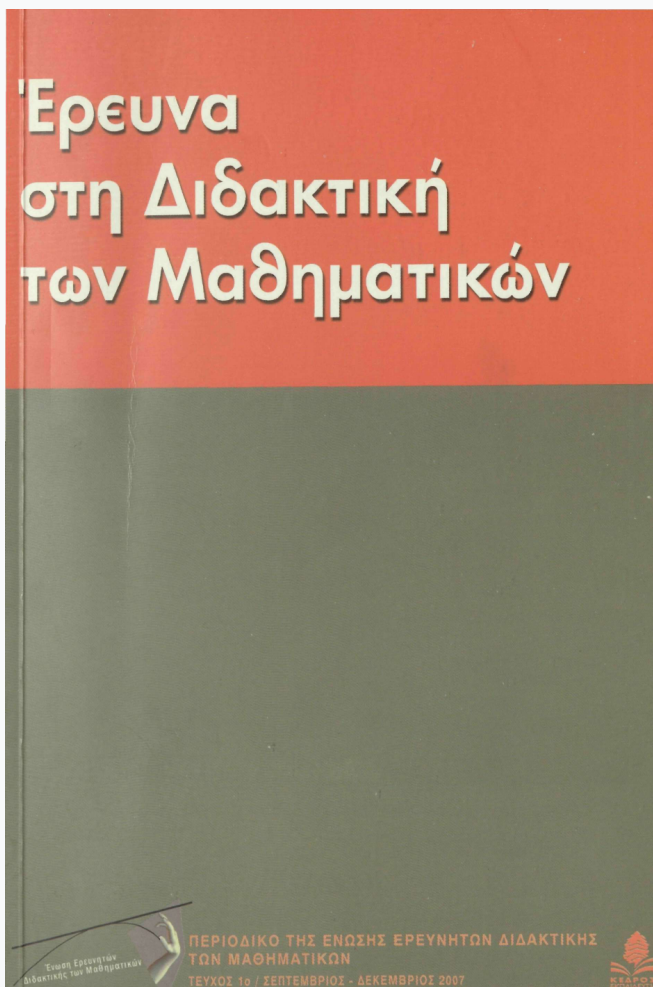


## Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 2 (2008)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



### Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗΡΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟΥ

Χρυσάνθη Σκουμπούρδη (Chrysanthi Skoumpourdi)

doi: [10.12681/enedim.18812](https://doi.org/10.12681/enedim.18812)

Copyright © 2018, Chrysanthi Skoumpourdi



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Σκουμπούρδη (Chrysanthi Skoumpourdi) Χ. (2018). Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗΡΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (2), 29–50. <https://doi.org/10.12681/enedim.18812>

## Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗΡΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟΥ

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

### ■ ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή μελετήθηκαν οι ικανότητες των νηπίων (5 ετών) σε μαθηματικές δραστηριότητες με τη χρήση αριθμητηρίου και οι σχετικές απόψεις των γονιών τους καθώς και νηπιαγωγών. Οι μαθηματικές δραστηριότητες που δόθηκαν περιλάμβαναν (α) απαρίθμηση, (β) διατήρηση της ποσότητας, (γ) άμεση εκτίμηση και αντιστοίχιση των ποσοτήτων και αναγνώριση συμβόλων (1-6), (δ) απλά λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης και (ε) ανάλυση αριθμού σε δύο προσθετέους. Βρέθηκε ότι το αριθμητήριο βοήθησε τα νήπια να ανταποκριθούν σε τέτοιες δραστηριότητες, όπως επίσης ότι το μέσο αυτό ήταν οικείο τόσο στους γονείς όσο και στους νηπιαγωγούς. Η παρατήρηση και καταγραφή των ιδιομορφιών των νηπίων στο χειρισμό του αριθμητηρίου οδήγησε σε μια πρόταση για σχεδιασμό ενός πιο λειτουργικού συναρμολογούμενου αριθμητηρίου.

**Λέξεις-κλειδιά:** αριθμητήριο, απαρίθμηση, διατήρηση ποσότητας, εκτίμηση ποσοτήτων, λεκτικά προβλήματα, ανάλυση αριθμού, νήπια, γονείς, νηπιαγωγοί.

## ■ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρήση διδακτικού υλικού για τα Μαθηματικά όλων των τάξεων υποστηρίζεται από τους ερευνητές, εδώ και αρκετές δεκαετίες (Ambrose, 2002· Clements & McMillen, 1996· Gellert, 2004· Meira, 1998· Raphael & Wahlstrom, 1989· Szendrei, 1996). Ωστόσο, ο τρόπος που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί καλύτερα το διδακτικό υλικό στα Μαθηματικά εξακολουθεί να απασχολεί την ερευνητική κοινότητα διεθνώς (Ahmed, et al., 2004· Baroody, 1989· Jacobs & Kusiak, 2006· Moyer, 2001· Sowell, 1989· van den Heuvel-Panhuizen, 2003) και διαφοροποιείται ανάλογα με το είδος του υλικού καθώς και τη λειτουργία του μέσα στη δραστηριότητα (Σκουμπουρδή, προς δημοσίευση). Η κατηγορία στην οποία ανήκει το υλικό, αν δηλαδή είναι εκπαιδευτικό, αν είναι αντικείμενο καθημερινής χρήσης όπως πολιτισμικό εργαλείο που προέρχεται από την παράδοση ή τεχνολογικό αντικείμενο της καθημερινής ζωής, αν είναι παιχνίδι, αν είναι μέλος του σώματός (όπως τα δάκτυλα) ή αν είναι εικόνα, γραφική παράσταση, βιβλίο, φύλλο εργασίας ή λογισμικό, διαφοροποιεί κάθε φορά και τον τρόπο χρήσης του. Επίσης, η λειτουργία που επιτελεί το υλικό μέσα στη δραστηριότητα, που μπορεί να είναι βασική, βοηθητική, λειτουργία μοντελοποίησης, διακοσμητική-συνοδευτική καθώς και λειτουργία αναφοράς, του δίνει κάθε φορά διαφορετικό ρόλο, πρωτεύοντα ή όχι, στην προσέγγιση της μαθηματικής έννοιας που εμπλέκεται στη δραστηριότητα.

Για τα Μαθηματικά του νηπιαγωγείου η χρήση υλικού θεωρείται απαραίτητη. Στην ηλικία αυτή τα παιδιά λειτουργούν με βοηθητικά μέσα και αναπαραστάσεις, για να στηρίξουν τα αφηρημένα σχήματα που τους διδάσκονται, καθώς και νοητικά σχήματα, άμεσα στηριγμένα στην καθημερινή τους πραγματικότητα (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, υπό δημοσίευση). Τα νήπια, αρχικά μέσα από το χειρισμό αντικειμένων, στη συνέχεια εικόνων και τέλος αφηρημένων συμβολικών συστημάτων, προσεγγίζουν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, εμπλέκονται σε μαθηματικές δραστηριότητες μέσα από τις οποίες οικοδομούν τα μαθηματικά νοήματα και αναπτύσσουν τη σκέψη τους τυποποιώντας σταδιακά τους άτυπους συλλογισμούς τους (Szendrei, 1996· Cotter, 2000).

Ένα αντικείμενο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση των Μα-

θηματικών στο νηπιαγωγείο είναι το αριθμητήριο. Η χρήση του αριθμητηρίου για υπολογισμούς εμπεριέχει το χειρισμό του αντικειμένου μέσω της κίνησης των χαντρών, την οπτικοποίηση της δομής του (Pimm, 1995), εφόσον ο χρωματισμός των χαντρών ανά πέντε με το ίδιο χρώμα χωρίζει τις χάντρες σε ποσότητες που το νήπιο μπορεί να εκτιμήσει άμεσα, αλλά μπορεί να οδηγήσει και στην αφαιρετική σκέψη μέσω της εικόνας που μπορεί να διατηρεί ο χρήστης στο μυαλό του (*abacus in mind*) (Fauvel & Maanen, 2000, p. 257).

Στο άρθρο αυτό διερευνάται η χρήση του αριθμητηρίου στα μαθηματικά του νηπιαγωγείου μέσα από τη μελέτη του τρόπου χρήσης του από τα νήπια ως βοηθητικού μέσου για την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλήματος. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι απόψεις των γονιών των νηπίων καθώς και νηπιαγωγών για το θέμα αυτό.

