβολο (Μ) να ακολουθείται από την αρίθμηση. Στην περίπτωση που ένας μετασχηματισμός επαναλαμβάνεται από τους μαθητές, εμφανίζεται το σύμβολο (Ε.Μ.). Τέλος, η εμφάνιση του συγκεκριμένου ερευνητικού εργαλείου επιτυγχάνεται με τη χρήση κάποιου συγκεκριμένου χρώματος των γραμμών του δικτύου. Έτσι, για παράδειγμα, η χρήση του αρθρωτού κύβου από τους μαθητές γίνεται εμφανής στο δίκτυο με κόκκινο χρώμα, το οποίο έχουν τα ορθογώνια των δραστηριοτήτων, αλλά και τα βέλη που δείχνουν την εξέλιξη.

4.3 Η ερευνητική εφαρμογή στην Στ1΄ τάξη

Η πειραματική εφαρμογή στην $Στ_1΄$ περιλαμβάνει 5 διδακτικά επεισόδια. Τα πλαίσια που χαρακτηρίζουν τις δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν και εξελίχθηκαν καθορίζονται από τη χρήση του στατικού μοντέλου του κύβου, των δύο δυναμικών μοντέλων, του αρθρωτού κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, και των δυναμικών αναπαραστάσεων στον υπολογιστή. Η μελέτη της αρχικής καταγραφής των κατηγοριών των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται και ο τρόπος εξέλιξής τους είχε ως αποτέλεσμα τη διάκριση 5 δικτύων δραστηριοτήτων. Σε κάθε δίκτυο δραστηριοτήτων εμφανίζονται οι κατηγορίες δραστηριοτήτων σύμφωνα με το γνωστικό τους αντικείμενο, τη σειρά με την οποία εμφανίζονται, το πλαίσιο που τις χαρακτηρίζει και καθορίζεται από τη χρήση του κάθε ερευνητικού εργαλείου, αλλά και οι μετασχηματισμοί που πιθανόν εμφανίζονται. Στην παρούσα έρευνα θα αναλυθεί 1 από τα 5 διδακτικά επεισόδια και κατά συνέπεια το αντίστοιχο δίκτυο δραστηριοτήτων.

Δίκτυο 1: Συσχέτιση του στερεού και των ιδιοτήτων του. Η περίπτωση της πλάγιας και ισομετρικής προβολής.



Το δίκτυο δραστηριοτήτων

Οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στο συγκεκριμένο δίκτυο χαρακτηρίζονται από τα πλαίσια που καθορίζονται από τη χρήση των αναπαραστάσεων των στερεών στον υπολογιστή. Τα πλαίσια αυτά περιλαμβάνουν τόσο τη χρήση των ισομετρικών όσο και των πλάγιων αναπαραστάσεων των στερεών που έχουν δημιουργηθεί στο δυναμικό περιβάλλον Cabri Geometre II. Όπως παρατηρούμε, το Δίκτυο 1, όπου αναπαριστάται η εξέλιξη των δραστηριοτήτων, χαρακτηρίζεται από τη συνεχή αλλαγή πλαισίου. Αρχικά, το πλαίσιο καθορίζεται από τη χρήση της πλάγιας προβολής του κύβου (πράσινο χρώμα και διακεκομμένη γραμμή), για να ακολουθήσει η χρήση του μοντέλου χαρτί-μολύβι (μπλε χρώμα) και η χρήση του πίνακα (γαλάζιο χρώμα). Στη συνέχεια χρησιμοποιείται το μοντέλο του αρθρωτού κύβου (κόκκινο χρώμα), για να ακολουθήσει η ισομετρική προβολή του κύβου (πράσινο χρώμα), στην οποία παρεμβάλλεται και πάλι η χρήση του μοντέλου του αρθρωτού κύβου, αλλά και η χρήση του πίνακα.

Πιο συγκεκριμένα, ο δάσκαλος παρουσιάζει στους μαθητές την πλάγια αναπαράσταση ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου στον υπολογιστή, τις δυνατότητες μετασχηματισμού που παρέχει το συγκεκριμένο μοντέλο και τους ζητά να κάνουν μια γενική περιγραφή του στερεού. Οι μαθητές, εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες που τους παρέχει το μοντέλο, μετρούν τις τρεις διαστάσεις του στερεού και διαπιστώνουν ότι το μήκος είναι 3,44 εκ., το ύψος είναι 2,91 εκ. και το πλάτος 2,54 εκ. Ο δάσκαλος καλεί τους μαθητές να αναγνωρίσουν τη μορφή του στερεού (εξέλιξη 1). Το στερεό αναγνωρίζεται ως ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και η άποψή τους αιτιολογείται με βάση την ανισότητα των διαστάσεων. Η δραστηριότητα εξελίσσεται και γίνεται πιο πολύπλοκη, καθώς καλούνται οι μαθητές να προβλέψουν τις απαραίτητες αλλαγές προκειμένου το στερεό να μετασχηματιστεί σε κύβο (εξέλιξη 2).

