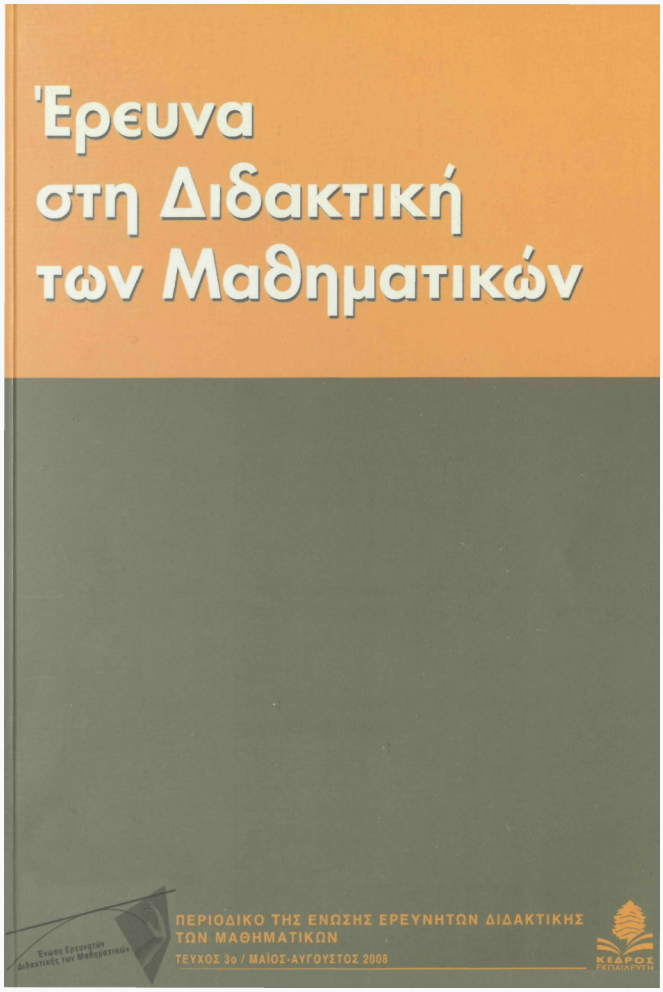
ePublishing

ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Research in Mathematics Education

No 3 (2008)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



THE REPRESENTATION OF NUMBER LINE IN OF MATHEMATICS IN PRIMARY EDUCATION

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή (Chrysanthi Skoumpurdi)

doi: 10.12681/enedim.18818

Copyright © 2018, Χρυσάνθη Σκουμπουρδή (Chrysanthi Skoumpurdi)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0.

To cite this article:

Σκουμπουρδή (Chrysanthi Skoumpurdi) Χ. (2018). THE REPRESENTATION OF NUMBER LINE IN OF MATHEMATICS IN PRIMARY EDUCATION. *Research in Mathematics Education*, (3), 67–87. https://doi.org/10.12681/enedim.18818

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 19/12/2025 07:47:49

Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή πραγματοποιείται καταγραφή των αναπαραστάσεων της αριθμογραμμής από τα σχολικά εγχειρίδια (βιβλίο μαθητή και τετράδια εργασιών) των μαθηματικών όλων των τάξεων του Δημοτικού Σχολείου με σκοπό τη διερεύνηση ύπαρξης των επιπέδων του σχήματος της αναπτυξιακής έρευνας της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Ο ρόλος της αριθμογραμμής στον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών διαδικασιών και οι στρατηγικές υπολογισμού που αναδύονται από την εικόνα της αποτελούν επιμέρους στόχους.

Από τα αποτελέσματα της διερεύνησης φάνηκε ότι ενώ παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια διαφορετικές αναπαραστάσεις της αριθμογραμμής που επιτελούν ποικίλες λειτουργίες καθώς και πληθώρα στρατηγικών για διαφορετικές μαθηματικές διαδικασίες, αυτό δε γίνεται εξελικτικά σύμφωνα με τα επίπεδα που προτείνει το σχήμα της αναπτυξιακής έρευνας της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Λέξεις-κλειδιά: αναπαράσταση, αριθμογραμμή, σχολικό εγχειρίδιο μαθηματικών, επίπεδα χρήσης της αριθμογραμμής, λειτουργίες της αναπαράστασης της αριθμογραμμής (βασική, βοηθητική, αναφοράς, συνοδευτική), στρατηγικές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια οι έρευνες για τα μαθηματικά δίνουν έμφαση στο σημαντικό ρόλο που παίζει ο συμβολισμός και η μοντελοποίηση στην κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης (Van Oers, 2002: 30). Η πολυπλοκότητα της μαθηματικής γλώσσας καθώς και η αφηρημένη φύση της επιστήμης κάνει δύσκολη την περιγραφή των μαθηματικών εννοιών και ιδεών ως έχουν. Η προσέγγισή τους γίνεται μέσω αναπαραστάσεων οι οποίες αποτελούν το εργαλείο με το οποίο επιτυγχάνεται ο συλλογισμός και η επικοινωνία επιτρέποντας στο άτομο να εξωτερικεύσει και να τυποποιήσει τις μαθηματικές του ιδέες (Kilpatrick et al., 2001: 94). Μέσω των αναπαραστάσεων κατανοούνται ευκολότερα τα μαθηματικά εφόσον μειώνονται οι απαιτήσεις για υποκειμενική ερμηνεία (Blinko, 2004).

Οι αναπαραστάσεις κατέχουν σημαντική θέση στα σχολικά εγχειρίδια τα οποία με τη σειρά τους αποτελούν συχνά το αποκλειστικό μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο (Fan & Zhu, 2007· Κολέζα, 2006· Li, 2000· Newton & Newton, 2006). Μέσα στα σχολικά εγχειρίδια, η χρήση πολλών μορφών της ίδιας αναπαράστασης καθώς και η χρήση της ίδιας μορφής με πολλούς διαφορετικούς τρόπους επηρεάζει τη διδασκαλία και τη μάθηση και έμμεσα την ικανότητα των μαθητών στη λύση προβλήματος. Μια αναπαράσταση κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος αφενός συμβάλλει στην πληρέστερη κατανόηση του προβλήματος και αφετέρου αποτυπώνει τα ενδιάμεσα βήματα του λύτη μέσα από μια συνοπτική παρουσίαση της πληροφορίας διευκολύνοντας έτσι διαδικασίες ελέγχου και επαλήθευσης (Κολέζα, 2000: 111). Ένα τέτοιο είδος αναπαράστασης είναι και η αριθμογραμμή.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο ρόλος της αριθμογραμμής είναι πολύ σημαντικός τόσο σε σχέση με τη δυνατότητα που προσφέρει στην οργάνωση της σκέψης για τους αριθμούς και

