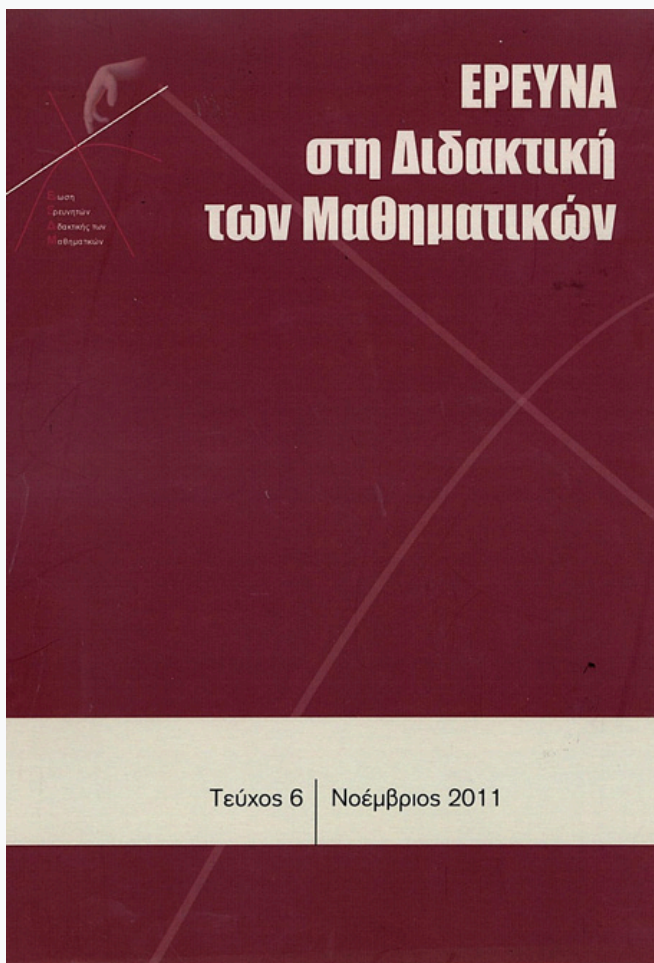


Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 6 (2011)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Μέτρηση εμβαδού, από νήπια, μέσω της κάλυψης επιφάνειας με χρήση βοηθητικών μέσων

*Χρυσάνθη Σκουμπουρδή (Crisanthi Skoumbourdi),
Δήμητρα Παπαϊωάννου-Στραβολαίμου (Dimitra
Papaioannou- Stravolaimou)*

doi: [10.12681/enedim.15034](https://doi.org/10.12681/enedim.15034)

Copyright © 2017, Crisanthi Skoumbourdi, Dimitra Papaioannou-Stravolaimou



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Βιβλιογραφική αναφορά:

Σκουμπουρδή (Crisanthi Skoumbourdi) Χ., & Παπαϊωάννου-Στραβολαίμου (Dimitra Papaioannou- Stravolaimou) Δ. (2017). Μέτρηση εμβαδού, από νήπια, μέσω της κάλυψης επιφάνειας με χρήση βοηθητικών μέσων. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (6), 39–59. <https://doi.org/10.12681/enedim.15034>

Μέτρηση εμβαδού, από νήπια, μέσω της κάλυψης επιφάνειας με χρήση βοηθητικών μέσων

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή
Δήμητρα Παπαϊωάννου-Στραβοθαίμου
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

► Περίληψη

Βασιζόμενοι στο ερμηνευτικό πλαίσιο του Cobb (2007) για τη μάθηση των μαθηματικών και με την υπόθεση ότι αν σχεδιαστούν και υλοποιηθούν δραστηριότητες που έχουν νόημα για τα παιδιά με τέτοιο τρόπο ώστε να τα εμπλέξουν σε προβληματισμό, θα έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν προσωπικούς συλλογισμούς οι οποίοι μέσα από την κοινωνική αλληλεπίδραση—μεταξύ τους και με την ερευνήτρια—θα ανασηματιστούν συμβάλλοντας στη δημιουργία μιας διαφορετικής πρακτικής της τάξης.

Στο άρθρο αυτό περιγράφεται η παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε, σε μια τάξη νηπιαγωγείου, για τη μέτρηση εμβαδού, από τα νήπια, μέσω της κάλυψης επιφάνειας, με χρήση βοηθητικών μέσων οικείων στα παιδιά.

Από την καταγραφή του συλλογισμού των νηπίων, φάνηκε ότι είχαν την ικανότητα να καλύψουν μια επιφάνεια με 'διακριτό' υλικό και να το καταμετρήσουν, καθώς και ότι μπόρεσαν να αντληφθούν την αντίστροφη σχέση που χαρακτηρίζει το μέγεθος της μονάδας μέτρησης και το πλήθος των μονάδων που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη μέτρηση. Επίσης, καταγράφηκαν οι στρατηγικές των νηπίων για την κάλυψη μιας επιφάνειας με 'συνεχές' υλικό.

► Εισαγωγή

Η αυθόρμητη ενασχόληση των παιδιών με άτυπες μετρήσεις μεγεθών είναι συχνή στις τάξεις των νηπιαγωγείων. Όταν τα νήπια προσπαθούν να πακετάρουν ένα δώρο, όταν ψάχνουν το κατάλληλο τραπεζομάντιλο για να στρώσουν το τραπέζι στο κουκλόσπιτο, αλλά και όταν ασχολούνται με κάθε είδους κατασκευές, εμπλέκονται άτυπα, μέσω των εκτιμήσεων και των συγκρίσεων μεγεθών, σε διαφορετικών ειδών μετρήσεις.

* Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, Τεύχος 5, Ιανουάριος 2011, 41-66.

Εκτός όμως από τις αυθόρμητες μετρήσεις μεγεθών, που προκύπτουν αβίαστα κατά την ελεύθερη δραστηριότητα ή το παιχνίδι των μικρών παιδιών, είναι σημαντικό, για το πρόγραμμα του νηπιαγωγείου, να πραγματοποιούνται και σχεδιασμένες δραστηριότητες μέτρησης. Οι δομημένες δραστηριότητες μπορεί να δημιουργήσουν ενδιαφέρουσα μαθηματική συζήτηση¹ η οποία να προσανατολίσει τα παιδιά με σαφή τρόπο στα βασικά χαρακτηριστικά της μέτρησης.

Η κατανόηση, από τα παιδιά, της μέτρησης γενικά, αλλά και συγκεκριμένα της μέτρησης εμβαδού, σύμφωνα με ερευνητικά δεδομένα (Clements, 2004· van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2005: 94), αρχίζει να αναπτύσσεται στην προσχολική ηλικία. Βέβαια, τα παιδιά σε αυτή την ηλικία ενώ μπορεί να γνωρίζουν την ύπαρξη εννοιών όπως το μήκος, το εμβαδόν, το βάρος κ.ο.κ. δε γνωρίζουν πώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτές τις έννοιες στο συλλογισμό τους ούτε πώς μπορούν να μετρήσουν το μέγεθός τους με ακρίβεια.

Η μέτρηση εμβαδού προτείνεται (Clements & Stephan, 2004· NCTM, 1989) να ξεκινάει μέσω της κάλυψης επιφάνειας. Όμως το είδος του βοηθητικού μέσου που θα χρησιμοποιηθεί για την κάλυψη της επιφάνειας, καθώς και ο τρόπος διαχείρισής του μέσα από τις δραστηριότητες, προβληματίζει την ερευνητική κοινότητα ως προς πολλούς παράγοντες: για το αν θα κάνει φανερή στο μαθητή τη δόμηση σχηματισμού, για το αν οι μαθητές θα μπορέσουν να αντιληφθούν το βοηθητικό μέσο ως μονάδα μέτρησης του εμβαδού, για το αν δίνει ερεθίσματα για την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης που χαρακτηρίζει το μέγεθος της μονάδας και τον αριθμό των μονάδων που χρησιμοποιούνται για τη συγκεκριμένη μέτρηση καθώς και για το αν μπορεί αργότερα να οδηγήσει, στην επιτυχή μετάβαση, στον τύπο υπολογισμού του εμβαδού.

Στο συγκεκριμένο άρθρο, περιγράφεται η παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε, σε μια τάξη νηπιαγωγείου, για τη μέτρηση εμβαδού, μέσω της κάλυψης επιφάνειας, με χρήση βοηθητικών μέσων οικείων στα παιδιά. Με βάση το ερμηνευτικό πλαίσιο του Cobb (2007), για τη μάθηση των μαθηματικών, έγινε η υπόθεση ότι αν σχεδιαστούν δραστηριότητες που έχουν νόημα για τα παιδιά και πραγματοποιηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να τα εμπλέξουν σε προβληματισμό, θα αναδυθούν διαφορετικοί συλλογισμοί οι οποίοι θα μπορούν μέσα από μαθηματική συζήτηση με την ερευνήτρια και τους άλλους μαθητές να ανασχηματιστούν και ότι μέσα από αυτή την αλληλεπίδραση μπορεί να δημιουργηθεί η μαθηματική πρακτική της τάξης. Τέθηκαν τρία ερευνητικά ερωτήματα: 1) Έχουν τα νήπια την ικανότητα

1. Η ανάπτυξη μαθηματικής συζήτησης είναι από τις σημαντικότερες πτυχές στη δουλειά των εκπαιδευτικών. Για να επιτευχθεί η μαθηματική κατανόηση (Franke, Kazemi & Battey, 2007: 230) χρειάζεται να έχουν τη δυνατότητα οι μαθητές να ασχοληθούν με ποικίλους τρόπους αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών, να κάνουν εικασίες, να εξηγούν τη διαδικασία του συλλογισμού τους, να παρουσιάζουν και να αιτιολογούν τις λύσεις τους και να κάνουν γενικεύσεις. Οι εικασίες, η εξήγηση του συλλογισμού, η παρουσίαση και αιτιολόγηση της λύσης και η γενίκευση είναι στοιχεία μαθηματικής συζήτησης.

