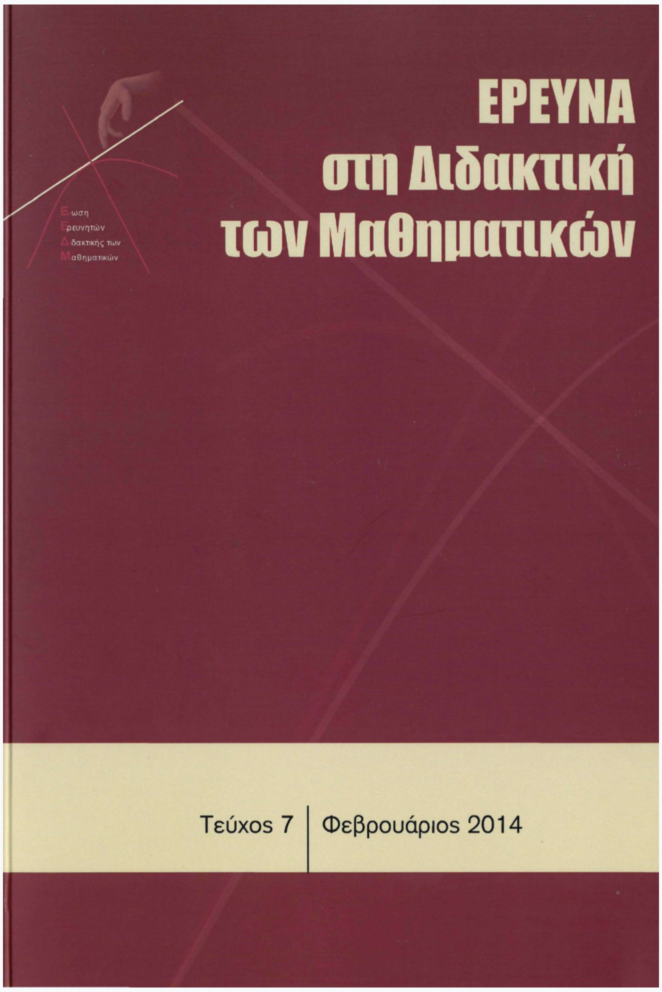
Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 7 (2014)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ; ΑΥΘΟΡΜΗΤΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΔΩΔΕΚΑΧΡΟΝΩΝ ΠΟΥ ΑΓΓΙΖΟΥΝ ΤΗΝ ΑΡΡΗΤΟΤΗΤΑ

Γιώργος Κόσυβας (Giorgos Kosyvas)

doi: 10.12681/enedim.18837

Αριθμητική προσέγγιση ή γεωμετρική ακρίβεια; Αυθόρμητες αντιλήψεις δωδεκάχρονων που αγγίζουν την αρρητότητα

Γιώργος Κόσυβας
Σχολικός σύμβουλος, gkosyvas@sch.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία εκτίθεται ένα διδακτικό πείραμα που διενεργήθηκε στην Πρώτη Γυμνασίου. Στο εν λόγω πείραμα διερευνάται το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου, το οποίο εμφανίζεται για πρώτη φορά στον πλατωνικό διάλογο «Μένων». Τα ευρήματα της έρευνας σκιαγραφούν τον τρόπο με τον οποίο μια ανοικτή κατάσταση προβληματισμού μπορεί να ενεργοποιήσει τους μαθητές ώστε να αναπτύξουν πολυποίκιλες ιδέες και στρατηγικές. Ειδικότερα, κατά τη μαθηματική διαμάχη στη σχολική τάξη με την προβολή των αυθόρμητων πρωτογενών αντιλήψεων των μαθητών, αναδύεται η αντίθεση μεταξύ του γεωμετρικού και του αριθμητικού τρόπου σκέψης που οδηγεί στην πραγμάτευση νοημάτων της ασυμμετρότητας και την βαρύνουσα προτίμησή τους προς τις γεωμετρικές προσεγγίσεις. Σε μια εποχή που η γεωμετρική κουλτούρα βρίσκεται σε παρακμή, ενώ κυριαρχεί η υπερβολική αριθμητικοποίηση, διδακτικές πρακτικές που τονίζουν την ακρίβεια του γεωμετρικού μεγέθους θα μπορούσαν να υποστηρίξουν την κατανόηση της αρρητότητας.