(Στ$_1$΄ , Απ. 1)
Σοφία: Για να γίνει κύβος, να το κόψουμε στη μέση.
Μυρσίνη: Να μικρύνουμε ...τις διαστάσεις.
Νικολέτα: Να μικρύνουμε το πλάτος.
Μυρσίνη: Το μήκος.
Νικολ.: Να το μικρύνουμε.
Σοφία: Να τις κάνουμε όλες ίσες.

Το στερεό μετασχηματίζεται από τους μαθητές έτσι ώστε διαισθητικά να μοιάζει με κύβο, μειώνοντας απλώς το μήκος της μιας διάστασης (Μ9) (εξέλιξη 3). Άλλοι μαθητές το αναγνωρίζουν ως «κύβο» ενώ άλλοι θεωρούν απαραίτητη τη μέτρηση, προκειμένου να σιγουρευτούν για την ισότητα των διαστάσεων. Ο δάσκαλος, αλλάζοντας το πλαίσιο, ζητά από τα παιδιά να σχηματίσουν έναν κύβο στο χαρτί και στον πίνακα και να αναγνωρίσουν την ισότητα των εδρών (εξέλιξη 4). Στη συνέχεια κατασκευάζουν έναν κύβο στον πίνακα σε πλάγια προβολή και καλούνται να αιτιολογήσουν το χαρακτηρισμό του στερεού που σχεδίασαν ως κύβο (εξέλιξη 5).

($Στ_1$΄, Απ. 2)

Δάσκαλος: Ωραία, γιατί είναι ένας κύβος αυτός;

Σοφία: Κύριε, αυτό δεν είναι κύβος;

Παναγιώτης: Τι είναι τότε; Μα, κύριε, το μετράμε...

Νικολέτα: Γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αλλά, για να βεβαιωθούμε, πρέπει να τις μετρήσουμε.

Δάσκ.: Εντάξει, λέγε και εσύ, Παναγιώτη, γιατί το λες κύβο αυτό; Τι έκανες για να φτιάξεις τον κύβο; Τι έφτιαξες πρώτα;

Παναγιώτης: Έφτιαξα δύο ίδιες έδρες.

Η δραστηριότητα στη συνέχεια εξελίσσεται και ο δάσκαλος καλεί τους μαθητές να επικεντρώσουν την προσοχή τους στις ιδιότητες του στερεού και να τις συσχετίσουν με το ίδιο το στερεό και τον τρόπο σχεδιασμού του (εξέλιξη 6).

($Στ_1$΄ , Απ. 3)

Δάσκαλος: Και τι είναι οι έδρες αυτές;

Μυρσίνη: Τετράγωνα.

Σοφία: Τετράγωνες έδρες.

Δάσκ.: Έτσι, πρώτα λοιπόν φτιάχνω τις δύο τετράγωνες έδρες, και μετά αυτές οι γραμμές που έφερες εδώ για να ενώσεις τις δύο έδρες...

Παναγιώτης: Είναι οι ακμές.

Δάσκ.: Είναι οι ακμές. Οι έδρες τώρα εδώ στο πλάι... για φανταστείτε τις, όπως τις βλέπετε, είναι τετράγωνες;

Παιδιά: Όχι.

Παναγ.: Όχι, είναι ορθογώνιο, όχι...

Δάσκ.: Γιατί, γιατί συμβαίνει αυτό;

Παναγ.: Γιατί είναι στα πλάγια.

Δάσκ.: Γιατί πάνω στο χαρτί δεν μπορούμε να αποτυπώσουμε τι;

Παναγ.: Το, το... κανονικό το...

Δάσκ.: Το στερεό όπως είναι. Το φτιάχνουμε με γωνία, λοιπόν. Έτσι; Για να φανεί το βάθος.

Παιδιά: Ναι.

Δάσκ.: Επομένως, αυτό που φτιάξαμε εδώ...

Παναγ.: Είναι ένας κύβος, αλλά εμείς το λέμε ότι είναι κύβος, έτσι; Στο χαρτί επάνω, αν το μετρήσουμε με τα όργανα, ούτε οι γωνίες είναι...

