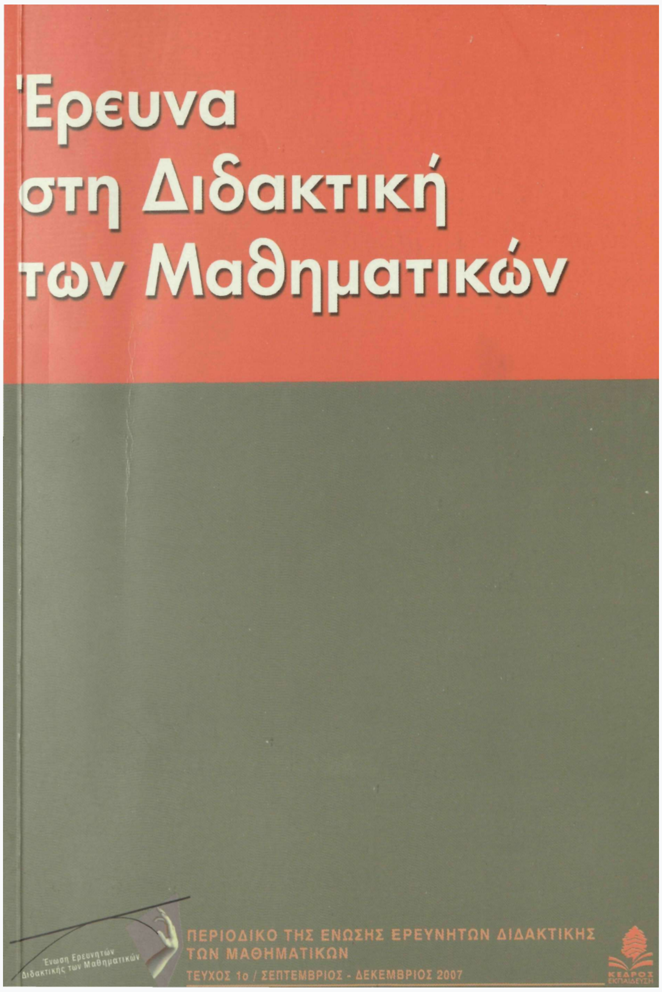
Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 1 (2007)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΑΠΟ ΤΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ. Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ειρήνη Μικρώνη (Eirini Mikroni), Κώστας Ζαχάρος (Kostas Zacharos), Βασίλης Κόμης (Vasilis Komis)

doi: [10.12681/enedim.18763](https://doi.org/10.12681/enedim.18763)

ΑΠΟ ΤΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ. Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Μικρώνη Ε., Ζαχάρος Κ., Κόμης Β.,
Πανεπιστήμιο Πατρών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να ανιχνεύσει τις ικανότητες μαθητών και μαθητριών της Α' Τάξης Λυκείου να αντιστοιχίζουν λεκτικά προβλήματα σε μαθηματικά μοντέλα που τα περιγράφουν (στη περίπτωσή μας μορφές γραμμικών συναρτήσεων).

Η έρευνα είναι μια μελέτη περίπτωσης. Το δείγμα της αποτέλεσαν 25 μαθητές και μαθήτριες της Α' Λυκείου, που συμμετείχαν σε ατομικές συνεντεύξεις. Από τα υποκείμενα της έρευνάς μας ζητήθηκε να μεταφέρουν λεκτικά προβλήματα σε τυποποιημένο μαθηματικό λόγο.

Η ανάλυση των εμπειρικών δεδομένων βασίστηκε σε ποσοτικές προσεγγίσεις, καθώς και σε ποιοτική ανάλυση των στρατηγικών που επιλέγονται για το μετασχηματισμό των λεκτικών προβλημάτων σε αλγεβρικούς τύπους και γραφικές αναπαραστάσεις.

Η έρευνα αναδεικνύει την ανάγκη επεξεργασίας ενός διδακτικού προγράμματος με έμφαση στην επίλυση προβλημάτων και στην ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης λεκτικά διατυπωμένων προβλημάτων σε τυποποιημένο μαθηματικό λόγο.

Λέξεις κλειδιά: *άλγεβρα, γραμμικές συναρτήσεις, λεκτικά προβλήματα, γραφικές αναπαραστάσεις, δευτεροβάθμια εκπαίδευση.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά θεωρούνται ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία για τη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων και παράλληλα καλύπτουν μια πολύ ευρεία περιοχή γνωστικών αντικειμένων, όπως είναι οι φυσικές επιστήμες, οι οικονομικές επιστήμες κ.λπ.

Η ανάγκη της μαθηματικής εκπαίδευσης να ανταποκριθεί στο στόχο για ανάπτυξη της ικανότητας μοντελοποίησης προβλημάτων, προσανατολίζει αντίστοιχα το ενδιαφέρον της έρευνας και της διδασκαλίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση συχνά αναφέρεται σε προβλήματα γνωστικής και επιστημολογικής φύσης, όταν επιχειρείται ο μετασχηματισμός λεκτικών προβλημάτων που περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις, σε μορφές αναπαράστασης που χρησιμοποιεί η μαθηματική επιστήμη, όπως είναι οι αλγεβρικές εκφράσεις ή οι μορφές μαθηματικών γραφημάτων (π.χ. Greer 1997· Komis, et al., 2006. Molyneux-Hodgson, et al., 1999. Säljö 1991. Schorr, 2003. Wubbels, et al., 1997). Η μετατροπή των εμπειρικών δεδομένων, που παρουσιάζονται στα πραγματικά προβλήματα σε έγκυρο μαθηματικό φορμαλισμό, προϋποθέτει την εννοιολογική κατανόηση των συναρτησιακά μεταβαλλόμενων εννοιών και την ικανότητα μετάβασης από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη. Οι δυσκολίες των μετασχηματισμών αφορούν τόσο την πορεία μοντελοποίησης των πραγματικών προβλημάτων, όσο και την αντίστροφη πορεία της «ανάγνωσης» των προβλημάτων, που παρουσιάζονται μέσω της μαθηματικής τυποποίησης όπως είναι, για παράδειγμα, τα μαθηματικά γραφήματα.

Το ενδιαφέρον της παρούσας έρευνας εστιάζεται στη μελέτη της ικανότητας μαθητών και μαθητριών της Α΄ τάξης λυκείου να μεταφέρουν πραγματικά προβλήματα σε μορφές έγκυρης μαθηματικής τυποποίησης, όπως είναι η αλγεβρική τους έκφραση και η γραφική τους παράσταση. Παράλληλα, ασχολείται με τη δυνατότητα των μαθητών αυτών να ερμηνεύουν και να χειρίζονται γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Η σημασία των αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά

Η έννοια της αναπαράστασης εμπεριέχει ένα σύνολο νοητικών δραστηριοτήτων και πρακτικών όπως, για παράδειγμα, τις εικονικά εμφανιζόμενες αναπαραστάσεις, ποικίλα σημεία και σύμβολα ή μορφές νοητικών αναπαραστάσεων (Kaput, 1991).