Λέξεις κλειδιά: *αυθόρμητες αντιλήψεις, προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας αριθμού, αριθμητικοποίηση μεγεθών, διαφανής/αδιαφανής δεκαδική αναπαράσταση, διπλασιασμός του τετραγώνου, «Μένων», αρρητότητα, ψευδαίσθηση γραμμικότητας.*

Εισαγωγή

Η κατανόηση των άρρητων αριθμών είναι θεμελιώδης για την επέκταση και αναδημιουργία της έννοιας του αριθμού από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η οικοδόμηση του πραγματικού αριθμού αποτελεί μια εννοιολογική υπέρβαση-διαφύλαξη της έννοιας του ρητού αριθμού. Η μετάβαση από το σύνολο των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών προσκρούει σε εγγενείς δυσκολίες που συνδέονται με τη φύση των άρρητων αριθμών. Η πιθανή άρση των δυσκολιών αυτών στην αίθουσα διδασκαλίας μπορεί να υποστηριχτεί με τη διδακτική αξιοποίηση κατάλληλων ιστορικών προβλημάτων.

Ο πλατωνικός διάλογος *Μένων* παρέχει ένα πρόσφορο έναυσμα προβληματισμού για την προσέγγιση της ασυμμετρότητας από τους σύγχρονους μαθητές. Η κλασική εκφώνηση του μαθηματικού προβλήματος το οποίο έθεσε ο Σωκράτης στο νεαρό δούλο είναι η ακόλουθη: *Ποιο είναι το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν από το εμβαδόν ενός δεδομένου τετραγώνου με πλευρά 2 πόδια;* (Πετράκης, 2008, 83α) Ο Πλάτων θέτει το εν λόγω πρόβλημα σε ένα αριθμητικό πλαίσιο, ενώ δεν περιμένει μια ακριβή γεωμετρική κατασκευή. Η σωκρατική προσέγγιση δεν είναι θεωρητική αλλά οπτική, αφού η αιτιολόγηση γίνεται με παρατηρήσεις πάνω στο γεωμετρικό σχήμα. Στο διάλογο *Μένων* ο Σωκράτης είναι ένας «δάσκαλος των μαθηματικών» που υποβάλλοντας στον έφηβο διαδοχικές ερωτήσεις τον οδηγεί στην ανακάλυψη ότι, για να διπλασιάσουμε το εμβαδόν ενός τετραγώνου, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο που έχει ως πλευρά τη διαγώνιο του αρχικού τετραγώνου.

Χρησιμοποιώντας ως ερευνητικό ερέθισμα το προαναφερόμενο ιστορικό πρόβλημα σε ανοιχτή εκδοχή, επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στους μαθητές της σύγχρονης τάξης. Στην εν λόγω έρευνα ανιχνεύονται οι προϋπάρχουσες γνώσεις και οι αυθόρμητες διαισθητικές αντιλήψεις των δωδεκάχρονων μαθητών που αγγίζουν την αρρητότητα προτού ακόμα δεχτούν οποιαδήποτε συστηματική διδασκαλία γι' αυτήν. Ειδικότερα μελετούμε τα λάθη, τις παρανοήσεις, τις γνωστικές ασυμφωνίες και τις παραγόμενες μορφές αναπαραστάσεων των μαθητών (γεωμετρικές ή αριθμητικές). Οι αντιλήψεις αυτές αποτελούν το πρόπλασμα που προετοιμάζει τη μετεξέλιξη της έννοιας προς μεταγενέστερες διαστάσεις, που συνάδουν με αλγοριθμικές διαδικασίες και τυπικές αποδείξεις (απαγωγή σε άτοπο). Με τη μαθηματική συζήτηση στην τάξη επιχειρείται η παρατήρηση και διερεύνηση των αμφίδρομων διαδρομών του προβληματισμού των μαθητών ανάμεσα στη θεωρητική ακρίβεια της γεωμετρικής κατασκευής με κανόνα και διαβήτη και την προσεγγιστική αριθμητικοποίηση ή γενικότερα ανάμεσα στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά.