τις θέσεις τους όσο και στη μέτρηση ποσοτήτων και μεγεθών διευκολύνοντας το συλλογισμό και τη λύση και οδηγώντας στην ανάδυση απλών και σύνθετων στρατηγικών. Μέσω της μονής, διπλής, κάθετης, συμπληρωμένης ή ημι-συμπληρωμένης αριθμογραμμής γίνεται αναπαράσταση των αριθμών και των τεσσάρων πράξεων (Chazan & Ball, 1999· Kilpatrick et al., 2001· Wiegel, 1998), του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης (Elia & Gagatsis, 2003· Fuys & Liebov, 1993) και ως αναλογίας (Wallace & Gurganus, 2005). Επίσης, η αναπαράσταση της αριθμογραμμής, χρησιμοποιείται για την καταγραφή των εκτιμήσεων των μαθητών (Onslow et al., 2005), για τη μέτρηση του μήκους (Gravemeijer & Stephan, 2002) και του χρόνου (Moone & Groot, 2005· Warfield, 2001), για την καταγραφή της χρονικής σειράς γεγονότων (Kastberg, 2005) καθώς και για την ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος (Χαραλάμπους & Πίττα-Πανταζή, 2005).

Στις παραπάνω περιπτώσεις η αριθμογραμμή μπορεί να είναι δομημένη ή ημι-δομημένη και να μοντελοποιεί, εκ των προτέρων, τη μαθηματική έννοια ή διαδικασία. Εντούτοις προτείνεται και ένα άλλο είδος της, αυτό της κενής αριθμογραμμής, το οποίο δίνει την ελευθερία στο/η μαθητή/ρια να τη διαχειριστεί με το δικό του τρόπο και να μοντελοποιήσει το συλλογισμό ή την απάντησή του με όποιο τρόπο θέλει. Αυτό μπορεί να γίνει είτε μέσω των σημειώσεων που μπορεί ο/η μαθητής/ρια να κρατήσει (Thompson, 2004) είτε μέσω της παρουσίασης των στρατηγικών λύσης του (Fosnot & Dolk, 2001) πάνω στην κενή αριθμογραμμή.

Όμως η αριθμογραμμή δεν είναι μια εύκολη αναπαράσταση για τα παιδιά. Ο ρόλος της αριθμογραμμής στη μέτρηση μεγεθών και οι δυσκολίες που προκύπτουν αναδεικνύονται από έρευνα του Kilpatrick και των συνεργατών του (2001). Οι συγκεκριμένοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι όταν δόθηκε στα μικρά παιδιά ένα εργαλείο μέτρησης όπως ο χάρακας, πολύ λίγα κατανόησαν ότι κάθε σημείο στην κλίμακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία. Ακόμα και μεγαλύτερα παιδιά (Ε΄ τάξης) όταν χρησιμοποίησαν το χάρακα για να μετρήσουν απάντησαν διαβάζοντας απλά τον αριθμό, πάνω στο χάρακα, που αντιστοιχεί στην άλλη άκρη του αντικειμένου χωρίς να προσέξουν αν

η αρχή του αντιστοιχεί στον αριθμό μηδέν. Αυτές οι δυσκολίες που είχαν οι μαθητές στη μέτρηση του μήκους οφείλονταν, κατά τους ερευνητές, στη μη αναγνώριση των διαφορετικών όψεων της αριθμογραμμής.

Άλλοι ερευνητές αναφέρουν τις δυσκολίες των παιδιών στην αναπαράσταση των κλασμάτων, ως αριθμών, πάνω στην αριθμογραμμή (Marshall, 1993· Streefland, 1993) και τη δυσκολία επέκτασης των φυσικών αριθμών για την εισαγωγή των αρνητικών (Τζεκάκη, 2007). Επίσης, υπάρχει ο κίνδυνος ταύτισης μιας μαθηματικής έννοιας με την αναπαράσταση της αριθμογραμμής όταν οι μαθητές είναι ικανοί να επιτύχουν σε ένα έργο που αφορά σε πρόσθεση ή αφαίρεση με τη χρήση της και δεν είναι σε θέση να το επιτύχουν σε ένα άλλο πεδίο αναπαράστασης (Γαγάτσης, κ.σ., 2003). Τέλος, αναφέρεται και η δυσκολία μετάβασης στο νοερό υπολογισμό από την παρατεταμένη χρήση της αριθμογραμμής (Μπούφη, 1996).

Για να μπορούν όμως τα παιδιά να ξεπεράσουν τις δυσκολίες και να ωφεληθούν από την αριθμογραμμή, προτείνεται ο σχεδιασμός συστηματικής διδασκαλίας που να υποστηρίζει αφενός την εξοικείωσή τους με τις διάφορες 'όψεις' της και αφετέρου την εξελικτική χρήση της. Παράδειγμα αποτελεί ένα διδακτικό πείραμα στην Αγγλία (Dickinson & Eade, 2004) όπου χρησιμοποιήθηκε η αναπαράσταση της αριθμογραμμής ως βοήθημα για την αντιμετώπιση δυσκολιών εντεκάχρονων μαθητών κατά τη λύση γραμμικών εξισώσεων. Φάνηκε ότι μετά τη σχετική διδασκαλία οι περισσότεροι από τους μισούς μαθητές χρησιμοποίησαν την αριθμογραμμή για να βοηθηθούν κατά τη λύση εξίσωσης. Επίσης, θεωρήθηκε ότι η εξοικείωση των μαθητών με την αναπαράσταση της αριθμογραμμής οδήγησε στην εύκολη αναγνώριση των διαφορετικών μορφών της ίδιας εξίσωσης.

Άλλο παράδειγμα διδασκαλίας με χρήση αριθμογραμμής αποτελεί αυτό των Fosnot και Dolk (2001) που πραγματοποιήθηκε στις ΗΠΑ και συγκεκριμένα στη Νέα Υόρκη. Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν την κενή αριθμογραμμή ως μέσο για την αναπαράσταση των στρατηγικών που προέκυπταν από το συλλογισμό των μαθητών όταν έλυναν προβλήματα χειριζόμενοι

συγκεκριμένο εκπαιδευτικό υλικό (για παράδειγμα, τον πίνακα 10x10). Με αυτό τον τρόπο θεώρησαν ότι βοήθησαν τους μαθητές να περάσουν από τη χρήση ενός εργαλείου-μοντέλου του συλλογισμού τους- σε ένα πιο τυπικό μαθηματικό μοντέλο για το συλλογισμό τους- την αριθμογραμμή.

