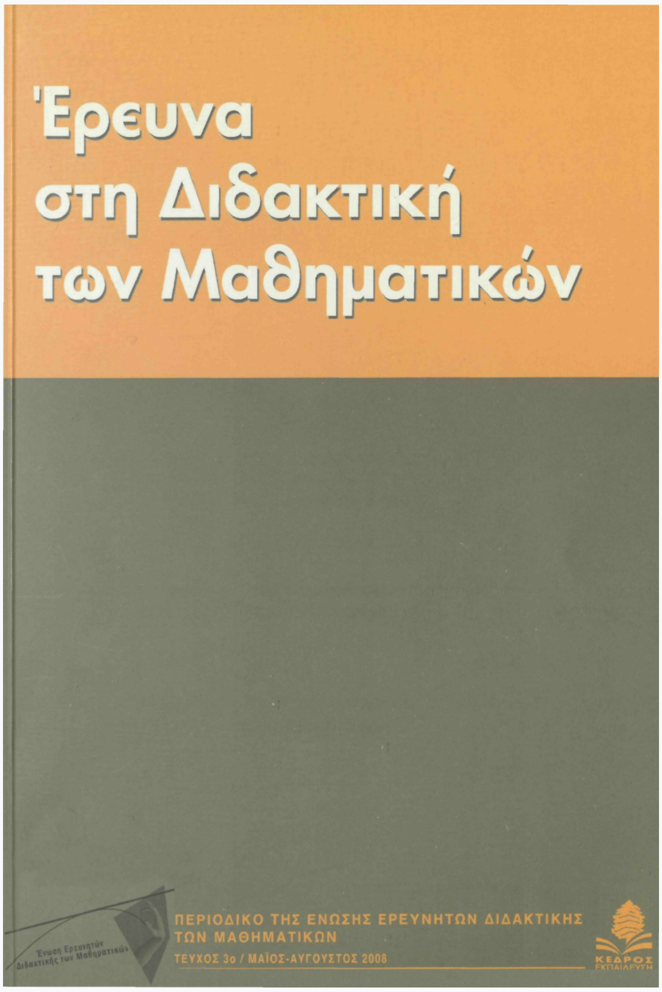
Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 3 (2008)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΟΙ ΝΟΕΡΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΕΡΒΑΣΗΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΔΕΚΑΔΑΣ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Α' ΚΑΙ Β ' ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Ιωάννης Καραντζής (Ioannis Karantzis)

doi: [10.12681/enedim.18816](https://doi.org/10.12681/enedim.18816)

Ο ΝΟΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΕΡΒΑΣΗΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΔΕΚΑΔΑΣ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Ιωάννης Δ. Καραντζής.*, Ειρήνη Ν. Βεγιάννη**
*Λέκτορας του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Πατρών
**Πτυχιούχος του Π.Τ.Δ.Ε. του Παν/μίου Πατρών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει σε ποιο βαθμό οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου χρησιμοποιούν το νοερό αριθμητικό υπολογισμό κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας και ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν. Παράλληλα να εντοπίσει αν παρατηρούνται διαφορές μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών στις διάφορες στρατηγικές. Στην έρευνα πήραν μέρος 98 μαθητές της Α΄ τάξης και 58 μαθητές της Β΄ τάξης από πέντε διαφορετικά δημοτικά σχολεία της Πάτρας, τα οποία επελέγησαν με τυχαίο τρόπο. Οι μαθητές πήραν μέρος σε τρία πειράματα και η εξέτασή τους ήταν ατομική. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές και των δύο τάξεων χρησιμοποιούν σε σημαντικό βαθμό ανακλητικές και κατασκευαστικές στρατηγικές, και η στρατηγική που επιλέγουν εξαρτάται από την κατηγορία στην οποία ανήκουν τα επιμέρους αθροίσματα.

Λέξεις κλειδιά: νοερός υπολογισμός, νοερές στρατηγικές, δημοτικό σχολείο

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ

Οι σύγχρονες αντιλήψεις σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών συγκλίνουν στην άποψη ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα σύστημα γνώσεων αλλά και μια διαδικασία σύλληψης, οργάνωσης και τεκμηρίωσης αυτών των γνώσεων (Schoenfeld, 1992˙ Van de Walle, 2005). Τις αντιλήψεις αυτές υιοθετεί το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, 2002) και πάνω σε αυτές στηρίχθηκε η συγγραφή των νέων διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών, τα οποία χρησιμοποιούνται για δεύτερη συνεχή χρονιά στο δημοτικό σχολείο.

Στο πλαίσιο αυτών των σύγχρονων αντιλήψεων, ο νοερός υπολογισμός αποτελεί μία από τις προτεραιότητες του νέου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών, σε αντίθεση με τα παλαιά βιβλία στα οποία δε δινόταν καθόλου σημασία στην ικανότητα των παιδιών να εκτελούν πράξεις από μνήμης (νοερούς υπολογισμούς) (Λεμονίδης, 2003, 2007). Επίσης, υιοθετείται η σύγχρονη άποψη της Διδακτικής των Μαθηματικών για την κατασκευαστική (constructivist) προσέγγιση (Von Glasersfeld, 1989˙ Van de Walle, 2005). Σύμφωνα με την κατασκευαστική οπτική, ο νοερός υπολογισμός είναι μια υψηλού επιπέδου νοητική διαδικασία, που θεωρεί ότι η δημιουργία μιας στρατηγικής είναι τόσο σημαντική όσο η εκτέλεσή της (Resnick, 1986˙ Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008, 21). Σύμφωνα με αυτή την άποψη, η ανάπτυξη των αριθμητικών ικανοτήτων των μαθητών επιτυγχάνεται με την προτροπή του δασκάλου στο να εκθέτουν τις άτυπες γνώσεις τους και στη συνέχεια να τις αξιοποιούν ανάλογα κατά τη διαδικασία επίλυσης νοερών προβλημάτων (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008, 21).

Η άποψη αυτή του νέου προγράμματος σπουδών των μαθηματικών για τη σημασία των νοερών υπολογισμών προβάλλεται και από την πρόταση του Εθνικού Συμβουλίου των Καθηγητών των Μαθηματικών (NCTM) στην Αμερική (Van de Walle, 2005) αλλά και από το πρόγραμμα National Numeracy Strategy, που εφαρμόστηκε στην Αγγλία το 1999 (Maclellan, 2001˙ Macintyre & Forrester, 2003).

Τι είναι όμως ο νοερός υπολογισμός, για τον οποίο γίνεται τόσος λόγος από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών; Λέγοντας νοερό αριθμητικό υπολογισμό εννοούμε τη διαδικασία εκείνη κατά την οποία το άτομο υπολογίζει με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μιας πράξης χωρίς τη βοήθεια εξωτερικού μέσου, π.χ. συγκεκριμένων αντικειμένων, μολυβιού και χαρτιού κτλ. (Maclellan, 2001, 145-146).