## ■ ΕΙΔΗ ΑΒΑΚΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΗΡΙΟΥ ΚΑΙ Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΤΟΥΣ ΧΡΗΣΗ

Ο άβακας αποτέλεσε μια πρωτόγονη υπολογιστική μηχανή που επινόησε ο άνθρωπος από την εποχή της ενασχόλησής του με τους αριθμούς και η οποία έγινε δημοφιλής λόγω του ότι μπορούσε να χρησιμοποιηθεί από όλους ακόμα και από αυτούς που δε γνώριζαν γραφή και ανάγνωση (Eves, 1983: 137· Heath, 1981, p. 46· Szendrei, 1996). Το όνομα άβακας θεωρείται ότι προήλθε είτε από την ελληνική λέξη «άβαξ» που σημαίνει υπολογιστικό ταμπλό ή υπολογιστικό τραπέζι είτε από τη σημιτική λέξη «αβάκ» που σημαίνει άμμος ή σκόνη (Eves, 1983, p. 137).

Στην αρχαιότητα χρησιμοποιούσαν πολύ συχνά ένα είδος άβακα που αποτελείτο από ξύλινη βάση με πλαίσιο μέσα στο οποίο υπήρχε απλωμένη άμμος. Πάνω στην άμμο έγραφαν αριθμούς ή γράμματα. Αυτή η μορφή άβακα φαίνεται να είναι η αρχαιότερη μορφή υπολογιστικής μηχανής. Αργότερα, η άμμος αντικαταστάθηκε από τα λιθαράκια, τα σφαιρίδια και τελικά τις χάντρες με τις μετακινήσεις των οποίων πραγματοποιούνται διάφοροι υπολογισμοί (Struik, 1987). Ο αρχαιότερος άβακας είναι ο πίνακας Salamis ο οποίος βρέθηκε στη Σαλαμίνα, είναι μαρμάρινος και έχει αυλάκια που βοηθούσαν στους υπολογισμούς (Heath, 1981, p. 48· Heath, 2003). Αργότερα εμφανίστηκαν και άλλοι άβακες (Bunt, et al., 1976· Wilson, 2001), όπως ο πίνακας *calculi*, ο ρω-

μαϊικός άβακας χειρός, ο άβακας με χάντρες, ο κινέζικος άβακας Suan-Pan, ο ρώσικος άβακας, ο ιαπωνικός άβακας Soroban (Fauvel & Maanen, 2000, p. 344· Smith & Mikami, 2004), ο άβακας των Ατζέκων, ο μεσοαμερικάνικος άβακας, ο καθένας από τους οποίους είχε διαφορετική κατασκευή και δομή. Κατά το Μεσαίωνα ο όρος άβακας αποτέλεσε συνώνυμο της λογιστικής, εφόσον χρησιμοποιείτο για πίνακες ή βιβλία με ομοιόμορφο περιεχόμενο για τη διδασκαλία της αριθμητικής (Ball, 1960· Ifrah, 1981· Smith, 1958).

Στην Ευρώπη ο άβακας χρησιμοποιήθηκε μετά την είσοδο του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Στην Κίνα και την Ιαπωνία ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται άβακας, όχι μόνο στα σχολεία, αλλά και στα εμπορικά καταστήματα, ο οποίος έχει άλλη δομή από αυτή που κυριαρχεί στον υπόλοιπο κόσμο. Επιπλέον, το υποκατάστατο του παλιού άβακα, καθώς και το γνωστό αριθμητήριο χρησιμοποιείται σήμερα ως εκπαιδευτικό υλικό σε πολλές χώρες.

Καθώς ο άβακας ήταν ένα εργαλείο το οποίο κατείχε σημαντικό ρόλο στην ιστορία των αλγόριθμων ως υπολογιστική μηχανή για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων και κυρίως της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Swetz, 1994, p. 360), ο όρος άβακας έφτασε να σημαίνει κάθε είδος Μαθηματικών που μαθαίνονται στο δημοτικό σχολείο και η χρήση αυτής της έννοιας παρέμεινε για πολύ καιρό ακόμα και μετά την εμφάνιση της τυπογραφίας. Η πολύ συχνή χρήση του όρου και του υπολογιστικού πίνακα, οδήγησε, από τον 11ο αιώνα και μετά, στο να ονομάζονται όλοι οι μαθηματικοί που τον χρησιμοποιούσαν, αβακίστες (Burton, 1997, p. 237· Eves, 1983, p. 137· Ifrah, 1981· Mankiewicz, 2002, p. 68· Swetz, 1994, p. 261).

Υπάρχουν πολλοί τύποι άβακα, δύο από τους οποίους είναι οι πιο βασικοί. Οι άβακες αυτοί αποτελούνται από μια βάση, η οποία υποστηρίζει δέκα στήλες, κατακόρυφα τοποθετημένες, στη μία περίπτωση ίσου και στην άλλη κλιμακωτά μειωμένου μεγέθους, πάνω στις οποίες μπορούν να τοποθετηθούν ή/και να αποσπαστούν ξύλινες ή πλαστικές χάντρες. Στην πρώτη περίπτωση, καθεμιά από τις στήλες αντιστοιχεί σε μια τάξη μονάδων αριθμών. Αρχίζοντας από δεξιά συναντάμε τις μονάδες, τις δεκάδες κ.ο.κ.. Στη δεύτερη περίπτωση, σε κάθε στήλη, ανάλογα με το μέγεθός της, τοποθετείται διαφορετικός αριθμός χαντρών (1-10). Για παράδειγμα, ξεκινώντας από την πρώτη στήλη δεξιά τοποθετείται μία χάντρα, η οποία αντιστοιχεί στον αριθμό 1, στη δεύτερη

στήλη δύο χάντρες που αντιστοιχούν στον αριθμό 2 κ.ο.κ.. Και στα δύο είδη άβακα οι χάντρες κάθε στήλης έχουν το ίδιο χρώμα, αλλά διαφορετικό από το χρώμα που έχουν οι χάντρες των άλλων στηλών.

Όσον αφορά το αριθμητήριο, ο βασικός τύπος, αποτελείται από ένα ξύλινο ή πλαστικό πλαίσιο με ξύλινες ή πλαστικές χρωματιστές χάντρες, περασμένες σε οριζόντια τοποθετημένα σύρματα για να κινούνται πέρα δώθε. Τα σύρματα είναι δέκα και κάθε σύρμα έχει δέκα χάντρες. Σε κάποια αριθμητήρια όλες οι χάντρες έχουν το ίδιο χρώμα ενώ σε κάποια άλλα οι χάντρες της κάθε σειράς έχουν ίδιο χρώμα μεταξύ τους, αλλά διαφορετικό από τις άλλες σειρές, με πέντε διαφορετικά χρώματα για τις πέντε πρώτες σειρές τα οποία επαναλαμβάνονται στις υπόλοιπες πέντε. Αυτή είναι και η πιο διαδεδομένη μορφή αριθμητηρίου. Υπάρχουν όμως και αριθμητήρια στα οποία οι χάντρες κάθε σειράς είναι ανά πέντε διαφορετικού χρώματος. Για παράδειγμα, οι πέντε πρώτες χάντρες κάθε σειράς μπορεί να είναι άσπρες και οι άλλες πέντε μαύρες (πενταδική δομή). Η δομή αυτή προσφέρει οπτικοποίηση της ποσότητας (Cotter, 2000) και βοηθάει το χρήστη να υπολογίζει γρήγορα το ζητούμενο αριθμό χαντρών (με άμεση εκτίμηση), αλλά και να κάνει γρήγορους υπολογισμούς (προσθέσεις και αφαιρέσεις).

Σύμφωνα με την Cotter (2000, σελ. 110) το αριθμητήριο στο οποίο οι δέκα χάντρες κάθε σειράς έχουν ανά πέντε διαφορετικό χρώμα (AL abacus) έχει πλεονεκτήματα σε σχέση με τον άβακα. Αυτά είναι τα εξής:

- Τα μικρά παιδιά συχνά θεωρούν ότι κάθε στήλη του άβακα αποτελεί μια μονάδα ανεξάρτητα από το μήκος της στήλης, κάτι που δεν ισχύει.
- Το οκτώ τοις εκατό του γενικού πληθυσμού έχει δυσκολία στην αντίληψη των χρωμάτων και έτσι δεν μπορεί να διαχωρίσει τα δέκα χρώματα που παρουσιάζονται στις στήλες του άβακα.
- Ο συνδυασμός των χαντρών δύο στηλών δεν οδηγεί άμεσα στο αποτέλεσμα, κάτι που γίνεται στο αριθμητήριο με χάντρες ανά πέντε διαφορετικού χρώματος.
- Όταν το αποτέλεσμα μιας πράξης είναι πάνω από δέκα δε γίνεται φανερό, με τις στήλες του άβακα, η δομή του δέκα, ενώ, στο αριθμητήριο, το αποτέλεσμα φαίνεται άμεσα ως δεκάδες και μονάδες.
- Στο αριθμητήριο οι ποσότητες μέχρι το εκατό οπτικοποιούνται και εκτιμούνται άμεσα από το χρήστη.