να καλύψουν με συστηματικό τρόπο μια επιφάνεια με ‘διακριτό’ υλικό και να το καταμετρήσουν; 2) Μπορούν τα νήπια να αντιληφθούν την αντίστροφη σχέση που χαρακτηρίζει το μέγεθος της μονάδας μέτρησης και του αριθμού των μονάδων σε μια συγκεκριμένη μέτρηση; 3) Έχουν τα νήπια την ικανότητα να καλύψουν μια επιφάνεια με ‘συνεχές’ υλικό;

► Θεωρητικές επισημάνσεις

Ερμηνευτικό πλαίσιο

Το ερμηνευτικό πλαίσιο (interpretive framework) του Cobb (2007) αποτελεί μια σύνθεση των θέσεων της κοινωνικοπολιτισμικής θεωρίας², της γνωστικής ψυχολογίας³ καθώς και της θεωρίας της κατανεμημένης γνώσης⁴, για το πώς μαθαίνει ο μαθητής. Στο ερμηνευτικό πλαίσιο, ο συλλογισμός ενός μαθητή σχηματίζεται από τη συμμετοχή του στις δραστηριότητες της κοινότητας της τάξης. Αναδεικνύεται η διαφορετικότητα στο μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών ενώ παράλληλα αυτή η διαφοροποίηση τοποθετείται στο κοινωνικό πλαίσιο της συμμετοχής τους στις κοινές δραστηριότητες. Για παράδειγμα (Cobb, 2007: 29), οι συλλογικές δραστηριότητες της κοινότητας της τάξης (κοινωνική οπτική) ανασχηματίζονται από τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές καθώς ερμηνεύουν και απαντούν ο ένας στις δράσεις του άλλου (γνωστική οπτική). Αντίστροφα, οι ερμηνείες και οι δράσεις των εκπαιδευτικών και των μαθητών σε μια τάξη (γνωστική οπτική) δεν υφίστανται χωρίς τη συμμετοχή τους στις κοινές πρακτικές της τάξης (κοινωνική οπτική).

Στο ερμηνευτικό πλαίσιο, η μαθηματική πρακτική δε λαμβάνεται ως προϋπάρχουσα και ανεξάρτητη από τη δραστηριότητα του εκπαιδευτικού και των μαθητών, αλλά ως αναδυόμενο φαινόμενο το οποίο εγκαθιδρύεται από κοινού, από τον εκ-

2. Οι υποστηρικτές της κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης, βασίζονται στις θέσεις του Vygotsky και βλέπουν τη γνώση ως επέκταση του κόσμου και ως έμφυτα κοινωνική. Οι ενέργειες των μαθητών θεωρούνται στοιχεία ενός συστήματος πολιτισμικών πρακτικών και οι μαθητές θεωρούνται συμμετέχοντες σε πολιτισμικές πρακτικές ακόμα και όταν βρίσκονται απομονωμένοι από τους άλλους (Cobb, 2007: 26).

3. Οι υποστηρικτές της γνωστικής θεωρίας, βασίζονται στις θέσεις του Piaget και δέχονται ότι ο συλλογισμός των μαθητών επηρεάζεται αφενός από τα εργαλεία που χρησιμοποιούν για να εκπληρώσουν τους στόχους που έχουν τεθεί και αφετέρου από την κοινωνική αλληλεπίδραση με τους άλλους. Όμως τα εργαλεία και οι άλλες δράσεις θεωρούνται εξωτερικοί παράγοντες και η προσοχή δίνεται στην τεκμηρίωση του πώς τα ερμηνεύουν οι μαθητές.

4. Οι θεωρητικοί της κατανεμημένης γνώσης (distributed cognition), βασίζονται στις θέσεις του Pea και εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στο άμεσο φυσικό, κοινωνικό και συμβολικό περιβάλλον. Αντιλαμβάνονται τις ικανότητες που αναπτύσσουν οι μαθητές στο σχολείο ως σχέσεις μεταξύ μαθητών και υλικών μέσων, καθώς και μεταξύ κοινωνικών και συμβολικών μέσων του περιβάλλοντος της τάξης. Οι εμπειρικές μελέτες που διεξάγονται, με βάση την προσέγγιση αυτή, περιλαμβάνουν λεπτομερή ανάλυση της δραστηριότητας ενός συγκεκριμένου ατόμου ή μιας μικρής ομάδας και όχι ανάλυση της συμμετοχής των ατόμων σε συγκεκριμένες πολιτισμικές πρακτικές (Cobb, 2007: 25).

παιδευτικό και τους μαθητές, στην πορεία της προοδευτικής αλληλεπίδρασής τους. Οι μαθητές θεωρείται ότι συνεισφέρουν στην ανάπτυξη των πρακτικών και νορμών της τάξης οι οποίες και σχηματίζουν το κοινωνικό πλαίσιο για τη μάθηση των μαθηματικών. Από τη γνωστική οπτική, το ερμηνευτικό πλαίσιο του Cobb, υιοθετεί την άποψη της μάθησης ως διαδικασίας αναδιοργάνωσης της δραστηριότητας. Διευρύνοντας την έννοια της δραστηριότητας, του ατόμου ή της ομάδας, επηρεασμένο από την κατανοημένη γνώση, το ερμηνευτικό πλαίσιο, μελετά τις έννοιες και τις ικανότητες που αναπτύσσουν οι μαθητές στο σχολείο ως σχέσεις μεταξύ μαθητών-υλικού, κοινωνικών και συμβολικών μέσων του περιβάλλοντος της τάξης. Έτσι, το ερμηνευτικό πλαίσιο λαμβάνει υπόψη του τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους οι μαθητές συλλογίζονται με τη χρήση εργαλείων και συμβόλων. Το ερμηνευτικό πλαίσιο, θεωρεί ότι το άτομο δρα στο άμεσο φυσικό, κοινωνικό και συμβολικό περιβάλλον και ότι τα εργαλεία και τα σύμβολα που χρησιμοποιούν οι μαθητές είναι μέρος της δραστηριότητάς τους παρά κάτι που υπάρχει έξω από αυτή. Δηλαδή, καθώς ο μαθητής πραγματοποιεί μια μαθηματική δραστηριότητα συλλογίζεται με τη βοήθεια εργαλείων και συμβόλων. Αν και η εστίαση αυτής της ψυχολογικής οπτικής είναι αποκλειστικά στην ποιότητα του συλλογισμού του κάθε μαθητή, η έμφαση που δίνει στα εργαλεία είναι σε γενικές γραμμές σύμφωνη με την έννοια της μεσολαβητικής δράσης όπως αναφέρεται στις κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες που βασιζονται στο Vygotsky.

Μέτρηση εμβαδού γεωμετρικού σχήματος

Στη διδασκαλία και μάθηση της μέτρησης του εμβαδού, που συνήθως ξεκινάει από το δημοτικό σχολείο, εμπλέκονται πέντε θεμελιώδεις έννοιες (Clements & Stephan, 2004): α) η διαμέριση (partitioning), β) η επανάληψη της μονάδας (unit iteration), γ) η διατήρηση (conservation), δ) η δόμηση μιας διάταξης/σειράς (structuring an array) και ε) η γραμμική μέτρηση (linear measurement). Η νοητική ικανότητα για τη δόμηση μιας διάταξης και για τη γραμμική μέτρηση, επιτυγχάνεται σταδιακά: α) τα παιδιά, δεν μπορούν εύκολα να δομήσουν το δισδιάστατο χώρο (π.χ. δεν μπορούν να καλύψουν ένα ορθογώνιο με πλακίδια χωρίς κενά ή επικαλύψεις), β) πετυχαίνουν την επικάλυψη, αλλά δεν μπορούν να υπολογίσουν τον αριθμό των πλακιδίων που χρησιμοποίησαν (δεν μπορούν να κάνουν συστηματική καταμέτρηση, για παράδειγμα, απαριθμούν τα πλακίδια της περιφέρειας και στη συνέχεια τα εσωτερικά, αλλά με μη συστηματικό τρόπο οπότε ξεχνάνε κάποια πλακίδια ή καταμετράνε τα ίδια πλακίδια περισσότερες από μία φορές), γ) καλύπτουν την επιφάνεια και υπολογίζουν τα πλακίδια που χρησιμοποίησαν, αλλά καταμετρούν χωρίς να χρησιμοποιήσουν τη διάταξη (σειρά και στήλη), δ) καταμετρούν χρησιμοποιώντας τη διάταξη χωρίς όμως συστηματικό τρόπο (π.χ. μετράνε μερικές, αλλά όχι όλες τις σειρές ως μονάδες), ε) καταμετράνε, σε μονάδες, δομώντας το ορθογώνιο ως ένα σύνολο από σειρές, στ) καταμετρούν με συνεχή επανάληψη των

σειρών, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους τον αριθμό των μονάδων μιας στήλης (π.χ. μετρώντας κάθε σειρά από 5), ζ) καταμετρούν με συνεχή επανάληψη των σειρών, σε σχέση με τον αριθμό των μονάδων μιας στήλης (π.χ. μετρώντας ανά 5) και η) τέλος, κατανοούν ότι οι διαστάσεις του ορθογωνίου προέρχονται από τον αριθμό των σειρών και των στηλών και έτσι υπολογίζουν το εμβαδόν από αυτές τις διαστάσεις (Battista, Clements, Arnoff, Battista & Borrow, 1998· Outhred & Mitchelmore, 2000). Η κατάκτηση των εννοιών αυτών από τους μαθητές, αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του.