Οι νοεροί υπολογισμοί κατέχουν σημαντική θέση στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, γιατί, σύμφωνα με τα πορίσματα πολλών ερευνών, η ενασχόληση των μαθητών με νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς αυξάνει σε μεγαλύτερο βαθμό την κατανόηση της σημασίας του αριθμού, αναπτύσσει ικανότητες για τη λύση προβλημάτων και βοηθά στην κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών μεθόδων υπολογισμού (Thompson, 1999˙ Van de Walle, 2005). Επίσης, ενθαρρύνει τα παιδιά να χειρίζονται με ευελιξία τους αριθμούς και αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων υπολογισμού (Varol & Farran, 2007). Τέλος, οι Heirdsfield & Cooper (2004) τονίζουν ότι οι νοεροί υπολογισμοί βοηθούν τα παιδιά να κατανοήσουν πώς «δουλεύουν» οι αριθμοί και ποια είναι η δομή τους, καθώς και να επινοήσουν στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων αναπτύσσοντας ικανότητες για υποθέσεις και γενικεύσεις.

Αξίζει να σημειωθεί η τεράστια διαφορά που υπάρχει μεταξύ των νοερών υπολογισμών και των γραπτών αλγορίθμων. Ενώ η χρήση των γραπτών αλγορίθμων ενθαρρύνει τα παιδιά να ακολουθούν επιμέρους βήματα χωρίς να σκέφτονται τι και γιατί το κάνουν, οι νοεροί υπολογισμοί τούς επιτρέπουν να εμπλακούν στη διαδικασία έτσι ώστε να προσδιορίσουν τι ακριβώς σημαίνουν τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος (Maclellan, 2001˙ Varol & Farran, 2007). Έτσι, στόχος του κάθε δασκάλου είναι να βοηθήσει τους μαθητές του να αναπτύξουν δεξιότητες που θα τους οδηγήσουν στην υιοθέτηση των κατάλληλων στρατηγικών για το νοερό υπολογισμό των απλών αριθμητικών πράξεων (Leutzinger, 1999, 14-18). Αυτό θα επιτευχθεί μέσα από μια διαφορετική παρουσίαση των αριθμών με την ολιστική και την αθροιστική λογική (Λεμονίδης, 2007). Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στη θεωρία της ολιστικής-αναλυτικής θεώρησης της μάθησης (Peterson & Deary, 2006), που για την περίπτωση της παρουσίασης και κατανόησης των αριθμών δίνει έμφαση στην ανάλυση και σύνθεση των αριθμών σε αθροίσματα, όπως είναι τα διπλά αθροίσματα (π.χ. 2+2, 3+3, κτλ.) και η ανάλυση των αριθμών με βάση αρχικά το πέντε και μετά το δέκα (π.χ. 7=5+2, 12=10+2 κτλ.), η οποία υποστηρίζεται με τη χρήση κατάλληλου εποπτικού υλικού, όπως είναι το δίχρωμο αριθμητήριο (Λεμονίδης, 2003, 2007). Επιπροσθέτως, η προσπάθεια αυτή θα επιτευχθεί με την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία και τη σταδιακή μετάβασή τους από τη διαδικασία της άμεσης σχηματοποίησης, κατά την οποία αναπαριστάνουν με συγκεκριμένα αντικείμενα την πράξη, σε διαδικασίες νοερού υπολογισμού (Van de Walle, 2005). Η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής και ο χρόνος που απαιτείται για τη διαδικασία υπολογισμού νοερών πράξεων είναι δύο σημαντικές παράμετροι οι οποίες διαφοροποιούν τις επιδόσεις των παιδιών. Η επίτευξη της λύσης αυτών των ασκήσεων, στο πλαίσιο των γνωστικών θεωριών επεξεργασίας των πληροφοριών, μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους: με τη διαδικασία της *ελεγχόμενης επεξεργασίας* (controlled processing) ή με τη διαδικασία της *αυτόματης επεξεργασίας* (automatic processing) (Jensen & Whang, 1994, 1-2). Η διαδικασία της ελεγχόμενης επεξεργασίας (ενεργοποίηση της διαδικαστικής γνώσης) είναι μια γνωστική λειτουργία που απαιτεί προσοχή, νοερή προσπάθεια και χρόνο, γιατί είναι απαραίτητη η μεσολάβηση της εργαζόμενης μνήμης τόσο για τον έλεγχο των εισαγόμενων πληροφοριών όσο και για τον προσεκτικό έλεγχο της όλης διαδικασίας. Αντίθετα, η αυτόματη διαδικασία (ανάκληση δηλωτικής γνώσης) δεν απαιτεί μεγάλη προσπάθεια και χρόνο, γιατί το άτομο ανασύρει αυτόματα τις πληροφορίες από τη μακροπρόθεσμη μνήμη, αφήνοντας περιθώρια χωρητικότητας στην εργαζόμενη μνήμη για επεξεργασία άλλων πληροφοριών (Jensen & Whang, 1994˙ Logie, Gilhooly & Wynn, 1994). Η διαδικασία της ελεγχόμενης επεξεργασίας είναι μια δυναμική διαδικασία, εφόσον το άτομο, διαμέσου διαδικαστικών οδών αλλά και διαδικασιών εξαγωγής συμπερασμάτων, κατορθώνει να παράγει νέους τύπους γνώσης και δράσης και, κατά συνέπεια, να οδηγείται σε αυτοματοποίηση της διαδικασίας, δηλαδή απόκτηση δηλωτικής γνώσης (Κωσταρίδου-Ευκλείδη, 1992).

Στις στρατηγικές της ελεγχόμενης επεξεργασίας εντάσσεται αρχικά η απαρίθμηση όλων των αντικειμένων, μια διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής αντιστοιχίζει ένα προς ένα τα αντικείμενα ενός συνόλου με ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών (Χασάπης, 2000). Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική, τα παιδιά των πρώτων τάξεων του δημοτικού χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους ή άλλα αντικείμενα και, αφού απαριθμήσουν τα αντικείμενα που εκφράζουν τους δύο προσθετέους, αρχίζουν τη μέτρηση, από την αρχή, όλων των αντικειμένων. Στη συνέχεια, τα παιδιά προχωρούν σταδιακά στη διαδικασία της επαρίθμησης, όπου συγκρατούν στην εργαζόμενη μνήμη τους τον πρώτο προσθετέο ή το μεγαλύτερο προσθετέο και συνεχίζουν να μετρούν απαριθμώντας τα αντικείμενα του δεύτερου ή μικρότερου προσθετέου (Geary et al., 1991, 788-789˙ Leutzinger, 1999, 14-18).

Στην κατηγορία της ελεγχόμενης επεξεργασίας εντάσσονται οι παρακάτω ανακλητικές και κατασκευαστικές στρατηγικές: α) η στρατηγική της συμπλήρωσης του 10, ένας τρόπος νοερού υπολογισμού που προϋποθέτει καλή γνώση της ανάλυσης τόσο του 10 όσο και των άλλων αριθμών σε άθροισμα δύο προσθετέων (π.χ. 6+7 = 6+4+3), β) η στρατηγική των όμοιων προσθετέων (π.χ. 6+7 = 6+6+1 = 13 ή 7+7-1 = 13) και γ) άλλοι τρόποι υπολογισμού (π.χ. 7+6=13, γιατί αφού 7+5=12 τότε 7+6=13) (Thompson, 1995, 9-10˙ Leutzinger, 1999, 14-18˙ Λεμονίδης, 2003, 117-119).