Η μόνη συστηματική προσπάθεια που έχει γίνει μέχρι σήμερα για τη διερεύνηση του ρόλου της αριθμογραμμής στη διδασκαλία/μάθηση των μαθηματικών προέρχεται από την Ολλανδία. Μέσω της αναπτυξιακής έρευνας της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Gravemeijer & Doorman, 1999- Gravemeijer & Stephan, 2002: 149) προτείνεται η εξελικτική χρήση της η οποία αναπτύσσεται σε τέσσερα επίπεδα τόσο οριζόντια, στο επίπεδο μίας τάξης, όσο και κατακόρυφα σε διαφορετικές τάξεις. Συγκεκριμένα, στο πρώτο επίπεδο, ο/η μαθητής/ρια ξεκινάει από τη μοντελοποίηση των ενεργειών του οι οποίες βασίζονται στην προβληματική κατάσταση που εισάγει το σενάριο. Στο δεύτερο επίπεδο, η δράση του/ης στην αριθμογραμμή τον/ην οδηγεί στη λύση του προβλήματος και στην από-πλαισίωσή του. Έτσι, λαμβάνει χώρα μετάβαση από τη χρήση της αριθμογραμμής ως μοντέλο της (model of) άτυπης δραστηριότητας του/ης μαθητή/ριας, στη χρήση της ως μοντέλο για (model for) τυπικό μαθηματικό συλλογισμό. Λόγω του ότι η συμπληρωμένη αριθμογραμμή φαίνεται να οδηγεί στη χρήση πολύ απλών στρατηγικών όπως η 'αρίθμηση ανά ένα', στο τρίτο επίπεδο προτείνεται η χρήση της κενής αριθμογραμμής προκειμένου να αναδυθούν πιο προχωρημένες στρατηγικές από τους μαθητές (όπως 'μέτρηση ανά 10', 'τοποθέτηση αριθμών σε σχέση με άλλους', 'ανέβασμα/κατέβασμα κατά 10', 'μετακίνηση στον επόμενο/προηγούμενο φιλικό αριθμό' κ.λ.π. δες Menne, 2001: 98) εφόσον, στην περίπτωση αυτή, καλείται ο ίδιος ο/η μαθητής/ρια να συμπληρώσει τους αριθμούς που χρειάζεται κάθε φορά. Έτσι, από ένα μέσο το οποίο χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια συλλογιστική γίνεται ένα μέσο το οποίο υποστηρίζει την πραγματοποίηση διαφόρων μεθόδων υπολογισμού με το να προσφέρει ένα τρόπο υποστήριξης τόσο των ενδιάμεσων υπολογισμών όσο και των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων. Τέλος, στο τέταρτο επίπεδο, οι μαθητές δε χρειάζονται την υποστήριξη του μοντέλου για τον τυπικό μαθηματικό συλλογισμό τους. Μπορεί να έχουν την εικόνα της αριθμογραμμής στο μυαλό

τους, αλλά δεν έχουν ανάγκη την ύπαρξη της για να λύσουν το πρόβλημα. Παρόλο που η αξία της αριθμογραμμής έχει τονιστεί και η αναπαράστασή της χρησιμοποιείται εδώ και καιρό σε κάποιες χώρες, σε κάποιες άλλες όπως για παράδειγμα στην Αγγλία (Thompson, 2001) και στη χώρα μας, η χρήση της αριθμογραμμής δεν είναι πολύ διαδεδομένη. Ενώ η μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών αναγνωρίζει το σημαντικό ρόλο της αριθμογραμμής για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, στην πράξη δεν τη χρησιμοποιεί συχνά ούτε σύμφωνα με τα θεωρητικά δεδομένα (Σκουμπουρδή, 2008). Τα τελευταία χρόνια όμως προτείνεται η χρήση της μέσα από τα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών (DCSF και ΔΕΠΠΣ) καθώς και μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όπου υπάρχει πληθώρα αναπαραστάσεών της.

Με δεδομένο ότι το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί την κύρια πηγή παροχής εκπαιδευτικών ευκαιριών στους μαθητές για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, σε πολλές χώρες (Fan & Zhu, 2007: 61) ανάμεσα στις οποίες είναι και η Ελλάδα, δημιουργείται έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον για τη μελέτη του τρόπου που παρουσιάζονται τα διάφορα θέματα σε αυτό.
Σε ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, του 1974 και 1975, Α΄ και Β΄ Γυμνασίου της Αργεντινής (Herbst, 1997), τα οποία εισάγουν την αριθμητική και τη γεωμετρία, ως ξεχωριστά θέματα, μέσα από την ίδια γλώσσα, αυτή της Θεωρίας Συνόλων, διερευνήθηκε ο ρόλος της αναπαράστασης της αριθμογραμμής στον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών καθώς και στην επικύρωση της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων. Στα εγχειρίδια, δίνεται έμφαση στον τρόπο παρουσίασης των διαφόρων συνόλων αριθμών (φυσικών, ρητών, άρρητων και πραγματικών) στην αριθμογραμμή η οποία εισάγεται μέσα από την Ευκλείδεια γραμμή, που με τη σειρά της εισάγεται μέσω του αξιωματικού ορισμού της επιπεδομετρίας. Από την ανάλυση φαίνεται ότι η αριθμογραμμή χρησιμοποιείται απλά για την παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών χωρίς την απαίτηση της τεκμηρίωσής τους. Οι αριθμητικές προτάσεις απαιτούν απλά τη μετάφρασή τους στην (ή/και από την) αριθμογραμμή και όχι την πραγματοποίησή τους. Τέλος, αναφέρεται η ικανότητα της αναπαράστασης της αριθμογραμμής, να μεγαλώνει και να μπορεί να αναπαριστά και να εισάγει διαφορετικά σύνολα αριθμών, χωρίς να χάνει τις ιδιότητές της, καθώς και

να εξασφαλίζει ένα περιβάλλον όπου δημιουργείται μαθηματική συζήτηση και όπου η επικύρωση της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων γίνεται με τρόπο διαφορετικό από αυτόν που ακολουθεί ο τυπικός μαθηματικός συλλογισμός της συνολοθεωρίας.

Με βάση τα παραπάνω, στη συγκεκριμένη εργασία, πραγματοποιείται καταγραφή των αναπαραστάσεων της αριθμογραμμής από τα Σχολικά Εγχειρίδια (βιβλίο μαθητή και τετράδια εργασιών) των Μαθηματικών όλων των τάξεων του Δημοτικού Σχολείου. Σκοπός της καταγραφής είναι η διερεύνηση ύπαρξης των επιπέδων του σχήματος της αναπτυξιακής έρευνας της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης, εφόσον αποτελεί τη μόνη συστηματική προσπάθεια μελέτης του ρόλου της αριθμογραμμής στη διδασκαλία/μάθηση των μαθηματικών. Ο ρόλος της αριθμογραμμής στον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών διαδικασιών και οι στρατηγικές υπολογισμού που αναδύονται από την εικόνα της αποτελούν επιμέρους στόχους.