Παιδιά: Ίσες.

Δάσκ.: Ίσες δεν είναι ούτε οι ακμές του.

Έτσι, οι μαθητές έρχονται σε μια εννοιολογική σύγκρουση σχετικά με την έννοια του στερεού που είχαν μελετήσει στην προηγούμενη εμπειρία τους με τα φυσικά μοντέλα, στατικά και δυναμικά, και τις συμβάσεις σχετικά με τον τρόπο αναπαράστασής του. Ο δάσκαλος προσπαθεί να βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν τη σύγχυση που έχει προκληθεί λόγω της πλάγιας προβολής με τη χρήση της ισομετρικής προβολής των στερεών στον υπολογιστή.

Οι ισομετρικές προβολές των γεωμετρικών στερεών χαρακτηρίζονται από τη διατήρηση των ιδιοτήτων αλλά και των σχέσεων των ιδιοτήτων μόνο των μονοδιάστατων συστατικών στοιχείων, των ακμών και των διαστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, η ισότητα, για παράδειγμα, όλων των ακμών ενός κύβου διατηρείται και στην ισομετρική προβολή του. Από την άλλη μεριά, οι σχέσεις των ιδιοτήτων των γωνιών του κύβου δεν ταυτίζονται με αυτές της ισομετρικής προβολής. Από την άλλη μεριά, οι έδρες στην ισομετρική προβολή του κύβου, μολονότι είναι ίσες μεταξύ τους, δεν είναι τετράγωνες αλλά ρόμβοι.

Εισάγεται, λοιπόν, η ισομετρική προβολή ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και οι μαθητές αναγνωρίζουν το στερεό ως «ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο» (εξέλιξη 7). Στη συνέχεια καλούνται να προβλέψουν τις αλλαγές που είναι απαραίτητες προκειμένου να μετασχηματιστεί σε κύβο (εξέλιξη 8). Οι αντιδράσεις των μαθητών συγκλίνουν στο ότι θα πρέπει να είναι ίδιες οι διαστάσεις του στερεού για να είναι κύβος. Ο μετασχηματισμός γίνεται και δημιουργείται ένας κύβος με ακμή 3,8 εκ. (Μ 10). Ο ερευνητής παρεμβαίνει στη δραστηριότητα και καλεί τους μαθητές να αιτιολογήσουν την άποψή τους ότι το στερεό που δημιουργήθηκε από το μετασχηματισμό είναι κύβος (εξέλιξη 9).

(Στ$_1$΄ , Απ. 4)

Ερευνητής: Να ρωτήσω κάτι; Αυτό είναι κύβος;

Παιδιά: Ναι.

Ερευν.: Γιατί;

Μυρσίνη: Γιατί έχει όλες τις πλευρές…

Νικολέτα: Γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Ερευν.: Όλες τις πλευρές του ίσες.

Μυρσίνη: Τις ακμές.

Σοφία: Το ύψος, το πλάτος και το μήκος.

Οι μαθητές, πράγματι, συσχετίζουν το στερεό με κάποιες από τις ιδιότητές του, αλλά δεν αναφέρονται στις ιδιότητες που διαφέρουν από αυτές του φυσικού μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούν ότι η ισότητα των ακμών του στερεού αρκεί για να χαρακτηριστεί αυτό ως κύβος. Έτσι, ο ερευνητής, συνεχίζοντας την παρέμβασή του, αλλάζει το πλαίσιο επαναφέροντας το δυναμικό μοντέλο του αρθρωτού κύβου και οι μαθητές συσχετίζουν τον κύβο με την ισομετρική του προβολή όσον αφορά την ισότητα των ακμών (εξέλιξη 10). Στην πορεία της δραστηριότητας, το ύψος του δυναμικού μοντέλου του αρθρωτού κύβου μεταβάλλεται και μετασχηματίζεται σε ένα πλάγιο παραλληλεπίπεδο, όπου καλούνται οι μαθητές να επιχειρηματολογήσουν για το αν το συγκεκριμένο στερεό που δημιουργήθηκε είναι κύβος (Μ11) (εξέλιξη 11).

(Στ$_1$΄ , Απ. 5)

Ερευνητής: Αυτό είναι ένας κύβος;

Παιδιά: Ναι. Όχι.

Βασίλης: Ναι, γιατί έχει τις πλευρές του ίσες.

Παναγιώτης: Όχι. Αν το κάνουμε έτσι, είναι σαν ρόμβος.

Ερευν.: Είπατε ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Παιδιά: Ναι.

Ερευν.: Αυτό είναι κύβος;

Παιδιά: Όχι.