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές έρευνες που αναδεικνύουν την ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν διεκπεραιώνουν νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς. Οι περισσότερες έρευνες έχουν εστιάσει στις στρατηγικές που επιλέγουν οι μαθητές στους νοερούς υπολογισμούς διψήφιων αριθμών στην πρόσθεση και αφαίρεση (Maclellan, 2001˙ Threlfall, 2002˙ Macintyre & Forrester, 2003˙ Heirdsfield & Cooper, 2004˙ Heirdsfield & Lamb, 2005˙ Varol & Farran, 2007˙ Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Ελάχιστες όμως έρευνες ασχολούνται με τους νοερούς υπολογισμούς μονοψήφιων αριθμών (Thompson, 1995, Leutzinger, 1999˙ Λεμονίδης, 2003, 2007˙ Καραντζής, 2007). Ο Λεμονίδης (2003, 2007) μελέτησε διαχρονικά τις στρατηγικές που επιλέγουν οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου χρησιμοποιώντας δύο ομάδες μαθητών με τις ίδιες προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες. Η ομάδα ελέγχου διδάχθηκε με την παραδοσιακή διδασκαλία που στηριζόταν στο παλαιό αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών (εισαγωγή από πολύ νωρίς των γραπτών αλγορίθμων των πράξεων και όχι μεγάλη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς), ενώ στην πειραματική ομάδα η διδασκαλία βασιζόταν στις αρχές του νέου προγράμματος (ΔΕΠΠΣ), όπου επιχειρείται μια ολιστική και αθροιστική λογική στην παρουσίαση των αριθμών. Τα αποτελέσματα αυτά των ερευνών έδειξαν ότι οι μαθητές της ομάδας ελέγχου ακολουθούσαν κυρίως μέχρι το τέλος της Β΄ τάξης στρατηγικές αρίθμησης, ενώ οι μαθητές της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιούσαν και στις δύο τάξεις κυρίως ανακλητικές και κατασκευαστικές στρατηγικές.

Ο Thompson (1995) σε μια έρευνά του που είχε σκοπό να διαπιστώσει τη διαφορετικότητα στις στρατηγικές των παιδιών, όταν δουλεύουν νοερά απλές μαθηματικές πράξεις, μελέτησε παιδιά προσχολικής ηλικίας και των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου. Τα αποτελέσματα αναφορικά με την πρόσθεση έδειξαν ότι τα παιδιά σταδιακά σημειώνουν πρόοδο στις στρατηγικές νοερού υπολογισμού, μετακινούμενα από τις στρατηγικές της αρίθμησης σε πιο προωθημένες, δηλαδή στις στρατηγικές των όμοιων προσθετέων και της συμπλήρωσης του δέκα. Επίσης, βρέθηκε ότι η στρατηγική των όμοιων προσθετέων χρησιμοποιήθηκε από αρκετά παιδιά, κυρίως σε αθροίσματα στα οποία οι προσθετέοι διέφεραν κατά μία μονάδα (π.χ. 5+6). Μια παρόμοια έρευνα, που πραγματοποιήθηκε από τον Καραντζή (2007), διερεύνησε το κατά πόσον οι μαθητές της Α΄ και Β΄ δημοτικού χρησιμοποιούν τη στρατηγική των όμοιων προσθετέων κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας χρησιμοποιώντας ως υλικό αθροίσματα που οι προσθετέοι τους διέφεραν κατά μία μονάδα. Τα αποτελέσματα έδειξαν (μεταξύ των άλλων) ότι η πλειοψηφία των μαθητών και των δύο τάξεων χρησιμοποιεί τη στρατηγική των όμοιων προσθετέων (Καραντζής, 2007). Το ερώτημα όμως που τίθεται είναι αν θα οδηγηθούμε στα ίδια αποτελέσματα όταν χρησιμοποιηθεί ως υλικό αθροίσματα μονοψήφιων αριθμών όλων των κατηγοριών.

Με βάση το πιο πάνω υπόβαθρο, τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας μελέτης ήταν:

α) Σε ποιο βαθμό οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου χρησιμοποιούν το νοερό αριθμητικό υπολογισμό κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας;

β) Ποια στρατηγική χρησιμοποιούν κάθε φορά και ποιες διαφορές παρατηρούνται μεταξύ των επιδόσεών τους στις διάφορες στρατηγικές;

γ) Σε ποιο βαθμό ανακαλούν άμεσα από τη μακροπρόθεσμη μνήμη τα διπλά αθροίσματα;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το Δείγμα

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε κατά το δυνατόν αντιπροσωπευτικότερο δείγμα, εξετάσαμε όλους τους μαθητές που φοιτούσαν στις δύο πρώτες τάξεις πέντε σχολείων της Πάτρας, τα οποία επιλέξαμε με τη μέθοδο της απλής τυχαίας δειγματοληψίας (Cohen & Manion, 1994). Τα ονόματα και οι αριθμοί όλων των σχολείων της Πάτρας μπήκαν σε κληρωτίδα, από την οποία ανασύρθηκαν στην τύχη πέντε σχολεία. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο τέλος του σχολικού έτους (3ο δεκαήμερο του Μαΐου 2008). Έτσι, σύμφωνα με τη μέθοδο της επιλογής των σχολείων με τυχαίο τρόπο, αλλά και της εξέτασης όλων των μαθητών που φοιτούσαν στις δύο πρώτες τάξεις αυτών των σχολείων, αναμένεται (με αυξημένη πιθανότητα) το δείγμα μας να περιλαμβάνει μαθητές με χαρακτηριστικά κατά το δυνατόν παρόμοια με αυτά του αντίστοιχου πληθυσμού (Cohen and Manion, 1994). Σημειώνεται ότι στα συγκεκριμένα σχολεία τα παιδιά που φοιτούσαν στην Α΄ τάξη ήταν περισσότερα από αυτά της Β΄ τάξης, και γι' αυτό το λόγο δεν έχουμε ίσο αριθμό μαθητών από κάθε τάξη. Συγκεκριμένα, συμμετείχαν στην έρευνα 156 μαθητές και από αυτούς 98 φοιτούσαν στην Α΄ τάξη (51 αγόρια και 47 κορίτσια) και 58 στη Β΄ τάξη (27 αγόρια και 31 κορίτσια).

Συλλογή δεδομένων

Στην παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκαν τρία πειράματα. Το πρώτο