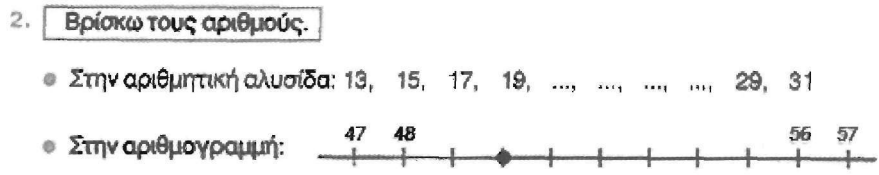
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η διερεύνηση της ύπαρξης των επιπέδων του σχήματος της αναπτυξιακής έρευνας της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης, στις αναπαραστάσεις των αριθμογραμμών των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου έγινε ως εξής: στο πρώτο επίπεδο κατατάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες καλείται ο/η μαθητής/ρια να χρησιμοποιήσει την αριθμογραμμή στατικά (π.χ. συμπλήρωση αριθμών σε ήδη διαρθρωμένες θέσεις), στο δεύτερο επίπεδο καλείται να τη χρησιμοποιήσει δυναμικά (π.χ. αναζητώντας/δημιουργώντας σχέσεις) και στο τρίτο επίπεδο καλείται να διαχειριστεί την άδεια αριθμογραμμή (στατικά και δυναμικά). Το τέταρτο επίπεδο, δεν μπορεί να διερευνηθεί εφόσον σχετίζεται με ένα αφαιρετικό επίπεδο όπου η ύπαρξη της αριθμογραμμής δεν είναι απαραίτητη για τη λύση.

Από την κατηγοριοποίηση των αριθμογραμμών, με βάση τα παραπάνω

επίπεδα, προέκυψε η δημιουργία ενός ακόμα επιπέδου, του 'επιπέδου 0' κατά το οποίο δε ζητείται καμία δράση πάνω στην αριθμογραμμή από το/η μαθητή/ρια. Σε αυτό το επίπεδο, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως επίπεδο αναγνώρισης, απλά παρουσιάζεται η αριθμογραμμή.

Επίσης, από την παραπάνω καταγραφή παρατηρήθηκε ότι ο βαθμός επιβολής χρήσης της αριθμογραμμής, από την ίδια την εκφώνηση, δεν είναι ίδιος σε όλες τις περιπτώσεις, αλλά διαφοροποιείται, επιτελώντας διαφορετικές λειτουργίες (Σκουμπουρδή, υπό έκδοση). Σε κάποιες περιπτώσεις απαιτείται η χρήση της αναπαράστασης της αριθμογραμμής για το συλλογισμό/λύση οπότε θεωρούμε ότι η λειτουργία της είναι 'βασική' (Εικόνα 1: Β΄ τάξη, α΄ τεύχος, σελίδα 28).

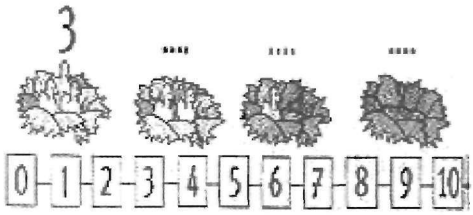


Εικόνα 1: Βασική λειτουργία αριθμογραμμής

Σε άλλες περιπτώσεις η λειτουργία της είναι 'βοηθητική' γιατί ενώ υπάρχει η αναπαράσταση της αριθμογραμμής, δίνοντας πληροφορίες, η χρήση της δεν απαιτείται για το συλλογισμό/λύση (Εικόνα 2: Α΄ τάξη, β΄ τεύχος, σελίδα 57).

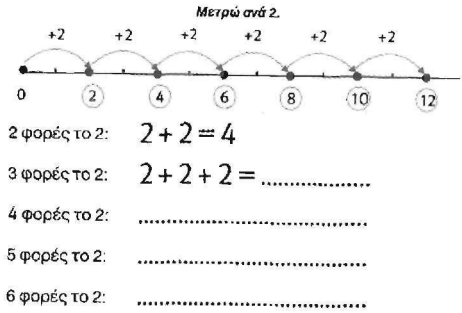
Εικόνα 2: Βοηθητική λειτουργία αριθμογραμμής

Όταν η εκφώνηση αναφέρει την αριθμογραμμή για την παρουσίαση μιας άλλης κατάστασης, αλλά δε ζητά τη χρήση της για το συλλογισμό/λύση, επιτελείται λειτουργία 'αναφοράς' (Εικόνα 3: Β΄ τάξη, β΄ τεύχος, σελίδα 38).



Εικόνα 3: Αριθμογραμμή με λειτουργία αναφοράς

Τέλος, στις περιπτώσεις που η αριθμογραμμή ενώ συνοδεύει ως αναπαράσταση το σενάριο της δραστηριότητας, δεν αναφέρεται πουθενά και δε φαίνεται να έχει κάποιο ρόλο τότε θεωρούμε ότι επιτελεί 'συνοδευτική' λειτουργία (Εικόνα 4: Α΄ τάξη, α΄ τεύχος, σελίδα 22).



Εικόνα 4: Συνοδευτική λειτουργία αριθμογραμμής

Προκειμένου να φανεί ο σημαντικός ρόλος της αριθμογραμμής στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, καταγράφηκαν οι ποικίλες μαθηματικές διαδικασίες που προσεγγίζονται και οι στρατηγικές υπολογισμού οι οποίες αναδύονται άμεσα ή έμμεσα από την εικόνα της.