Οι εικονικά εμφανιζόμενες αναπαραστάσεις καθώς και τα σημεία και σύμβολα αφορούν μορφές εξωτερικών αναπαραστάσεων, που λειτουργούν ως ερεθίσματα στις αισθήσεις. Τέτοιες αναπαραστάσεις είναι, για παράδειγμα, οι πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις, τα γραφικά των υπολογιστών, καθώς και τα τυπικά σύμβολα και διαγράμματα που χρησιμοποιεί η επιστήμη των Μαθηματικών. Από την άλλη, οι νοητικές αναπαραστάσεις αποτελούν εσωτερικές μορφές αναπαραστάσεων και σχετίζονται με τη νοητική δραστηριότητα μέσω της οποίας το υποκείμενο οργανώνει και ανασυντάσσει τα ερεθίσματα που προσλαμβάνει, προσδίδοντάς τους συγκεκριμένες σημασίες. Πρέπει να υπογραμμιστεί ότι οι ερμηνείες που αποδίδονται από το υποκείμενο στις εξωτερικές αναπαραστάσεις βρίσκονται σε στενή συνάφεια και εξαρτώνται από τις αντίστοιχες εσωτερικές. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι αποτέλεσμα προϋπαρχουσών γνώσεων και εμπειριών, που μορφοποιούν και προσδίδουν συγκεκριμένες σημασίες στις αντίστοιχες εξωτερικές αναπαράστασεις (Kaput, 1991).

Η μαθηματική εκπαίδευση ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών και μαθητριών να «μεταφράζουν» προβλήματα που διατυπώνονται λεκτικά σε αναπαραστάσεις που απαντώνται στη μαθηματική επιστήμη, όπως οι αλγεβρικοί τύποι ή τα γραφήματα. Πρόκειται ουσιαστικά για ψυχολογικές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα όταν μεταφερόμαστε από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο. Οι διαδικασίες «μετάφρασης» ενός προβλήματος βασίζονται σε δυο τουλάχιστον παραμέτρους: τις αρχικές συνθήκες που αποτελούν το ερέθισμα που τροφοδοτεί με πληροφορίες το υποκείμενο και την τελική αναπαράσταση, που αποτελεί τη στόχευση της «μετάφρασης» (Lesh, et al., 1987). Ο τρόπος «ανάγνωσης» της αρχικής μορφής του προβλήματος οφείλει να βρίσκεται σε στενή συνάφεια με τη μορφή της τελικής αναπαράστασης. Από την άλλη, η ικανότητα «ανάγνωσης» και ερμηνείας της τελικής αναπαράστασης από το μαθητή δεν είναι μια φυσική συνέπεια της γνωστικής ωρίμανσής του, αλλά εξαρτάται κυρίως από μια εμπρόθετη και συστηματική διδακτική παρέμβαση (Säljö, 1991).

Δυσκολίες στη μαθηματική μοντελοποίηση λεκτικών προβλημάτων

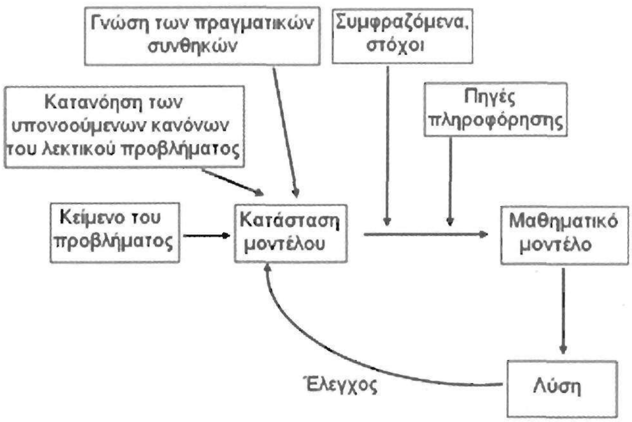
Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση συχνά αναφέρεται στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι μαθήτριες όταν χρειάζεται να προσδιορίσουν τον αλγεβρικό τύπο ή το μαθηματικό γράφημα στις περιπτώσεις προβλημάτων που διατυπώνονται λεκτικά και σχετίζονται με γραμμικές συναρτήσεις (π.χ. Kaput, 1987· Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi, 1993). Κάποιοι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα στη χρήση των γραφικών παραστάσεων και αδυνατούν να αντλήσουν από αυτές πληροφορίες. Άλλοι, πάλι, αδυνατούν να συσχετίσουν τους τρόπους αναπαράστασης που συναντούν σε συναφή μαθήματα, όπως για παράδειγμα στο μάθημα της φυσικής, και να εφαρμόσουν τις γνώσεις αυτές στους τρόπους αναπαράστασης μαθηματικών προβλημάτων (Mevarech & Kramarsky, 1997).

Η πορεία μετασχηματισμού ενός λεκτικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα ακολουθεί μια σύνθετη διαδικασία, κατά την οποία το πρόβλημα αποσπάται από το συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς («αποπλαισίωση»/ decontextualised) και εντάσσεται στο επικοινωνιακό πλαίσιο της σχολικής τάξης, όπου κατανοείται και ερμηνεύεται ως μαθηματικό πρόβλημα («αναπλαισίωση»/recontextualization, Dowling 1998, 2001). Η προηγούμενη διαδικασία στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης περιγράφει την πορεία μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης.

Ένα μοντέλο είναι μια φόρμα που διευκολύνει στην κατανόηση και περιγραφή του τρόπου που κάθε μαθητής οργανώνει και ερμηνεύει τις πληροφορίες του. Τα μοντέλα οργανώνονται γύρω από καταστάσεις και εμπειρίες που οι άνθρωποι κατανοούν αφού τις εντάξουν στα ερμηνευτικά τους σχήματα. Η ανάδυση των νέων μοντέλων δε γίνεται άμεσα, αλλά σταδιακά. Τα πρώιμα μοντέλα μπορεί να είναι ασαφή ή διαστρεβλωμένες εκδοχές πρόσφατων μοντέλων. Από την άλλη, εναλλακτικά μοντέλα μπορεί να ερμηνεύσουν αξιόπιστα μια δεδομένη κατάσταση. Μερικές φορές μια κατάσταση ή μια εμπειρία μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα εσωτερικό μοντέλο, γεγονός που δίνει τη δυνατότητα για προβλεφτεί το εσωτερικό της μοντελοποιημένης κατάστασης. Αυτό διαδοχικά ενισχύει περαιτέρω τη δυνατότητα πρόβλεψης, περιγραφής και ερμηνείας, όταν επιστρέψουμε στην αρχική κατάσταση του προβλήματος (Schorr, 2003).

Στη διαδικασία της μοντελοποίησης οι μαθητές και οι μαθήτριες πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν το μοντέλο από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, καθώς και να αξιολογούν την αποτελεσματικότητα του μοντέλου τους.

Η σύνθετη πορεία της μοντελοποίησης αποτυπώνεται στη διαγραμματική παρουσίαση του σχήματος 1 (Greer 1997, σελ. 301).



Σχήμα 1. Μοντελοποίηση προβλήματος (Greer 1997, σελ. 301)

Η προηγούμενη προσέγγιση της μοντελοποίησης είναι συγγενική με την έννοια της «μαθηματικοποίησης» (mathematisation) που απαντάται στον Η. Freudenthal (1983) και το ερευνητικό ρεύμα της «ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης» (realistic mathematics education) (π.χ. Gravemeijer, 1997· Wubbels, et al., 1997).