πείραμα περιελάμβανε δέκα (10) σειρές ψηφίων (1-9) με στόχο τη συγκράτηση αυτών των πληροφοριών στην εργαζόμενη μνήμη και στη συνέχεια την άμεση ανάκλησή τους από αυτή. Ο απώτερος σκοπός αυτού του πειράματος (παρόλο που αυτό δεν εξυπηρετούσε ευθέως κάποιο από τα ερευνητικά ερωτήματα) ήταν ο έλεγχος της χωρητικότητας της εργαζόμενης μνήμης (Baddeley, 1995), ένας από τους σπουδαιότερους παράγοντες που επηρεάζουν τις επιδόσεις των μαθητών στο νοερό υπολογισμό. Έτσι, το αποτέλεσμα του πειράματος θα ήταν χρήσιμο προκειμένου να ερμηνεύσουμε με ασφαλέστερο τρόπο τις τυχόν διαφορές που δυνατό να προέκυπταν ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών των δύο τάξεων στο νοερό υπολογισμό των αθροισμάτων (τρίτο πείραμα). Ο λόγος για τον οποίο επιλέξαμε το ψηφιακό έργο και όχι κάποιο λεκτικό ή εικονικό ήταν για εξοικονόμηση χρόνου (τελείωνε το πείραμα σε λογικό χρόνο και έτσι δεν κουραζόταν ο μαθητής) αλλά και για το γεγονός ότι αυτό σχετιζόταν άμεσα με τα άλλα αριθμητικά έργα που θα ακολουθούσαν.
Το δεύτερο πείραμα πραγματοποιήθηκε με στόχο να αξιολογήσει την ικανότητα των μαθητών στην άμεση ανάκληση από τη μακροπρόθεσμη μνήμη αθροισμάτων των όμοιων προσθετέων και έτσι να απαντηθεί το τρίτο ερευνητικό ερώτημα. Το πείραμα αυτό, περιελάμβανε πέντε (5) ερωτήσεις υπολογισμού των παρακάτω αθροισμάτων: 5+5, 6+6, 7+7, 8+8, 9+9.
Τέλος, το τρίτο πείραμα περιείχε δεκατέσσερις (14) ερωτήσεις πρόσθεσης δύο μονοψήφιων αριθμών που το άθροισμά τους ξεπερνούσε την πρώτη δεκάδα. Στόχος του πειράματος αυτού ήταν να διαπιστωθεί αν οι μαθητές υπολόγιζαν σωστά τα αθροίσματα και ποια στρατηγική επέλεγαν κάθε φορά για τον υπολογισμό τους, και τέλος αν υπήρχαν διαφορές μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών στις διάφορες στρατηγικές. Τα αθροίσματα αυτά ήταν τα εξής: 5+6, 8+5, 7+5, 3+9, 8+6, 6+7, 7+8, 5+9, 9+8, 4+7, 6+9, 3+8, 4+9, 9+7.

Διαδικασία

Σ' όλα τα πειράματα η εξέταση των υποκειμένων ήταν ατομική. Ο ερευνητής καλούσε τους μαθητές έναν-ένα σε έναν ιδιαίτερο χώρο του σχολείου όπου επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας, έτσι ώστε να μην επηρεάζεται η όλη διαδικασία των πειραμάτων. Ο ερευνητής, ζητούσε από τον κάθε μαθητή ή την κάθε μαθήτρια προφορικά να συγκρατήσει προσωρινά στη μνήμη του/

της και στη συνέχεια να ανακαλέσει τη σειρά των ψηφίων ή να υπολογίσει κάποια αθροίσματα, και κατέγραφε τις επίσης προφορικές απαντήσεις του/της στο πρωτόκολλο της έρευνας. Σημειώνεται ότι η εξέταση και στα τρία πειράματα πραγματοποιούνταν σε μία συνάντηση που διαρκούσε περίπου 15-20 λεπτά. Η σειρά εκτέλεσης των πειραμάτων εναλλασσόταν από υποκείμενο σε υποκείμενο, ως μέτρο αντιστάθμισης στη διαδικασία των επαναληπτικών μετρήσεων (Cohen & Manion, 1994).

Ο μαθητής είχε μπροστά του είκοσι αντικείμενα (κυβάκια) και ο ερευνητής τον ενημέρωνε ότι μπορούσε να τα χρησιμοποιήσει κατά τη διαδικασία των υπολογισμών, αν το θεωρούσε σκόπιμο. Ο λόγος που μας οδήγησε στην προσφορά βοηθητικού υλικού (κυβάκια) για τον υπολογισμό των αθροισμάτων ήταν καθαρά ψυχολογικός. Δηλαδή, σε περίπτωση που αδυνατούσε ο μαθητής να υπολογίσει ένα συγκεκριμένο άθροισμα με νοερό τρόπο, να έχει την ευκαιρία να το πραγματοποιήσει με τη βοήθεια των αντικειμένων, και έτσι να μην αποθαρρύνεται για να συνεχίσει την εργασία του. Τέλος, οι επιδόσεις των μαθητών σε όλα τα κριτήρια μετατράπηκαν σε ποσοστά επί τοις εκατό.

Στο πρώτο πείραμα, σε κάθε υποκείμενο δόθηκαν δέκα (10) σειρές ψηφίων (1-9) με ακουστική παρουσίαση και με ρυθμό υπαγόρευσης από τον εξεταστή, ένα ψηφίο ανά δευτερόλεπτο. Κάθε παιδί ήταν υποχρεωμένο, αμέσως μετά την παρουσίαση της σειράς των ψηφίων, να τα επαναλάβει με την ίδια σειρά παρουσίασής τους (Καραντζής, 2007). Κάθε κατηγορία με τον ίδιο αριθμό ψηφίων περιελάμβανε δύο σειρές (δύο σειρές με τρία ψηφία, δύο με τέσσερα κ.ο.κ.). Το πείραμα άρχιζε με μία σειρά τριών ψηφίων και σταματούσε όταν το υποκείμενο αποτύγχανε να ανακαλέσει όλα τα ψηφία και στις δύο σειρές της ίδιας κατηγορίας αριθμού ψηφίων ή εξαντλούσε όλες τις σειρές των ψηφίων, που η μεγαλύτερη περιελάμβανε επτά (7) ψηφία. Πριν από την κανονική έναρξη του πειράματος γίνονταν μερικές δοκιμές, μέχρι που το κάθε υποκείμενο καθίστατο ικανό να ακολουθήσει τη διαδικασία του πειράματος χωρίς να κάνει λάθη. Πρέπει να σημειώσουμε ότι, προκειμένου ο ρυθμός παρουσίασης των ψηφίων να διατηρείται σταθερός σε όλους τους μαθητές, οι σειρές των ψηφίων είχαν καταγραφεί εκ των προτέρων σε μαγνητόφωνο. Τέλος, η επίδοση του κάθε μαθητή υπολογιζόταν ως εξής: (μέγιστο πλήθος σειρών που τα ψηφία ανακάλεσε / 10) x 100.

Στο δεύτερο και τρίτο πείραμα πραγματοποιούνταν μια μικρή συνέντευξη μεταξύ ερευνητή και μαθητή. Ο ερευνητής εκφωνούσε την ερώτηση: «Μπορείς να υπολογίσεις πόσο κάνει, π.χ., 7+8;». Ο μαθητής σκεφτόταν σιωπηλά και για όση ώρα ήθελε και στη συνέχεια απαντούσε. Αν ο μαθητής απαντούσε σωστά, ο ερευνητής τον ρωτούσε: «Πώς σκέφτηκες για να βρεις αυτό το αποτέλεσμα της πρόσθεσης;». Ο ερευνητής άκουγε προσεκτικά την απάντηση του μαθητή και, λαμβάνοντας υπόψη και την εν γένει συμπεριφορά του κατά την ώρα του νοερού υπολογισμού (μετρούσε ή όχι με τα δάχτυλά του ή με αντικείμενα), κατέγραφε τη στρατηγική που χρησιμοποίησε στο πρωτόκολλο (Λεμονίδης, 2003, 2006˙ Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Ένας άλλος τρόπος εξέτασης θα μπορούσε να ήταν η μέθοδος «think aloud». Δεν προτιμήσαμε όμως αυτή τη μέθοδο αφενός για να αφήσουμε το μαθητή να σκεφτεί σιωπηρά όσο χρόνο ήθελε, και αφού απαντήσει, να ερωτηθεί για τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε για να υπολογίσει το κάθε άθροισμα και αφετέρου για να μην παρεκκλίνει η μεθοδολογία μας από αυτή των προαναφερόμενων ερευνών, έτσι ώστε τα αποτελέσματά μας να είναι συγκρίσιμα.