Ερευν.: Γιατί δεν είναι κύβος;

Βασ.: Γιατί δεν έχει τις πλευρές του ίσιες.

Ερευν.: Τι δεν είναι ίσιο;

Σοφία: Το ύψος δεν είναι ίσιο.

Παναγ.: Οι γωνίες του αλλάζουν.

Ερευν.: Αλλάζουν οι γωνίες του. Ποιες γωνίες του;

Παναγ.: Τούτη και τούτη είναι μικρότερες από τούτη και τούτη. (Δείχνει τις οξείες και τις αμβλείες γωνίες.)

Ερευν.: Πώς θα έπρεπε να ήταν οι γωνίες για να…

Παιδιά: Ορθές, όλες ορθές.

Οι μαθητές, τελικά, καταφέρνουν να συσχετίσουν και τις ιδιότητες των γωνιών με το όλο στερεό. Έτσι, το πλαίσιο αλλάζει, προκειμένου να διερευνηθεί το κατά πόσο οι συγκεκριμένες ιδιότητες θα ληφθούν υπόψη στην περίπτωση της ισομετρικής προβολής του κύβου στον υπολογιστή (εξέλιξη 12). Αρχικά, οι μαθητές συσχετίζουν το στερεό μόνο με την ισότητα των ακμών και στη συνέχεια με τη μορφή των εδρών που θα έπρεπε να είχε ο κύβος, ενώ οι έδρες αρχικά αναγνωρίζονται ως τετράγωνες, εξαιτίας και πάλι της ισότητας των ακμών. Το μοντέλο του αρθρωτού κύβου που έχει μετασχηματιστεί σε πλάγιο χρησιμοποιείται πάλι, προκειμένου να επιβεβαιωθεί και σε αυτό η ισότητα των ακμών (εξέλιξη 13) (Ε.Μ.). Μόνο μετά την επανάληψη του μετασχηματισμού οι ιδιότητες των γωνιών συσχετίζονται με το στερεό. Έτσι, όταν επανέρχεται η ισομετρική προβολή του κύβου, οι μαθητές προσπαθούν να λάβουν υπόψη τους και τις ιδιότητες των γωνιών και προσπαθούν να τις ελέγξουν (εξέλιξη 14). Αρχικά, βασιζόμενοι στη διαίσθησή τους υποστηρίζουν ότι οι γωνίες είναι ορθές. Όμως επικρατεί σύγχυση και αβεβαιότητα και προτείνεται από τη Σοφία να χρησιμοποιηθεί η γωνία ενός χαρτιού ως μέτρο σύγκρισης (εξέλιξη 15). Το αποτέλεσμα της σύγκρισης τους οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι γωνίες του στερεού στον υπολογιστή δεν είναι ορθές. Παρ' όλα αυτά, οι μαθητές υποστηρίζουν ότι το στερεό είναι κύβος και οι γωνίες του ορθές, μολονότι δε φαίνονται ως ορθές. Η προσέγγιση της Σοφίας στην ερώτηση του δασκάλου να αιτιολογήσουν αυτή τους την άποψη είναι περισσότερο διαισθητική (εξέλιξη 16).

(Στ$_1$΄ , Απ. 6)

Σοφία: Όχι, κύριε, τον έχουμε στρίψει τον κύβο, κάπως έτσι. (Δείχνει με τα χέρια της ότι έχει αλλάξει ο προσανατολισμός του κύβου.)

Δάσκαλος: Για πες μας, Σοφία.

Σοφία: Έχουμε γείρει τον κύβο προς τα εμπρός και δε φαίνεται ότι είναι ίσες οι γωνίες.

Δάσκ.: Πώς; Έτσι; (Αλλάζει τον προσανατολισμό στο φυσικό μοντέλο του αρθρωτού κύβου στρέφοντάς τον προς τα εμπρός.)

Σοφία: Όχι, τον έχουμε φέρει... Στέκεται δηλαδή σε μια ακμή.

Δάσκ.: Έτσι; (Στρέφει το στερεό ώστε να στέκεται σε μια ακμή του.)

Ερευν.: Πώς φαίνεται; Πώς τον βλέπουμε; Τον βλέπουμε έτσι; (Κρατάει τον κύβο όπως στην πλάγια προβολή, όπου οι δύο πλευρές φαίνονται τετράγωνες.)

Σοφία: Όχι, φέρτε μπροστά, προς τα κάτω... (Δίνει οδηγίες να στραφεί το στερεό ώστε να φαίνεται όπως στην ισομετρική προβολή.)