Η πορεία της μαθηματικοποίησης στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση περιγράφεται από την ακόλουθη πορεία (Woubbels et al., 1997): Μεταφορά του διατυπωμένου σε φυσική γλώσσα προβλήματος σε μια συμβολική γλώσσα που προσιδιάζει στα Μαθηματικά, ανάλυση και δόμησή του ως μαθηματικού προβλήματος και, τέλος, αναζήτηση της μαθηματικής λύσης. Ο κύκλος της μαθηματικοποίησης ολοκληρώνεται με την απαραίτητη επιστροφή στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, που δίνει τη δυνατότητα για περαιτέρω επεξεργασία, γενίκευση ή τροποποίηση. Στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση, ενώ τα τελευταία χρόνια δίνεται έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών και μαθητριών στην επίλυση προβλημάτων, το ενδιαφέρον αυτό δεν αποτυπώνεται με ένα συστηματικό τρόπο στα αναλυτικά προγράμματα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και, επιπρόσθετα, δεν αποτελεί ένα σαφώς προσδιορισμένο διδακτικό στόχο. Η παρούσα έρευνα εντάσσεται σε μια ερευνητική προσπάθεια διερεύνησης των γνωστικών και διδακτικών εμποδίων που προσκρούει η διαδικασία μετασχηματισμού ρεαλιστικών προβλημάτων, σε προβλήματα που περιγράφονται από τη γλώσσα των Μαθηματικών και, ειδικότερα, στην έρευνά μας, από την αλγεβρική τους έκφραση και το μαθηματικό τους γράφημα.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα έρευνα είναι μια μελέτη περίπτωσης και σκοπός της είναι να μελετήσει την ικανότητα μαθητών και μαθητριών της Α΄ τάξης λυκείου να μετασχηματίζουν λεκτικά διατυπωμένα προβλήματα προσδίδοντάς τους μαθηματική μορφή με τη χρήση αλγεβρικών εκφράσεων και γραφικών παραστάσεων. Εδώ, τα συγκεκριμένα προβλήματα περιγράφονται από γραμμικές συναρτήσεις. Ενδιαφερόμαστε, επίσης, και για την αντίστροφη πορεία: τη διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών και μαθητριών να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις που περιγράφουν προβλήματα γραμμικών συναρτήσεων.

Αναλυτικότερα, τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία καλείται να απαντήσει η έρευνα είναι τα εξής:

– Έχουν οι μαθητές και οι μαθήτριες της Α΄ τάξης λυκείου την ικανότητα να μετασχηματίζουν λεκτικά διατυπωμένα προβλήματα σε αλγεβρικά μοντέλα και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τους;

– Οι μαθητές και οι μαθήτριες στην πορεία μαθηματικοποίησης των λεκτικών προβλημάτων επιλέγουν κυρίως την πορεία: αλγεβρικός τύπος → γραφική παράσταση, ή την πορεία: γραφική παράσταση → αλγεβρικός τύπος. Ποια από τις δύο αυτές πορείες είναι περισσότερο επιτυχής;

– Είναι ικανοί οι μαθητές και οι μαθήτριες του δείγματός μας να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων και να προβαίνουν σε αξιολογήσεις των δεδομένων που αναπαρίστανται γραφικά;

ΤΟ ΔΕΙΓΜΑ

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 25 μαθητές και μαθήτριες ενός τμήματος της Α' τάξης ενός δημοσίου λυκείου σε μια μεγάλη επαρχιακή πόλη της Ελλάδας. Οι μαθητές και οι μαθήτριες του δείγματος έχουν τα τυπικά κοινωνικο-οικονομικά χαρακτηριστικά των μαθητών των μεγάλων επαρχιακών ελληνικών πόλεων. Τέλος, η επιλογή του συγκεκριμένου τμήματος από τα τέσσερα τμήματα του σχολείου γίνεται τυχαία.

Η διαδικασία συλλογής των εμπειρικών δεδομένων

Μια εβδομάδα μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων από το διδάσκοντα του τμήματος για την έννοια της συνάρτησης, κάθε μαθητής και μαθήτρια συμπληρώνει ατομικά ένα τεστ αξιολόγησης των γνώσεών του. Η διδασκαλία του εν λόγω γνωστικού αντικειμένου γίνεται με τον τρόπο που προσδιορίζεται από το υφιστάμενο αναλυτικό πρόγραμμα και εξειδικεύεται στο σχολικό εγχειρίδιο. Επιπλέον, το τεστ κατασκευάζεται με τη βοήθεια του διδάσκοντα και είναι όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικό των σχολικών θεμάτων των συναρτήσεων που περιέχει το σχολικό βιβλίο και πραγματεύτηκε ο διδάσκων. Η διάρκεια του τεστ ήταν δυο διδακτικές ώρες και περιείχε συνολικά δέκα ερωτήσεις εκ των οποίων οι τέσσερεις πρώτες σχετίζονταν με τον ορισμό και την έννοια της συνάρτησης και οι υπόλοιπες με ιδιότητες και ειδικές μορφές της γραμμικής συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$. Η αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών και μαθητριών στο τεστ διευκόλυνε στην κατασκευή του φύλλου εργασίας στο οποίο βασίστηκε η συλλογή των εμπειρικών δεδομένων.

Το φύλλο εργασίας που δίνεται στους μαθητές και τις μαθήτριες περιέχει πέντε λεκτικά προβλήματα γραμμικών συναρτήσεων. Τα προβλήματα περιγράφουν τους οικονομικούς όρους χρέωσης πέντε διαφορετικών πακέτων που προσφέρει μια εταιρία κινητής τηλεφωνίας (παράρτημα Ι).

Οι μαθητές και οι μαθήτριες συμμετέχουν σε ατομικές συνεντεύξεις και καλούνται να απαντήσουν διαδοχικά στις εξής ερωτήσεις:

Πρώτη Ερώτηση: Ζητείται η γραφική παράσταση και ο αλγεβρικός τύπος της χρέωσης συναρτήσει του χρόνου ομιλίας για το κάθε πρόγραμμα ξεχωριστά. Να σημειωθεί ότι κατά τη διατύπωση της ερώτησης οι ερευνητές δεν προκρίνουν κάποια συγκεκριμένη πορεία εργασίας (για παράδειγμα, πρώτα τη γραφική παράσταση και μετά τον αλγεβρικό τύπο ή αντίστροφα). Η επιλογή επαφίεται στους μαθητές και αυτό αποτελεί στοιχείο αξιολόγησης της έρευνας.

Δεύτερη Ερώτηση: Ζητείται να επιλεγεί το πρόγραμμα που συμφέρει ένα άτομο που μιλάει 60 λεπτά μηνιαίως και να αιτιολογηθεί η απάντηση με τη χρήση των γραφικών παραστάσεων των προγραμμάτων.

Στην περίπτωση της δεύτερης ερώτησης οι γραφικές παραστάσεις των προβλημάτων βρίσκονται όλες στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων και δίνονται από τους ερευνητές (παράρτημα II).

Εκτός από τις καταγεγραμμένες γραπτές απαντήσεις των μαθητών, οι διάλογοι των συνεντεύξεων μαγνητοφωνούνται και στη συνέχεια υποβάλλονται σε ποιοτική ανάλυση.

ΤΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΑΙ Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥΣ

Η ανάλυση των εμπειρικών δεδομένων περιλαμβάνει την ποσοτική αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών, την κατηγοριοποίηση της πορείας που επιλέγεται για την αντιμετώπιση των προβλημάτων, καθώς και την ανίχνευση πιθανών συσχετίσεων μεταξύ της επιλεγμένης πορείας και της επιτυχούς ή μη αντιμετώπισης των προβλημάτων. Για την αξιολόγηση των απαντήσεων ως «σωστών» ή «λανθασμένων» προσμετρήσαμε την εύρεση του απαιτούμενου σε κάθε πρόβλημα αλγεβρικού τύπου, ενώ για τη γραφική παράσταση μας ενδιέφερε η κατασκευαστική περιγραφή των γενικών χαρακτηριστικών της συνάρτησης χωρίς να δίνεται έμφαση στη σχεδιαστική αρτιότητά τους. Τέλος, στις ελάχιστες περιπτώσεις όπου δε δίνονται απαντήσεις αυτές προσμετρώνται ως λανθασμένες.