Ως αναπαράσταση αριθμογραμμής θεωρήθηκε κάθε γραμμή (ή σειρά από πλακίδια ή κουτάκια στη σειρά), πάνω στην οποία είναι τοποθετημένοι

αριθμοί σε σχέση με την αξία τους, όπου κάθε σημείο της αριθμογραμμής αντιστοιχεί σε ένα αριθμό και κάθε διαφορετικός αριθμός εμφανίζεται σε ένα και μοναδικό σημείο πάνω στη γραμμή. Οι αριθμογραμμές που καταγράφηκαν δεν αρχίζουν πάντα από το 0 ή από το 1, αλλά και από άλλους αριθμούς, διαφορετικούς κατά περίπτωση και είτε είναι συμπληρωμένες είτε έχουν κενά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Επίπεδα χρήσης των αριθμογραμμών

Το ένα τρίτο περίπου των αναπαραστάσεων των αριθμογραμμών ανήκουν στο επίπεδο 0 (33/103, 32%) (πίνακας 1). Οι αριθμογραμμές, σε αυτές τις περιπτώσεις, παρουσιάζονται συμπληρωμένες δείχνοντας τη σειρά των αριθμών ή κάποια στρατηγική υπολογισμού. Σε καμία όμως περίπτωση δε ζητείται η δράση του/ης μαθητή/ριας με κάποιο τρόπο.
Πάνω από τις μισές αναπαραστάσεις αριθμογραμμών (56/103, 54%) ανήκουν στο επίπεδο 1 (πίνακας 1). Σε αυτές τις περιπτώσεις ζητείται η δράση του/ης μαθητή/ριας για απλές καταγραφές βάση του σεναρίου. Ο/Η μαθητής/ρια καλείται να συμπληρώσει τους αριθμούς που λείπουν, να βάλει δεδομένους αριθμούς στις κατάλληλες θέσεις κ.ο.τ.

Ελάχιστες είναι οι αριθμογραμμές των οποίων η χρήση περιγράφεται από το επίπεδο 2 και το επίπεδο 3. Στο επίπεδο 2 (πίνακας 1), όπου ο/η μαθητής/ρια καλείται να χρησιμοποιήσει την αριθμογραμμή για να μοντελοποιήσει την απάντησή του, αλλά και να τη χρησιμοποιήσει ως μοντέλο για ευρύτερο μαθηματικό συλλογισμό, ανήκουν συνολικά δώδεκα (12) αριθμογραμμές. Τέλος, στο επίπεδο 3 (πίνακας 1), όπου καλείται ο/η μαθητής/ρια να δράσει στην κενή αριθμογραμμή, ανήκουν συνολικά δύο (2) αριθμογραμμές.

Λειτουργία αριθμογραμμών στις δραστηριότητες

Βασική λειτουργία επιτελούν 85 αναπαραστάσεις αριθμογραμμών (πίνακας 1) των οποίων η χρήση είναι απαραίτητη για τη διεκπεραίωση της δρα-

στηριότητας καθώς αποτελούν μέρος της εκφώνησης. Ο/Η μαθητής/ρια, για να παρατηρήσει, να συζητήσει, να συμπληρώσει, να κατανοήσει τις μαθηματικές διαδικασίες που παρουσιάζονται στην αριθμογραμμή καθώς και για να πραγματοποιήσει υπολογισμούς ή να ελέγξει την απάντησή του/ης, είναι απαραίτητη η αναπαράσταση και οι πληροφορίες που δίνει. Σε αυτές τις περιπτώσεις, λόγω του ότι η βασική λειτουργία απαιτεί την εκτέλεση μιας ενέργειας πάνω στην αναπαράσταση, η αριθμογραμμή παρουσιάζεται με κενά προς συμπλήρωση.

Η βοηθητική λειτουργία της αριθμογραμμής μέσα στη δραστηριότητα δεν καθιστά τη χρήση της υποχρεωτική και επιτελείται σε δεκατέσσερις (14) περιπτώσεις (πίνακας 1). Για παράδειγμα, δεν απαιτείται η χρήση της για τη συμπλήρωση της προπαίδειας, για τη σύγκριση αριθμών, για την κατανόηση ενός συμπεράσματος, για εκτίμηση και υπολογισμό ή για να κατανοήσει ο/η μαθητής/ρια μια στρατηγική. Παρόλο που η αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για την προβληματική κατάσταση, σε καμία περίπτωση δεν επιβάλλεται η χρήση της.

Λειτουργία αναφοράς επιτελούν δύο (2) αριθμογραμμές (πίνακας 1). Σε αυτές τις περιπτώσεις η αριθμογραμμή απλά αναφέρεται είτε για να φανεί η ομοιότητά της με το μέτρο, τη μεζούρα και ένα τεράστιο χάρακα είτε για να παρουσιαστεί μια κατάσταση όμοια με αυτή που περιγράφει η δραστηριότητα χωρίς όμως να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συγκεκριμένο συλλογισμό.

Τέλος, σε δύο (2) δραστηριότητες η λειτουργία της αριθμογραμμής χαρακτηρίζεται ως συνοδευτική (πίνακας 1). Στη βοηθητική λειτουργία, στη λειτουργία αναφοράς και στη συνοδευτική λειτουργία λόγω του ότι δεν απαιτείται η χρήση της αναπαράστασης η αριθμογραμμή είναι πλήρως συμπληρωμένη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΕΠΙΠΕΔΑ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΠΟΥ ΕΠΙΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΝΑ ΤΑΞΗ

Επίπεδο/Λειτουργία	**Τάξεις**						**Σύνολο**
	Α΄	**Β΄**	**Γ΄**	**Δ΄**	**Ε΄**	**Στ΄**	
Επίπεδο 0/Βασική	3	1	1	5	4	1	15
Επίπεδο 0/Βοηθητική	1	8	0	4	0	1	14
Επίπεδο 0/Αναφοράς	0	1	0	0	1	0	2
Επίπεδο 0/Συνοδευτική	1	0	1	0	0	0	2
Σύνολο (για το Επίπεδο 0)	**5**	**10**	**2**	**9**	**5**	**2**	**33**
Επίπεδο 1/Βασική	6	7	4	19	9	11	56
Επίπεδο 2/Βασική	0	6	1	4	1	0	12
Επίπεδο 3/Βασική	0	1	0	1	0	0	2
Σύνολο (για όλα τα επίπεδα)	**11**	**24**	**7**	**33**	**15**	**13**	**103**

Από τον πίνακα 1 φαίνεται ότι συγκεκριμένα επίπεδα συνδέονται με συγκεκριμένες λειτουργίες της αριθμογραμμής. Το επίπεδο 0, όπου η αριθμογραμμή απλά παρουσιάζεται και δεν υπόκειται σε χειρισμό, συνδέεται με τη βασική, τη βοηθητική, τη λειτουργία αναφοράς και τη συνοδευτική λειτουργία. Τα υπόλοιπα επίπεδα (1, 2 και 3), συνδέονται μόνο με τη βασική λειτουργία αφού απαιτείται η δράση του/ης μαθητή/ριας πάνω στην αναπαράσταση, με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά, ανάλογα με το επίπεδο.