Δάσκ.: Πώς, έτσι;

Σοφία: Ναι, κάπως έτσι.

Δάσκ.: Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

Παιδιά: Ναι.

Στη συνέχεια, ο ερευνητής καλεί τους μαθητές να προβλέψουν αν θα ήταν δυνατόν να σχεδιάσουν στο χαρτί τον κύβο ώστε όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του να είναι ίσες (εξέλιξη 17). Αρχικά υπάρχει σύγχυση, καθώς άλλοι απαντούν θετικά και άλλοι αρνητικά. Μόνο όταν προσπαθούν να τον σχεδιάσουν στον πίνακα με όλες τις έδρες τετράγωνες συνειδητοποιούν ότι δεν είναι δυνατόν να τον κατασκευάσουν (εξέλιξη 18). Τελικά, στην πλάγια προβολή του κύβου που σχεδιάζεται στον πίνακα οι μαθητές αναγνωρίζουν ως τετράγωνες μόνο τις δύο έδρες «την μπροστά και την πίσω» που είναι κάθετες στο επίπεδο προβολής και στη συνέχεια αναγνωρίζουν τις τρεις έδρες που είναι ορατές.

Ο δάσκαλος, θέλοντας να τους βοηθήσει να κάνουν συσχετίσεις και πιθανόν να οδηγηθούν σε γενικεύσεις, καθοδηγεί τους μαθητές και τους ζητά να συγκρίνουν και να εντοπίσουν διαφορές ανάμεσα στις δύο αναπαραστάσεις του κύβου, αυτή που είναι σχεδιασμένη στον πίνακα –τη φυσική– και στην πλάγια προβολή στον υπολογιστή, σε σχέση με τις διαστάσεις. Εδώ, για να αναπαραστήσουμε στο δίκτυο δραστηριοτήτων τη συσχέτιση και των δύο πλαισίων, στο πράσινο ορθογώνιο του μοντέλου στον υπολογιστή περικλείουμε το γαλάζιο, που υποδεικνύει τη χρήση του πίνακα (εξέλιξη 19).

(Στ$_{1}$΄ , Απ. 7)

Δάσκαλος: Σε τι διαφέρει αυτό από το στερεό; (Δείχνει την πλάγια προβολή στον υπολογιστή.)

Παιδιά: Αλλάζει το σχήμα.

Δάσκ.: Για να είναι στερεό κάτι, έχει πόσες διαστάσεις;

Μυρσίνη: Ύψος, μήκος και πλάτος.

Δάσκ.: Δηλαδή πόσες;

Παιδιά: Τρεις.

Δάσκ.: Αυτό εδώ πόσες διαστάσεις έχει; (η αναπαράσταση στον υπολογιστή)

Παιδιά: Τρεις. Τέσσερις. Δύο.

Δάσκ.: Τρεις έχει;

Βασίλης: Δύο. Μόνο ύψος και μήκος έχει.

Δάσκ: Δύο. Και πώς τα λένε αυτά τα σχήματα που έχουν μόνο ύψος και μήκος;

Σοφία: Επίπεδα.

Παιδιά: Επίπεδα.

Δάσκ.: Άρα, γιατί δεν μπορώ να φτιάξω ένα στερεό πάνω στο χαρτί;

Παιδιά: ...

Δάσκ.: Τι θα μου λείπει;

Βασ.: Το πλάτος.

Δάσκ.: Η τρίτη...

Παιδιά: Η τρίτη διάσταση.

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω απόσπασμα, ο δάσκαλος, προσπαθώντας να εκμαιεύσει από τους μαθητές αυτό που θέλει, γίνεται ιδιαίτερα καθοδηγητικός. Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιούνται δύο αναπαραστάσεις του στερεού στο επίπεδο, προκειμένου να αντιληφθούν οι μαθητές τη διαφορά του από το τρισδιάστατο γεωμετρικό στερεό. Μολονότι οι μαθητές είναι πιο εξοικειωμένοι με την πλάγια αναπαράσταση του κύβου στον πίνακα, τουλάχιστον όσον αφορά την σχεδίασή της, φαίνεται ότι η αναπαράσταση του στερεού στον υπολογιστή παίζει τον ενδιάμεσο ρόλο ανάμεσα στο «πραγματικό» τρισδιάστατο αντικείμενο και στην επίπεδη αναπαράστασή του.