Πρώτη Ερώτηση: Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στην πρώτη ερώτηση, όπου ζητείται ο τύπος και η γραφική παράσταση των πέντε προβλημάτων, καταγράφονται στον πίνακα 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1. ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΣΤΟΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΤΥΠΟ ΚΑΙ ΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Πρόβλημα	**Γραφική παράσταση**		**Αλγεβρικός τύπος**	
	Σωστή γραφική παράσταση		Σωστός αλγεβρικός τύπος	
	Συχνότητα	Σχετ. συχν. (%)	Συχνότητα	Σχετ. συχν. (%)
1ο (y = 0.3t)	22	88	22	88
2ο (y = 15 + 0.2t)	19	76	20	80
3ο $y = \begin{cases} 30, & 0 \leq t \leq 300 \\ 0{,}1t, & t \geq 300 \end{cases}$	20	80	5	20
4ο $y = \begin{cases} 0{,}25t, & 0 \leq t \leq 180 \\ 0{,}18t + 12{,}6, & t \geq 180 \end{cases}$	6	24	0	0
5ο (y = 50)	24	96	22	88

Από τα δεδομένα του Πίνακα 1 προκύπτει ότι τα υποκείμενα του δείγματος δυσκολεύονται ιδιαίτερα στο χειρισμό των κλαδωτών συναρτήσεων (προβλήματα τρίτο και τέταρτο - κλαδωτές συναρτήσεις). Η μελέτη των απαντήσεων των μαθητών οδήγησε στην κατηγοριοποίηση της πορείας που επιλέγει σε συνάρτηση με την επιτυχή ή λανθασμένη απάντηση. Η σχηματοποίηση απέδωσε τις επόμενες τέσσερεις κατηγορίες: (α) Σωστός αλγεβρικός τύπος - σωστή γραφική παράσταση, (β) Σωστός αλγεβρικός τύπος - λάθος γραφική παράσταση, (γ) Λάθος αλγεβρικός τύπος - σωστή γραφική παράσταση, (δ) Λάθος αλγεβρικός τύπος - λάθος γραφική παράσταση.

Οι συχνότητες εμφάνισης των κατηγοριών αυτών καταγράφονται στον πίνακα 2. Συγκρίνοντας τις διαφορές στις συχνότητες των παραπάνω κατηγοριών με τον έλεγχο Wilcoxon του στατιστικού πακέτου SPSS, διαπιστώνουμε ότι στα προβλήματα 1, 2 και 5 (απλές μορφές γραμμικών συναρτήσεων) δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς τον τρόπο απάντησης, ενώ στα προβλήματα 3 και 4 (σύνθετες μορφές) οι εμφανιζόμενες διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές. Αυτό σημαίνει ότι στα προβλήματα 3 και 4 οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές γράφοντας τον τύπο και αναπαριστώντας γραφικά τη συνάρτηση που περιγράφεται από τα προβλήματα διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Τα δεδομένα αυτά υπογραμμίζουν τις δυσκολίες των υποκειμένων του δείγματός μας στα προβλήματα που περιγράφουν πιο σύνθετες μορφές συναρτήσεων, όπως είναι οι κλαδωτές. Για την εύρεση του αλγεβρικού τύπου οι μαθητές και οι μαθήτριες χρησιμοποιούν τις επόμενες στρατηγικές:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2. ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

	Γραφική παράσταση	Αλγεβρικός τύπος	
		Σωστό	Λάθος
Πρόγραμμα 1	Σωστό	19	3
	Λάθος	3	0
	Γραφική παράσταση	Αλγεβρικός τύπος	
		Σωστό	Λάθος
Πρόγραμμα 2	Σωστό	16	3
	Λάθος	3	2
	Γραφική παράσταση	Αλγεβρικός τύπος	
		Σωστό	Λάθος
Πρόγραμμα 3	Σωστό	3	1
	Λάθος	17	4
	Γραφική παράσταση	Αλγεβρικός τύπος	
		Σωστό	Λάθος
Πρόγραμμα 4	Σωστό	0	0
	Λάθος	6	19
	Γραφική παράσταση	Αλγεβρικός τύπος	
		Σωστό	Λάθος
Πρόγραμμα 5	Σωστό	21	1
	Λάθος	3	0

– Από το γενικό τύπο της συνάρτησης προσδιορίζουν τις παραμέτρους α και β με αντικατάσταση ενός ή δύο ζευγών αριθμητικών τιμών.

– Προσδιορίζουν τον αλγεβρικό τύπο άμεσα, από τη διατύπωση του λεκτικού προβλήματος.

Στην κατασκευή των γραφικών παραστάσεων οι ακολουθούμενες στρατηγικές είναι οι εξής:

– Δημιουργία πίνακα τιμών, απεικόνιση των συντεταγμένων και κατασκευή των ευθειών.

– Χρήση του αλγεβρικού τύπου.

Η ευθεία κατασκευάζεται είτε από τη γενική μορφή της εξίσωσης είτε από ζεύγη συντεταγμένων που επαληθεύουν την εξίσωση.

Η επιλογή των δύο διαφορετικών πορειών μαθηματικοποίησης των λεκτικών προβλημάτων, δηλαδή: από τον αλγεβρικό τύπο στη γραφική παράσταση ή από τη γραφική παράσταση στον αλγεβρικό τύπο, καθώς και οι αντίστοιχες επιτυχείς απαντήσεις στις δύο μορφές αναπαράστασης του προβλήματος παρατίθενται στον Πίνακα 3.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3. ΟΙ ΔΥΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΠΟΡΕΙΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

	Αλγ. τύπος ➤ Γραφική παράσταση		**Γραφ. παράσταση ➤ Αλγεβρικός τύπος**	
Πρόβλημα	Συχνότητα	Επιτυχείς αναπαραστάσεις	Συχνότητα	Επιτυχείς αναπαραστάσεις
1ο	17	17	8	2
2ο	15	12	10	4
3ο	20	2	5	1
4ο	12	0	13	0
5ο	24	15	22	6

Στη συνέχεια θα επιχειρηθεί μια περαιτέρω ανάλυση των ικανοτήτων των μαθητών και μαθητριών στο χειρισμό κάθε προβλήματος ξεχωριστά.

Πρόβλημα 1 (Πρόγραμμα 1)

«Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Η χρέωση είναι 0.30 € ανά λεπτό ομιλίας».
Το πρώτο πρόβλημα αντιστοιχεί σε μια γραμμική συνάρτηση της μορφής $y = αx$, όπου α είναι η χρέωση για κάθε λεπτό ομιλίας.

Η πλειονότητα των μαθητών και μαθητριών δίνει σωστές απαντήσεις τόσο στην κατασκευή της γραφικής παράστασης, όσο και στην εύρεση του αλγεβρικού τύπου (Πίνακας 1). Επιπλέον, η πλειονότητα (17 στους 25) επιλέγει ως πορεία αναπαράστασης του προβλήματος την πορεία: αλγεβρικός τύπος ➤ γραφική παράσταση, με επιτυχή αποτελέσματα και στους δύο τύπους αναπαράστασης. Στις περιπτώσεις 8 υποκειμένων που επιλέγουν την πορεία: γραφική παράσταση ➤ αλγεβρικός τύπος, μόνο 2 δίνουν επιτυχείς απαντήσεις και στους δύο τύπους αναπαράστασης.

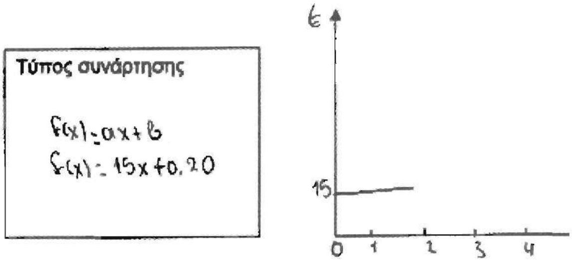
Πρόβλημα 2 (Πρόγραμμα 2)

«Υπάρχει μηνιαίο πάγιο 15 €. Η χρέωση είναι 0,20 € ανά λεπτό ομιλίας».