- Οι χάντρες στο αριθμητήριο μπορούν να υποστούν χειρισμό από τα μικρά παιδιά χωρίς να διασκορπιστούν στην τάξη κάτι που συμβαίνει πολύ συχνά με τις χάντρες του άβακα.

Σε ερευνητικό πείραμα (Cotter, 2000), διάρκειας ενός σχολικού έτους, σε δύο τμήματα Α΄ τάξης δημοτικού σχολείου χρησιμοποιήθηκε για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, στην πειραματική τάξη ποικίλο υλικό συμπεριλαμβανομένου και του αριθμητηρίου (AL abacus) και στην άλλη το σχολικό βιβλίο. Από την ανάλυση των συνεντεύξεων των μαθητών παρατηρήθηκε ότι η πειραματική ομάδα είχε καλύτερες επιδόσεις στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, τόσο με τη χρήση υλικού όσο και νοητικά καθώς και στην εύρεση της αξίας θέσης των ψηφίων των αριθμών, από την ομάδα ελέγχου.

Σε άλλη έρευνα (Bartolini Bussi & Boni, 2003), σε Α΄ τάξη δημοτικού, ζητήθηκε από τα παιδιά να σχεδιάσουν τον άβακα (με 4 κάθετες στήλες ίσου μεγέθους) στο τετράδιό τους και να εξηγήσουν, σε κάποιο παιδί από τη διπλανή τάξη, τι είναι ο άβακας, πού χρησιμεύει και πώς χρησιμοποιείται. Μέσα από τα σχέδια των παιδιών, τη συζήτηση καθώς και τη μετα-συζήτηση που ακολούθησε, φάνηκε ότι οι μαθητές δημιούργησαν ένα νοητικό εργαλείο το οποίο χρησιμοποιούσαν στις περιγραφές τους ακόμα και για δύσκολους υπολογισμούς. Η σταδιακή απομάκρυνση από το χειροπιαστό αντικείμενο (άβακα) οδήγησε τους μαθητές να το χειρίζονται ως νοητικό αντικείμενο και στη συνέχεια να κάνουν πράξεις μόνο με χαρτί και μολύβι.

Ο άβακας (με τη μορφή του κινέζικου άβακα) χρησιμοποιείται και για την εξ' αποστάσεως μαθηματική εκπαίδευση ατόμων με δυσκολία στην όραση καθώς και τυφλών, από το Hadley School (Fischer & Hartmann, 2005). Θεωρείται ότι βοηθάει κατά τη λύση ενός περίπλοκου προβλήματος στην «καταγραφή» των αριθμητικών πληροφοριών και των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων. Αυτό γίνεται με το διαχωρισμό των απαραίτητων χαντρών, ο οποίος αντικαθιστά τη γραφή των αριθμών. Ο άβακας προσφέρει στα άτομα αυτά συγκεκριμένες και ακριβείς αριθμητικές πληροφορίες, οι οποίες τα βοηθάνε να λύσουν τα μαθηματικά προβλήματα με δημιουργικό τρόπο.

Η χρήση του αριθμητηρίου κατέχει σημαντική θέση στη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση. Η προσέγγιση αυτή προσανατολίζεται στη σύνδεση των άτυπων αριθμητικών μεθόδων των παιδιών με πιο τυπικές καθώς επίσης

και στην προσπάθεια να κάνει αυτές τις αριθμητικές μεθόδους προσιτές και στους πιο αδύναμους μαθητές. Για να επιτευχθεί αυτό επιλέγονται δύο μοντέλα, ένα διατακτικό και ένα απόλυτο (Gravenmeijer, et al., 2000; Treffers, 2000), για πράξεις μέχρι το δέκα ή/και το είκοσι. Το διατακτικό μοντέλο αφορά μια σειρά από χάντρες (10 ή 20) ανά πέντε διαφορετικού χρώματος, ενώ το απόλυτο μοντέλο αφορά την αριθμητική ράβδο (arithmetic rack), η οποία αποτελείται από δύο οριζόντιες σειρές με δέκα χάντρες στην καθεμιά ανά πέντε διαφορετικού χρώματος. Το δεύτερο μοντέλο σχεδιάστηκε από τον Treffers (Gravenmeijer, et al., 2000) ως αποτέλεσμα της παρατήρησης των άτυπων στρατηγικών των μαθητών στις οποίες χρησιμοποιούνταν, ως σημείο αναφοράς των υπολογισμών, το διπλάσιο (και τα πολλαπλάσια) του πέντε.

Στη Ρεαλιστική προσέγγιση, το αριθμητήριο χρησιμοποιείται αρχικά ως «μοντέλο εργασίας» για να γίνει τελικά ένα «νοητικό μοντέλο». Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από τρία στάδια (Menne, 2001): στο πρώτο μετακινούνται οι χάντρες από το παιδί, στο δεύτερο το παιδί απλώς κοιτάει τις χάντρες για να κάνει τον υπολογισμό του χωρίς να τις ακουμπάει, ενώ στο τρίτο έχει το εργαλείο στο μυαλό του και όχι στο οπτικό του πεδίο. Έτσι το «μοντέλο εργασίας» αφορά τη χρήση του αριθμητηρίου για να βρεθεί το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού. Καθώς οι μαθητές χειρίζονται το αριθμητήριο, προσπαθούν να βρουν μια απάντηση σε έναν υπολογισμό (Gravenmeijer, 2000, σελ. 61-62) χρησιμοποιώντας έτοιμες στρατηγικές που προσφέρονται από τη δομή του (Gravenmeijer, et al., 2000). Όταν τα παιδιά, αργότερα, για τη λύση κάποιου προβλήματος, περάσουν από το χειρισμό του εργαλείου σε νοητικές διεργασίες, τότε το αριθμητήριο χρησιμοποιείται ως «νοητικό μοντέλο» όπου και μόνο η εικόνα του, η οποία υπάρχει στο μυαλό του παιδιού, οδηγεί στη λύση. Το αριθμητήριο εξυπηρετεί τους μαθητές, αρχικά, ως «μοντέλο των» άτυπων στρατηγικών τους και στη συνέχεια ως «μοντέλο για» το μαθηματικό τους συλλογισμό.

Ο άβακας και το αριθμητήριο μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία για την πραγματοποίηση δραστηριοτήτων οι οποίες εξυπηρετούν ποικίλους στόχους. Οι μαθητές μπορούν να τα χειριστούν ως εργαλεία μέσω των οποίων μπορούν να προσεγγίσουν την έννοια του φυσικού αριθμού, να υπολογίσουν με τις βασικές πράξεις, να εξοικειωθούν με την έννοια της αξίας θέσης και την αλλαγή βάσης και να αναπτύξουν ατομικούς «υπολογι-



στικούς αλγόριθμους» (Bartolini Bussi & Boni, 2003· Cotter, 2000· Gravenmeijer et al., 2000· Treffers, 2000· Menne, 2001). Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν από άτομα με μαθησιακές δυσκολίες (Fauvel & Maanen, 2000) καθώς και από άτομα με προβλήματα όρασης (Fischer & Hartmann, 2005).

## ■ Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Παρά το γεγονός ότι ο άβακας είναι πολιτισμικό εργαλείο που προέρχεται από την παράδοσή μας και μαζί με το αριθμητήριο αποτελούν εργαλεία που παρέχονται στα σχολεία από τον ΟΣΚ (Οργανισμό Σχολικών Κτιρίων) καθώς και το ότι μπορούν να εξυπηρετήσουν ποικίλους μαθηματικούς στόχους, δεν υπάρχουν (στην Ελλάδα) πολλές έρευνες σχετικά με τη χρήση τους τόσο από τους ίδιους τους μαθητές όσο και από τους γονείς και τους νηπιαγωγούς.

Σε αναζήτηση τρόπων χειρισμού του αριθμητηρίου για την προσέγγιση μαθηματικών εννοιών από τα μικρά παιδιά, πραγματοποιήθηκε έρευνα το Μάιο του 2006 στην οποία πήραν μέρος 45 νήπια από 4 νηπιαγωγεία της πόλης της Ρόδου, 18 νηπιαγωγοί και 40 γονείς. Τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν τα εξής:

1. Πώς τα νήπια χρησιμοποιούν το αριθμητήριο για να κάνουν υπολογισμούς και να λύσουν προβλήματα;
2. Ποιες είναι οι απόψεις των γονιών τους για τη χρήση του αριθμητηρίου;
3. Χρησιμοποιούν οι νηπιαγωγοί το αριθμητήριο για την προσέγγιση μαθηματικών εννοιών και με ποιο τρόπο;

Για τον προσδιορισμό της χρήσης του αριθμητηρίου στα Μαθηματικά του νηπιαγωγείου μελετήθηκαν οι ικανότητες των νηπίων (5 ετών) σε μαθηματικές δραστηριότητες με τη χρήση του συγκεκριμένου βοηθήματος και οι σχετικές απόψεις των γονιών τους καθώς και νηπιαγωγών.