Επιπλέον γίνεται φανερό ότι η έννοια της αναπαράστασης και οι συμβάσεις που χρησιμοποιούμε κατά το σχεδιασμό της επίπεδης αναπαράστασης των τρισδιάστατων σχημάτων απαιτεί, όπως είναι φυσικό, πιο απαιτητικές νοητικές διαδικασίες από τους μαθητές όταν καλούνται να μελετήσουν αυτά τα στερεά και τις ιδιότητές τους. Παρ' όλα αυτά, με τη χρήση των αναπαραστάσεων στον υπολογιστή και τις δυνατότητες που προσφέρουν, οι μαθητές κατάφεραν να μελετήσουν και να διερευνήσουν τις συσχετίσεις μεταξύ των στερεών και των ιδιοτήτων τους, αλλά και να αναζητήσουν σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά στερεά, τον κύβο και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (Markopoulos, 2003).

Συνοψίζοντας, μέσα από την ανάλυση του διδακτικού επεισοδίου βλέπουμε ότι αρχικά το πλαίσιο των δραστηριοτήτων μεταβλήθηκε με τη χρήση των αναπαραστάσεων των στερεών στον υπολογιστή. Το πλαίσιο έγινε πιο πολύπλοκο, καθώς οι μαθητές κλήθηκαν να περάσουν από τις φυσικές ενέργειες σε περισσότερο νοητικές. Ο πρώτος μετασχηματισμός (Μ9) περιλάμβανε την πρόβλεψη των απαραίτητων μεταβολών προκειμένου το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να μετασχηματιστεί σε κύβο. Η προσέγγιση των μαθητών αρχικά ήταν διαισθητική, αλλά στη συνέχεια βασίστηκε σε συγκριτικές σχέσεις μεταξύ του μεγέθους των εδρών και των διαστάσεων, αλλά και σε συσχετίσεις μεταξύ των εδρών και των διαστάσεων. Φαίνεται ότι τόσο το είδος των συσχετίσεων όσο και το επίπεδο των συλλογισμών που ανέπτυξαν οι μαθητές έτεινε να σταθεροποιηθεί στο συγκεκριμένο επίπεδο, μολονότι η εισαγωγή του καινούριου μοντέλου προκάλεσε αρχικά τη διαισθητική του προσέγγιση.

Ο δεύτερος και ο τρίτος μετασχηματισμός (Μ10), (Μ11), που έλαβαν χώρα στη συνέχεια, με τη χρήση των αναπαραστάσεων των στερεών στον υπολογιστή, επιβεβαίωσε ακριβώς την παραπάνω διαπίστωση της σταθεροποίησης του επιπέδου των συσχετίσεων ανάμεσα στις ιδιότητες των συστατικών στοιχείων των δύο στερεών, αλλά και των συλλογισμών που ανέπτυξαν οι μαθητές.

Μέσα από την ανάλυση του διδακτικού επεισοδίου φαίνεται ότι η δημιουργία του δυναμικού περιβάλλοντος και η συμβολή του στη γνωστική εξέλιξη των μαθητών είναι δυνατή μόνο μέσα από μια ισορροπία όλων των στοιχείων που το αποτελούν: των δραστηριοτήτων, των δυναμικών μοντέλων, των μαθητών, αλλά και του δασκάλου. Η επιτυχία του δυναμικού περιβάλλοντος εξαρτάται τόσο από την αποτελεσματικότητα και τη λειτουργικότητα των χαρακτηριστικών όσο και από το συνδυασμό τους.

5. Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της έρευνας φανερώνουν ότι η δημιουργία ενός δυναμικού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη συμβάλλει στην ανάπτυξη της γεωμετρικής γνώσης και σκέψης των μαθητών σχετικά με την έννοια του γεωμετρικού στερεού.

Η αποτελεσματικότητα του δυναμικού περιβάλλοντος συνδέεται άμεσα με το είδος της αλληλεπίδρασης που αναπτύσσεται μεταξύ των στοιχείων που συνθέτουν το περιβάλλον. Τα χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος που φαίνεται να παίζουν ένα σημαντικό ρόλο είναι τα παρακάτω:

- Τα πλαίσια δραστηριοτήτων που στηρίχθηκαν στη χρήση των δυναμικών ερευνητικών εργαλείων.
- Οι ενέργειες και αποφάσεις του δασκάλου στα πλαίσια της αλληλεπίδρασής του με τους μαθητές και στη διαμόρφωση και εξέλιξη των δραστηριοτήτων.
- Οι ενέργειες των μαθητών μέσα στη σχολική τάξη στα δυναμικά μοντέλα και στις δραστηριότητες.