Βασισμένοι στις θεμελιώδεις έννοιες που εμπλέκονται στη μέτρηση του εμβαδού, οι Clements & Stephan (2004) προτείνουν δραστηριότητες οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές, κυρίως του δημοτικού, να τις κατανοήσουν. Μέσω δραστηριοτήτων κάλυψης επιφανειών με μονάδες μέτρησης καθώς και δραστηριοτήτων οι οποίες απαιτούν τη δόμηση μιας διάταξης και τη χρήση πολλαπλασιαστικής μεθόδου για το γρήγορο υπολογισμό του συνολικού αριθμού των μονάδων, οι μαθητές μπορούν να οικοδομήσουν την έννοια του εμβαδού και να εφεύρουν τρόπους μέτρησής του. Προτείνουν, να μην περιορίζεται η διδασκαλία σε δραστηριότητες, όπου δίνεται επικαλυμμένη η επιφάνεια και ζητείται από τους μαθητές η απλή καταμέτρηση των μονάδων που επικαλύπτουν την επιφάνεια, αλλά να ενθαρρύνονται οι μαθητές, χρησιμοποιώντας τη μονάδα μέτρησης που έχει δοθεί ή που έχουν επιλέξει, να επικαλύπτουν, οι ίδιοι, την επιφάνεια και να μετρούν τις μονάδες, δίνοντας χωρική διάσταση στο σχήμα. Στις μεγαλύτερες τάξεις, η έμφαση δίνεται στην κατανόηση της αντίστροφης σχέσης που χαρακτηρίζει το μέγεθος μιας μονάδας και τον αριθμό των μονάδων που χρησιμοποιούνται για τη συγκεκριμένη μέτρηση.

Δεν είναι πολλές οι έρευνες που μελετούν τις ικανότητες των μικρών παιδιών για τη μέτρηση του εμβαδού. Ενδεικτικά θα αναφερθούμε στις σημαντικότερες. Σε έρευνα (Clements & Stephan, 2004) με δραστηριότητες σύγκρισης εμβαδών, φάνηκε ότι τα μικρά παιδιά ανταποκρίθηκαν και χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές. Για παράδειγμα, παιδιά ηλικίας 4-5 ετών, για να συγκρίνουν το εμβαδόν δύο σχημάτων, σύγκριναν τα σχήματα βάζοντας το ένα σχήμα πάνω στο άλλο και αντιστοιχίζοντας τη μία πλευρά του ενός σχήματος με πλευρά του άλλου σχήματος. Επίσης, όταν έκαναν συλλογισμούς σχετικούς με τη μέτρηση του εμβαδού, χρησιμοποίησαν κανόνες όπως: ύψος + πλάτος. Μόνο παιδιά ηλικίας από 8 ετών και πάνω, άρχιζαν να χρησιμοποιούν πολλαπλασιαστικούς κανόνες. Σε άλλη έρευνα (Bell et al., 1983 στο Outhred & Mitchelmore, 2000: 146), φάνηκε ότι πολλά παιδιά μπόρεσαν να βρουν τον αριθμό των μονάδων που κάλυπταν ένα σχήμα, αλλά δεν μπόρεσαν να δηλώσουν πόσο είναι το εμβαδόν του σχήματος.

Το είδος του βοηθητικού μέσου, που μπορεί να λειτουργήσει αποτελεσματικά σε δραστηριότητες μέτρησης εμβαδού, έχει δημιουργήσει προβληματισμό στην

ερευνητική κοινότητα γιατί επηρεάζει και τις επιδόσεις των παιδιών. Η μία άποψη, προτείνει δραστηριότητες κάλυψης τετραγωνισμένων σχημάτων με χειροπιαστά βοηθητικά μέσα (NCTM, 1989). Η άλλη άποψη (Outhred & Mitchelmore, 2000), θεωρεί ότι οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούν τρισδιάστατα αντικείμενα δεν είναι λειτουργικές, κυρίως για τα μεγαλύτερα παιδιά, γιατί από τη μια τα αντικείμενα αυτά μπορεί να μην κάνουν φανερή τη δόμηση του σχηματισμού και από την άλλη ίσως τα παιδιά να μη μπορέσουν να αντιληφθούν ότι τα συγκεκριμένα βοηθήματα είναι οι μονάδες μέτρησης του εμβαδού. Επίσης, θεωρούν ότι με αυτού του είδους το μέσο αποφεύγεται το πρόβλημα της επικάλυψης με αποτέλεσμα να μην απαιτείται από τα παιδιά ακρίβεια στην τοποθέτηση. Για παράδειγμα, σε μια έρευνα (Doig, Cheeseman & Lindsay, 1995), βρέθηκε ότι παιδιά Β΄ δημοτικού που χρησιμοποίησαν ξύλινα τουβλάκια για να καλύψουν μια επιφάνεια το έκαναν με διπλάσια επιτυχία από ότι τα παιδιά που χρησιμοποίησαν χάρτινα πλακίδια. Έτσι, ίσως δημιουργείται η εντύπωση ότι τα παιδιά που χρησιμοποίησαν τα ξύλινα τουβλάκια θα οικοδομήσουν ευκολότερα το μοντέλο της ορθογώνιας διάταξης καθώς και τη δομή της. Όμως, τα ξύλινα τουβλάκια κάνουν τη δραστηριότητα πολύ εύκολη και τα παιδιά μπορεί να την πραγματοποιήσουν χωρίς καν να προσέξουν τη δομή της διάταξης. Η δομή της διάταξης ενυπάρχει στο μέσο και δεν είναι απαραίτητο να γίνει αντιληπτή από το μαθητή, για την πραγματοποίηση της δραστηριότητας. Σε άλλη έρευνα (Zacharos & Ravanis, 2000), μέτρησης εμβαδού επιφάνειας, υπέθεσαν ότι τα παιδιά (νηπιαγωγείου, Α΄ και Β΄ τάξης δημοτικού), χρησιμοποιώντας τη στρατηγική της επικάλυψης, με ένα κοινωνικά σημασιοδοτημένο υλικό, θα είχαν καλύτερη επίδοση από τα παιδιά που χρησιμοποίησαν υλικό ουδέτερο ως προς την κοινωνική του σημασία. Τα παιδιά κάθε ηλικιακού επιπέδου χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, την πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου. Στην ομάδα ελέγχου δόθηκαν τρία σετ τεσσάρων ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων διαφορετικών διαστάσεων (10cm x 4cm x 1cm, 12cm x 6cm x 1cm και 14cm x 7 cm x 1 cm), για να καλύψουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σχήμα (24cm x 12cm) (4 ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, της μεσαίας διάστασης, μπορούσαν να το καλύψουν). Στην πειραματική ομάδα, δόθηκαν δώδεκα ξύλινα σχήματα με τη μορφή αυτοκινήτου τα οποία είχαν τις ίδιες διαστάσεις με τα σχήματα της ομάδας ελέγχου και ζητήθηκε από τα παιδιά να τοποθετήσουν τα αυτοκίνητα στο χώρο στάθμευσης (μια ορθογώνια επιφάνεια με διαστάσεις 24cm x 12cm, λίγο πιο σύνθετη από την προηγούμενη αφού περιβαλλόταν από άλλα σχήματα—δρόμος και πράσινο) (4 αυτοκίνητα, του μεσαίου μεγέθους, κάλυπταν τις θέσεις του χώρου στάθμευσης). Στην περίπτωση αυτή δόθηκαν πολλές οδηγίες στα παιδιά σε σχέση με τους κανόνες στάθμευσης, όπως για παράδειγμα δεν παρκάρουμε στο δρόμο, δεν παρκάρουμε στο χώρο του πράσινου κ.λ.π. οι οποίες επαναλαμβάνονταν κατά τη διάρκεια του πειράματος. Τα παιδιά, κάθε ομάδα, έπρεπε να επιλέξουν το κατάλληλο μέγεθος ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων για να καλύψουν τη δοσμένη επιφάνεια. Μέσα από τις συνεντεύξεις, οι οποίες έγιναν ατομικά, φάνηκε ότι από

τα παιδιά ηλικίας 5-6 ετών λίγα κατάφεραν να λύσουν το πρόβλημα της μέτρησης επιφανειών, ανεξάρτητα από το είδος του βοηθήματος. Λίγο πάνω από τα μισά ήταν τα παιδιά, της μεσαίας ηλικίας, της πειραματικής ομάδας που αντιμετώπισαν επαρκώς το πρόβλημα της κάλυψης της επιφάνειας, ενώ ελάχιστα ήταν εκείνα της ομάδας ελέγχου που έλυσαν το πρόβλημα. Η αύξηση των σωστών απαντήσεων με την αύξηση της ηλικίας έδωσε μια ένδειξη ότι καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν διευκολύνονται περισσότερο από το υλικό με κοινωνική σημασία, καθώς και από τους κανόνες που τους δόθηκαν.