Εδώ το λεκτικό πρόβλημα αντιστοιχεί σε μια γραμμική συνάρτηση της μορφής y = αx + β, όπου α είναι η χρέωση για κάθε λεπτό ομιλίας και β το πάγιο. Και σε αυτό το πρόβλημα τα ποσοστά επιτυχίας είναι υψηλά καθώς 19 υποκείμενα στα 25 (76%) κατασκευάζουν σωστά τη γραφική παράσταση, 20 στα 25 (80%) προσδιορίζουν τον τύπο της συνάρτησης, ενώ 16 στα 25 (64%) δίνουν επιτυχείς απαντήσεις και στους δυο τύπους αναπαράστασης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν κάποιες λανθασμένες απαντήσεις, δηλωτικές των δυσκολιών μαθηματικοποίησης του λεκτικού προβλήματος και αναπαράστασής του στην αλγεβρική ή γραφική του μορφή. Στη συνέχεια παρατίθενται ενδεικτικά αποσπάσματα συνεντεύξεων που καταδεικνύουν τις δυσκολίες κάποιων υποκειμένων.

Στην περίπτωση του επόμενου υποκειμένου (Υ6), ενώ προσδιορίζεται σωστά ο αλγεβρικός τύπος, υπάρχει αποτυχία στη γραφική παράσταση (σχ. 2).

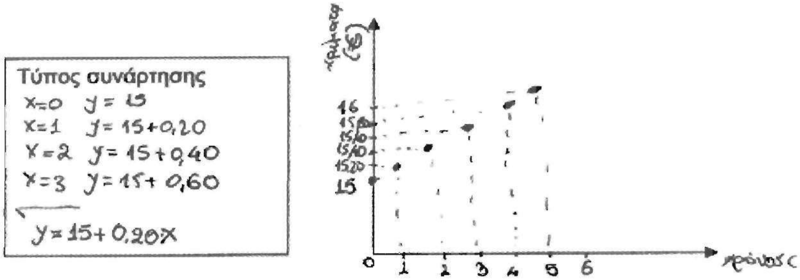


Σχήμα 2. Υ6: Αποτυχία γραφικής αναπαράστασης

Κάποια υποκείμενα απαντούν διαισθητικά, όπως για παράδειγμα, η επόμενη μαθήτρια (Υ8):

- *Υ8: Ο τύπος μάλλον πρέπει να είναι της μορφής f(x) = αx + β.*
- *Ε: (Ερευνήτρια): Πως το ξέρεις;*
- *Υ8: Μμμ... (σκέφτεται). Δεν το ξέρω απλά το φαντάζομαι γιατί το πρόβλημα μας δίνει δυο αριθμούς το 15 και το 0,2. Άρα το α είναι 15 και το β, 0,2.*
- *Ε: Είσαι σίγουρη;*
- *Υ8: Όχι, καθόλου σίγουρη, αλλά δεν ξέρω τι άλλο θα μπορούσε να είναι. Οπότε θα γράψω σαν τύπο της συνάρτησης αυτόν (Γράφει: y = 0,20x + 15)*
- *Ε: Η γραφική παράσταση πια είναι;*
- *Υ8: Νομίζω αυτή (σχεδιάζει την σωστή).*

Επίσης, ένα άλλο υποκείμενο (Υ23) δεν κατανοεί τη συνέχεια της συνάρτησης. Απεικονίζει γραφικά τη συνάρτηση ως μεμονωμένα σημεία και θεωρεί ότι μόνο αυτά αποτελούν τη συγκεκριμένη συνάρτηση (σχ. 3). Ο μαθητής αυτός αντιμετωπίζει παρόμοια όλες τις γραφικές παραστάσεις των προβλημάτων του φύλλου εργασίας.



Σχήμα 3: Η συνάρτηση ως μεμονωμένα σημεία (Υ23)

Προβλήματα 3 και 4 (Προγράμματα 3 και 4)

Πρόγραμμα 3: *«Υπάρχει μηνιαίο πάγιο 30 €. Προσφέρονται δωρεάν 300 λεπτά χρόνου ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα 300 λεπτά χρόνου ομιλίας, η χρέωση γίνεται 0,10 € ανά λεπτό ομιλίας».*

Πρόγραμμα 4: *«Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Η χρέωση για τα πρώτα 180 λεπτά χρόνου ομιλίας είναι 0,25 € ανά λεπτό ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα 180 λεπτά χρόνου ομιλίας, η χρέωση γίνεται 0,18 € ανά λεπτό ομιλίας»*

Στις περιπτώσεις των κλαδωτών συναρτήσεων (προβλήματα 3 και του 4), με τους επόμενους αλγεβρικούς τύπους

3ο πρόβλημα: $y=\begin{cases} 30, 0\leq t\leq 300 \\ 0{,}1t, t>300 \end{cases}$ 4ο πρόβλημα: $y=\begin{cases} 0{,}25t, 0\leq t\leq 180 \\ 0{,}18t+12{,}6, \ t>180 \end{cases}$

παρατηρούνται υψηλά ποσοστά αποτυχίας, τόσο στον προσδιορισμό του αλγεβρικού τύπου (80% για το 3ο και 100% για το 4ο πρόβλημα), όσο και στην κατασκευή της γραφικής παράστασης (20% για το 3ο και 76% για το 4ο πρόβλημα). Οι περισσότερες δυσκολίες στο τρίτο πρόβλημα εντοπίστηκαν στην κατασκευή του δεύτερου κλάδου της συνάρτησης, ενώ στο τέταρτο πρόβλημα οι δυσκολίες αφορούσαν τόσο στην εύρεση του τύπου όσο και στην κατασκευή της γραφικής παράστασης.

Στο τρίτο πρόβλημα η πλειονότητα των υποκειμένων δίνει ως τύπο της συνάρτησης για $t > 300$ τη μορφή $y = 30 + 0{,}1t$ αντί του μαθηματικά σωστού $y = 0{,}1t$. Εν τούτοις, η ανάλυση των διαλόγων με τους μαθητές δείχνει ότι οι εν λόγω μαθητές προσμετρούν κριτικά τις παραμέτρους του προβλήματος. Αναλυτικότερα, για την εύρεση του τύπου και την κατασκευή της γραφικής παράστασης δίνουν ως τιμές χρόνου, στο δεύτερο κλάδο της συνάρτησης, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, κ.λπ. (αντί των τιμών $t = 301$, $t = 302$, $t = 303$, κ.λπ. αντίστοιχα) και στη συνέχεια προσθέτουν το πάγιο των 30 ευρώ. Σε ερώτησή μας, γιατί, ενώ είναι $t > 300$ επιλέγονται για το χρόνο τιμές $t = 1$, $t = 2$ κ.λπ. ενδεικτική είναι η δήλωση του επόμενου μαθητή:

> *Μαθητής: Στην περίπτωση του κλάδου $y = 30 + 0{,}1t$ είναι σαν ο χρόνος να αρχίζει από την αρχή. Μετά τα πρώτα 300 λεπτά έχουμε άλλη χρέωση και είναι σαν να ξεκινάμε από την αρχή.*

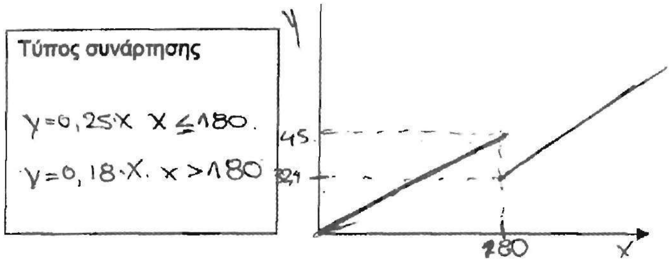
Οι προσεγγίσεις αυτές καταδεικνύουν ότι, ενώ σύμφωνα με τη μαθηματική τυπολογία ο μαθηματικός τύπος $y = 0{,}1t + 30$ είναι λανθασμένος, η κριτική προσέγγιση των αρχικών «ρεαλιστικών» παραμέτρων που συνθέτουν το πρόβλημα δείχνει μια ουσιαστική κατανόησή τους που οδηγεί τελικά σε σωστό αποτέλεσμα.