Οι συνεντεύξεις των νηπίων (διάρκειας 12'-16' η καθεμία), βασιζόνταν σε ημδομημένο ερωτηματολόγιο και πραγματοποιήθηκαν από την ερευνήτρια με κάθε παιδί χωριστά. Όλες οι συνεντεύξεις βιντεοσκοπήθηκαν. Το αριθμητήριο που χρησιμοποιήθηκε ήταν το «κλασικό», που κυκλοφορεί ευρέως στο εμπόριο και αποτελείται από ένα πλαστικό πλαίσιο το οποίο περιέχει δέκα οριζόντιες σειρές με δέκα χάντρες στην κάθε σειρά. Η κάθε σειρά έχει διαφορετικό χρώμα από την προηγούμενη και τα χρώματα επαναλαμβάνονται

από την έκτη σειρά και μετά. Η χρήση του αριθμητηρίου αντιμετωπίστηκε ως εργασία με συγκεκριμένο υλικό και όχι ως δραστηριότητα όπου η συγκεκριμένη αναπαράσταση ενσωματώνει τις μαθηματικές σχέσεις και δομές.

Οι μαθηματικές δραστηριότητες που δόθηκαν στα νήπια περιλάμβαναν (α) απαρίθμηση, (β) διατήρηση της ποσότητας, (γ) άμεση εκτίμηση και αντιστοίχιση των ποσοτήτων και αναγνώριση συμβόλων (1-6), (δ) απλά λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης και (ε) ανάλυση αριθμού σε δύο προσθετέους. Συγκεκριμένα, τα ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής:

(α) Όσον αφορά στις δραστηριότητες απαρίθμησης, αυτές γίνονταν στο πλαίσιο της γνωριμίας με το αριθμητήριο, μέσα από τις ερωτήσεις: (α1) *Πόσες σειρές έχει το αριθμητήριο;* (α2) *Πόσες χάντρες έχει η κάθε σειρά;* (α3) *Οι δύο πρώτες σειρές πόσες χάντρες έχουν;* (α4) *Πόσες είναι όλες οι χάντρες του αριθμητηρίου;* και σκόπευαν στην καταγραφή της ικανότητας συντονισμού της ακολουθίας των αριθμολέξεων με τις χάντρες του αριθμητηρίου.

(β) Στις δραστηριότητες διατήρησης της ποσότητας, αρχικά χωρίστηκαν 4 χάντρες από την πρώτη σειρά του αριθμητηρίου και 3 από τη δεύτερη, και ζητήθηκε από τα παιδιά να απαντήσουν στο ερώτημα: (β1) *Ποια σειρά έχει τις περισσότερες χάντρες;* Στη συνέχεια, αφού αραιώθηκαν οι χάντρες της δεύτερης σειράς (μπροστά στο παιδί), ώστε η σειρά με τις 3 χάντρες να φαίνεται ότι καταλαμβάνει περισσότερο χώρο από τη σειρά με τις 4, ζητήθηκε από τα νήπια να απαντήσουν πάλι στο ερώτημα: (β2) *Ποια σειρά έχει τις περισσότερες χάντρες;*

(γ) Η άμεση εκτίμηση ποσοτήτων σχετιζόταν με τη ρύψη ζαριού από το παιδί και την άμεση δήλωση του πλήθους των κουκίδων. Ακολουθούσε η αντιστοίχιση της ποσότητας (ένδειξη ζαριού) αφενός με την ίδια ποσότητα από χάντρες και αφετέρου με την αντίστοιχη αριθμοκάρτα.

(δ) Στα λεκτικά προβλήματα δόθηκαν τα ακόλουθα προβλήματα: Ένα προσθετικό πρόβλημα μετασχηματισμού: (δ1) *Αν εσύ είχες 3 καραμέλες και σου έδιναν άλλες 3, πόσες καραμέλες θα είχες;* Ένα προσθετικό πρόβλημα συνδυασμού: (δ2) *Εσύ έχεις 4 χάντρες. Εγώ έχω 3 χάντρες. Πόσες χάντρες έχουμε και οι δύο μαζί;* καθώς και ένα αφαιρετικό πρόβλημα μετασχηματισμού: (δ3) *Αν είχες 6 καραμέλες και έτρωγες τις 3 πόσες καραμέλες θα σου έμεναν;*

(ε) Για την ανάλυση αριθμού σε δύο προσθετέους ζητήθηκε από τα νήπια να απαντήσουν στο ακόλουθο πρόβλημα: (ε1) *Χρησιμοποιώντας δύο σειρές του*

*αριθμητηρίου μπορείς να τοποθετήσεις 5 χάντρες; Μπορείς να το κάνεις με άλλο τρόπο; Κάπως αλλιώς;* (επαναλαμβανόταν η ερώτηση για να συμπληρωθούν οι συνδυασμοί).

Τα παιδιά του νηπιαγωγείου, λόγω της μικρής τους ηλικίας, είναι απόλυτα «εξαρτημένα» και επηρεάζονται άμεσα από το οικείο περιβάλλον τους (π.χ. οικογενειακό και εκπαιδευτικό). Έτσι, θεωρήθηκε απαραίτητο να ληφθεί υπόψη η οικειότητα ή/και ενασχόληση των γονέων και των νηπιαγωγών με το συγκεκριμένο εργαλείο. Οι γονείς και οι νηπιαγωγοί ρωτήθηκαν σχετικά με το αν χρησιμοποιούν το αριθμητήριο στο σπίτι και στο σχολείο αντίστοιχα, τον τρόπο που το χρησιμοποιούν και κατά πόσο θεωρούν ότι το αριθμητήριο αποτελεί ένα βοηθητικό εργαλείο αφενός για τον/την εκπαιδευτικό και αφετέρου για τα παιδιά ώστε να προσεγγίσουν έννοιες των Μαθηματικών.

## ■ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

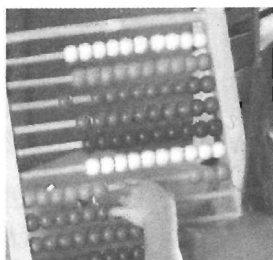
Η καταγραφή των αποτελεσμάτων γίνεται μέσα από την ποιοτική ανάλυση αφενός των απαντήσεων των νηπίων και του τρόπου που χειρίστηκαν το αριθμητήριο σε κάθε περίπτωση και αφετέρου των απαντήσεων των γονέων και των νηπιαγωγών.

### **Η χρήση αριθμητηρίου από τα παιδιά**

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα περισσότερα νήπια γνώριζαν το αριθμητήριο, όχι πάντα με το όνομά του, αλλά ως κατασκευή με την οποία μπορούμε να μετράμε. Όσον αφορά στα σφαιρίδια, άλλα νήπια τα ονόμαζαν χάντρες, άλλα μπάλες και μπαλίτσες και άλλα μπίλιες.

(α) Στις δραστηριότητες απαρίθμησης, τα παιδιά, για να απαντήσουν, χρησιμοποίησαν απλές και σύνθετες στρατηγικές. Για την εύρεση του πλήθους των σειρών του αριθμητηρίου καθώς και για τον αριθμό των χαντρών κάθε σειράς κανένα παιδί δεν αντιμετώπισε δυσκολία. Απάντησαν κυρίως με χρήση απλής στρατηγικής, όπως η «μέτρηση ανά ένα» (43/45 – 95,5%) όπου μέτρησαν ανά μία (εικόνα 1) είτε τις σειρές είτε τις χάντρες αντιστοιχίζοντας την κίνηση του χεριού (άγγιγμα σειράς ή χάντρας) με την ακολουθία των αριθμολέξεων. Υπήρξαν δύο παιδιά (2/45 – 4,4%) που χρησιμοποίησαν πιο σύνθετες στρατηγικές. Το ένα μέτρησε ανά δύο (N1: «2, 4, 6, 8, 10»), ενώ το

άλλο μέτρησε αρχικά ανά τρία και στη συνέχεια ανά δύο (N2: «3 και 3, 6 και 2, 8 και 2, 10»).



**Εικόνα 1**

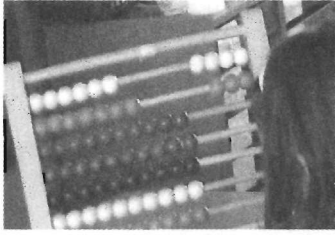


**Εικόνα 2**

Για τις χάντρες που βρίσκονται σε δύο σειρές εκτός από τα παιδιά που τις μέτρησαν ανά μία (21/45 – 46,6%), υπήρξαν παιδιά που τις μέτρησαν ανά δύο (2/45 – 4,4%) (εικόνα 2), παιδιά που τις μέτρησαν ανά δέκα (5/45 – 11,1%) λέγοντας «δέκα και δέκα είκοσι», παιδιά που απάντησαν αυτόματα χωρίς τη χρήση κάποιας εμφανούς στρατηγικής (13/45 – 28,8%) καθώς και παιδιά που δεν απάντησαν καθόλου (4/45 – 8,8%).