Η μέτρηση εμβαδού, σε άλλη έρευνα (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001), έγινε, από μερικούς μαθητές της Α΄ και Β΄ τάξης, με τη χρήση χάρακα, μέσω της μέτρησης του μήκους. Υπολόγισαν το εμβαδόν ενός τετραγώνου μετρώντας το μήκος της μίας πλευράς, μετακινώντας λίγο το χάρακα παράλληλα προς την πλευρά αυτή και μετρώντας πάλι το μήκος της κ.λ.π., θεωρώντας το μήκος ως μέγεθος που γεμίζει το χώρο. Όταν τους προτάθηκε να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά σχήματα (τετράγωνα, ορθογώνια τρίγωνα, κύκλους και ορθογώνια παραλληλόγραμμα), ως μονάδες μέτρησης, για τον υπολογισμό του εμβαδού διαφόρων επιφανειών, οι πιο πολλοί μαθητές, ανακάτεψαν τις μονάδες και ανέφεραν ως αποτέλεσμα το συνολικό αριθμό των μονάδων που χρησιμοποίησαν. Στις μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές, τις περισσότερες φορές, διαφοροποίησαν τη μέτρηση του εμβαδού από τη μέτρηση του μήκους και αντιλήφθηκαν την ανάγκη χρήσης συγκεκριμένης μονάδας για το γέμισμα της επιφάνειας. Λόγω της αποτυχίας των παιδιών να λύσουν προβλήματα εμβαδού με τη χρήση χάρακα, οι Clements & Stephan (2004) προτείνουν να μην αρχίζει η διδασκαλία του εμβαδού με τη χρήση του συγκεκριμένου εργαλείου.

Όσον αφορά στην ικανότητα των μικρών παιδιών να κατανοήσουν την αντίστροφη σχέση μεταξύ του μεγέθους της μονάδας μέτρησης και του αριθμού των μονάδων που είναι απαραίτητες για να μετρήσουν μια επιφάνεια δεν έχουμε ερευνητικά αποτελέσματα. Όμως, έρευνες (Spinillo & Batista, 2009) έχουν δείξει ότι παιδιά ηλικίας 6 ετών μπορούν να κατανοήσουν την αντίστροφη αυτή σχέση όταν μετρούν όγκο, χρόνο, μάζα, απόσταση και μήκος.

► Μέθοδος

Για την καταγραφή του συλλογισμού των μαθητών, για τη μέτρηση εμβαδού, μέσω της κάλυψης επιφάνειας, πραγματοποιήθηκαν δύο παρεμβάσεις, οι οποίες επηρεάστηκαν από τις βασικές θέσεις του ερμηνευτικού πλαισίου του Cobb (2007), για τη μάθηση. Έτσι, σχεδιάστηκαν δραστηριότητες οι οποίες έκαναν χρήση βοηθητικών μέσων και επέτρεπαν διαφορετική διαχείριση κατά την πραγματοποίησή τους.

Σκοπός της πρώτης δραστηριότητας ήταν η διερεύνηση της ικανότητας των νηπίων να καλύψουν χωρίς κενά και επικαλύψεις μια τετραγωνισμένη επιφάνεια

με 'διακριτά' βοηθητικά μέσα, που ναι μεν ήταν τριασδιάστατα για να μπορούν να τα χειριστούν, αλλά η τρίτη τους διάσταση ήταν αμελητέα. Ως επιμέρους στόχοι, τέθηκαν η διερεύνηση της ικανότητας των νηπίων στην καταμέτρηση των μονάδων, καθώς και το κατά πόσο τα νήπια μπόρεσαν να αντιληφθούν την αντίστροφη σχέση μεταξύ του μεγέθους της μονάδας μέτρησης και του αριθμού των μονάδων που ήταν απαραίτητες για να καλύψουν την επιφάνεια. Στη δεύτερη δραστηριότητα, ο σκοπός ήταν η διερεύνηση της ικανότητας των νηπίων να καλύψουν μια τετραγωνισμένη επιφάνεια, με ακρίβεια, με 'συνεχές' υλικό.

Στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων το σενάριο και τα βοηθητικά μέσα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οικεία στα νήπια και εισήγαγαν μια κατάσταση προβληματισμού η οποία έπρεπε να αντιμετωπιστεί. Το σενάριο αφορούσε σε μια κουκλοοικογένεια, με τρία παιδιά (όσες και οι ομάδες των νηπίων που χωρίσαμε), η οποία αποφάσισε να μετακομίσει σε ένα καινούριο κουκλόσπιτο. Το κάθε παιδί της οικογένειας θα έπαιρνε από ένα δωμάτιο. Τα δωμάτια ήταν ίδια μεταξύ τους.

Στην πρώτη δραστηριότητα, η κουκλοοικογένεια ζήτησε τη βοήθεια των νηπίων στο στρώσιμο των πλακιδίων στα δωμάτια. Σε κάθε ομάδα νηπίων δόθηκαν πλακάκια ίδιων διαστάσεων, αλλά διαφορετικού μεγέθους από τις υπόλοιπες, χωρίς αυτό να γίνει γνωστό στα νήπια. Για τα πλακάκια χρησιμοποιήθηκαν καφέ ορθογώνια χαρτόνια πλαστικοποιημένα, σε τρεις διαφορετικές διαστάσεις (6cm x 20cm, 6cm x 15cm 6cm x 12cm), για να τοποθετηθούν από τα νήπια και να καλύψουν το πάτωμα του κουκλοδωματίου. Τα πλακάκια που είχε στη διάθεσή της κάθε ομάδα ήταν περισσότερα από αυτά που θα χρειαζόταν για να καλύψει το πάτωμα. Έτσι, για να καλυφθεί το πάτωμα του κουκλοδωματίου, χρειάζονταν 12 μεγάλα πλακάκια (σε σχηματισμό 4X3), ή 16 μεσαία πλακάκια (σε σχηματισμό 4X4) ή 20 μικρά πλακάκια (σε σχηματισμό 4X5).

Η δεύτερη δραστηριότητα αφορούσε στη βοήθεια που ζήτησε η κουκλοοικογένεια, από τα νήπια, για το στρώσιμο των δωματίων με μοκέτα. Δόθηκε, σε κάθε ομάδα νηπίων, ένα κομμάτι βελουτέ χαρτόνι (ως μοκέτα για επίστρωση), σε διάσταση μεγαλύτερη από την προς κάλυψη επιφάνεια, για να μετρηθεί, να κοπεί και να τοποθετηθεί από τα νήπια για να καλύψει το πάτωμα του κουκλοδωματίου. Κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της επίσης το κουκλοδωμάτιο, ψαλίδι, χάρακα και σπάγκο.

Οι δύο παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν, το Μάιο σε ένα δημόσιο νηπιαγωγείο στην πόλη της Ρόδου, με 11 νήπια (5 αγόρια και 6 κορίτσια), με κενό διάστημα μίας μέρας. Τα νήπια είχαν την ικανότητα να μετράνε με άνεση, μέχρι το 10, ενώ ένα σημαντικό ποσοστό των νηπίων μπορούσε να μετρήσει μέχρι το 15 και το 20. Όμως, δεν είχαν ασχοληθεί καθόλου με δραστηριότητες μέτρησης εμβαδού. Για τη διαχείριση των δραστηριοτήτων τα νήπια χωρίστηκαν, τυχαία⁵, σε τρεις ομάδες: η

5. Ο τυχαίος χωρισμός έγινε από τη νηπιαγωγό κατά την οποία όλα τα νήπια είχαν την ίδια περίπου επίδοση στα μαθηματικά και είχαν εμπειρία από εργασία σε ομάδες.

πρώτη ομάδα είχε τρία άτομα (Π1, Π2, Π3)⁶ και οι άλλες δύο από τέσσερα άτομα (2^η ομάδα: Π4, Π5, Π6, Π7, 3^η ομάδα: Π8, Π9, Π10, Π11). Κάθε ομάδα, αφού δούλεψε τη δραστηριότητά της, στο τέλος, παρουσίαζε τη λύση του προβληματισμού στην ολομέλεια. Με αυτό τον τρόπο, υποθέσαμε ότι αναδεικνύονται οι διαφορετικοί συλλογισμοί των μαθητών οι οποίοι με την αλληλεπίδραση με τους υπόλοιπους μαθητές, καθώς και με την ερευνήτρια μπορεί να διαμορφωθούν ώστε να σχηματιστεί η μαθηματική πρακτική της τάξης. Η παρέμβαση βιντεοσκοπήθηκε.

► Αποτελέσματα

Κατά την πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων δόθηκε έμφαση στην ανάδειξη και την καταγραφή του συλλογισμού των μαθητών, μέσα από το χειρισμό συγκεκριμένων βοηθητικών μέσων, τα οποία αποτελούσαν μέρος της δραστηριότητας, καθώς και μέσα από τη συμμετοχή τους στη μαθηματική συζήτηση που δημιουργήθηκε μέσα στην τάξη.

1^η δραστηριότητα

Αρχικά έγινε η αφήγηση του σεναρίου και δόθηκε έμφαση στο γεγονός ότι τα κουκλοδωμάτια ήταν ακριβώς τα ίδια μεταξύ τους, είχαν τις ίδιες διαστάσεις. Τέθηκε ο προβληματισμός για την τοποθέτηση των πλακιδίων στο πάτωμα του δωματίου και τη καταμέτρησή τους για να βοηθήσουν την κουκλοοικογένεια.