Η δημιουργία του συγκεκριμένου δυναμικού περιβάλλοντος μάθησης της έννοιας του γεωμετρικού στερεού βασίστηκε όπως είδαμε στο θεωρητικό πλαίσιο που διαμορφώθηκε. Συνοψίζοντας, το θεωρητικό αυτό πλαίσιο θα πρέπει να βασίζεται:

α. στις αντιληπτικές δυνατότητες των μαθητών που μας παρέχει η ψυχολογική ανάλυσης της έννοιας

β. στην καταγραφή των επιμέρους παραμέτρων της έννοιας του γεωμετρικού στερεού που μας προσφέρει η επιστημολογική ανάλυση της και

γ. στη ανάπτυξη της απαραίτητης διδακτικής προσέγγισης που στοχεύει στην διερεύνηση και εξέλιξη των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με τη συγκεκριμένη έννοια.

Η ανάλυση των τριών αυτών προσεγγίσεων δεν συνδέεται με τη συγκεκριμένη έννοια αλλά θα μπορούσε να αποτελέσει ένα θεωρητικό εργαλείο για τη διδασκαλία και μάθηση οποιασδήποτε μαθηματικής έννοιας. Σε αρκετές έρευνες, στο πλαίσιο των ερευνητικών τους στόχων, παρατηρείται η έμφαση της μίας ή της άλλης προσέγγισης εις βάρος των υπολοίπων. Η ανάλυση των τριών αυτών οπτικών ανάπτυξης του διδακτικού περιβάλλοντος δεν θα πρέπει να παραβλέπει καμία από τις παραπάνω οπτικές. Αντίθετα η ανάπτυξη των διδακτικών εργαλείων, η προσέγγιση της έννοιας, η ανάπτυξη των δραστηριοτήτων και η διδακτική αξιοποίηση και εξέλιξη των αντιλήψεων των μαθητών είναι αποτελεσματικές όταν βασίζονται στην ανάλυση και των τριών αυτών προσεγγίσεων.

6. Βιβλιογραφία

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), 258-292.

Bauersfeld, H. (1995). The Structuring of The Structures: Development and Function of Mathematizing as a Social Practice, in L. P. Steffe and J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction and knowledge – Alternative perspectives for mathematics education. In T. Cooney, & D. Grouws (Eds.), *Effective mathematics teaching* (pp. 27-46). Reston, VA: NCTM.

Bishop, A. J. (1979). Visualising and mathematics in a pre-technological culture. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 135-146.

Brown, D. L., and Wheatley, G. H. (1997), Components of Imagery and Mathematical Understanding, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(1), 45-70

Chiappini, G., and Lemut, E. (1992), Interpretation and construction of computer-mediated graphic representations for the development of spatial geometry skills, in W. Geeslin and K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 1*, 129-136, USA

Clarke, D. J. (1998). Studying in the Classroom Negotiation of Meaning: Complementary Accounts Methodology. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* [Journal for Research in Mathematics Education, Monograph No. 9] (pp. 98-111). Reston, VA: NCTM.

Clements, D. H., and Battista, M. T. (1992), Geometry and Spatial Reasoning, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan

Cobb, P., & Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 213-228.

Confrey, J. (1995), How Compatible Are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism?, in L. P. Steffe and J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Cooper, M., & Sweller, J. (1989). Secondary school students' representations of solids. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 202-212.

Crowley, M. L. (1987), The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought, in M. M. Lindquist and A. P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12*, Virginia, USA: NCTM

Daniels, H. (2001), *Vygotsky and Pedagogy*, London: RoutledgeFalmer

Fischbein, E. (1993), The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162

Freudenthal, H. (1991), *Revisiting Mathematics Education*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic

Gutierrez, A. (1996), Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework, in L. Puig and A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 1*, 3-19, Valencia, Spain

Gutierrez A., Jaime A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele Levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.

Hershkowitz, R. (1989), Visualization in Geometry – Two Sides of the Coin, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76

Hershkowitz R. (1990), Psychological Aspects of Learning Geometry, in P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge, Great Britain: Cambridge University Press.

Hoyles C. (1995). Thematic Chapter: Exploratory Software, Exploratory Cultures?. In A. A. diSessa, C. Hoyles, & R. Noss (Eds.), Computers and Exploratory Learning (pp. 199-219). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Markopoulos, C., and Potari, D. (1999), Forming Relationships in Three Dimensional Geometry Through Dynamic Environments, in O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3*, 273-280, Haifa, Israel

Laborde, C. (1993). The Computer as Part of the Learning Environment: The Case Geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 48-67). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Lawrie C., Pegg, J., & Gutierrez, A. (2002). Unpacking student meaning of cross-sections: A frame for curriculum development. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3* (pp. 289-296). Norwich, UK.