Σκοπός αυτής της μελέτης είναι να συνεισφέρει στη γνώση των άρρητων αριθμών, να ερμηνεύσει τις προπαρασκευαστικές παραστάσεις της ασυμμετρότητας κατά τις απαρχές του σχηματισμού τους, να αναλύσει τις δυσκολίες που εμφανίζονται και να σκιαγραφήσει τις πιθανές επιπτώσεις τους στη διδακτική πρακτική στο Γυμνάσιο και αργότερα στο Λύκειο. Γίνεται μια απόπειρα διερεύνησης των άτυπων πρωτογενών αντιλήψεων των μαθητών που αγγίζουν την κατανόηση αρρητότητας.

Θεωρητικό πλαίσιο

Οι ιστορικοί των μαθηματικών πιστεύουν ότι οι απαρχές της γνωριμίας του ανθρώπου με τους άρρητους αριθμούς πιθανότατα συνδέονται με τις δυσκολίες που συνάντησαν οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι μαθηματικοί κατά τη λύση δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων. Οι Έλληνες μαθηματικοί της αρχαιότητας γνώρισαν τους άρρητους αριθμούς ακολουθώντας γεωμετρικό δρόμο. Στην προσπάθειά τους να λύσουν γεωμετρικά προβλήματα με κανόνα και διαβήτη (τετραγωνισμός του κύκλου, τριχοτόμηση της γωνίας, διπλασιασμός του κύβου) προσέκρουσαν στα ασύμμετρα μεγέθη (Arcavi et *al.*, 1987 – Fowler, 1999 – Fowler, 2001 – Σταμάτης, 1972). Η μελέτη των άρρητων αριθμών προχώρησε σταδιακά, αφού πρώτα κατανοήθηκε η δομή των φυσικών, των ακέραιων και των ρητών. Η αποδοχή των άρρητων αριθμών με τη μορφή της τετραγωνικής και κυβικής ρίζας προέκυψε από την ανάγκη λύσης εξισώσεων από τους αλγεβριστές της Αναγέννησης. Σήμερα γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί π και e δεν είναι απλώς άρρητοι αλλά υπερβατικοί και ότι καμιά ακέραιη δύναμή τους δεν είναι ρητός αριθμός. Ωστόσο, η φύση των άρρητων αριθμών παρουσιάζει ιδιαιτερότητες ακόμα και στην εποχή μας. Ενώ οι υπερβατικοί άρρητοι αριθμοί είναι υπεραριθμήσιμοι, ελάχιστοι από αυτούς είναι γνωστοί σήμερα. Δεν γνωρίζουμε για παράδειγμα αν οι αριθμοί π^{π}, e^{e} και π^{e} είναι άρρητοι ή όχι. Τόσο η αρρητότητά τους όσο και η υπερβατικότητά τους παραμένουν ανοιχτά προβλήματα για μαθηματική έρευνα[1].

Η ανακάλυψη των άρρητων είναι σταθμός που είχε μεγάλες επιπτώσεις στην εξέλιξη των μαθηματικών. Η διαδικασία της μέτρησης ενός ευθυγράμμου τμήματος που είναι ασύμμετρο προς τη μονάδα μέτρησης αποκαλύπτει την ουσία του συνεχούς της ευθείας. Από μαθηματική άποψη, το σύνολο R των πραγματικών αριθμών αποτελεί μια επέκταση του συνόλου Q των ρητών αριθμών, αφού διαφυλάσσει τις αλγεβρικές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης (Hass et *al.*, 2007 – McDonald & Weiss, 1999 – Ross, 2000). Ωστόσο δεν προεξάρχουν αυτές οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την ιδιαίτερη φύση του. Δεν είναι απλώς ένα μεγαλύτερο σύνολο που προκύπτει με την εν λόγω επέκταση, αλλά έχει εντελώς διαφορετική δομή: αξιώνει οι πραγματικοί αριθμοί να αντιστοιχούν σε όλα τα σημεία της ευθείας χωρίς «οπές» ή «κενά»[2]. Έτσι μπορούμε να φανταζόμαστε γεωμετρικά τους

1. Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με το *Θεώρημα του Gelfond* (1906-1968), ο αριθμός α^{β} είναι υπερβατικός, αν ο α είναι αλγεβρικός και διάφορος από το μηδέν και το ένα και ο β είναι αλγεβρικός και άρρητος. Ο αριθμός e^{π} είναι υπερβατικός εφόσον ο αριθμός $e^{\pi} = e^{-i^2\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{-i} = (-1)^{-i}$ είναι υπερβατικός σύμφωνα με το προαναφερόμενο θεώρημα. Όμως οι μαθηματικοί δεν έχουν απαντήσει ακόμα στο ερώτημα αν ο αριθμός α^{β} είναι υπερβατικός στην περίπτωση που οι α και β είναι υπερβατικοί.