Οι ομάδες των νηπίων, πήραν τα πλακίδια και άρχισαν να τα τοποθετούν στο πάτωμα του κουκλοδωματίου. Συνεργάστηκαν μεταξύ τους, γιατί είχαν συνηθίσει να δουλεύουν σε ομάδες. Όλα τα παιδιά και στις τρεις ομάδες πήραν μέρος στην τοποθέτηση η οποία δεν παρουσίασε επικαλύψεις ή κενά γιατί γινόταν άμεση τακτοποίηση των πλακιδίων σε σχέση με τα ήδη τοποθετημένα. Πιο συγκεκριμένα, οι δύο πρώτες ομάδες τοποθέτησαν και καταμέτρησαν τα πλακάκια με συστηματικό τρόπο. Η πρώτη ομάδα έφτιαξε, αρχικά, μία στήλη⁷ και στη συνέχεια κάλυψε την υπόλοιπη επιφάνεια (φωτ. 1). Η δεύτερη ομάδα κάλυψε την επιφάνεια ανά γραμμή⁸. Και οι δύο ομάδες, τοποθέτησαν τα πλακίδια ομοιόμορφα ως προς τις διαστάσεις του σχήματος και τα καταμέτρησαν, για να βρουν το πλήθος τους, απαριθμώντας ένα-ένα τα πλακάκια κάθε σειράς. Το παιδί που μετρούσε ακουμπούσε με το δάκτυλο το κάθε πλακάκι. Στην ίδια ομάδα υπήρξε και δεύτερο και τρίτο παιδί που καταμέτρησε τα πλακάκια, ίσως για να σιγουρευτεί για το αποτέλεσμα.

6. Όπου Π1, Π2, ..., Π11, εννοούμε Παιδί 1 κ.λ.π.

7. Λέγοντας στήλη εννοούμε την κατακόρυφη, ως προς τη μικρή διάσταση του κουκλοδωματίου, τοποθέτηση των πλακιδίων.

8. Λέγοντας γραμμή εννοούμε την οριζόντια, ως προς τη μεγάλη διάσταση του κουκλοδωματίου, τοποθέτηση των πλακιδίων.



Φωτ. 1: Κάλυψη επιφάνειας από τα παιδιά της 1^{ης} ομάδας

Στην πρώτη ομάδα, ενώ τα παιδιά είχαν τελειώσει, τίθεται ένας προβληματισμός από την ερευνήτρια για τα πλακάκια που περισσεύουν. Χαρακτηριστικό είναι το επεισόδιο (όπου Ε: Ερευνήτρια, όπου: απάντηση από πολλά παιδιά ταυτόχρονα. Στις παρενθέσεις είναι γραμμένα δικά μας σχόλια.)

Π1: *Τα τελειώσαμε.*

Ε: *Αυτά;* (Δείχνει τα πλακάκια που περισσεύουν)

Π2: *Από πάνω.*

Ε: *Θα μπουν από πάνω; Τι λέτε;*

Π1: *Όχι.*

Π3: *Να τα βάλουμε κάπου εδώ* (δείχνει τον τοίχο του δωματίου)...

Π1: *Αυτά περισσεύουν. Θα τα βάλουμε εδώ* (δείχνει ένα σημείο πάνω στον πάγκο εργασίας και συμφωνούν και τα υπόλοιπα παιδιά της ομάδας).

Ίσως τα παιδιά να είχαν συνηθίσει να χρησιμοποιούν όλο το υλικό που δίνεται από τη νηπιαγωγό, για κάθε δραστηριότητα, οπότε και σε αυτή την περίπτωση ενώ τα είχαν τοποθετήσει και δήλωσαν ότι είχαν τελειώσει, κάποια, προβληματίστηκαν με την ερώτηση της ερευνήτριας και έτειναν να συμπληρώσουν την αρχική τους κατασκευή, χωρίς όμως να αλλάξουν την τοποθέτηση των πλακιδίων στην επιφάνεια του πατώματος. Δε φάνηκε να αμφισβητούν την κατασκευή τους ως προς τον τρόπο τοποθέτησης των πλακιδίων καθώς και το συνολικό πλήθος των πλακιδίων που χρησιμοποίησαν. Δημιουργήθηκε στιγμιαία μια σύγκρουση του τι είχαν κάνει και του προβληματισμού που τέθηκε. Όμως δεν άλλαξαν την απάντησή τους και αυτό σημαίνει ότι είχαν απόλυτη συνείδηση του τι είχαν κάνει και το υποστήριξαν.

Η τρίτη ομάδα τοποθέτησε τα πλακάκια χωρίς δομή, χωρίς συγκεκριμένη σειρά, αλλά και χωρίς επικαλύψεις ή κενά. Στη συγκεκριμένη ομάδα, η καταμέτρηση των πλακιδίων δημιούργησε διαφωνία. Αρχικά, τα παιδιά βρήκαν 17 πλακάκια και στη συνέχεια 19, αντί 20. Ο τρόπος που μετρούσαν δεν ήταν συστηματικός, όπως στις προηγούμενες ομάδες. Η τοποθέτηση, χωρίς δόμηση, μιας διάταξης καθώς

και η μη ακριβής καταμέτρηση ίσως να συνέβηκε γιατί άρχισαν να τοποθετούν και να καταμετρούν πολλά παιδιά μαζί. Ενώ άρχισαν την καταμέτρηση τους ανά γραμμή, συνέχισαν με τυχαίο τρόπο. Τελικά, ένα νήπιο ανέλαβε την καταμέτρηση των πλακιδίων από την αρχή. Καταμέτρησε ανά γραμμή, χρησιμοποιώντας το ένα χέρι για να δείχνει με το δάκτυλο αυτά που καταμετρούσε και το άλλο χέρι για να καλύπτει τις γραμμές που είχε ήδη καταμετρήσει. Βρήκε 20 πλακίδια, αλλά ξαναμέτρησε από την αρχή για δεύτερη φορά, ίσως για να σιγουρευτεί για το αποτέλεσμα που βρήκε.

Μετά την κάλυψη του πατώματος και την καταμέτρηση των πλακιδίων, ζητήθηκε από τις ομάδες των νηπίων να παρουσιάσουν την κατασκευή τους, στα υπόλοιπα νήπια και να ανακοινώσουν τον αριθμό των πλακιδίων που χρησιμοποίησαν. Κατά την παρουσίαση παρατηρήθηκε ότι η κάθε ομάδα ανακοίνωσε και διαφορετικό αριθμό πλακιδίων (η 1^η ομάδα 12 πλακάκια, η 2^η 16 πλακάκια και η 3^η 20 πλακάκια) και διαπιστώθηκε από τα ίδια τα νήπια, μέσα από τη μαθηματική συζήτηση, ότι αυτό συμβαίνει γιατί τα πλακάκια ήταν διαφορετικού μεγέθους για κάθε ομάδα, ενώ τα δωμάτια ήταν τα ίδια:

E: Πόσα πλακάκια βρήκατε παιδιά;

P4: 16.

E: Οι υπόλοιπες ομάδες συμφωνούνε;

...: Ναι.

E: Συμφωνείτε ότι τα πλακάκια που στρώσατε όλοι ήταν 16;

P3: Όχι, εμάς ήταν 12.

E: Εσάς ήταν 16 τα πλακάκια κι εσάς ήταν 12; Πώς γίνεται αυτό; Εσάς πόσα ήταν παιδιά; (ρωτάει τα παιδιά της άλλης ομάδας)

P9: 20.

E: Παιδιά πώς έγινε τώρα αυτό; Οι όροφοι δεν είπαμε πώς είναι ίδιοι;

P7: Ναι, αλλά τα έκοψες λίγο πιο ψηλά τα άλλα (εννοεί πιο μεγάλα).

P5: Μα είναι μεγάλα τα δικά τους. Εμάς είναι μικρά και είναι 16 ...

Εκμεταλλευόμενη, η ερευνήτρια, το συλλογισμό των νηπίων για το διαφορετικό μέγεθος των πλακιδίων, συνεχίζει τον προβληματισμό μέσω μαθηματικής συζήτησης, στην οποία συμμετείχαν τα νήπια, που κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όσο μικρότερα είναι τα πλακάκια, τόσο περισσότερα χρειάζονται για να καλύψουν την επιφάνεια, αλλά και όσο μεγαλύτερα είναι τα πλακάκια, τόσο λιγότερα χρειάζονται για να καλύψουν την επιφάνεια:

E: Για να δούμε, τι παρατηρούμε; Αυτό με αυτό το πλακάκι είναι τα ίδια; (συγκρίνει ένα πλακάκι από τη 2^η ομάδα και ένα πλακάκι από την 3^η ομάδα)

P8: Αυτό είναι πιο μεγάλο κι αυτό πιο μικρό.

E: Και μ' αυτό; (συγκρίνει και το πλακάκι της 1^{ης} ομάδας)

...: Πιο μεγάλο.

E: Όσο μεγαλύτερο είναι το πλακάκι, χρειαζόμαστε περισσότερα για το στρώσιμο ή λιγότερα;

...: Λιγότερα.

E: Συμφωνούμε όλοι;

...: Ναι.

E: Άμα τα πλακάκια μας είναι πιο μικρά χρειαζόμαστε περισσότερα ή λιγότερα;

...: Περισσότερα.