Στο τέταρτο πρόβλημα το ενδιαφέρον των μαθητών και μαθητριών εστιάζεται στον υπολογισμό του σημείου που αλλάζει τύπο η συνάρτηση, καθώς και στον προσδιορισμό του δεύτερου κλάδου για $t > 180$. Οι περισσότεροι μαθητές και μαθήτριες, βάζοντας στον πρώτο κλάδο την τιμή $t = 180$, βρίσκουν $y = 45$, οπότε θεωρούν ότι ο τύπος του δεύτερου κλάδου είναι: $y = 0{,}18t + 45$. Στη συνέχεια δίνουν στο χρόνο τιμές $t = 1$, $t = 2$ κ.λπ., αντί των σωστών: $t = 181$, $t = 182$ κ.λπ. και βρίσκουν τις σωστές χρεώσεις, για χρόνο συνομιλίας μεγαλύτερο των 180 λεπτών.

Από τα δεδομένα του πίνακα 3 παρατηρούμε ότι στο τρίτο πρόβλημα η βασική διαδικασία αναπαράστασης ακολουθεί την πορεία: αλγεβρικός τύπος → γραφική παράσταση, ενώ στο τέταρτο πρόβλημα ακολουθείται η αντίστροφη πορεία: γραφική παράσταση → αλγεβρικός τύπος. Και στα δυο προβλήματα παρατηρείται μια διαρκής μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη, με σκοπό τον έλεγχο της ορθότητας των επιλογών.

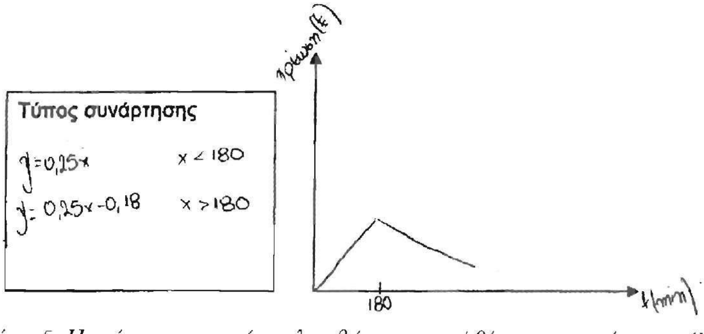
Οι αυξημένες δυσκολίες στο χειρισμό του τετάρτου προβλήματος αναδεικνύουν κάποιες κυρίαρχες αντιλήψεις-παρανοήσεις των υποκειμένων. Αναλυτικότερα, οι λανθασμένες απαντήσεις κατηγοριοποιούνται ως εξής:

Πρώτη κατηγορία: οι μαθητές κατασκευάζουν μια ασυνεχή συνάρτηση που συνήθως απεικονίζεται με δυο παράλληλες ευθείες (σχ. 4).



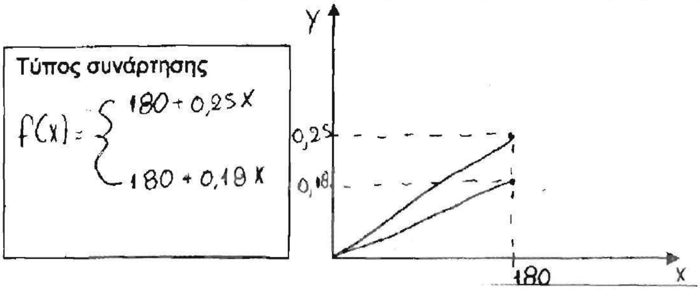
Σχήμα 4. Ασυνέχεια της συνάρτησης (Υ21)

Δεύτερη κατηγορία: Εδώ η μείωση της τιμής της χρέωσης θεωρείται ότι αντιστοιχεί σε φθίνουσα συνάρτηση (σχ. 5).



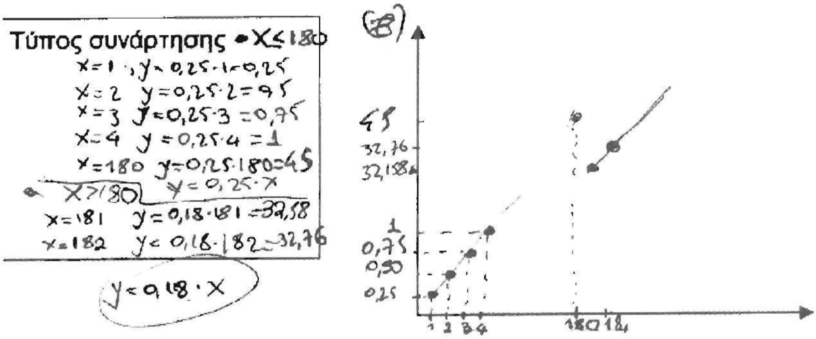
Σχήμα 5. Η μείωση της τιμής εκλαμβάνεται ως φθίνουσα συνάρτηση (Υ13)

Τρίτη κατηγορία: Η μείωση της χρέωσης αποτυπώνεται ως ευθεία που ξεκινά από την αρχή των αξόνων με μικρότερη κλίση απ' ό,τι η πρώτη (σχ. 6).



Σχήμα 6. Δύο ευθείες από την αρχή των αξόνων

Τέταρτη κατηγορία: Η γραφική αναπαράσταση είναι μεμονωμένα ασυνεχή σημεία (σχήμα 7).



Σχήμα 7. Η γραφική αναπαράσταση ως μεμονωμένα σημεία (Υ23)

Είναι χαρακτηριστικό ότι κάποια υποκείμενα αντιμετωπίζουν τις γραφικές παραστάσεις των προβλημάτων 3 και 4 ως εικόνες (Kerslake, 1981). Περιγράφουν, δηλαδή, την αλλαγή στις κλίσεις των ευθειών με εκφράσεις όπως: «η ευθεία που δείχνει τη χρέωση θα γέρνει προς τα κάτω, σαν κλαδί από δέντρο», «αφού θα μειώνεται η χρέωση, θα κατεβαίνει η γραφική παράσταση προς τα κάτω», «η χρέωση θα είναι μια γραμμή που θα κατηφορίζει», «πρώτα θα ανεβαίνει η γραμμή και μετά θα κατεβαίνει προς τα κάτω», «η ζωγραφιά θα ξεκινάει από το μηδέν και θα μεγαλώνει, αλλά, μόλις φτάσει το 180, θα μικραίνει μέχρι να μηδενιστεί πάλι», «η γραμμή μετά τα 180 θα πέφτει πιο κάτω».

Πρόβλημα 5 (Πρόγραμμα 5)

«Υπάρχει μηνιαίο πάγιο 50 € και προσφέρεται δωρεάν απεριόριστος χρόνος ομιλίας μεταξύ των ατόμων που κάνουν χρήση του συγκεκριμένου προγράμματος».

Τα ποσοστά επιτυχίας στο πέμπτο πρόβλημα είναι ιδιαίτερα υψηλά. 24 μαθητές στους 25 (96%) κατασκεύασαν σωστά τη γραφική παράσταση και 22 (88%) προσδιόρισαν τον τύπο της συνάρτησης.