2. Η αόριστη ιδέα της απουσίας οπών και κενών συνδέεται με την κατανόηση της συμπαγούς φύσης των πραγματικών αριθμών και απαιτεί έννοιες όπως αυτές της σύγκλισης και της πληρότητας. Ειδικότερα, ισοδυναμεί με την ικανοποίηση ενός αξιώματος συνέχειας, όπως είναι για παράδειγμα *το*

πραγματικούς αριθμούς ως σημεία μιας αριθμογραμμής που ονομάζεται πραγματική ευθεία. Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών είναι αξιωματικά συνεχές, χωρίς κενά μεταξύ των αριθμών. Ωστόσο δεν μπορούμε να αριθμήσουμε τα στοιχεία του, αφού «*η διαίσθησή μας δεν μπορεί να μας βοηθήσει να δούμε τα άρρητα σημεία ως διακεκριμένα από τα αντίστοιχα ρητά σημεία*» (Courant & Robbins, 1941/1996, σ. 60). Το σύνολο των ρητών αριθμών, παρότι είναι παντού πυκνό, δεν μπορεί να καλύψει όλα τα σημεία ενός δοσμένου διαστήματος που χαρακτηρίζεται από την έννοια του συνεχούς (Caveing, 1982 – Lay, 2006 – Νεγρεπόντης κ. ά., 1987).

Ο ορισμός του άρρητου αριθμού στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση γίνεται με αναφορά στον ρητό αριθμό ή τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των αριθμών (González-Martín, et *al.*, 2011). Από τη μια πλευρά άρρητος ονομάζεται ο αριθμός που δεν είναι ρητός, δηλαδή ο αριθμός που δεν μπορεί να παρασταθεί σε μορφή κλάσματος, όπου οι όροι του είναι ακέραιοι και ο παρονομαστής μη μηδενικός ακέραιος. Από την άλλη πλευρά άρρητος είναι κάθε δεκαδικός αριθμός ο οποίος έχει άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων μη περιοδικών. Δηλαδή, άρρητος είναι κάθε άπειρο (μη τερματιζόμενο και μη περιοδικό) δεκαδικό ανάπτυγμα της μορφής:

$$a_1a_2...a_\kappa,\delta_1\delta_2...\delta_\nu..., \qquad a_i,\delta_j \in \{0,1,...,9\},\ i=1,2,\ ...,\ \kappa,\ \ j=1,2,\ ...,\nu...$$

όπου $a_1a_2...a_\kappa$ είναι το «ακέραιο μέρος» και δ_1, δ_2, ..., δ_ν,... είναι ψηφία του «δεκαδικού» μέρους, από τα οποία καμιά ομάδα δεν επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Οι δύο προηγούμενοι ορισμοί, χωρίς αναφορές στην αξιωματική δομή του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, παρέχουν μια εισαγωγική περιγραφή για την έννοια της αρρητότητας, έχουν εισαχθεί στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και είναι ισοδύναμοι. Πράγματι, ο λόγος ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δεκαδική παράσταση ως «ορισμό» του άρρητου είναι γιατί ένας δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (τερματιζόμενος) παριστάνει ένα ρητό αριθμό και ένας απειροψήφιος περιοδικός δεκαδικός αριθμός (μη τερ-