Φάνηκε ότι τα νήπια μέσα από τη συμμετοχή τους στη δραστηριότητα της τάξης σχημάτισαν το μαθηματικό τους συλλογισμό τον οποίο εξέφρασαν στη μαθηματική συζήτηση που δημιουργήθηκε και στο εσωτερικό της ομάδας, αλλά και στην ολομέλεια, τόσο μεταξύ τους όσο και με την ερευνήτρια. Ο ανασχηματισμός της δραστηριότητας, τόσο σε επίπεδο ομάδας ως προς τα περισσευούμενα πλακίδια όσο και σε επίπεδο ολομέλειας ως προς την αιτία του διαφορετικού πλήθους πλακιδίων που χρησιμοποιήθηκαν από κάθε ομάδα, οδήγησε σε πιο σύνθετο μαθηματικό συλλογισμό.

Οι θεμελιώδεις έννοιες που εμπλέκονται στη διασκαλία/μάθηση της μέτρησης του εμβαδού παρατηρήθηκαν, ως ένα βαθμό, στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν τα νήπια για να καλύψουν την επιφάνεια. Ως προς τη δόμηση μιας διάταξης και τη γραμμική μέτρηση οι ομάδες παρουσίασαν ικανότητες του ίδιου σταδίου. Κάλυψαν την επιφάνεια και υπολόγισαν καταμετρώντας με μερική χρήση της διάταξης. Αν μπορούσαμε να κατατάξουμε τα νήπια σε συγκεκριμένο στάδιο, μέσα από μία και μόνο δραστηριότητα, θα λέγαμε ότι βρίσκονται στο δ στάδιο των Clements & Stephan (2004).

2η δραστηριότητα

Αρχικά έγινε η αφήγηση του σεναρίου για να θυμηθούν τα νήπια τη σχετική δραστηριότητα, χωρίστηκαν στις τρεις ομάδες τους και κάθε ομάδα πήρε την κατασκευή της. Στη συνέχεια η ερευνήτρια μετέφερε στα νήπια τον προβληματισμό της κουκλοοικογένειας για το πώς θα μπορούσαν να τοποθετήσουν στο πάτωμα του δωματίου, μοκέτα, για να στρώσουν όταν θα χειμώνιζε.

Τα νήπια των διαφορετικών ομάδων υιοθέτησαν διαφορετικές στρατηγικές για να μετρήσουν και να κόψουν τη μοκέτα, ώστε να καλύψουν το πάτωμα του δωματίου. Στην πρώτη ομάδα, αρχικά, κάποια νήπια έπιασαν το ψαλίδι να κόψουν το χαρτόνι χωρίς να έχει προηγηθεί κάποιου είδους μέτρηση. Στο σημείο αυτό επενέβη η ερευνήτρια:

Ε: Θα το κόψετε έτσι, υπολογίζοντας με το μάτι; Μην αρχίσετε να κόβετε έτσι, γιατί άμα γίνει μικρότερη η μοκέτα ή μεγαλύτερη, δε θα μπορεί να μπει στο δωμάτιο. Με ποιον τρόπο μπορούμε να το υπολογίσουμε;

Π1: Να πάρουμε τα μέτρα.

Ε: Πολύ ωραία ιδέα. Θα πρέπει να κάνει η κάθε ομάδα μία μέτρηση πολύ σωστή. Πώς μπορεί να γίνει αυτό;

Εργαλεία μέτρησης όπως ο χάρακας ή άλλα υλικά που συχνά χρησιμοποιούνται για μέτρηση όπως ο σπάγκος, ήταν οι πρώτες επιλογές των νηπίων. Αυτά τα εργαλεία ήταν οικεία γιατί είχαν χρησιμοποιηθεί, από τα νήπια και τη νηπιαγωγό τους, για τη μέτρηση του μήκους. Σύντομα όμως συνειδητοποίησαν ότι η συγκεκριμένη περίπτωση ήταν διαφορετική, γιατί δεν ήξεραν πώς να συνεχίσουν. Χαρακτηριστικό είναι το επεισόδιο:

Π2: Με χάρακα. (Επιασε το χάρακα προσπαθώντας να μετρήσει. Τον τοποθέτησε κατά μήκος, του πατώματος του δωματίου, αλλά του περίσσευε κάποιο τμήμα της επιφάνειας και δεν ήξερε πώς να συνεχίσει).

Π3: Ε! Όπου βρεις βάζεις το χάρακα; (Ενα άλλο παιδί προσπαθεί με το σπάγκο. Έπιασε το σπάγκο προσπαθώντας να μεταφέρει τη μία διάσταση της επιφάνειας του δωματίου πάνω στο χαρτόνι, αλλά μπερδεύτηκε και εγκατέλειψε την προσπάθεια).

Π2: Ψαλίδι.

Ε: Είστε έτοιμοι να το κόψετε; Το έχετε μετρήσει;

Π3: Άπλωσε το εκεί. Δε θέλω να το κόψουμε.

Μετά την παρέμβαση της ερευνήτριας, η πρώτη ομάδα άλλαξε και πάλι στρατηγική. Τοποθέτησε το χαρτόνι στο πάνω μέρος του δωματίου τσακίζοντάς το περιμετρικά. Έκοψαν ένα ορθογώνιο κομμάτι και τοποθέτησαν το υπόλοιπο χαρτόνι πάλι στην επιφάνεια τσακίζοντάς το, εκ νέου, περιμετρικά. Όμως, κάποια στιγμή, άλλαξαν και πάλι στρατηγική. Επηρεάστηκαν από τη συζήτηση της ερευνήτριας με την τρίτη ομάδα για μέτρηση της μοκέτας με μονάδα τα πλακάκια και άρχισαν να κόβουν το χαρτόνι σε μικρά πλακάκια. Η ερευνήτρια παρεμβαίνει:

Ε: Τι σκεφτήκατε να κάνετε;

Π1: Με τα πλακάκια.

Π2: Ξέρω. Να φτιάξουμε τα πλακάκια και να τα βάλουμε κάτω.

Ε: Αν κόψουμε ένα-ένα πλακάκι θα δημιουργηθεί μοκέτα; Θα είναι μοκέτα αυτό που θα φτιάξουμε;

...: Όχι.

Ε: Πώς μπορούμε να μετρήσουμε με τα πλακάκια;

Π2: Να τα βάλουμε από πάνω.

Ε: Μάλιστα. Για προσπαθήστε.

(Τα νήπια της ομάδας αρχίζουν να τοποθετούν τα πλακάκια, άλλα οριζόντια και άλλα κάθετα)

Ε: Ναι, αλλά δε θα πρέπει να είναι όλα με την ίδια φορά, όπως ήταν πάνω στο πάτωμα;

(Τα νήπια της ομάδας συνέχισαν να τοποθετούν τα πλακάκια, προς την ίδια κατεύθυνση, που όμως ήταν διαφορετική από την κατεύθυνση που είχαν τα πλακάκια στο πάτωμά τους)

Π3: Κυρία; Να κόψουμε;

Ε: Όπως νομίζετε εσείς. Νομίζεις ότι αυτά είναι τοποθετημένα με τον ίδιο τρόπο όπως ήταν στο πάτωμα;

Π3: Ναι.

Ε: Κόψ' το να δούμε αν θα χωρέσει.

Η τοποθέτηση των πλακιδίων, με άλλη φορά από την επιθυμητή (κατά μήκος αντί κατά πλάτος) και σε άλλο σχηματισμό (2 x 6, αντί 3 x 4) πάνω στη μοκέτα (φωτ. 2), οδήγησε στη δημιουργία μοκέτας, με λάθος διαστάσεις, η οποία όταν μπήκε στο κουκλόσπιτο, από τη μια μεριά περίσσευε και από την άλλη άφηνε κενό. Με την ίδια διαδικασία, τοποθέτηση πλακιδίων στο χαρτόνι, μέτρησαν και έκοψαν ακόμα ένα κομμάτι χαρτόνι και το τοποθέτησαν στο κενό (φωτ. 3). Για να τη σταθεροποιήσουν ζήτησαν να την κολλήσουν στο πάτωμα., αλλά στη συνέχεια τοποθέτησαν κομμάτια από το οικοδομικό υλικό και στόλισαν και το δωμάτιο.



Φωτ. 2: Η 1^η ομάδα κόβει τη μοκέτα



Φωτ. 3: Η μοκέτα της 1^{ης} ομάδας

Η χρήση του ίδιου υλικού (σε είδος και ποσότητα) δεν οδήγησε, τη συγκεκριμένη ομάδα, στη δημιουργία του ίδιου σχήματος. Αυτό έγινε αντιληπτό από τα νήπια, μόνο αφού τελείωσαν την κατασκευή τους. Η επισήμανση της ερευνήτριας για τη φορά τοποθέτησης δε φαίνεται να λειτούργησε αποτελεσματικά για τη συγκεκριμένη ομάδα.

Η δεύτερη ομάδα αναποδογύρισε το κουκλοδωμάτιο, έφτιαξε το περίγραμμα πάνω στο χαρτόνι και το έκοψε (φωτ. 4). Το κομμάτι που προέκυψε (ως μοκέτα) ήταν λίγο μεγαλύτερο από την επιφάνεια του πατώματος γιατί δεν είχαν λάβει υπόψη τους το πάχος των τοίχων. Όμως, η ομάδα συμφώνησε από την πρώτη στιγμή για τη μέθοδο που θα χρησιμοποιούσε για να κόψει τη μοκέτα και έτσι προχώρησε και τελείωσε πολύ γρήγορα. Όταν τοποθέτησαν τη μοκέτα στο πάτωμα του κουκλοδωματίου ανασήκωσαν το περισσευούμενο χαρτόνι προς τα τοιχώματα.