Οι στρατηγικές που σημειώνονταν στο πρωτόκολλο του εξεταζόμενου ήταν σύμφωνα με προαναφερθείσες αναφορές (Χασάπης, 2000˙ Geary et al., 1991˙ Thompson, 1995˙ Leutzinger, 1999˙ Λεμονίδης, 2003, 2007): απαρίθμηση όλων των αντικειμένων, επαρίθμηση με ή χωρίς αντικείμενα, στρατηγική των όμοιων προσθετέων, στρατηγική της συμπλήρωσης του 10, άμεση ανάκληση του αποτελέσματος της πρόσθεσης και άλλος τρόπος υπολογισμού. Τέλος, η επίδοση του κάθε μαθητή υπολογιζόταν για την κάθε στρατηγική ως εξής: (πλήθος των σωστών απαντήσεων / 14) x 100.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στο δεύτερο πείραμα ο ερευνητής κατέγραφε μόνο τις σωστές απαντήσεις των μαθητών στο πρωτόκολλο αν αυτές ήταν αποτέλεσμα άμεσης ανάκλησης του αποτελέσματος από τη μακροπρόθεσμη μνήμη, γιατί άλλωστε αυτός ήταν και ο σκοπός του πειράματος. Έτσι, η επίδοση του κάθε μαθητή υπολογιζόταν ως εξής: (πλήθος των σωστών απαντήσεων με άμεση ανάκληση / 5) x 100.

Από τη μέθοδο της επιλογής του δείγματος και από την όλη διαδικασία που εφαρμόστηκε θεωρούμε ότι η παρούσα έρευνα συγκεντρώνει τα απαραίτητα στοιχεία αξιοπιστίας και εγκυρότητας.

Στατιστική ανάλυση των δεδομένων

Τα δεδομένα της έρευνας αναλύθηκαν με τη βοήθεια του στατιστικού προγράμματος SPSS v. 15. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίστηκαν ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση για τις επιδόσεις των μαθητών στους νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς, ο συντελεστής συνάφειας (r) μεταξύ των μεταβλητών «χωρητικότητα εργαζόμενης μνήμης» και «επίδοση στις προσθέσεις χωρίς τη βοήθεια αντικειμένων». Επίσης, πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος για την ύπαρξη στατιστικής σημαντικότητας μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών στις διάφορες στρατηγικές νοερού υπολογισμού μονοψήφιων προσθετέων με το κριτήριο t, γιατί το δείγμα μας ήταν τυχαίο και σχετικά ικανοποιητικού μεγέθους και οι μεταβλητές μας είναι ισοδιαστημικές (Κατσίλλης, 2006).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο πρώτο πείραμα οι μαθητές της Α΄ τάξης ανακάλεσαν άμεσα από την εργαζόμενη μνήμη, κατά μέσο όρο, το 49,90% των σειρών των ψηφίων (τυπική απόκλιση 14,2%), ενώ οι μαθητές της Β΄ τάξης το 45,52% (τυπική απόκλιση 15%). Από τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων αυτού του πειράματος με το κριτήριο t προκύπτει ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά, σε επίπεδο σημαντικότητας ($p<0,05$), ανάμεσα στις δύο τάξεις ως προς την ικανότητα των μαθητών να συγκρατούν στην εργαζόμενη μνήμη σειρές ψηφίων και στη συνέχεια να τις ανακαλούν. Συνεπώς, οι δύο ομάδες της έρευνάς μας ήταν εξισωμένες ως προς τον παράγοντα «χωρητικότητα της εργαζόμενης μνήμης», ένας παράγοντας που, σύμφωνα με πολλές έρευνες, επηρεάζει σημαντικά τη διαδικασία νοερού αριθμητικού υπολογισμού

(Baddeley, 1995˙ Πόρποδας 2003). Η άποψη αυτή ενισχύεται από τη στατιστικά σημαντική συσχέτιση που παρατηρείται ανάμεσα στις μεταβλητές «χωρητικότητα εργαζόμενης μνήμης» και «επίδοση στις προσθέσεις χωρίς τη βοήθεια αντικειμένων» και στις δύο τάξεις. Συγκεκριμένα, βρέθηκε για την Α΄ τάξη $r = 0{,}354$ με $p<0{,}01$ και για τη Β΄ τάξη $r = 0{,}560$ με $p<0{,}01$. Έτσι, εξισώνοντας τις ομάδες της παρούσας έρευνας ως προς τον παράγοντα αυτό της μνήμης, μας δίνεται η δυνατότητα να αξιολογήσουμε τις μαθηματικές γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών στην εκτέλεση νοερών υπολογισμών, αλλά και να καταγράψουμε τις στρατηγικές που επιλέγουν κρατώντας σταθερό τον παράγοντα «χωρητικότητα εργαζόμενης μνήμης».

Όσον αφορά το δεύτερο πείραμα οι μαθητές της Α΄ τάξης ανακαλούσαν άμεσα, κατά μέσο όρο, το 91,43% των αθροισμάτων των όμοιων προσθετέων (τυπική απόκλιση 17,7%), ενώ οι μαθητές της Β΄ τάξης το 98,62% (τυπική απόκλιση 8,3%). Εξετάζοντας τα αποτελέσματα του δεύτερου πειράματος, διαπιστώνεται ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των μαθητών και των δύο τάξεων στην πρόσθεση των όμοιων προσθετέων με άμεση ανάκληση των αποτελεσμάτων από τη μνήμη είναι αρκετά ικανοποιητικό. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στη σκέψη ότι οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου, στη συντριπτική τους πλειοψηφία, ανακαλούν άμεσα από τη μακρόχρονη μνήμη τους τα διπλά αθροίσματα (5+5, 6+6, 7+7 κτλ.). Το αποτέλεσμα αυτό ίσως να οφείλεται στη γλωσσική ιδιαιτερότητα που παρουσιάζουν τα αθροίσματα αυτής της κατηγορίας, και είναι σύμφωνο με τα ευρήματα των Leutzinger (1999) και Λεμονίδη (2003). Ένας άλλος λόγος που οι μαθητές ανακαλούν άμεσα τα διπλά αθροίσματα πιθανόν να είναι ότι τα παιδιά έρχονται αντιμέτωπα με τα διπλά αθροίσματα και τα αποτελέσματά τους σε καθημερινή βάση, λόγω των πολλαπλών ερεθισμάτων που λαμβάνουν από το περιβάλλον τους (π.χ. 5+5: που είναι τα δάχτυλα των δύο χεριών ή ποδιών, 4+4: που είναι τα πόδια μιας αράχνης, 7+7: που είναι οι ημέρες δύο εβδομάδων κτλ.) (Van de Walle, 2005).