Μαθηματικές διαδικασίες και στρατηγικές

Οι μαθηματικές διαδικασίες που προσεγγίζονται μέσω της αναπαράστασης της αριθμογραμμής είναι ποικίλες και αναδύουν διαφορετικές στρατηγικές ανάλογα με την τάξη:

Στην Α΄ τάξη, μέσω της 'μέτρησης ανά 1' προσεγγίζεται η καταμέτρηση και εύρεση πλήθους, η γραφή και ο χειρισμός αριθμών. Οι μαθητές στις περιπτώσεις αυτές καλούνται να μάθουν τις αριθμολέξεις καθώς και τη σειρά και θέση των αριθμών όπως τους παρουσιάζονται. Η στρατηγική της 'μέτρησης ανά 1' γίνεται πιο σύνθετη και προχωράει σε 'μέτρηση ανά δύο' για την εισαγωγή στον πολλαπλασιασμό. Επίσης, παρουσιάζεται και μια γεωμετρική στρατηγική για τη διδασκαλία της ανάλυσης των αριθμών μέχρι το 5 σε επιμέρους αθροίσματα.

Στη Β΄ τάξη, για την αναγνώριση και την κατασκευή των διψήφιων αριθμών, τη γνωριμία με τα κέρματα του Ευρώ, την εύρεση της προπαίδειας του 10 και του 5, τη σύγκριση τριψήφιων αριθμών, τη μέτρηση καθώς και τη λύση προβλήματος χρησιμοποιούνται ποικίλες στρατηγικές οι οποίες εξελίσσονται από απλές σε πιο σύνθετες. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται η 'μέτρηση ανά 1', η 'μέτρηση ανά 5', η 'μέτρηση ανά 10', η 'μέτρηση ανά 50', η 'μέτρηση ανά 100' το 'ανέβασμα/κατέβασμα ανά 10' καθώς και η 'μετάβαση στον επόμενο/προηγούμενο φιλικό αριθμό'.

Στη Γ΄ τάξη, η γραφή των απλών κλασμάτων καθώς και η άσκηση στη χρήση των δεκαδικών αριθμών γίνεται μέσα από 'μέτρηση ανά 50', 'ανά 0,01', 'ανά 1/10 ή ανά 0,1'. Στη Δ΄ τάξη, για την πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών αριθμών, για τη διαχείριση προβλημάτων και αριθμών και τη μέτρηση του χρόνου χρησιμοποιούνται οι στρατηγικές της 'μέτρησης ανά 0,001', 'ανά 0,1', 'ανά 0,5', 'ανά 50000', 'ανά ώρα', 'ανά χρόνια', το 'ανέβασμα ανά χιλιάδες, εκατοντάδες και δεκάδες' καθώς και η 'μετακίνηση στον επόμενο/προηγούμενο φιλικό αριθμό'.

Στην Ε΄ τάξη, μέσα από τη 'μέτρηση ανά 0,1', 'ανά 1 και ανά 10', 'ανά 100', 'ανά 1΄΄', 'ανά 30΄' και 'ανά μήνα' προσεγγίζεται η σύγκριση και διάταξη των δεκαδικών αριθμών, η έννοια του ποσοστού, οι διαιρέτες και τα πολλαπλάσια, οι μονάδες μέτρησης του χρόνου και τα προβλήματα με συμμιγείς.

Τέλος, στη Στ΄ τάξη, οι μετατροπές, συγκρίσεις, διατάξεις και στρογγυλοποιή-

σεις των αριθμών καθώς και η εκτίμηση του ποσοστού γίνεται με τις στρατηγικές της 'μέτρησης ανά 1', 'ανά 45 και 50', 'ανά 0,1', 'ανά 1/12' και 'ανά χρόνο'.

Από τη μελέτη των στρατηγικών φάνηκε ότι η παρουσία τους είναι άλλοτε άμεση και άλλοτε έμμεση. Στην πρώτη περίπτωση ανήκουν οι στρατηγικές εκείνες που αναπαρίστανται στην αριθμογραμμή από τους συγγραφείς των εγχειριδίων με τόξα ή καμπύλες γραμμές. Όμως, παρόλο που είναι σαφές ότι πρόκειται για απεικόνιση στρατηγικής ο/η μαθητής/ρια καλείται να πραγματοποιήσει τον υπολογισμό και όχι να ερμηνεύσει τη στρατηγική. Η παρουσίαση της στρατηγικής με χρήση τόξων κάνει το αποτέλεσμα προφανές και το μόνο που χρειάζεται είναι η εύρεση του αποτελέσματος ή του σημείου που ξεκινάει/καταλήγει το τόξο. Με αυτό τον τρόπο η αριθμογραμμή δεν αφήνει χάσμα μεταξύ του ερωτήματος και της απάντησης. Στη δεύτερη περίπτωση ανήκουν οι στρατηγικές εκείνες που καλείται ο/η μαθητής/ρια να εφεύρει ή να ανακαλύψει από την εικόνα της αριθμογραμμής (από τον τρόπο διάρθρωσής της). Έτσι, καλείται ο/η μαθητής/ρια να μοντελοποιήσει το συλλογισμό του μέσω κάποιας στρατηγικής, άλλες φορές πιο ελεύθερα (π.χ πάνω σε μια κενή ή ημι διαρθρωμένη αριθμογραμμή) και άλλες με έμμεση καθοδήγηση (π.χ μέσα από τη διάρθρωση που παρουσιάζεται).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συστηματική μελέτη για τον τρόπο χρήσης της αριθμογραμμής στη διδασκαλία/μάθηση των μαθηματικών έχει γίνει μόνο από την αναπτυξιακή έρευνα της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Τα επίπεδα που προτείνονται από το παραπάνω σχήμα, με ένα επιπλέον επίπεδο (επίπεδο 0 – επίπεδο αναγνώρισης) που προέκυψε από την καταγραφή, αποτέλεσαν τη βασική μεθοδολογία ανάλυσης των αναπαραστάσεων της αριθμογραμμής των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου, για αυτή την εργασία. Τα παραπάνω επίπεδα συνδυάστηκαν με τη λειτουργία που επιτελούν κάθε φορά οι αναπαραστάσεις της αριθμογραμμής και

συμπλήρωσαν τη μελέτη με την ανάδειξη του ρόλου των αναπαραστάσεων της αριθμογραμμής στην παρουσίαση των μαθηματικών διαδικασιών καθώς και των στρατηγικών υπολογισμού.