Η τρίτη ομάδα, για να υπολογίσει τη διάσταση του πατώματος και να κόψει τη μοκέτα, έπιασε τα τοποθετημένα πλακίδια και τα έβαλε πάνω στο χαρτόνι. Σε αντίθεση με την πρώτη ομάδα, τα συγκεκριμένα νήπια είχαν παρατηρήσει πώς ήταν τοποθετημένα τα πλακίδια στο πάτωμα του κουκλόσπιτου και τα τοποθέτησαν με τον ίδιο τρόπο (φωτ. 5). Στη συνέχεια, έκοψαν το χαρτόνι. Αυτό τους δυσκόλεψε λίγο γιατί τα πλακάκια γλιστρούσαν και μετακινούνταν οπότε το κόψιμό τους δεν είχε απόλυτη ακρίβεια. Όμως η μοκέτα τοποθετήθηκε ως ενιαίο κομμάτι.



Φωτ. 4: Η 2^η ομάδα κόβει τη μοκέτα



Φωτ. 5: Η 3^η ομάδα κόβει τη μοκέτα

Μετά τη μέτρηση και την κάλυψη του πατώματος με τη μοκέτα, ζητήθηκε από τα νήπια να παρουσιάσουν, στις άλλες ομάδες, την κατασκευή τους και να περιγράψουν τον τρόπο που εργάστηκαν. Η παρουσίαση της μοκέτας της πρώτης ομάδας ανέδειξε και τη συνειδητοποίηση της ασυνέπειας στη στρατηγική που εφαρμόστηκε:

E: Για να μας δείξει η 1^η ομάδα, τι έκανε και πώς είναι η μοκέτα της.

P1: Είχαμε βάλει πλακάκια, αλλά δεν τα βάλαμε όλα στη σειρά τους και τα κάναμε άνω-κάτω.

P2: Και τα κάναμε άνω-κάτω.

P3: Τα κάναμε άνω-κάτω.

P1: Και τα κάναμε μισά.

E: Τι βλέπω εδώ; Εδώ είναι δύο μοκέτες. Γιατί έχετε δύο μοκέτες;

P2: E, δεν έφτανε η μοκέτα να πάει μέχρι εδώ.

Ε: Για να δούμε, πώς σας φαίνεται η μοκέτα της 1^{ης} ομάδας; Είναι κομμένη σωστά;

Π1: Όχι.

Ε: Τι δεν κάνατε σωστά; Μήπως δεν υπολογίσατε σωστά τα πλακάκια;

Π2: Ναι, τα είχαμε βάλει άνω-κάτω.

Π3: Ήταν 12 τα πλακάκια, και τα πλακάκια φτάνανε μέχρι εδώ. Ενώ η μοκέτα έφτανε μέχρι εδώ και βάλουμε το τουβλάκι.

Ε: Τα βάλατε έτσι ή έτσι; (Δείχνει η ερευνήτρια την τοποθέτηση των πλακιδίων οριζόντια και κάθετα.)

Π1: Και τα 2 τα βάλουμε (εννοεί και με τους δύο τρόπους) ... Εμείς αρχίσαμε να τα βάζουμε έτσι. Αλλά μετά, επειδή μας περίσσευε χώρος τα βάλουμε και αλλιώς, γι' αυτό μας βγήκε έτσι.

Ε: Μάλιστα. Άρα; Εδώ έχει ένα πρόβλημα αυτή η μοκέτα. Αλλά κάτι θα κάνουμε, θα την μπαλώσουμε και θα την φτιάξουμε. Αλλά δεν έπρεπε να κοπεί έτσι γιατί περισεύει κι από δω. Το βλέπετε; Βγαίνει εδώ πέρα, στον τοίχο. Καταλάβαμε τώρα πως θα πρέπει να το υπολογίσουμε;

...: Ναι.

Π1: Έπρεπε να βάλουμε τα πλακάκια αλλιώς.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι τα νήπια, της συγκεκριμένης ομάδας, αντιλήφθηκαν ότι ο τρόπος τοποθέτησης των πλακιδίων, πάνω στη μοκέτα, έπρεπε να είναι διαφορετικός για να μπορέσει να καλύψει το πάτωμα με ακρίβεια.

Στη δεύτερη και τρίτη ομάδα η μέτρηση και το κόψιμο είχε γίνει με σχετική ακρίβεια και η τοποθέτηση ήταν πολύ καλή. Τα νήπια περιγράψαν τον τρόπο δουλειάς τους, στις άλλες ομάδες, με λίγα λόγια:

Ε: Για να μας δείξει η 2^η ομάδα, τι έκανε και πώς είναι η μοκέτα.

Π4: Βάλουμε τα πλακάκια.

Ε: Δηλαδή; Πώς τα βάλατε;

(τα νήπια τοποθετούν τα πλακάκια πάνω στη μοκέτα, η οποία είναι τοποθετημένη στο πάτωμα, δείχνοντας πώς υπολόγισαν).

Ε: Η 3^η ομάδα; Εσείς πώς τα υπολογίσατε;

Π10: Γυρίσαμε ανάποδα όλο το κουκλοδωμάτιο, είδαμε πόσο είναι από κάτω και κόψαμε.

Ε: Μάλιστα. Πολύ ωραία. Μπράβο παιδιά! Έτσι, βοηθάμε την κουκλοοικογένεια.

Η δεύτερη δραστηριότητα, η οποία μπορεί να θεωρηθεί και ως αναδιοργάνωση της πρώτης και η εμπλοκή διαφορετικού βοηθητικού μέσου ('συνεχές' υλικό) δυσκόλεψε τα νήπια περισσότερο. Αναδείχτηκαν διαφορετικές στρατηγικές οι οποίες δεν τηρήθηκαν σε όλες τις περιπτώσεις με συνέπεια. Για παράδειγμα, η δεύτε-

ρη και η τρίτη ομάδα υπολόγισαν με διαφορετικό τρόπο, αλλά με συγκεκριμένη στρατηγική. Αντίθετα, η πρώτη ομάδα, ενώ στην πρώτη δραστηριότητα φάνηκε σταθερή στη λύση που έδωσε, στη δεύτερη δραστηριότητα είχε έντονο προβληματισμό για το ποια στρατηγική θα υιοθετήσει. Υπήρξε η τάση να κοπεί η μοκέτα σε πλακίδια και άρα να χρησιμοποιηθεί ως 'διακριτό' υλικό αντί ως 'συνεχές' που ήταν και ο σκοπός που είχε τεθεί. Εκφράστηκαν διαφορετικοί συλλογισμοί οι οποίοι ανασχηματίστηκαν από την αλληλεπίδραση που είχαν τα νήπια μεταξύ τους, αλλά και με την ερευνήτρια. Παρόλα αυτά η μαθηματική πρακτική που τελικά υιοθετήθηκε διαμορφώθηκε από την ίδια την ομάδα και δεν ανασχηματίστηκε από προβληματισμό που έθεσε η ερευνήτρια.

Η πραγματοποίηση της δραστηριότητας απαιτούσε από τα νήπια συλλογισμό με τη βοήθεια εργαλείων τα οποία όμως δεν ήταν ανεξάρτητα, αλλά μέρος της ίδιας της δραστηριότητας. Στη μία περίπτωση, για τη μέτρηση της μοκέτας, χρησιμοποιήθηκε άμεση σύγκριση, όταν η ομάδα τοποθέτησε το δωμάτιο πάνω στη μοκέτα, ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε έμμεση σύγκριση, όταν για τη μέτρηση της μοκέτας διαμεσολάβησε η χρήση των πλακιδίων (ως μονάδων μέτρησης).

► Συζήτηση - Συμπεράσματα

Επηρεασμένοι από τις θέσεις του ερμηνευτικού πλαισίου του Cobb (2007), σχεδιάσαμε δραστηριότητες, για τη μέτρηση του εμβαδού μέσω της κάλυψης επιφάνειας, που στηρίζονται σε οικεία γεγονότα, που έχουν νόημα για τα νήπια και τα εισάγουν σε προβληματικές καταστάσεις. Η συμμετοχή στην αντιμετώπιση του προβληματισμού της ερευνήτριας, μέσω της εργασίας στην ομάδα και της παρουσίας των αποτελεσμάτων στην ολομέλεια, οδήγησε στην αλληλεπίδραση των νηπίων μεταξύ τους και με την ερευνήτρια, στη δημιουργία μαθηματικής συζήτησης και στην έκφραση διαφορετικών συλλογισμών που προέκυψαν από τη συμμετοχή τους στην πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων και στην ενασχόλησή τους με εργαλεία που αποτελούσαν αναπόσπαστο τμήμα αυτών των δραστηριοτήτων. Η αλληλεπίδραση των νηπίων με την ερευνήτρια έγινε κατά κύριο λόγο λεκτικά, ενώ η αλληλεπίδραση των νηπίων μεταξύ τους έγινε στις περισσότερες περιπτώσεις μη λεκτικά. Η μη λεκτική επικοινωνία είχε να κάνει με την αλληλοσυμπλήρωση θέσεων πλακιδίων για την κάλυψη της επιφάνειας, με την αλληλοακολουθία ενεργειών καθώς και με την αλληλοβοήθεια σε διάφορες δράσεις για την επίτευξη του κοινού στόχου.