Αναφορικά με τα αποτελέσματα του τρίτου πειράματος (Πίνακας 1), παρατηρούμε ότι η επίδοση των μαθητών και των δύο τάξεων στην πρόσθεση αριθμών κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας είναι πολύ ικανοποιητική, δηλαδή σχεδόν όλοι οι μαθητές βρίσκουν το σωστό αποτέλεσμα των πράξεων. Εκείνο όμως που αξίζει να διερευνηθεί είναι η επιλογή των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τη νοερή λύση αυτών των πράξεων. Έτσι, παρατηρούμε μια στατιστικώς σημαντική υπεροχή των μαθητών και των δύο τάξεων υπέρ των στρατηγικών του καθαρά νοερού υπολογισμού (επαρίθμηση χωρίς αντικείμενα και στρατηγικές ανακλητικής και κατασκευαστικής διαδικασίας) έναντι των στρατηγικών που στηρίζονται στη χρήση αντικειμένων (για την Α΄ τάξη $t_{97} = 2,46$, $p<0,02$ και για τη Β΄ τάξη $t_{57} = 6,21$, $p<0,000$).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΟΙ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΣΤΟ ΝΟΕΡΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΜΟΝΟΨΗΦΙΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ (Πείραμα 3)

Είδη στρατηγικών		Μέση απόδοση και τυπική απόκλιση (στην παρένθεση) % Τάξεις			
		Α		Β	
Με χρήση αντικειμένων	Απαρίθμηση	24,97 (33,9)	39,84 (39,63)	3,82 (18.5)	19,45 (37,46)
	Επαρίθμηση με αντικείμενα	14,87 (30,3)		15,64 (34,1)	
Στρατηγικές καθαρά νοερού υπολογισμού	Επαρίθμηση χωρίς αντικείμενα	17,42 (27,4)	59,54 (39,98)	21,43 (36,5)	80,53 (37,45)
	Στρατηγική των ομοίων προσθέτων	10,64 (12,9)		14,90 (17,6)	
	Στρατηγική συ-μπλήρωσης του 10	18,73 (28,3)		27,21 (31,2)	
	Άμεση ανάκληση αθροισμάτων	5,61 (13,6)		12,31 (21,1)	
	Άλλος τρόπος	7,14 (13,1)		4,68 (7,27)	

Αν τώρα εξετάσουμε τις στρατηγικές μόνο του καθαρά νοερού υπολογισμού, διαπιστώνουμε ότι και στις δύο τάξεις οι μαθητές χρησιμοποιούν σε σημαντικό βαθμό περισσότερο τις ανακλητικές και κατασκευαστικές διαδικασίες παρά τις αριθμητικές (επαρίθμηση χωρίς αντικείμενα). Οι τιμές του κριτηρίου t για την Α΄ τάξη είναι $t_{97} = 4{,}5$, $p<0{,}000$ και για τη Β΄ τάξη $t_{57}= 4{,}01$, $p<0{,}000$. Με δεδομένο ότι η διδασκαλία των μαθητών και των δύο τάξεων, από τον πρώτο χρόνο της φοίτησής τους, ακολούθησε τις βασικές αρχές του νέου προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές και των δύο τάξεων της παρούσας μελέτης αντιστοιχούν στην πειραματική ομάδα της διαχρονικής έρευνας του Λεμονίδη (2003, 2007). Με αυτό το σκεπτικό, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας συμφωνούν με αυτά της διαχρονικής έρευνας του Λεμονίδη (2003, 2007), ότι δηλαδή οι μαθητές της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιούσαν και στις δύο τάξεις κυρίως ανακλητικές και κατασκευαστικές στρατηγικές.

Από τα αποτελέσματα του δεύτερου και τρίτου πειράματος φαίνεται ότι οι μαθητές της Β΄ τάξης χρησιμοποιούν, σε σχέση με τους μαθητές της Α΄ τάξης, σε μεγαλύτερο βαθμό τις ανακλητικές και κατασκευαστικές διαδικασίες νοερών αριθμητικών υπολογισμών, οι οποίες θεωρούνται πολύ πιο προωθημένες, δηλαδή πιο αφηρημένες από ό,τι είναι οι αριθμητικές διαδικασίες ή οι διαδικασίες με τη χρήση αντικειμένων. Δεν είμαστε όμως σε θέση να καταλήξουμε σε ένα τέτοιο συμπέρασμα, για το γεγονός ότι η παρούσα έρευνα δεν είναι διαχρονική. Θα ήταν όμως ενδιαφέρον να σχεδιαστεί και να πραγματοποιηθεί μελλοντικά μία διαχρονική έρευνα με τη συμμετοχή ικανού αριθμού μαθητών, η οποία θα μελετά την πορεία ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στους νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς, στο χρονικό διάστημα της φοίτησής τους στις πρώτες τέσσερις τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Από τις στρατηγικές της διαδικασίας ανάκλησης φαίνεται ότι τόσο οι μαθητές της Α΄ τάξης όσο και της Β΄ τάξης χρησιμοποιούν περισσότερο τη στρατηγική της συμπλήρωσης του 10 στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν το άθροισμα δύο αριθμών κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας. Σε προηγούμενες έρευνες (Καραντζής, 2007˙ Thompson, 1995), βρέθηκε ότι σε αθροίσματα που οι προσθετέοι τους διαφέρουν κατά μία μονάδα οι μαθητές και των δύο τάξεων χρησιμοποιούν περισσότερο τη στρατηγική των όμοιων προσθετέων. Όμως στο τρίτο πείραμα της παρούσας έρευνας δόθηκαν στα παιδιά για υπολογισμό αθροίσματα όχι μόνο αυτής της κατηγορίας αλλά αθροίσματα σχεδόν όλων των δυνατών συνδυασμών, και μάλιστα με σειρά παρουσίασης η οποία ήταν ανεξάρτητη της κατηγορίας στην οποία ανήκαν τα παραπάνω αθροίσματα. Έτσι, στην παρούσα περίπτωση θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε αν χρησιμοποιείται η ίδια στρατηγική σε κάθε κατηγορία αθροισμάτων. Επίσης, για να υπάρξει δυνατότητα αναλυτικότερης επεξεργασίας και συγκριτικής μελέτης των δεδομένων σχετικά με τη στρατηγική που προτιμούν τα παιδιά αυτής της ηλικίας, κρίναμε σκόπιμο να χωρίσουμε τα αθροίσματα σε τρεις κατηγορίες: α) αθροίσματα που οι προσθετέοι τους διαφέρουν κατά μία μονάδα (5+6, 6+7, 7+8) β) αθροίσματα που ένας από τους δύο προσθετέους είναι ο αριθμός 9 (3+9, 5+9, 6+9, 4+9, 9+7, 9+8) και γ) όλα τα υπόλοιπα αθροίσματα (8+5, 7+5, 8+6, 4+7, 3+8).

Στον Πίνακα 2 δίδονται τα ποσοστά των μαθητών (%) που επέλεξαν την κάθε στρατηγική στο νοερό αριθμητικό υπολογισμό κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας, κατά τάξη και κατηγορία αθροισμάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: ΠΟΣΟΣΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ % ΚΑΤΑ ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΕΠΕΛΕΞΑΝ ΤΗΝ ΚΑΘΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΣΤΟ ΝΟΕΡΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΕΡΒΑΣΗΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΔΕΚΑΔΑΣ

Κατηγορίες αθροισμάτων	Τάξεις	**Ποσοστά των μαθητών % για κάθε στρατηγική νοερού αριθμητικού υπολογισμού**					
		Υπολογισμός με αντικείμενα	Επαρίθμηση χωρίς αντικείμενα	Ομοίων προσθετέων	Συμπλήρωση του 10	Άμεση ανάκληση	Άλλος τρόπος
Προσθετέοι με διαφορά μιας μονάδας	Α΄	37,4	10,9	**33**	6,8	6,8	5,1
	Β΄	16	16,1	**40,8**	10,9	12,1	4
Αθροίσματα με το 9	Α΄	42	19,1	3,1	**24,2**	4,7	6,8
	Β΄	20,1	24,2	4,6	**36,5**	11,2	3,4
Υπόλοιπα αθροίσματα	Α΄	40,4	19,2	6,1	**19,4**	6,1	8,8
	Β΄	20,7	21,4	11,7	**25,9**	13,8	6,5