Για την εύρεση του συνόλου των χαντρών, τα περισσότερα νήπια (40/45 – 88,8%) άρχισαν να μετράνε ανά μία τις χάντρες. Αυτή η στρατηγική οδήγησε τα περισσότερα απ' αυτά (30/45 – 66,6%) σε αδιέξοδο γιατί η δυσκολία που βρήκαν στην ονομασία της επόμενης κάθε φορά δεκάδας τα αποπροσανατόλιζε από την ακολουθία των αριθμών και κατέληγαν να σταματήσουν την απαρίθμησή τους πριν το τέλος της, φτάνοντας συνήθως ως το 29. Λίγα ήταν τα νήπια (10/45 – 22,2%) που κατάφεραν να φτάσουν με επιτυχία στο 100 μετρώντας τις χάντρες μία μία. Υπήρξαν και παιδιά (5/45 – 11,1%) που μέτρησαν ανά 10 και έφτασαν γρήγορα και με επιτυχία στο αποτέλεσμα.

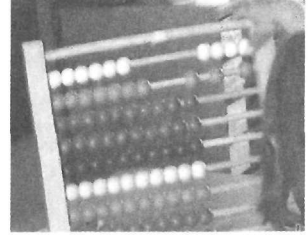
(β) Οι δραστηριότητες διατήρησης της ποσότητας προβλημάτισαν τα παιδιά. Τα περισσότερα νήπια (30/45 – 66,6%) απάντησαν σωστά (εικόνες 3, 4 και 5) χωρίς να επηρεαστούν από την απόσταση που καταλάμβαναν οι λίγες χάντρες στην κάτω σειρά. Στις αιτιολογήσεις που έδωσαν αναφέρουν: *Το ανοίξατε για να με μπερδέψετε ή τις χώρεσες πιο αραιά ή τις έβαλες έτσι για να φαίνονται πιο πολλές ή αφού έμειναν οι ίδιες.* Υπήρχαν βέβαια και παιδιά (15/45 – 33,3%) που μπερδεύτηκαν και υποστήριξαν ότι οι χάντρες της κάτω σειράς ήταν περισσότερες από εκείνες στην πάνω λέγοντας ότι αυτό συμβαίνει: *αφού έχουν περισσότερο χώρο ή επειδή είναι πιο μακρύτερα.*



Εικόνα 3

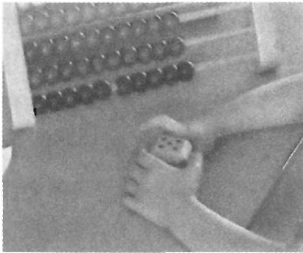


Εικόνα 4

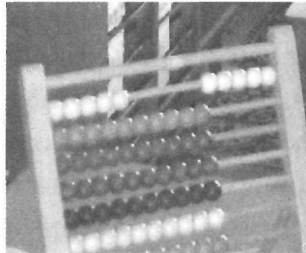


Εικόνα 5

(γ) Όσον αφορά τις δραστηριότητες άμεσης εκτίμησης και αντιστοίχισης ποσοτήτων όλα τα παιδιά (45/45 – 100%) εκτίμησαν άμεσα τις ενδείξεις του ζαριού ύστερα από κάθε ρίψη του (εικόνα 6) και τις αντιστοίχισαν αφενός με την ίδια ποσότητα χαντρών από το αριθμητήριο (εικόνα 7) και αφετέρου με την αντίστοιχη αριθμοκάρτα (εικόνα 8). Ο τρόπος με τον οποίο κινούσαν τις χάντρες τα παιδιά ήταν συνήθως μία μία. Οι ποσότητες που εμπλέκονταν για αναγνώριση και απαρίθμηση ήταν από μία μέχρι έξι κουκίδες (οι ενδείξεις ενός κλασικού ζαριού) και χάντρες αντίστοιχα. Επίσης, τα σύμβολα των αριθμών που καλούνταν να αναγνωρίσουν τα νήπια ήταν από το 1 έως το 6.



Εικόνα 6



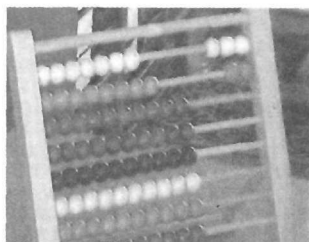
Εικόνα 7



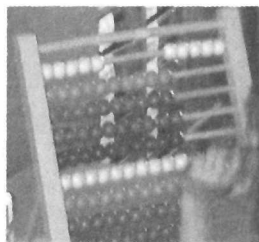
Εικόνα 8

(δ) Στα λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης εμπλέκονταν οι πράξεις  $3 + 3$ ,  $4 + 3$ ,  $6 - 3$ . Τα περισσότερα παιδιά (26/45 – 57,7%, 36/45 – 80% και 31/45 – 68,8% αντίστοιχα) χρησιμοποίησαν το αριθμητήριο για να δώσουν απάντηση. Χωρίζαν σε μία ή σε δύο σειρές τόσες χάντρες όσες έλεγαν οι αριθμοί και μετρούσαν ανά μία ή σε συνέχεια από τον πρώτο αριθμό ή λέγοντας στα προβλήματα πρόσθεσης: *τρεις καραμέλες και τρεις κάνουν έξι ή τέσσερις και τρεις επτά ή τρεις και τρεις και άλλη μία καραμέλα επτά* και αντίστοιχα στο πρόβλημα αφαίρεσης: *είναι τρεις καραμέλες και τρεις, θα φάω τρεις και θα μείνουν τρεις ή όταν φύγουν τρεις θα μου μείνουν 3*. Υπήρξαν παιδιά που έδωσαν απάντηση χωρίς τη χρήση του αριθμητηρίου (15/45 – 33,3%, 4/45 – 8,8%, 11/45 – 24,4%) καθώς και παιδιά που δεν απάντησαν σωστά (4/45 – 8,8%, 5/45 – 11,1% και 3/45 – 6,6% αντίστοιχα).

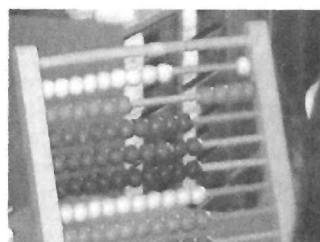
(ε) Για την ανάλυση του αριθμού 5 σε δύο προσθετέους κάποια νήπια μπερδεύτηκαν ( $5/45 - 11,1\%$ ) και είτε πήραν πέντε χάντρες από την πρώτη σειρά και πέντε από τη δεύτερη ( $4/45 - 8,8\%$ ) είτε, όπως ένα παιδί, ξεχώρισε από μία χάντρα σε πέντε διαφορετικές σειρές. Τα υπόλοιπα νήπια ( $40/45 - 88,8\%$ ) έδωσαν ένα ή περισσότερους συνδυασμούς. Κάποια παιδιά ( $12/45 - 26,6\%$ ) μέτρησαν μία μία χάντρα από την πρώτη και από τη δεύτερη σειρά εναλλάξ μέχρι να φτάσουν στον αριθμό 5 (συνδυασμός  $3 + 2$ ) και σταματούσαν εκεί (εικόνα 9). Άλλα ( $5/45 - 11,1\%$ ) συνέχιζαν για να δημιουργήσουν άλλους συνδυασμούς αφαιρώντας μία χάντρα από την πρώτη σειρά και προσθέτοντάς τη στη δεύτερη (συνδυασμός  $2 + 3$ ). Κάποια νήπια ( $18/45 - 40\%$ ) πήραν 5 χάντρες από την πρώτη σειρά και καμία από τη δεύτερη (συνδυασμός  $5 + 0$ ) (εικόνα 10). Άλλα ( $2/45 - 4,4\%$ ), συνεχίζοντας αφαίρεσαν μία χάντρα από την πρώτη σειρά και την πρόσθεσαν στη δεύτερη (συνδυασμός  $4 + 1$ ). Ενώ άλλα ( $1/45 - 2,2\%$ ) συνέχισαν ακόμα περισσότερο αφαιρώντας μία χάντρα από την πρώτη σειρά και προσθέτοντάς τη στη δεύτερη (συνδυασμός  $3 + 2$ ). Ο αντίστροφος τρόπος, χρησιμοποιήθηκε από ένα νήπιο (συνδυασμός  $0 + 5$  και  $1 + 4$ ). Ένα παιδί άφησε μόνο μία χάντρα στην πάνω σειρά και τοποθέτησε 4 στην κάτω (συνδυασμός  $1 + 4$ ) (εικόνα 11). Κανένα παιδί δε δημιούργησε πάνω από τρεις συνδυασμούς παρόλο που τα αποτελέσματα της κάθε προσπάθειάς τους καταγράφονταν και τα έβλεπαν.