Τα νήπια κατάφεραν να καλύψουν μια επιφάνεια με 'διακριτό' υλικό, σε αντίθεση με άλλες έρευνες, και να το καταμετρήσουν. Συγκεκριμένα, στην έρευνα των Zacharos & Ravanis (2000), παρόλο που τα βοηθητικά μέσα που χρησιμοποιήσαν ήταν τρισδιάστατα και σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Outhred & Mitchelmore, 2000), 'εύκολα' για δραστηριότητες κάλυψης επιφάνειας, ελάχιστα ήταν τα νήπια που πραγματοποίησαν με επιτυχία τις δραστηριότητες. Το είδος του μέσου (ποιό-

τητα, διαστάσεις, οικειότητα) και ο τρόπος εμπλοκής του στη δραστηριότητα μαζί με άλλους παράγοντες όπως η εργασία των νηπίων σε ομάδες και η μαθηματική συζήτηση που δημιουργήθηκε, στην κοινότητα της τάξης, για να δοθεί λύση στον προβληματισμό, ίσως να αποτέλεσαν καθοριστικούς παράγοντες οι οποίοι βοήθησαν τα νήπια να ανταποκριθούν στη δραστηριότητα της κάλυψης της επιφάνειας, με επιτυχία.

Η καταμέτρηση των μονάδων άλλοτε έγινε με συστηματικό τρόπο και άλλοτε όχι, ανάλογα με το πλήθος τους. Η συστηματική καταμέτρηση οδήγησε σε σωστά αποτελέσματα ενώ η μη συστηματική σε διχογνωμίες. Για παράδειγμα, το μεγάλο πλήθος μονάδων (20) δημιούργησε διχογνωμία και υιοθέτηση στρατηγικής για την καταμέτρησή τους.

Το είδος της δραστηριότητας και η επιλογή του συγκεκριμένου βοηθητικού μέσου επιδίωκε στην ανάδειξη της αντίστροφης σχέσης που χαρακτηρίζει το μέγεθος της μονάδας μέτρησης και του αριθμού των μονάδων σε μια συγκεκριμένη μέτρηση. Αυτό φάνηκε ότι μπορεί να γίνει αντιληπτό από κάποια νήπια, μέσω πρόκλησης προβληματισμού από την ερευνήτρια, όπως προέκυψε μέσα από τη μαθηματική συζήτηση που έλαβε χώρα στο πλαίσιο της δραστηριότητας.

Για να καλύψουν μια επιφάνεια με ‘συνεχές’ υλικό, τα νήπια, χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές που αφορούσαν είτε σε άμεση είτε σε έμμεση σύγκριση. Στην άμεση σύγκριση, πρακτικοί τρόποι μέτρησης, όπως η αποτύπωση στο χαρτόνι του σχήματος του πατώματος, αποδείχτηκαν πολύ αποτελεσματικοί. Στην έμμεση σύγκριση, η χρήση των πλακιδίων, ως μέσο μέτρησης του ‘συνεχούς’ υλικού, δεν οδήγησε όλα τα νήπια στο σωστό αποτέλεσμα, αλλά δημιούργησε ενδιαφέρουσα μαθηματική συζήτηση με την παρέμβαση της ερευνήτριας. Προέκυψε, από τη συγκεκριμένη ομάδα νηπίων, ότι η τοποθέτηση των ίδιων πλακιδίων με συστηματικό τρόπο στη μοκέτα δε δημιουργεί πάντα το επιθυμητό σχήμα. Παράγοντες όπως η φορά τοποθέτησης, καθώς και ο σχηματισμός επηρεάζουν το τελικό αποτέλεσμα. Η χρήση τυπικών εργαλείων μέτρησης (χάρακας) ή άλλων μέσων (σπάγκος) οδήγησε στην προσπάθεια αντιστοίχισης της μίας πλευράς των σχημάτων, ως μέτρηση μήκους, χωρίς όμως ολοκλήρωση της προσπάθειας και αυτό συμφωνεί με τα σχετικά ερευνητικά δεδομένα (Clements & Stephan, 2004· Kilpatrick et al., 2001).

Ο μαθηματικός συλλογισμός των μαθητών, στο κοινωνικό πλαίσιο της τάξης, σύμφωνα με το ερμηνευτικό πλαίσιο, ανατροφοδοτεί τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό και τη διδασκαλία. Έτσι, οι παραπάνω διαπιστώσεις για τις ικανότητες των νηπίων, μπορεί να αποτελέσουν την αφορμή για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων που στηρίζουν και εξελίσσουν το συλλογισμό των μικρών παιδιών για τη μέτρηση του εμβαδού. Συμπληρώνοντας τις διδακτικές προτάσεις των Clements & Stephan (2004), προτείνουμε το σχεδιασμό δραστηριοτήτων όπου τα νήπια θα μπορούν να αντιληφθούν τις μονάδες μέτρησης, που χρησιμοποιούν για την κάλυψη μιας επιφάνειας, ως μέρος ενός όλου και όχι ως ανεξάρτητες μεταξύ τους μονάδες.

Δραστηριότητες με χρήση μονάδων μέτρησης σε κατάλληλο αριθμό και διάταξη που να οδηγεί τα νήπια σε χρήση πιο περίπλοκων στρατηγικών μέτρησης. Για παράδειγμα, η χρήση μονάδων σε σχηματισμό 2×3 ή 2×4 ίσως οδηγήσουν τα νήπια σε υπολογισμό των μονάδων με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ($2+2+2$ ή $2+2+2+2$) και σταδιακά σε πολλαπλασιαστικές μεθόδους. Η προτροπή να αναπαραστήσουν τα νήπια με δικό τους τρόπο στο χαρτί (Outhred & Mitchelmore, 2000) τις παραπάνω δραστηριότητες μπορεί να οδηγήσει σε παραπέρα εξέλιξη του συλλογισμού. Τέλος, προτείνεται η πραγματοποίηση δραστηριοτήτων σταδιακής απεξάρτησης από το χειρισμό βοηθημάτων όπου τα παιδιά θα καλούνται να υπολογίσουν τις μονάδες μέτρησης σε εικονιστικές αναπαραστάσεις τετραγωνισμένων επιφανειών χωρισμένων σε τετραγωνισμένα σχήματα.

Φυσικά δεν ισχυριζόμαστε ότι με τις δραστηριότητες κάλυψης τα νήπια κατανοούν και τη μέτρηση εμβαδού. Με δεδομένο όμως ότι η κατανόηση της κάλυψης επιφάνειας μπορεί να αποτελέσει το αρχικό στάδιο για την κατανόηση της μέτρησης εμβαδού μπορούμε μέσα από ενδιαφέρουσες δραστηριότητες που προκαλούν προβληματισμό στα παιδιά και κάνουν χρήση κατάλληλων βοηθητικών μέσων να βοηθήσουμε τα νήπια να σχηματίσουν μαθηματικό συλλογισμό.

► Abstract

The spontaneous engagement of children with informal measurement is common in kindergarten classes. Apart from spontaneous measurement activities it is important for the kindergarten program to include planned measurement activities. Such activities can create interesting mathematical discussion which can guide children in a precise way to the basic characteristics of measurement.

Based on the interpretive framework (Cobb, 2007) for learning mathematics, it was assumed that if meaningful planned activities would be conducted in such way as to engage children in discussion, different reasoning would emerge which could be reformed through the mathematical discussion with the researcher and the other students, and that through this interaction the mathematical classroom practice can be created.

In this article, the intervention about measurement that took place in a kindergarten classroom by covering a surface using auxiliary means is described. Three research questions were addressed: 1) Have kindergarten children the ability to cover systematically a surface with discrete material and count it? 2) Can kindergarten children perceive the inverse relationship that characterizes the size of the unit and the number of units in a measurement? 3) Have kindergarten children the capability to cover a surface with continuous material?

The participation in addressing researcher's concerns, through the work in groups and through the presentation of their construction led to the interaction

between the kindergartners and the researcher, to the creation of mathematical discussion as well as to the expression of different solutions. From the results it seemed that the kindergarten children were able to cover a surface with discrete material as well as, that the inverse relationship which characterizes the size of the unit and the number of the units in a specific measurement, deemed to be perceived by some kindergarten children. The type of the means and the quality of the involvement in the activity, together with other factors, such as working in groups and the mathematical discussion that has been created, might formed the key factors that helped young children to realize the measurement activity.

► Βιβλιογραφία

- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. & Borrow, C. V. A. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 503-532.
- Clements, D. H. (2004). Major Themes and Recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama & DiBiase, A.-M. (Eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 7-72). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, USA.
- Clements, D.H. & Stephan, M. (2004). Measurement in Pre-K to Grade 2 Mathematics. In D. H. Clements, J. Sarama & DiBiase, A.-M. (Eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 299-317). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, USA.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 3-38). Information Age Publishing, USA.
- Doig, B., Cheeseman, J., & Lindsay, J. (1995). The medium is the message: Measuring area with different media. In B. Atweh & S. Flavel (Eds.), *Galtha: Proceedings of the 18th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 229-240). Darwin, Australia: MERGA.
- Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 225-256). Information Age Publishing, USA.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press Washington, DC.
- National Council of Teachers of Mathematics, (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, V.A.
- Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
- Spinillo, A. G. & Batista, R. F. (2009). A sense of measurement: what do children know about the invariant principles of different types of measurement? In M. Tzekaki,

M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, pp. 161-168. Thessaloniki, Greece: PME.

van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (Eds) (2005). Young children learn measurement and geometry A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school (pp. 94-99). TAL Project, Freudenthal Institute, Utrecht University, National Institute, for Curriculum Development (SLO), The Netherlands.

Zacharos, K. & Ravanis, K. (2000). The tranformation of natural to geometrical concepts, concerning children 5-7 years old. The case of measuring surfaces. *European Early Childhood Education Research*, Vol. 8 No 2, 63-72.