Στην κατηγορία των αθροισμάτων που οι προσθετέοι τους διαφέρουν κατά μία μονάδα, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών και των δύο τάξεων που κάνει χρήση των στρατηγικών του καθαρά νοερού υπολογισμού (χωρίς τη χρήση αντικειμένων), χρησιμοποιεί τη στρατηγική των όμοιων προσθετέων. Τα αποτελέσματα αυτά επαληθεύουν τις έρευνες των Καραντζή (2007) και Thompson (1995) και θα μπορούσαν να δικαιολογηθούν από το γεγονός ότι, επειδή οι προσθετέοι των αθροισμάτων αυτών διαφέρουν μόνο κατά μία μονάδα, οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται ευκολότερα αυτή τη σχέση των αριθμών και επιλέγουν τη στρατηγική των όμοιων προσθετέων.

Στις άλλες δύο κατηγορίες αθροισμάτων, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών και των δύο τάξεων που κάνει χρήση των στρατηγικών του καθαρά νοερού υπολογισμού χρησιμοποιεί τη στρατηγική της συμπλήρωσης του 10. Τη στρατηγική αυτή την επιλέγουν περισσότεροι μαθητές στα αθροίσματα των οποίων ο ένας προσθετέος είναι το 9. Σε κάθε περίπτωση, αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να σχολιαστεί από το γεγονός ότι οι μαθητές επιλέγουν τη στρατηγική της συμπλήρωσης του 10 γιατί, ξεκινώντας τον υπολογισμό από τον πρώτο προσθετέο, που είναι το 9 ή το 8 ή το 7, πολύ εύκολα προσθέτουν μία ή δύο ή τρεις μονάδες, αντίστοιχα, για να συμπληρώσουν την πρώτη δεκάδα και στη συνέχεια, προσθέτοντας τις υπόλοιπες μονάδες που απομένουν, ολοκληρώνουν νοερά τον υπολογισμό τους. Τέλος, τα αποτελέσματα ενισχύουν τα ευρήματα προηγούμενων ερευνητών (Beishuitzen, 1993˙ Λεμονίδη, 2003˙ Λεμονίδη & Λυγούρα, 2008), οι οποίοι παρατήρησαν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν ικανότητες να εναλλάσσουν τις στρατηγικές τους ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα της κάθε νοερής άσκησης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι πιο σημαντικές διαπιστώσεις από τα ευρήματα των πειραμάτων της παρούσας μελέτης είναι οι ακόλουθες:
Από το πρώτο πείραμα διαπιστώσαμε ότι οι δύο ομάδες της έρευνάς μας (μαθητές της Α΄ και Β΄ τάξης) ήταν εξισωμένες ως προς τον παράγοντα

«χωρητικότητα της εργαζόμενης μνήμης», ένας παράγοντας που, όπως προαναφέραμε, επηρεάζει σημαντικά τη διαδικασία του νοερού αριθμητικού υπολογισμού (Baddeley, 1995˙ Πόρποδας 2003). Έτσι, μας δόθηκε η δυνατότητα να μελετήσουμε κάτω από τις ίδιες προϋποθέσεις, όσον αφορά τη χωρητικότητα της μνήμης, τις επιδόσεις των μαθητών και των δύο τάξεων ως προς τις στρατηγικές που επιλέγουν προκειμένου για να εκτελέσουν με επιτυχία τους νοερούς υπολογισμούς.

Τα αποτελέσματα του δεύτερου πειράματος έδειξαν ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών και των δύο τάξεων ήταν σε θέση να ανακαλεί τα διπλά αθροίσματα από τη μακροπρόθεσμη μνήμη άμεσα και με μεγάλη ευκολία. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται να οφείλεται τόσο στη γλωσσική ιδιαιτερότητα που παρουσιάζουν τα αθροίσματα αυτής της κατηγορίας (Leutzinger, 1999˙ Λεμονίδης, 2003) όσο και στην εμπειρία που αποκτούν τα παιδιά εξαιτίας των πολλαπλών ερεθισμάτων που λαμβάνουν από το πολιτισμικό τους περιβάλλον (Van de Walle, 2005).

Από την πρώτη εξέταση των αποτελεσμάτων του τρίτου πειράματος διαπιστώθηκε ότι το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών και των δύο τάξεων στην πρόσθεση διαφόρων μονοψήφιων αριθμών κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας είναι ικανοποιητικό. Επίσης, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές και των δύο τάξεων είχαν καλύτερα αποτελέσματα στις στρατηγικές του καθαρά νοερού υπολογισμού (επαρίθμηση χωρίς αντικείμενα και στις στρατηγικές ανακλητικής και κατασκευαστικής διαδικασίας) παρά στις στρατηγικές με τη χρήση αντικειμένων. Τέλος, από τις στρατηγικές του καθαρά νοερού υπολογισμού οι μαθητές και των δύο τάξεων σημειώνουν ψηλότερες επιδόσεις στις ανακλητικές και κατασκευαστικές διαδικασίες παρά στις αριθμητικές (επαρίθμηση χωρίς αντικείμενα).

Αναφορικά με τη στρατηγική υπολογισμού που επιλέγουν, αυτή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την κατηγορία στην οποία ανήκουν τα επιμέρους αθροίσματα. Πιο συγκεκριμένα, στην κατηγορία των αθροισμάτων που οι προσθετέοι τους διαφέρουν κατά μία μονάδα φαίνεται ότι από τις στρατηγικές

του καθαρά νοερού αριθμητικού υπολογισμού οι μαθητές και των δύο τάξεων προτιμούν, στην πλειοψηφία τους, τη στρατηγική των όμοιων προσθετέων. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι, επειδή οι προσθετέοι των αθροισμάτων αυτών διαφέρουν μόνο κατά μία μονάδα, φαίνεται ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται ευκολότερα αυτή τη σχέση των προσθετέων και επιλέγουν τη συγκεκριμένη στρατηγική με δεδομένο το γεγονός ότι έχουν αναπτύξει σε πολύ μεγάλο βαθμό τη δεξιότητα να ανακαλούν άμεσα από τη μακροπρόθεσμη μνήμη τους τα όμοια αθροίσματα.
Όσον αφορά τις άλλες δύο κατηγορίες αθροισμάτων, δηλαδή αυτά που ο ένας από τους δύο προσθετέους είναι οι αριθμοί 9 ή 8 ή 7, φαίνεται ότι από τις στρατηγικές του καθαρά νοερού αριθμητικού υπολογισμού οι μαθητές και των δύο τάξεων προτιμούν περισσότερο τη στρατηγική της συμπλήρωσης του 10, για τους λόγους που προαναφέραμε, και μάλιστα σε μεγαλύτερο βαθμό όταν ένας από τους προσθετέους είναι το 9 παρά αν είναι το 8 ή το 7.