**Εικόνα 9**



**Εικόνα 10**



**Εικόνα 11**

Εκτός από τις απαντήσεις των νηπίων στις μαθηματικές δραστηριότητες, καταγράφηκαν, από τις βιντεοσκοπήσεις, στοιχεία που είχαν να κάνουν με τον τρόπο χρήσης του αριθμητηρίου από τα παιδιά:

- Στην πλειοψηφία τους τα παιδιά, για να δώσουν απάντηση στις δραστηριότητες, μετρούσαν τις χάντρες μία μία, ενώ όταν έχαναν για κάποιο λόγο τον ειρμό τους ξεκινούσαν πάλι από την αρχή.
- Η αυθόρμητη κίνηση των παιδιών στην ενασχόλησή τους με τις χάντρες ήταν από αριστερά προς τα δεξιά.

- Ο ελεύθερος χώρος στον οποίο μετέφεραν τις χάντρες που κινούσαν φαινόταν σε κάποιες περιπτώσεις ελάχιστος, με αποτέλεσμα να μπερδεύονται οι χάντρες του υπολογισμού με τις υπόλοιπες.
- Σε δραστηριότητες που δεν ήταν απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν όλες οι σειρές, τα παιδιά χρησιμοποιούσαν κυρίως την τέταρτη και την πέμπτη και όχι τις δύο πρώτες.

### Οι απόψεις των γονέων για τη χρήση του αριθμητηρίου

Όλοι οι γονείς των νηπίων (40/40 – 100%) γνώριζαν τι είναι το αριθμητήριο (Πίνακας 1) κυρίως από τα δικά τους μαθητικά χρόνια. Οι περισσότεροι (25/40 – 62,5%) είχαν στο σπίτι κάποιο τύπο του και υποστήριξαν ότι το αριθμητήριο είναι ένα μέσο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση των μαθηματικών. Συγκεκριμένα ανέφεραν ότι το αριθμητήριο χρησιμεύει για την προσέγγιση των μαθηματικών (40/40 – 100%), για την αντίληψη των χρωμάτων (12/40 – 30%) καθώς και για παιχνίδι (11/40 – 27,5%). Θεωρούν ότι το παιδί τους με τη χρήση του αριθμητηρίου μπορεί να μάθει να μετράει (από 4 ετών που το χρησιμοποίησε μπορεί να μετράει, αντιλαμβάνεται καλύτερα τις ποσότητες: εφόσον βλέπει και μετράει), να κατανοήσει τις πράξεις και ιδιαίτερα την πρόσθεση και την αφαίρεση (το κάνει στην πράξη, το βοηθάει επειδή κάνει τις πράξεις με αντικείμενα και το καταλαβαίνει πιο εύκολα) καθώς και να διδαχτεί Μαθηματικά μέσα από το παιχνίδι (το παιδί το βλέπει σαν παιχνίδι, ενώ στην πραγματικότητα διδάσκεται τα Μαθηματικά με ευχάριστο τρόπο). Πιστεύουν (39/40 – 97,5%) ότι με τη χρήση του αριθμητηρίου το παιδί τους θα ήταν ικανό να εκτελέσει με ευκολία απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις. Βέβαιοι οι περισσότεροι γονείς (29/40 – 72,5%) δε γνώριζαν αν στο νηπιαγωγείο που φοιτούσε το παιδί τους γινόταν χρήση του αριθμητηρίου και με ποιο τρόπο, αλλά υποστήριξαν ότι το αριθμητήριο είναι ένα μέσο με το οποίο μπορούν τα παιδιά να διδαχτούν Μαθηματικά με ευχάριστο τρόπο.

	Γονείς	Νηπιαγωγοί
Γνωρίζουν το αριθμητήριο	100%	100%
Διαθέτουν αριθμητήριο	62.5%	72.2%
Αποδέχονται τη χρησιμότητά του στην προσέγγιση των Μαθηματικών	100%	100%
Θεωρούν ότι χρησιμοποιείται / το χρησιμοποιούν, στο νηπιαγωγείο	27.5%	72.2%

**Πίνακας 1:** Απόψεις γονέων και νηπιαγωγών για τη χρήση του αριθμητηρίου.

### Η χρήση του αριθμητηρίου από τις νηπιαγωγούς

Από την ανάλυση των απαντήσεων των νηπιαγωγών φάνηκε ότι το αριθμητήριο αποτελεί ένα μέσο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση εννοιών των Μαθηματικών. Η πλειοψηφία των νηπιαγωγών (13/18 – 72,2%) διαθέτει είτε αριθμητήριο είτε άβακα στο νηπιαγωγείο και τα χρησιμοποιούν σχετικά συχνά για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Πίνακας 1) καθώς και για την αναγνώριση των χρωμάτων από τα νήπια. Οι μαθηματικές δραστηριότητες που διαπραγματεύονται οι νηπιαγωγοί με τη χρήση του αριθμητηρίου ή του άβακα έχουν στόχο την κατανόηση από τα νήπια των αριθμών από το 1 ως το 10, την απαρίθμηση και τη λύση απλών προβλημάτων συνήθως πρόσθεσης και αφαίρεσης. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι τα παιδιά στην αρχή παίζουν όπως θέλουν με βάση το χρώμα, στη συνέχεια περνούν σε κάθε ραβδάκι τις μπάλες: στο μικρότερο τις λίγες, στο μεγαλύτερο τις πολλές. Μετρούν από το ένα (1ο σκαλοπάτι) μέχρι το 10 (τελευταίο σκαλοπάτι). Επίσης, όλοι οι νηπιαγωγοί (13/13 – 100%) που έχουν στο νηπιαγωγείο τους είτε αριθμητήριο είτε άβακα αναφέρουν ότι τα χρησιμοποιούν ως ένα ευχάριστο μέσο για να διδαχτεί το παιδί μαθηματικά, για ευχάριστη απασχόληση των παιδιών ώστε να μη γίνεται βαρετό το μάθημα των μαθηματικών, αλλά και για παιχνίδι.

Οι νηπιαγωγοί θεωρούν ότι το αριθμητήριο αποτελεί καλό παιδαγωγικο-εκπαιδευτικό μέσο, το οποίο βοηθάει στην ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών, καθώς και ότι τα παιδιά δείχνουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις δραστηριότητες που γίνονται με τη χρήση του. Η ελεύθερη χρήση του από τα παιδιά στη γωνιά των Μαθηματικών, η χρήση του από τις ίδιες ως συμπληρωματικού υλικού σε συνδυασμό και με άλλα παιδαγωγικά μέσα για την επίλυση απλών μαθηματικών προβλημάτων, η «σωστή» χρήση του μέσα από την οποία προκαλείται το ενδιαφέρον των παιδιών, ο χειρισμός του από το παιδί ώστε να αντιστοιχεί αυτό που λέει με κάτι χειροπιαστό, ο ενθουσιασμός που προκαλείται στα παιδιά όταν δουλεύουν μ' αυτό, οι παιγνιώδεις καταστάσεις που προκαλεί, η ατομική και παράλληλα ομαδική εργασία που μπορεί να υποστηρίξει είναι κάποιοι από τους τρόπους που αναφέρουν οι νηπιαγωγοί ότι επιτυγχάνεται η ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων από τα παιδιά μέσα από τη χρήση του αριθμητηρίου.



## ■ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στην εργασία αυτή έγινε μια προσπάθεια να διερευνηθεί η χρήση του αριθμητηρίου στα μαθηματικά του νηπιαγωγείου μέσα αφενός από τη μελέτη του τρόπου χρήσης του από τα νήπια ως βοηθητικού μέσου για την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλήματος και αφετέρου μέσα από τις απόψεις των γονιών τους και νηπιαγωγών για τη χρησιμότητα του συγκεκριμένου εργαλείου στην προσέγγιση των μαθηματικών.