Δεύτερη ερώτηση: Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας που προέβλεπε η πρώτη ερώτηση, ζητείται από τους μαθητές και τις μαθήτριες να προσδιορίσουν τη βέλτιστη λύση όταν το τηλέφωνο χρησιμοποιείται μέχρι 60 λεπτά το μήνα. Να υπενθυμίσουμε ότι εδώ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των πέντε προβλημάτων στο ίδιο σύστημα αξόνων (παράρτημα ΙΙ).

Η πλειονότητα των υποκειμένων (22 από τους 25, 88%) προσδιορίζουν σωστά το οικονομικότερο πρόγραμμα.

Είναι χαρακτηριστικό ότι, ενώ η γραφική παράσταση των συναρτήσεων δίνεται με πρόθεση να διευκολύνει τα υποκείμενα, μόλις 8 υποκείμενα (32%) χρησιμοποιούν το «εργαλείο» αυτό. Η πολυπληθέστερη κατηγορία μαθητών (10 μαθητές, 40%) επιχειρεί άμεσα, από τη λεκτική διατύπωση και με τη χρήση αριθμητικών υπολογισμών να προσδιορίσει τη βέλτιστη λύση, ενώ 7 υποκείμενα (28%) προσφεύγουν στους αλγεβρικούς τύπους.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήσαμε να ανιχνεύσουμε τις ικανότητες μαθητών και μαθητριών της Α′ τάξης λυκείου να αντιστοιχίζουν πραγματικά λεκτικά προβλήματα σε μαθηματικά μοντέλα που τα περιγράφουν (στην περίπτωσή μας μορφές γραμμικών συναρτήσεων). Παράλληλα, προσπαθήσαμε να ανιχνεύσουμε την ικανότητα των συγκεκριμένων υποκειμένων να αντλούν πληροφορίες από τη γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στα προβλήματα αυτά.

Διαπιστώσαμε ότι τα υποκείμενα του δείγματός μας ανταποκρίνονται ικανοποιητικά στο μετασχηματισμό των λεκτικών προβλημάτων σε αλγεβρικούς τύπους και γραφικές παραστάσεις. Δυσκολίες παρατηρούνται στις κλαδωτές συναρτήσεις που απαιτούν, λόγω των αλλαγών που εμπεριέχουν, πρόσθετες ικανότητες. Στις περιπτώσεις των κλαδωτών συναρτήσεων παρατηρούνται κάποια συστηματικά λάθη, όπως η ασυνέχεια στη γραφική τους παράσταση, καθώς και η λανθασμένη αντίληψη ότι η αλλαγή στο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης αντιστοιχεί σε αρνητική κλίση ή σε άλλη ευθεία που αρχίζει και αυτή από την αρχή των αξόνων με διαφορετική κλίση από την αρχική ευθεία. Τέλος, ένα άλλο συστηματικό λάθος που απαντάται σε όλες τις γραφικές παραστάσεις των προβλημάτων είναι η απεικόνιση ασυνεχών μεμονωμένων σημείων. Τα υποκείμενα που δίνουν αυτές τις γραφικές απεικονίσεις τείνουν να «διαβάζουν» τις γραφικές παραστάσεις «ως σημεία», γεγονός που εντοπίζεται συχνά σε αντίστοιχες έρευνες (π.χ. Kerslake 1981˙ Bell, et al., 1987).

Εντοπίστηκαν επίσης περιπτώσεις υποκειμένων που «διαβάζουν» τις γραφικές παραστάσεις σαν "εικόνες". Στις περιπτώσεις αυτές τα μαθηματικά γραφήματα αντιμετωπίζονται ως ελεύθερες απεικονίσεις των παραμέτρων των προβλημάτων που δεν υπόκεινται σε συγκεκριμένους κατασκευαστικούς και ερμηνευτικούς περιορισμούς. Το γεγονός αυτό, που επισημαίνεται και στη σχετική βιβλιογραφία (π.χ. Kerslake, 1981), δείχνει ότι σε περιπτώσεις γραφικών παραστάσεων της απόστασης συναρτήσει του χρόνου, που περιέχονται αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις, οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν διατυπώσεις, όπως: η συνάρτηση δείχνει «ανάβαση ενός βουνού: πρώτα πηγαίνοντας ανηφορικά και έπειτα πηγαίνοντας κατηφορικά». Άλλες φορές οι μαθητές ζωγραφίζουν αναπαραστάσεις των δεδομένων περιγράφοντας την πορεία κίνησης των αντικειμένων, αντί της γραφικής παράστασης της απόστασης συναρτήσει του χρόνου. Αντίστοιχα, στην περίπτωση της έρευνάς μας, χρησιμοποιούνται εκφράσεις όπως: «η ευθεία που δείχνει την χρέωση θα γέρνει προς τα κάτω...», «η χρέωση θα είναι μια γραμμή που θα κατηφορίζει», «η ζωγραφιά θα ξεκινάει από το μηδέν και θα μεγαλώνει, άλλά, μόλις φτάσει το 180, θα μικραίνει μέχρι να μηδενιστεί πάλι» κ.λπ.

Μια επόμενη διαπίστωση που σχετίζεται και με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν είναι ότι η συνήθης πορεία μαθηματικοποίησης του προβλήματος αρχίζει με την εύρεση του αλγεβρικού τύπου και συνεχίζει με την κατασκευή της γραφικής παράστασης. Η πορεία αυτής της μετάβασης φαίνεται να διευκολύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες του δείγματός μας και αποδεικνύεται επιπλέον ως μια πορεία περισσότερο επιτυχής.

Τέλος, η εύρεση των αλγεβρικών τύπων είναι μια διαδικασία περισσότερο οικεία, από ό,τι η κατασκευή και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων. Η δυσκολία στην «ανάγνωση» των γραφικών παραστάσεων είναι καταφανής στην περίπτωση της δεύτερης ερώτησης, όπου, παρά τη διευκόλυνση με την παρουσίαση όλων των γραφικών παραστάσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων, οι μαθητές και οι μαθήτριες δε χρησιμοποιούν το «εργαλείο» που τους προσφέρεται και προσφεύγουν σε άλλους τρόπους προσδιορισμού της βέλτιστης λύσης, κυρίως, στον αλγεβρικό τύπο.

Η μεταφορά των λεκτικών προβλημάτων στη γλώσσα των Μαθηματικών και ειδικότερα σε αλγεβρικούς τύπους και γραφήματα, καθώς και η αντίστροφη πορεία της «ανάγνωσης» και ερμηνείας των γραφημάτων, απαιτούν, όπως υπογραμμίστηκε και στο θεωρητικό μας πλαίσιο, μια συστηματική διδακτική προσπάθεια (Saljo, 1991). Ειδικότερα, η κατασκευή μαθηματικών γραφημάτων καθώς και η ερμηνεία τους αποτελούν πολιτισμικά εργαλεία που η κατοχή τους δεν είναι έμφυτη ούτε καθολική, αλλά προϋποθέτουν την ενεργή συμμετοχή σε διαδικασίες μάθησης ώστε να καταστεί δυνατή η οικειοποίησή τους.