Η απόκτηση ευχέρειας και ευελιξίας των μαθητών στο νοερό υπολογισμό διαφόρων αθροισμάτων πρέπει να αποτελέσει καθημερινό στόχο του σχολείου (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Ο στόχος αυτός επιτυγχάνεται με την ενεργό συμμετοχή των μαθητών σε δραστηριότητες που βοηθούν στην ανάπτυξη των γνώσεων γύρω από τους αριθμούς, έτσι ώστε τα παιδιά να είναι σε θέση να προβούν σε μια σειρά παρατηρήσεων για τους αριθμούς όταν πρέπει να εκτελέσουν ένα νοερό υπολογισμό. Τέτοιες δραστηριότητες που δίνουν την ευκαιρία στα παιδιά να αλληλεπιδράσουν με τους ενηλίκους ή με τους συμμαθητές τους μέσω εργασιών πάνω σε μοτίβα ή μέσω παιχνιδιών και άλλων δραστηριοτήτων (Threlfall, 2002) προτείνονται και από τα νέα βιβλία των μαθηματικών των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου.

Με βάση τα αποτελέσματα μακροχρόνιων ερευνών, τα οποία έγιναν στον ελλαδικό και διεθνή χώρο, φάνηκε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών που στηρίζεται στις νέες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, αντιλήψεις που τις υιοθετεί το ΔΕΠΠΣ, βοήθησε σημαντικά να βελτιωθούν οι επιδόσεις των μαθητών και στο νοερό αριθμητικό υπολογισμό.
Έτσι, αναμένεται, προσεχώς, ότι θα προκύψουν καλύτερα αποτελέσματα στη

μάθηση των μικρών μαθητών αν οι εκπαιδευτικοί γνωρίσουν περισσότερο τις νέες προσεγγίσεις που υιοθετούν τα διδακτικά βιβλία και κατανοήσουν τη σπουδαιότητα που έχει η διδασκαλία των βασικών αθροισμάτων (π.χ. άνετος χειρισμός νοερών πράξεων μέσα στην πρώτη εικοσάδα) στην επιτυχή μάθηση των μαθηματικών (Leutzinger, 1999). Ειδικότερα, για να υπάρξουν θετικά αποτελέσματα από τη διδασκαλία των μαθηματικών, οι εκπαιδευτικοί πρέπει: α) να προτρέπουν τους μαθητές τους να συμμετέχουν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία (Πόρποδας, 2003) εμπλεκόμενοι με ομαδικές δραστηριότητες που τους προκαλούν το ενδιαφέρον και είναι βιωματικές, β) να ασκούν τους μαθητές στην ανάλυση και σύνθεση των αριθμών σε αθροίσματα (Λεμονίδης, 2007), γ) να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να εκφράζουν ελεύθερα τις απόψεις τους (πλουραλισμός ιδεών και απόψεων) (Van de Walle, 2005) και δ) να τους προτρέπουν να ανακοινώνουν στην τάξη τους τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν, γεγονός που θα τους βοηθήσει να αναπτύξουν μεταγνωστικές δεξιότητες και κριτική σκέψη.

ABSTRACT

The purpose of the present study was to investigate primarily whether first grade and second grade students have acquired mental calculation capabilities needed in the process of over passing the first ten numbers and the type of strategies they use. At the same time, the study investigated whether there were any significant differences in the performance of students in terms of preferred strategies. Data were collected from 98 first grade students and 58 second grade students from five randomly selected public elementary schools of the city of Patras. The students participated in three experiments and were tested individually. Results showed that students in both grades employed recall strategies and construction strategies; more specifically, the choice of strategy was found to depend on the type of intermediate sums in the calculation process. In general the findings of the present study seem to confirm the results of earlier studies conducted in Greece or in other countries.

Key words: mental calculations, mental strategies, elementary school

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Baddeley, A. (1995). *Human Memory: Theory and Practice.* London: L.E.A.P.

Beishuitzen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for research in Mathematics Education, 24*(4), 294-323.

Cohen, L. & Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας* (μτφρ). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Geary, D., Brown, S., Samaranayake, V. (1991). Cognitive addition: A short longitudinal study of strategy choice and speed-of-processing differences in normal and mathematically disabled children. *Developmental Psychology, 27*(5), 787-797.

Heirdsfield, A. & Cooper, T. (2004). Inaccurate Mental addition and subtraction: Causes and Compensation. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 43-65.

Heirdsfield, A. & Lamb, J. (2005). Mental Computation: The Benefits of Informed Teacher Instruction. In Clarkson, et al. (Eds), *Proceedings MERGA 28 - 2005 Building connections: Theory, research and practice 2* (pp. 419-426). Melbourne.

Jensen, A. & Whang, P. (1994). Speed of accessing arithmetic facts in long-term memory: A comparison of Chinese-American and Anglo-American children. *Contemporary Educational Psychology, 19*, 1-12.

Καραντζής, Ι. (2007). Η στρατηγική των όμοιων προσθετέων στο νοερό υπολογισμό κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας. Πρακτικά 2ου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ, *Τυπικά και άτυπα μαθηματικά: χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιδράσεις, στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης* (σσ. 304-314). Αθήνα: Τυπωθήτω –Γ. Δαρδανός.

Κατσίλλης, Ι. (2006). *Επαγωγική στατιστική.* Αθήνα: Gutenberg.

Κωσταρίδου–Ευκλείδη, Α. (1992). *Γνωστική Ψυχολογία.* Θεσσαλονίκη: Art of Text.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.* Αθήνα: Πατάκης.

Λεμονίδης, Χ. (2007). Μακροχρόνια μελέτη στην ανάπτυξη των νοερών υπολογισμών στις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. *Αναζήτηση από το www.google.gr με τον όρο «νοερός υπολογισμός».* Τελευταία προσπέλαση 2-2-2007.

Λεμονίδης, Χ. & Λυγούρας, Γ. (2008). Η επίδοση και η ευελιξία μαθητών της τρίτης τάξης δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. *Ευκλείδης Γ, 68*, 20-44.

Leutzinger, L. (1999). Developing thinking strategies for addition facts. *Teaching children mathematics, 6*(1), 14-18.

Logie, R., Gilhooly, K. and Wynn, V. (1994). Counting on working memory in arithmetic problem solving. *Memory and Cognition, 22*(4), 395-410.

Macintyre, T. & Forrester, R. (2003). Strategies for mental calculation. In Williams, J. (Ed.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23*(2), 49-54.

Maclellan, E. (2001). Mental Calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education, 24*(2), 145-154.

Peterson E. R & Deary I. J. (2006). Examining holistic–analytic style using preferences in early information processing. *Personality and Individual Differences, 41*, 3–14

Πόρποδας, Κ. (2003). *Η μάθηση και οι δυσκολίες της (Γνωστική προσέγγιση)*. Πάτρα: Αυτοέκδοση.

Rensick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (*19*, pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 334-370).New York: Macmillan.

Thompson, I. (1995). The role of counting in the idiosyncratic mental calculation algorithms of young children. *European early Childhood Education Research Journal, 3*(1), 5–16.

Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. In Thompson I (ed), *Issue teaching numeracy in primary schools* (pp. 169-183). Buckingham: Open University Press.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*(1), 29–47.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών* (τ. 1). Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Van de Walle, J. A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία* (μτφρ). Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δαρδανός.

Varol, F. & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal, 35*(1), 89-94.

Von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, construction of knowledge and teaching. *Synthese, 80*, 121-140.

Χασάπης, Δ. (2000). *Διδακτική βασικών Μαθηματικών Εννοιών – Αριθμοί και Αριθμητικές Πράξεις*. Αθήνα: Μεταίχμιο.