Η αποτύπωση των ικανοτήτων των νηπίων σε μαθηματικές δραστηριότητες με τη χρήση του αριθμητηρίου έγινε μέσω της απαρίθμησης, της διατήρηση της ποσότητας, της εκτίμησης και αντιστοίχισης των ποσοτήτων και την αναγνώριση συμβόλων (1-6). Επίσης, μέσω απλών λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης, αφαίρεσης και ανάλυσης αριθμού σε δύο προσθετέους. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το αριθμητήριο βοηθάει τα παιδιά προκειμένου να ανταποκριθούν σε τέτοιες δραστηριότητες. Παρόλο που τα περισσότερα νήπια δεν ήξεραν το όνομά του, το γνώριζαν ως αντικείμενο και το χρησιμοποίησαν με άνεση:

- Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν τα νήπια για απαρίθμηση ήταν απλές, όπως η «μέτρηση ανά 1», αλλά και πιο σύνθετες όπως η «μέτρηση ανά 2», η «μέτρηση ανά 3» καθώς και η «μέτρηση ανά 10». Όταν η ποσότητα ξεπερνούσε το είκοσι, τα περισσότερα παιδιά δυσκολεύονταν να ολοκληρώσουν την απαρίθμηση, ενώ υπήρχαν μερικά που μέτρησαν με επιτυχία μέχρι το εκατό, χρησιμοποιώντας κάποια από τις παραπάνω στρατηγικές.
- Στις δραστηριότητες διατήρησης της ποσότητας, τα περισσότερα παιδιά απάντησαν σωστά. Υπήρχαν όμως και παιδιά που απάντησαν λάθος, επηρεασμένα από το μήκος που καταλάμβαναν οι χάντρες και όχι από την ποσότητά τους, παρόλο που οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν ήταν μικροί.
- Μεγάλη ήταν η ευκολία των παιδιών στην άμεση εκτίμηση των ενδείξεων του ζαριού και στην αντιστοίχισή τους με την ίδια ποσότητα από χάντρες καθώς και με το σύμβολο του αριθμού με χρήση αριθμοκάρτας.
- Όσον αφορά τα προβλήματα μετασχηματισμού και συνδυασμού λύθηκαν από τα νήπια κυρίως με τη χρήση του αριθμητηρίου. Αρχικά γινόταν χωρισμός των χαντρών και στη συνέχεια καταμέτρησή τους είτε ανά 1 είτε σε ομάδες με χρήση των αριθμών που δίνονταν.

- Η ανάλυση του αριθμού 5 σε δύο προσθετούς ήταν μια δραστηριότητα που προσεγγίστηκε από τα νήπια σε ένα μέρος της εφόσον κανένα απ' αυτά δεν έδωσε πάνω από τρεις συνδυασμούς. Οι συνδυασμοί που έδωσαν ήταν περιορισμένοι και κυρίως βασιζόνταν στη στρατηγική που χρησιμοποιούσαν. Αν μετρούσαν μία μία χάντρα από την πρώτη και δεύτερη σειρά εναλλάξ έβρισκαν τους συνδυασμούς:  $3 + 2$  και  $2 + 3$ . Αν έπαιρναν όλες τις χάντρες από μία σειρά σχημάτιζαν:  $5 + 0$ ,  $4 + 1$  και  $3 + 2$  ή αν χρησιμοποιούσαν τον αντίστροφο τρόπο σχημάτιζαν τους συνδυασμούς:  $0 + 5$  και  $1 + 4$ .
- Εκτός όμως από την προσέγγιση των μαθηματικών δραστηριοτήτων με τη χρήση αριθμητηρίου ενδιαφέρον είχε και ο τρόπος που χρησιμοποιούσαν τα νήπια το ίδιο το εργαλείο. Υπήρξαν κάποιες χαρακτηριστικές κινήσεις που υιοθέτησαν τα νήπια στην πλειοψηφία τους, όπως η μέτρηση ανά μία χάντρα, η κίνηση των χαντρών προς τα δεξιά, η χρήση ενδιάμεσων σειρών και όχι των πρώτων.
- Η μέτρηση γινόταν συνήθως ανά μία χάντρα ίσως γιατί λόγω της φύσης του εργαλείου, με την ομοιομορφία των χρωμάτων κάθε σειράς, δεν υπήρχε κάποιο στοιχείο που να οδηγήσει τα παιδιά να κάνουν άμεση εκτίμηση της ποσότητας. Αν, για παράδειγμα, γινόταν η χρήση ενός αριθμητηρίου όπου η κάθε σειρά θα είχε ανά πέντε χάντρες διαφορετικό χρώμα πιθανότατα για κάποια παιδιά να αποτελούσε βοήθημα στη μέτρηση ανά πέντε, αλλά και στην άμεση εκτίμηση μέχρι πέντε ποσοτήτων.
- Η κίνηση των χαντρών, από τα νήπια, για τον υπολογισμό του αποτελέσματος, γινόταν προς τα δεξιά. Προφανώς ο τρόπος που είχαν αρχίσει να μαθαίνουν να γράφουν τα επηρέασε και στον τρόπο χειρισμού των χαντρών. Η κίνηση αυτή άλλες φορές υιοθετείται από τη βιβλιογραφία (Cotter, 2000 σ. 110· Gravenmeijer, 2002 σ. 152) και άλλες όχι (Gravenmeijer, 2000 σ. 78).
- Προβληματισμός δημιουργήθηκε στα νήπια σε ορισμένες περιπτώσεις όπου μπέρδευαν τις χάντρες υπολογισμού με τις υπόλοιπες ίσως λόγω του μικρού κενού χώρου που υπήρχε διαθέσιμος δίπλα στις χάντρες.
- Επίσης παρατηρήθηκε ότι όταν τα παιδιά χειρίζονταν το αριθμητήριο ως βοήθημα για κάποιο μικρό υπολογισμό (μέχρι το 20), δε χρησιμοποιούσαν συνήθως τις δύο πρώτες σειρές, αλλά την τέταρτη και την πέμπτη, ίσως λόγω του ότι οι δύο αυτές σειρές βρίσκονταν στο ίδιο επίπεδο με το ύψος

των ματιών τους. Σε άλλες περιπτώσεις η ύπαρξη τόσων σειρών πιθανότατα να μπερδεύει το παιδί και να του αποσπούσει την προσοχή.

Το αριθμητήριο φάνηκε να είναι ένα βοηθητικό μέσο, οικείο τόσο στους γονείς των νηπίων, όσο και σε νηπιαγωγούς, αφού υπήρχε και χρησιμοποιούνταν συνήθως στο σπίτι των παιδιών, αλλά και στο νηπιαγωγείο. Η χρήση του από τη νηπιαγωγό ενθουσίαζε τα παιδιά τα οποία συμμετέχουν ευχάριστα στις αντίστοιχες δραστηριότητες. Το αριθμητήριο, σύμφωνα με τις νηπιαγωγούς, βοηθάει τα παιδιά να κατανοήσουν τους αριθμούς, να απαριθμήσουν και να λύσουν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Τα παραπάνω στοιχεία έρχονται να προστεθούν και να επέκτεινουν αποτελέσματα άλλων ερευνών που προέρχονται από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου και να υποστηρίξουν τη χρησιμότητα του αριθμητηρίου, από το νηπιαγωγείο, ως εργαλείου μέσω του οποίου τα νήπια μπορούν να προσεγγίσουν με επιτυχία τις μαθηματικές έννοιες και δομές. Επίσης, παρέχονται πληροφορίες στον εκπαιδευτικό τόσο για δυσκολίες που αντιμετώπισαν τα παιδιά σε συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα, όπως για παράδειγμα, της διατήρησης της ποσότητας και της ανάλυσης αριθμού σε δύο προσθετέους, όσο και για τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν τα παιδιά για να εκφράσουν το συλλογισμό τους ή για να δώσουν μια απάντηση με τη χρήση του. Η παρατήρηση και καταγραφή των στρατηγικών αυτών μπορεί να αποτελέσει πολύτιμη βοήθεια στην οργάνωση της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού. Ξεκινώντας ο εκπαιδευτικός τη διδασκαλία του με τη χρήση των αυτών απλών στρατηγικών, που προήλθαν από τα ίδια τα παιδιά, μπορεί να περάσει σταδιακά σε πιο σύνθετες, επιδιώκοντας ταυτόχρονα και την τυποποίησή τους. Μέσα από τη σχεδιασμένη ένταξή του, μπορεί να οδηγηθεί το παιδί σταδιακά από τη χρήση του ως χειροπιαστού αντικειμένου στη χρήση του ως νοητικού μοντέλου.