Φάνηκε λοιπόν, ότι τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών αναγνωρίζοντας το ρόλο των αναπαραστάσεων (Kilpatrick et al., 2001· Κολέζα, 2000· Van Oers, 2002) γενικά και της αριθμογραμμής (Chazan & Ball, 1999· Fuys & Liebov, 1993· Gravemeijer & Stephan, 2002· Kastberg, 2005· Kilpatrick et al., 2001· Wiegel, 1998· Χαραλάμπους & Πίττα-Πανταζή, 2005) ειδικά, για τη διδασκαλία/μάθηση των μαθηματικών, έχουν συμπεριλάβει πληθώρα αναπαραστάσεων της αριθμογραμμής με πολλές διαφορετικές μορφές. Μέσω αυτών των αναπαραστάσεων, οι οποίες επιτελούν διαφορετικές λειτουργίες (βασική, βοηθητική, αναφοράς και συνοδευτική) προσεγγίζονται ποικίλες μαθηματικές διαδικασίες, διαφορετικές για κάθε τάξη και υποστηρίζονται από μεγάλο εύρος στρατηγικών.

Όμως αυτό δε γίνεται εξελικτικά, σύμφωνα με τα επίπεδα που προτείνει το σχήμα της αναπτυξιακής έρευνας της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης, για κάθε τάξη και για το σύνολο των τάξεων. Οι αναπαραστάσεις, τις περισσότερες φορές, χρησιμοποιούνται ως μέσο το οποίο πρέπει να γνωρίσει ο/η μαθητής/ρια (επίπεδο 0) ή/και ως μέσο για την πραγματοποίηση στατικών ενεργειών (επίπεδο 1). Στις ελάχιστες περιπτώσεις που απαιτείται η δυναμική ενέργεια του μαθητή (επίπεδο 2) αυτό γίνεται μέσα από τις στρατηγικές που παρουσιάζονται άμεσα (με τόξα) ή έμμεσα (μέσω της διάρθρωσής της), στην αριθμογραμμή, όπου οι μαθητές καλούνται απλά να μεταφράσουν τις μαθηματικές προτάσεις/σχέσεις στην αριθμογραμμή και το αντίθετο. Με αυτό τον τρόπο δεν αφήνεται κάποιο χάσμα μεταξύ του ερωτήματος και της απάντησης, φαινόμενο που παρατηρήθηκε και στην ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων από το Herbst (1997).

Η χρήση της κενής αριθμογραμμής (επίπεδο 3) είναι σχεδόν ανύπαρκτη, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα ερευνητικά δεδομένα (Fosnot & Dolk, 2001· Menne, 2001· Thompson, 2004) τα οποία τονίζουν την αξία της για την κατασκευή σύνθετων στρατηγικών από τους ίδιους τους μαθητές. Χωρίς

τη χρήση της κενής αριθμογραμμής δεν ενισχύεται η εξελικτική χρήση της αριθμογραμμής από μοντέλο της άτυπης δραστηριότητας του/ης μαθητή/ριας σε μοντέλο για τον τυπικό μαθηματικό συλλογισμό του/ης (Gravemeijer & Doorman, 1999- Gravemeijer & Stephan, 2002).

Μόνο σε συγκεκριμένες τάξεις (Β΄ και Δ΄ τάξη) γίνεται μια προσπάθεια για εξελικτική χρήση της, που ξεκινάει από το επίπεδο 0 κατά το οποίο γίνεται γνωριμία με τις διαφορετικές όψεις και χρήσεις της και προχωράει, ως ένα βαθμό, στα υπόλοιπα επίπεδα υποστηρίζοντας απλές και σύνθετες στρατηγικές. Στις υπόλοιπες τάξεις, ενώ η παρουσία της είναι σε γενικές γραμμές έντονη δεν είναι συστηματική. Η χρήση της είναι περιορισμένη στην παρουσίαση απλών στρατηγικών και όχι στην κατασκευή από τα παιδιά των δικών τους στρατηγικών.

Για να είναι αποτελεσματική η χρήση της αναπαράστασης της αριθμογραμμής απαιτείται η συστηματική προσέγγισή της μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών εφόσον πολύ συχνά το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί το βασικό μέσο για τη διδασκαλία/μάθηση των μαθηματικών. Έτσι, οι μαθητές από τη μια θα μπορέσουν να εξοικειωθούν με τις διαφορετικές μορφές της (κάτι που ήδη γίνεται στα σχολικά εγχειρίδια πολύ συστηματικά) και από την άλλη θα περάσουν εξελικτικά από την απλή σε πιο σύνθετη χρήση της (κάτι που δε γίνεται στα σχολικά εγχειρίδια με συστηματικό τρόπο).

Θεωρούμε ότι μέσω του κατάλληλου σχεδιασμού ένταξης της αριθμογραμμής στα σχολικά εγχειρίδια, ο οποίος θα λαμβάνει υπόψη τα ερευνητικά δεδομένα για τις δυνατότητες αξιοποίησης και εξελικτικής χρήσης της, τις δυσκολίες, τα όρια και τους περιορισμούς στη χρήση της, ανάλογα με τη μαθηματική ενότητα και το γνωστικό επίπεδο του/ης μαθητή/ριας και θα ενημερώνει τον εκπαιδευτικό για αυτά, μπορεί να επιτευχθεί αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση με τη χρήση της.

ABSTRACT

It is well known that representations possess important role in the teaching and learning process allowing the construction of mathematical ideas. It is also known that school textbook constitutes the main and many times the exclusive aid of educational process. Thus, a recording of the number lines from the primary school mathematics textbooks has taken place in order to investigate if they function as emerged models like Realistic Mathematics Education sequences. An investigation of the different number lines' types, of the related mathematical concepts, as well as the strategies that appear to be elected each time from the number line' picture constituted a secondary aim of this work.

From the results of the investigation it appeared that although there are several number lines' types in the school text book which support different strategies for various mathematical concepts this does not take place in accordance to Realistic Mathematics Education sequences.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Βιβλιογραφία:

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α. & Σαΐτης, Α. (2006). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού* (σελ. 10, 11, 20, 22, 49, 50, 51, 53, 67, 88, 89, 121, 127, 129), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α. & Σαΐτης, Α. (2007). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού Τετράδιο Εργασιών α΄ τεύχος* (σελ. 9, 12, 35), *β΄* τεύχος (σελ. 7, 16, 22, 23, 31, 35), *γ΄* τεύχος (σελ. 25, 27, 36), *δ΄* τεύχος (σελ. 22, 28, 29), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Blinko, J. (2004). Mathematics in context. *Mathematics Teaching,* 188, 3-9.

Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι. & Ανδρέου, Σ. (2003). Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών: συναρτήσεις και αριθμητική γραμμή. *Ευκλείδης γ΄* 59, 5-34.

Chazan, D. & Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics,* 19 (2), 2-10.

ΔΕΠΠΣ (2001). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών http://www.pi-schools.gr/programs/depps/ 18/10/2001

DCSF (2007). 'Department for children, schools and families: The Standards Site'. Available at http://www.standards.dfes.gov.uk (accessed 19/12/2007).