---

αξίωμα της πληρότητας, το οποίο διακρίνει το R από το Q. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συνιστά *υπέρβαση-διαφύλαξη* του συνόλου των ρητών αριθμών: *είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, στο οποίο κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα* (McDonald & Weiss, 1999 – Lay, 2006 – Νεγρεπόντης κ. ά., 1987). Το αξίωμα της πλήρους διάταξης ή του κιβωτισμού ή άλλα ισοδύναμα δεν ισχύουν στο σύνολο Q, ενώ είναι αναγκαία για την εισαγωγή εννοιών όπως ρίζες, λογάριθμοι κλπ. Πολλά συμπεράσματα για τις συναρτήσεις, την παραγώγιση και την ολοκλήρωση θα ήταν λανθασμένα αν ορίζονταν μόνο στους ρητούς αριθμούς, ενώ τα σημαντικότερα θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού και της Πραγματικής Ανάλυσης στηρίζονται στη θεμελιώδη ιδιότητα της πληρότητας του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Στις αξιωματικές θεμελιώσεις των πραγματικών αριθμών (π.χ. τομές Dedekind, ακολουθίες Cauchy κλπ.), η εκπλήρωση ενός αξιώματος συνέχειας έχει βαρύνουσα σημασία (Hass et *al.*, 2007 – Toeplitz, 2007 – Spivak, 1991).

ματιζόμενος) πάλι τρέπεται σε κλάσμα. Από αυτό προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί. Για παράδειγμα ο απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός

$$0{,}1\overbrace{0}^{1}1\overbrace{00}^{2}1\overbrace{000}^{3}1\overbrace{0000}^{4}1\overbrace{00000}^{5}1\overbrace{00000}^{6}1\ldots$$

που τα ψηφία του σχηματίζονται με ένα προφανή νόμο (κάθε φορά μεταξύ των δύο μονάδων παρεμβάλλονται 1, 2, 3, ... μηδενικά), είναι φανερό ότι δεν είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός (Toeplitz, 2007 – Courant & John, 1999 – Finney et *al.*, 2001).

Οι μαθητές κατά τη διάρκεια της σχολικής διαδρομής τους διευρύνουν και αναοχηματίζουν τις έννοιες των αριθμών. Οι διαδοχικές επεκτάσεις που συντελούνται υπαγορεύονται τόσο από την πρακτική ανάγκη να εκφραστούν τα αποτελέσματα των μετρήσεων όσο και από θεωρητικές ανάγκες: «*η επέκταση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς ικανοποιεί τόσο τη θεωρητική ανάγκη άρσης των περιορισμών στην αφαίρεση και τη διαίρεση όσο την πρακτική ανάγκη οι αριθμοί να εκφράζονται ως αποτελέσματα μέτρησης. Το γεγονός ότι οι ρητοί αριθμοί εκπληρώνουν αυτή τη διπλή ανάγκη αναδεικνύει την αληθινή σημασία τους*» (Courant & Robbins, 1996, σελ. 56). Η ανάγκη εισαγωγής των άρρητων αριθμών μπορεί να προκύψει από μετρήσεις μεγεθών (π.χ. μηκών). Επειδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος δεν μπορεί πάντα να παρασταθεί με τις υποδιαιρέσεις της αρχικής μονάδας, προσκρούουμε στο εμπόδιο της ασυμμετρότητας.

Μια ρητή ή άρρητη δεκαδική παράσταση μπορεί να είναι διαφανής ή όχι (Zazkis & Sirotic, 2010). Για παράδειγμα, οι ακόλουθοι ρητοί αριθμοί έχουν διαφανή δεκαδική παράσταση, αφού μπορούμε να προβλέψουμε το ψηφίο οποιασδήποτε τάξης.

$$\frac{3}{5}=0{,}60\mathbf{0}\ldots(\acute{\eta}\ \ 0{,}59\mathbf{9}\ldots) \qquad \frac{1}{3}=0{,}33\mathbf{3}\ldots \qquad \frac{281.849}{99.900}=2{,}82131\mathbf{131}\ldots$$

Παρότι κάθε περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα παριστάνει έναν ρητό αριθμό, ορισμένοι ρητοί αριθμοί, όπως για παράδειγμα το 3/5, έχουν δύο περιοδικές αναπαραστάσεις (λέγονται μη γνήσιοι). Επιπλέον, μια άπειρη μη περιοδική δεκαδική παράσταση, παρά την πολυσύνθετη δομή της, μπορεί να είναι μια διαφανής παράσταση ενός άρρητου αριθμού, όπως συμβαίνει στα ακόλουθα παραδείγματα:

$$0{,}\overbrace{\mathbf{2}8}^{1+1}\overbrace{\mathbf{22}88}^{2+2}\overbrace{\mathbf{222}888}^{3+3}\mathbf{2}\ldots \qquad 2{,}0013\overbrace{131}^{+0}\overbrace{131\mathbf{1}}^{+1}\overbrace{131\mathbf{11}}^{+2}1\ldots$$