Παρόλο που η ικανότητα μετακίνησης από μια αναπαράσταση σε μια άλλη αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα για μια βαθύτερη κατανόηση ενός μαθηματικού προβλήματος και την επίλυσή του (Hines, 2002), η μαθηματική εκπαίδευση δεν ενθαρρύνει το μαθητή να μεταφράζει από το ένα σύστημα αναπαραστάσεων στο άλλο. Η συνήθης εκπαιδευτική πρακτική στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση συνίσταται στην κατασκευή γραφικών παραστάσεων από δοθείσα εξίσωση και το αντίθετο, ενώ απουσιάζει μια συστηματική ενασχόληση με την επίλυση προβλημάτων. Η αξιολόγηση της σπουδαιότητας των πρακτικών επίλυσης προβλημάτων και η ικανότητα της μεταφοράς από ρεαλιστικά σε μαθηματικά πλαίσια, καθώς επίσης και η αντίστροφη πορεία της κατανόησης και ερμηνείας των μαθηματικών γραφημάτων, επιφορτίζει τη μαθηματική εκπαίδευση με πρόσθετες υποχρεώσεις. Προϋποθέτει ότι η μέθοδος διδασκαλίας των Μαθηματικών θα μετατοπίσει το ενδιαφέρον της από την εκμάθηση κανόνων και τεχνικών στην ενεργό συμμετοχή του μαθητή σε πρακτικές που του δίνουν τη δυνατότητα της εξερεύνησης. Τα λεκτικά προβλήματα προσφέρουν ευκαιρίες στους μαθητές και τις μαθήτριες για την ανάπτυξη ερευνητικών πρακτικών και την κατανόηση σε βάθος των μαθηματικών ιδεών και επιπρόσθετα προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα αξιολόγησης των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών τους.

ABSTRACT

This study investigates students' ideas relating to transforming word problems in a mathematical 'language', which includes both, graphical and algebraic representations. The research question which we attempt to answer is whether students can move from verbal representation of a problem to typical mathematical 'language' such as the algebraic and graphical representations. In addition, we examine whether students prefer a certain type of representation, where they feel most competent.

The research was a case study and was carried out with the participation of 25 students in Grade 10 (first grade in 'Lykeion'). The subjects participated in a personal interview during which they were asked to solve linear word problems. The research data were analyzed using quantitative and qualitative methods.

It was found that the students in this study were generally able to transform word problems to algebraic and graphical representations. The findings, however, have shown some systematic faults in students thinking, such as the discontinuity in the graphical representations, the perception that the rate of change of a function means a negative slope in the graphical representation or another line from the beginning of the axes. In addition, in many cases, students were unable interpret graphical representations. Furthermore, students' work indicated that they were more familiar and preferred algebraic representations rather than using graphs.

Many researches point out to students ability to move from one type of representation to another, a competence that can emerge via students involvement with different representations of a problem. Consequently, students should be lead to work in environments of multiple representations, that is, environments that allow the representation of a problem and its solution in several ways: verbal, graphical and algebraic representation.

Keywords. Algebra, Linear functions, Word problems, Problem solving, Graphical representations, senior high School.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bell, A., Brekke, G., & Swan, M. (1987). Diagnostic teaching: 4 graphical interpretations. *Mathematics Teaching*, *119*, 56-60.

Dowling, P. (1998). *The Sociology of Mathematics Education. Mathematical Myths/Pedagogic Texts*, London: Falmer Press.

Dowling, P. (2001). Mathematics Education in Late Modernity: Beyond Myths and Fragmentation. In B. Atweh, H. Forgasz & B. Nebres (Eds.), *Sociocultural Research on Mathematics Education* (pp. 19-36), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey, ZLondon.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster.

Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving word problems: a case of modeling? *Learning and Instruction, 7*(4), 389-397.

Greer, B. (1997). Modelling reality in the mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*, 293-307.

Hines, E. (2002). Developing the Concept of Linear Function: One Student's Experiences With Dynamic Physical Models, *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 337-361.

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E.Von Glasersfeld (Ed.) *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74), Kluwer Academic Publishers.

Kerslake, D. (1981). Graphs. In K. M. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematical Concepts* (pp. 11-16), John Murray, London.

Komis, V., Lavidas, K., Papageorgiou, V., Zacharos, K. & Politis, P. (2006). L'enseignement du tableur au collège en Grèce : étude de cas et implications pour une approche interdisciplinaire In Pochon L.-O., Bruillard E. & Marechal A., Apprendre (avec) les logiciels: Entre apprentissages scolaires et pratiques professionnelles (pp. 253-260), Neuchate– Lyon : IRDP – INRP.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.33-40). Hillsdale Erlbaum.

Mevarech, Z. R, & Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 229-263.

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland R., & Ursini, S. (1999). Mathematical Modelling: The Interaction of Culture and Practice, *Educational Studies in Mathematics, 39*, 167-183.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of inear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 69-100), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, NY.

Saljo, R. (1991). Learning and Mediation: Fitting Reality into a Table. *Learning and*

Instruction, 1(3), 261-272.

Schorr, R. Y. (2003). Motion, speed, and other ideas that "should be put in books". *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 467-779.

Wubbels, T., Korthagen, F., & Broekman, H. (1997). Preparing Teachers for Realistic Mathematic Education. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 1-28.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μια εταιρία κινητής τηλεφωνίας παρουσιάζει πέντε ειδών πακέτα χρεώσεων για να καλύψει τις εκάστοτε ανάγκες του κάθε πελάτη. Τα χαρακτηριστικά του κάθε προγράμματος περιγράφονται παρακάτω:

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 1 «Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Η χρέωση είναι 0.30 € ανά λεπτό ομιλίας»

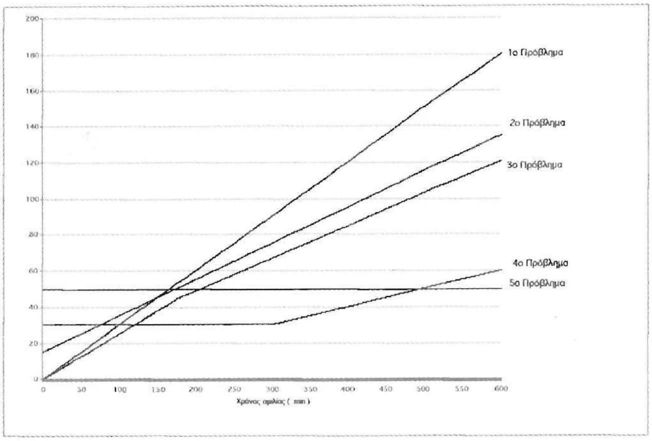
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 2 «Υπάρχει μηνιαίο πάγιο 15 €. Η χρέωση είναι 0,20 € ανά λεπτό ομιλίας»

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 3 «Υπάρχει μηνιαίο πάγιο 30 €. Προσφέρονται δωρεάν 300 λεπτά χρόνου ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα 300 λεπτά χρόνου ομιλίας, η χρέωση γίνεται 0,10 € ανά λεπτό ομιλίας».

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 4 «Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Η χρέωση για τα πρώτα 180 λεπτά χρόνου ομιλίας είναι 0,25 € ανά λεπτό ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα 180 λεπτά χρόνου ομιλίας, η χρέωση γίνεται 0,18€ ανά λεπτό ομιλίας».

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 5 «Υπάρχει μηνιαίο πάγιο 50 € και προσφέρεται δωρεάν απεριόριστος χρόνος ομιλίας μεταξύ των ατόμων που κάνουν χρήση του συγκεκριμένου προγράμματος».

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ



Γραφική απεικόνιση των πέντε προβλημάτων

Διευθυνση Αλληλογραφιας

Ειρήνη Μικρώνη, Μαθηματικός, Μεταπτυχιακό Δίπλωμα στις Επιστήμες της Εκπαίδευσης.

E-mail: **mikroni@upatras.gr**

Κώστας Ζαχάρος, Επίκουρος Καθηγητής στο Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η. του Πανεπιστημίου Πατρών.

E-mail: **zacharos@upatras.gr**

Βασίλης Κόμης, Επίκουρος Καθηγητής στο Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η. του Πανεπιστημίου Πατρών.

E-mail: **komis@upatras.gr**