Dickinson, P. & Eade, F. (2004). Using the number line to investigate the solving of linear equations. *For the Learning of Mathematics,* 24 (2), 41-47.

Elia, I. & Gagatsis, A. (2003). Young Children's Understanding of Geometric Shapes: The Role of Geometric Shapes. *European Early Childhood Education Research Journal,* 11 (2), 43-60.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics,* 66, 61-75.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing number sense, addition, and subtraction* (pp. 127-151). Heinemann USA.

Fuys, D. & Liebov, A. (1993). Geometry and spatial sense. In R. Jensen, (Ed.), *Research ideas fort he classroom early childhood mathematics* (pp. 195-222). Macmillan Library USA.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in Realistic Mathematics Education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 111-129.

Gravemeijer, K., Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel, (Eds.). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Kluwer Academic Publishers.

Herbst, P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbook series. *For the learning of mathematics,* 17 (3), 36-45.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ. & Χρονοπούλου, Γ. (2006). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού* (σελ. 30, 40, 63, 94, 133, 134), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ. & Χρονοπούλου, Γ. (2007). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού Τετράδιο Εργασιών α΄ τεύχος* (σελ. 22, 24), *Τετράδιο Εργασιών β΄ τεύχος* (σελ. 10, 11, 14), *Τετράδιο Εργασιών γ΄ τεύχος, Τετράδιο Εργασιών δ΄ τεύχος* (σελ. 19, 20), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν. & Σοφού, Β. (2006). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού α΄ τεύχος* (σελ. 13, 23, 28, 33, 35, 50, 60, 67), *β΄ τεύχος* (σελ. 37, 38, 40, 42, 46), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν. & Σοφού, Β. (2006). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού Τετράδιο Εργασιών α΄ τεύχος* (σελ. 6, 8, 9, 10, 14), *β΄* τεύχος (σελ. 15, 19), *γ΄* τεύχος, *δ΄* τεύχος (σελ. 12, 35, 37), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού* (σελ. 9, 13, 16, 29, 47, 51, 58, 96), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Τετράδιο Εργασιών α΄ τεύχος* (σελ. 9, 13), *β΄ τεύχος* (σελ. 9), *γ΄ τεύχος* (σελ. 14), *δ΄ τεύχος,* ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Kastberg, S. (2005). Seeing the construction of a multiplicative world. *For the Learning of Mathematics,* 25 (3), 2-6.

Kilpatrick, J. Swafford, J. & Findell, B.(Eds) (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics* (pp. 87-102). National Academy Press.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Leader Books.

Κολέζα, Ε. (2006). Σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών: Α΄ μέρος: Ένα θεωρητικό πλαίσιο αξιολόγησης. *Ευκλείδης γ΄*, 65, 3-27.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ. (2006). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής α΄ τεύχος* (σελ. 19, 22, 35, 48, 60), *β΄ τεύχος* (σελ. 39, 55, 57), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ. (2007). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής Τετράδιο Εργασιών α΄ τεύχος* (σελ. 20, 21), *β΄ τεύχος* (σελ. 38), *γ΄ τεύχος*, *δ΄ τεύχος*, ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., Σπανακά, Α. (2006). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* (σελ. 63, 91), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., Σπανακά, Α. (2007). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής Τετράδιο Εργασιών α΄ τεύχος, β΄ τεύχος* (σελ. 29), *γ΄ τεύχος* (σελ. 24, 32), *δ΄ τεύχος* (σελ. 32, 37), ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31 (2), 234-241.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.) *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 261-288). NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Menne, J. (2001). Jumping ahead: an innovative teaching programme. In J. Anghileri (Ed.) *Principles and Practices in Arithmetic Teaching Innovative approaches for the primary classroom* (pp. 95-106). Open University Press.

Moone, G & Groot, C. (2005). Time is of the essence. *Teaching Children Mathematics,* 12 (2), 90-98.

Μπούφη, Α. (1996). Ο ρόλος των εποπτικών υλικών και άλλων συμβολικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. *Τα Εκπαιδευτικά,* 41-42, 188-201.

Newton, D. & Newton, L. (2006). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom? *Educational Studies in Mathematics,* 64, 69-84.

Onslow, B. Adams, L., Edmunds, G., Waters, J., Chapple, N., Kealey, B. & Eady, J. (2005). Are you in the zone? *Teaching Children Mathematics,* 11 (9), 458-463.

Σκουμπουρδή, Χ. (υπό έκδοση) Υλικό για τα μαθηματικά της πρώτης σχολικής ηλικίας. *Στο Μ. Κλαδρυμίδου, Χ. Σακονίδης και Μ. Τζεκάκη (επιμ.), Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρητικές και Ερευνητικές Προσεγγίσεις* (υπό έκδοση).

Σκουμπουρδή, Χ. (2008). Η αριθμογραμμή στη διδασκαλία και τη μάθηση των

Μαθηματικών. Στο *25ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας Η Μαθηματική Εκπαίδευση και η σύνθετη πραγματικότητα του 21ου αιώνα*, 303-312.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.) *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 289-325). NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, I. (2001). Issues for classroom practices in England. In J. Anghileri (Ed). *Principles and Practices in Arithmetic Teaching innovative approaches for the primary classroom* (pp. 71-74). Open University Press.

Thompson, I. (2004). To jot or not to jot? *Mathematics in School,* May, 6-7.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα: προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Εκδόσεις Gutenberg.

Van Oers, B. (2002). The mathematization of young children's language. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Vans Oers & L. Varschaggel, (Eds.) *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 29-57). Kluwer Academic Publishers.

Wallace, A. & Gurganus, S. (2005). Teaching for mastery of multiplication. *Teaching Children Mathematics,* 12 (1), 26-33.

Warfield, J. (2001). Teaching kindergarten children to solve word problems. *Early Childhood Education,* 28 (3), 163-167.

Wiegel, H. (1998). Kindergarten Students' Organization of Counting in Joint Counting Tasks and the Emergence of Cooperation. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29 (2), 202-224.

Χαραλάμπους, Χ. & Πίττα-Πανταζή, Δ. (2005). Ο ρόλος της Αριθμητικής Γραμμής στην Αξιολόγηση της Ανάπτυξης της Έννοιας του Κλάσματος ως Αριθμού-Μέτρου. Στο Χ. Κυνηγός (επ) *Πρακτικά εισηγήσεων 1ου Συνεδρίου της ΕνΕΔιΜ Η Διδακτική Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία της Γνώσης*

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΛΛΗΛΟΓΡΑΦΙΑΣ

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, Επίκουρος καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Λεωφόρος Δημοκρατίας 1, 85100, Ρόδος.

E-mail: **kara@rhodes.aegean.gr**