Στα προηγούμενα παραδείγματα ενυπάρχουν κανονικότητες, αλλά όχι περιοδικότητες. Ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα ζεύγη αριθμών (Βόσκογλου & Κόσυβας, 2012):

$$\begin{cases} \frac{22}{7} = \mathbf{3{,}14}285714\ldots & \frac{144}{233} = \mathbf{0{,}6180}25\ldots & \frac{1}{1861} = \mathbf{0{,}00053}73\ldots \\ \pi = \mathbf{3{,}14}159265\ldots & \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \mathbf{0{,}6180}33\ldots & \frac{1}{\sqrt{3499149}} = \mathbf{0{,}00053}45\ldots \end{cases}$$

Αν οι αριθμοί αυτοί διακοπούν στα ψηφία που είναι με μαύρα στοιχεία, τότε οι σημειωτικές παραστάσεις τους ταυτίζονται και οι προαναφερόμενοι αριθμοί δεν θα έχουν διαφανή δεκαδική παράσταση, αφού υπάρχει εμφανής δυσκολία κατάταξής τους σε ρητούς ή άρρητους.

Στους ρητούς αριθμούς της πρώτης σειράς η ακολουθία των επαναλαμβανόμενων ψηφίων (περίοδος) κατά σειρά έχει μήκος 6, 232 και 1860 ψηφία. Οι άρρητοι απειροψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί της δεύτερης σειράς δεν έχουν συγκεκριμένη κανονικότητα και είναι ο πρώτος υπερβατικός και οι άλλοι δύο αλγεβρικοί άρρητοι. Καθώς ένα μεγάλο μέρος ψηφίων παραμένει στην αφάνεια, *πώς οι μαθητές μπορούν να είναι σίγουροι ότι οι αριθμοί αυτοί είναι περιοδικοί δεκαδικοί (ρητοί) ή άρρητοι;*

Οι απειροψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί μπορεί να ταυτίζονται σε μερικά ψηφία, αλλά τα υπόλοιπα ψηφία τους είναι αδιαφανή και δυσεντόπιστα. Έτσι το εκάστοτε είδος των αριθμών εξαρτάται από τη συμπλήρωση της δεκαδικής αναπαράστασης με το άδηλο μέρος τους. Η τροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό μπορεί να καταλήξει σε μια μακροσκελή και επίπονη διαίρεση (αν δεν γίνει αντιληπτό ότι ο αριθμός που προκύπτει είναι τερματιζόμενος δεκαδικός) ή στην περίπτωση που είναι περιοδικός (αν δεν αποκαλυφθεί γρήγορα ή περίοδός του). Μπορεί τέλος να είναι άρρητοι (αλγεβρικοί ή υπερβατικοί). Για τους μαθητές είναι δύσκολο να κατανοήσουν έναν αριθμό όταν δεν γνωρίζουν έναν σαφή και ξεκάθαρο τρόπο γραφής του. Ορισμένες από τις δυσκολίες των μαθητών με τους περιοδικούς δεκαδικούς και τους άρρητους αποτυπώνονται στα συμπεράσματα των ερευνών που ακολουθούν.