Επίσης, η καταγραφή των άτυπων αυτών στρατηγικών καθώς και των ιδιαιτεροτήτων του κάθε παιδιού στο χειρισμό του αριθμητηρίου μπορεί να οδηγήσει στο σχεδιασμό και τη δημιουργία ενός πιο ευέλικτου εργαλείου για τα παιδιά αυτής της ηλικίας. Έτσι, προτείνεται ο σχεδιασμός ενός συναρμομολογούμενο αριθμητηρίου, το οποίο, στην πλήρη του μορφή, να είναι όπως το «κλασικό» με τη διαφορά ότι κάθε σειρά θα αποτελείται από δέκα χάντρες, ανά πέντε σε αντίθετα χρώματα (π.χ. άσπρο και μαύρο). Το μήκος της κάθε σειράς να είναι όσο το διπλάσιο του μήκους που καταλαμβάνουν οι χάντρες,

ώστε να προσφέρεται άνεση στις κινήσεις ενός παιδιού χωρίς ανάμειξη των χαντρών υπολογισμού με τις υπόλοιπες. Τα τμήματα στα οποία θα μπορεί να διασπαστεί να είναι ανά μία σειρά, όπου ανάλογα με το στόχο της δραστηριότητας θα αποκτά και ανάλογη μορφή. Για παράδειγμα, μία σειρά μόνη της (10 χάντρες, ανά πέντε διαφορετικού χρώματος) για απαρίθμηση και λύση απλών προβλημάτων ή δύο σειρές τοποθετημένες η μία πάνω στην άλλη (20 χάντρες, ανά δέκα σε κάθε σειρά, ανά πέντε διαφορετικού χρώματος) για απαρίθμηση, για δραστηριότητες του τύπου «διπλό λεωφορείο» (βλ. Gravenmeijer et al., 2000) κ.λπ. Επίσης, μπορεί να υπάρχει η δυνατότητα οριζόντιας ένωσης των σειρών οπότε να δημιουργείται μια σειρά από 10 ή 20 ή 30 ή 40 ή 50 ή 60 ή 70 ή 80 ή 90 ή 100 χάντρες, ανάλογα με το πόσες σειρές ενώνονται κάθε φορά. Οι χάντρες στη σειρά μπορεί να έχουν ανά μία, ανά δύο, ανά πέντε ή ανά δέκα διαφορετικό χρώμα ανάλογα με τη δραστηριότητα.

Άλλη διάταξη που μπορεί να δημιουργηθεί με τις αποκολλημένες σειρές είναι ο άβακας. Τοποθετώντας τις σειρές κατακόρυφα δημιουργούνται στήλες οι οποίες βοηθούν στο να γίνει διαχωρισμός μεταξύ των μονάδων, των δεκάδων, των εκατοντάδων, των χιλιάδων κ.λπ. Για τα πιο μικρά παιδιά μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διαφορετικό τρόπο αφού έχουν την ελευθερία να αφαιρούν και να επανατοποθετούν τις χάντρες. Οι στήλες του άβακα δε θα έχουν χάντρες με ίδια χρώματα, διαφορετικά ανά στήλη, όπως ο κλασικός, αλλά χάντρες δύο αντίθετων χρωμάτων (π.χ. άσπρο και μαύρο). Η εναλλαγή των χρωμάτων ανά πέντε στον άβακα θα λειτουργεί ως οπτική βοήθεια για την ανάγνωση του αριθμού που σχηματίζεται κάθε φορά στις στήλες. Το συναρμολογούμενο αριθμητήριο δε θα αποτελεί ένα εργαλείο για χειρισμό, αλλά ποικίλα μέσα με τα οποία θα μπορούν οι μαθητές να σχηματίσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας. Ωστόσο, η κατασκευή του μένει να πραγματοποιηθεί και η χρήση του να διερευνηθεί.

## ■ ABSTRACT

*In small ages the children usually function with auxiliary means and representations in order to support the abstract mathematic concepts that are taught to them. One teaching aid that might be used towards this end is the counting board. Its use for calculations includes the handling this manipulative through the movement of beads, the visualization of its structure, but it can also lead to the abstractive thought through its picture that the user can maintain in his mind. In this paper we studied kindergartners (5 years) ability in mathematical activities with the use of the counting board and we examined through a questionnaire the relative views of their parents as well as of kindergarten teachers.*

*The mathematical activities that were given included (a) enumeration, (b) conservation, (c) subitizing and matching quantities; recognition of symbols (1-6), (d) simple addition and subtraction word problems as well as (e) construction of number partners.*

*It was found that the counting board helped kindergartners correspond in such activities as also that this auxiliary mean was familiar so much in the parents of the children as in kindergarten teachers. Indeed, it was available and was used in most the children's houses, but also in the kindergartens. The observation and recording of particularities of kindergartners in the handling of counting board led to a proposal for designing of a more functional assembled counting board.*

## ■ ■ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Ball, R. (1960). *A Short Account of the History of Mathematics* (pp. 123-127). Dover Publications Inc NY.
- Bartolini Bussi, G. M. & Boni, M. (2003). Instruments for Semiotic Mediation in Primary School Classrooms. *For the Learning of Mathematics* Vol. 23, No 2, 15-22.
- Bunt, L.N.H., Jones, P.S., Bedient, J.D., (1976). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, (pp. 223-228). Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Burton, D. (1997). *The history of mathematics: an introduction* (pp. 237-243). McGray-Hill, NY.

- Cotter, A. J. (2000). Using Language and Visualization to Teach Place Value. *Teaching Children Mathematics*, Vol. 7, No 2, 109-114.
- Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics: before 1650* (pp. 135-147). The Mathematical Association of American.
- Fauvel, J. & Maanen, J. van, (eds) (2000). *History in Mathematics Education The ICMI Study* (pp. 257-258, 343-345). Kluwer Academic Publishers.
- Fischer, P. S. & Hartmann, C. (2005). Math through the Mind's Eye. *Mathematics Teacher* Vol. 99, No 4, 246-250.
- Gravenmeijer, K. (2000). Ένας διδακτικο-θεωρητικός συλλογισμός σχετικά με τη χρήση χειρισμών. Στο Streefland, L. (ed.) *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (σελ. 59-82) (Επιμέλεια μετάφρασης: Ε. Κολέζα). Leader Books.
- Gravenmeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). *Symbolizing, Modelling, and Instructional Design*. In Cobb, P, Yackel, E. & McClain K. (ed.) *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 225-273). Lawrence Erlbaum.
- Gravenmeijer, K. & Stephan, M. (2002). Emergent Models as an Instructional Design Heuristic. In Gravenmeijer, K., Lehrer, R., Oers, B. van and Verschagel, L. (ed.) *Symbolizing Modeling and Tool Use in Mathematics Education* (pp. 145-169). Kluwer Academic Publishers Netherlands.
- Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics Volume 1 From Thales to Euclid* (pp. 46-52). Dover Publications, Inc. NY.
- Heath, T. (2003). *A Manual of Greek Mathematics* (pp. 24-27). Courier Dover Publications.
- Ifrac, G. (1981). *Παγκόσμια Ιστορία των Αριθμών* (σελ. 114-121). Σμυρνωτάκης.
- Mankiewicz, R., (2002). *Η ιστορία των μαθηματικών* (σελ. 67-76). (Τίτλος πρωτοτύπου: *The Story of Mathematics*, μετάφραση Λεωνίδας Καρατζάς). Εκδόσεις Αλεξάνδρεια.
- Menne, J. (2001). Jumping ahead: an innovative teaching program. In Anghileri, J. (ed) *Principles and Practices in Arithmetic Teaching* (pp 95-106). Open University Press.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and Meanings in School Mathematics* (pp. 76-88). Routledge London.
- Σκουμπουρδή, Χ. (προ δημοσίευση). Υλικό για τα μαθηματικά της πρώτης σχολικής ηλικίας. *Τόμος ΕνΕΔιΜ*.
- Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2007). Σχεδιασμός ένταξης του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. Στο Φ. Καλαβάσης και Α. Κοντάκος (επιμ.) *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού* (σ.σ. 137-156) Ατραπός, Αθήνα.

- Smith, E. D. (1958) *History of Mathematics Volume II* (pp. 156-194). Dover Publications, INC. NY.
- Smith, D. & Mikami, Y. (2004). *A History of Japanese Mathematics* (pp. 18-46) Courire Dover Publications.
- Struik, J. C. (1987). *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών* (σελ. 139-140). Δαίδαλος.
- Swetz, F. (1994) (eds). *From five fingers to infinity: a journey through the history of mathematics* (359-363). Open Court, Chicago.
- Szendrei, J. (1996), Concrete Materials in the Classroom. Bishop, J. A. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 411-434). Kluwer, Academic Publishers, Netherlands.
- Treffers, A. (2000). Το Διδακτικό Υπόβαθρο ενός προγράμματος Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο. Στο Streefland, L. (ed.) *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (σελ. 18-58) (Επιμέλεια μετάφρασης: Ε. Κολέζα) Leader Books.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: An Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. *Educational Studies in Mathematics* 54, pp 9-35.
- Wilson, R. (2001). *Stamping Through Mathematics* (pp. 16-17, 28-29, 76-77) Springer.

#### **ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΛΛΗΛΟΓΡΑΦΙΑΣ**

Χρυσάνθη Σκουμπούρδη, Λέκτορας, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Λεωφόρος Δημοκρατίας 1, 85 100, Ρόδος.

E-mail: kara@rhodes.aegean.gr