Μαρκόπουλος, Χ., & Πόταρη, Δ. (2001). Ο ρόλος της κίνησης στην ανάπτυξη δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία και μάθηση γεωμετρικών εννοιών. Στο Α. Αρβανιτογεώργος, Β. Παπαντωνίου & Δ. Πόταρη (Επιμέλεια) *Ερευνητικές Προσεγγίσεις στη Διδακτική της Γεωμετρίας, Πρακτικά του 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Γεωμετρίας* (σελ. 85-96). Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Markopoulos, C. (2003). Children's thinking of geometrical solids in a computer-based environment. In T. Triandafillidis & K. Hatzikiriakou (Eds.), *Proceedings of the 6th International Conference on Technology in Mathematics Education* (pp. 152-157). Volos, Greece.

Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of Developmental Stages in the Representation of Regular Space Figures. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(2), 83-93.

Pandiscio, E., & Orton, R. E. (1998). Geometry and Metacognition: An Analysis of Piaget's and van Hiele's Perspectives. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2&3), 78-87.

Pegg, J. (1997). Broadening the descriptors of van Hiele's levels 2 and 3. *Proceedings of the 20th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 391-396). Rotorua: MERGA.

Piaget, J. (1972), *Psychology and epistemology. Towards a Theory of Knowledge*, Penguin Books

Piaget, J., and Inhelder, B. (1956), *The child's conception of space*, London: Routledge & Kegan

Piaget, J., and Garcia, R. (1989), *Psychogenesis and the History of Science*, New York: Columbia University Press

Piaget, J., Inhelder, B., and Szeminska A. (1960), *The child's conception of geometry*, London: Routledge & Kegan

Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (1992). Children's Representations of the development of solids. *For the Learning of Mathematics, 12*(1), 38-46.

Steffe, L. P. (1990), Mathematics Curriculum Design: A Constructivist's Perspective, in L. P. Steffe and T. Wood (Eds.), *Transforming Children's Mathematics Education: International Perspectives*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Strauss, A., & Corbin, G. (1998). *Basics of qualitative research*. London: Sage Publications.

Stylianou, D. A., Leikin R., & Silver, E. A. (1999). Exploring students' solution strategies in solving a spatial visualization problem involving nets. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 4* (pp. 241-248). Haifa, Israel.

van Hiele, P. M. (1986), *Structure and insight. A theory of mathematics education*, London: Academic Press

Vinner, S., and Hershkowitz, R. (1983), On concept formation in geometry, *ZDM*, 15(1), 20-25

Voigt, J. (1996). Negotiation of Mathematical Meaning in Classroom Processes: Social Interaction and Learning Mathematics. In L. P. Steffe, & P. Nesher (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 21-50). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

von Glasersfeld, E. (1990), Environment and Communication, in L. P. Steffe and T. Wood (Eds.), *Transforming Children's Mathematics Education: International Perspectives*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Warren, E., and English, L. (1995), Facility with Plane Shapes : A Multifaceted Skill, *Educational Studies in Mathematics*, 28, 365-383

Wilson, P. S. (1986). The Relationship between Children's Definitions of Rectangles and their Choices of Examples. In G. Lappan & R. Even (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the 8th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. East Lansing, MI.

Abstract

This paper is part of a research project on the study of children's thinking about geometrical solids in the context of dynamic transformation. This research study aims to investigate the role of a dynamic environment in the development of children's conceptions of geometrical solids. .The main focus is to explore how a number of tasks based on the dynamic transformation of geometrical solids were functioned in a mathematics classroom. Furthermore, the role that the dynamic transformations can play in the creation of a learning environment is explored. That environment aims to the development of children's ability to focus on the solid's properties and build relationships between these properties and finally, between the different solids.

The present study aims to form the theoretical framework which considered as necessary for the creation of the dynamic learning environment. In particular, three perspectives of the theoretical framework are distinguished: The cognitive perspective, the epistemological analysis of the concept of geometrical solid and the teaching perspective. The cognitive perspective includes a review about the way that students conceive the concept of geometrical solid. The epistemological perspective contributes to the investigation and the indication of the several aspects of this particular concept. Finally, the teaching perspective sets the necessary attributes of the learning environment. This particular framework of the study of the concept of geometrical solid constitutes the base of the dynamic learning environment.

The data that are presented in this study come from a classroom teaching experiment in one primary school classrooms of the 6th grade. The issues that emerged from the analysis of the classroom teaching experiment support the assumption that the formation of the dynamic learning environment contributes to the development of students' geometrical thinking concerning the concept of the geometrical solid.