Εφόσον ο ορισμός του άρρητου βασίζεται στον ορισμό του ρητού, προϋποτίθεται η κατανόηση των ρητών αριθμών. Από πολλές έρευνες έχει βρεθεί ότι οι μαθητές προτού εισαχθούν στους άρρητους αριθμούς έχουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών αριθμών (Hart, 1988 – Bryan, 2005 – Smith et *al*., 2005 – Voskoglou & Kosyvas, 2011). Πολλές από αυτές οφείλονται στην καταχρηστική μεταφορά γνώσεων από τους φυσικούς στο πεδίο των ρητών αριθμών (Yujing & Yong-Di, 2005 – Βαμβακούση & Βοσνιάδου, 2007). Η πυκνότητα μαζί με την ποικιλία των σημειωτικών αναπαραστάσεων αποτελούν πηγή των δυσκολιών. Οι μαθητές εκλαμβάνουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ως διαφορετικούς αριθμούς και έτσι θεωρούν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ως ξένα σύνολα (Moseley, 2005). Η κατανόηση των άρρητων κατά βάση μνημονεύεται σε έρευνες που αναφέρονται στο άπειρο και στα όρια. Οι λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών και φοιτητών που συνδέονται με τις άπειρες διαδικασίες και την έννοια του ορίου συνάρτησης ή ακολουθίας θεωρούνται ως ρίζες των δυσκολιών (Tall, 2001 – Tall & Schwarzenberger, 1978 – Cornu, 1983 – Dubinsky et *al.*, 2005a – Dubinsky et *al.*, 2005b – Mamona, 1990 – Roh, 2010 – Christer Bergsten, 2008 – Mastorides & Zachariades, 2004). Όμως έρευνες που εστιάζουν στην κατανόηση και την διδακτική προσέγγιση των άρρητων αριθμών σπανίζουν. Η έννοια του άρρητου αριθμού έχει εγγενείς δυσκολίες για τους μαθητές του Λυκείου και συνδέεται με επιστημολογικά ή γνωστικά εμπόδια. Πιθανά εμπόδια αποτελούν οι διαισθητικές δυσκολίες που παρουσιάσθηκαν στην ιστορία των μαθηματικών κατά την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών, την υπεραριθμησιμότητα των πραγματικών αριθμών, την πυκνότητα και τη συνέχεια (Fischbein et *al.*, 1979 – Sirotic & Zazkis, 2007a – Herscovics, 1989 – Sierpinska, 1994 – Tsamir, 2001 – Tall, 1992 – Πατρώνης, 1996).

Σύμφωνα με έρευνες, πολλοί μαθητές του Λυκείου δεν μπορούν να διακρίνουν ανάμεσα στους ακέραιους αριθμούς, τους ρητούς, τους άρρητους και τους πραγματικούς ούτε να ορίσουν σωστά αυτές τις έννοιες (Hart, 1988 – Fischbein et *al.*, 1995). Οι μαθητές θεωρούν τους ακέραιους, τους δεκαδικούς, τα κλάσματα και τους αριθμούς με το σύμβολο της ρίζας ως σύνολα διαφορετικά μεταξύ τους. Ένα συνηθισμένο λάθος που διαπιστώθηκε περισσότερο σε δεκατετράχρονους μαθητές του Γυμνασίου και λιγότερο σε εικοσάχρονους σπουδαστές των ΤΕΙ είναι ότι εκλαμβάνουν τον αριθμό $\sqrt{4}$ ως άρρητο (Βόσκογλου & Κόσυβας, 2009). Η διάκριση ανάμεσα στις διάφορες κατηγορίες αριθμών παραμένει αδιευκρίνιστη, νεφελώδης και θολή και κάθε φορά εξαρτάται από τις σημειωτικές αναπαραστάσεις. Οι μαθητές είναι δύσκολο να αντιληφτούν έναν αριθμό του οποίου δεν γνωρίζουν τον τρόπο γραφής. Η γνώση των εννοιών του ρητού αριθμού είναι απομονωμένη και ασύνδετη με την ευρύτερη μαθηματική γνώση (Bryan, 2005 – O'Connor, 2001 – Weller et *al.*, 2011). Η βαθειά γνώση των εκπαιδευτικών για τις έννοιες των άρρητων αριθμών αποτελεί προαπαιτούμενο για μια καλή διδασκαλία και την κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές. Γι' αυτόν τον λόγο ορισμένες έρευνες στρέφουν το ενδιαφέρον τους προς τους δασκάλους των μαθηματικών. Θα αναφερθούμε σε ορισμένες από αυτές.

Οι Fischbein, Jehiam, και Cohen (1994, 1995) διεξήγαγαν έρευνες για να εξετάσουν τις γνώσεις 62 μαθητών (των τάξεων 9 και 10) και 29 μελλοντικών εκπαιδευτικών για τους άρρητους αριθμούς. Με βάση ιστορικούς και ψυχολογικούς λόγους, ο Fischbein και οι συνεργάτες του υπέθεσαν ότι η έννοια των άρρητων αριθμών είναι αντιμέτωπη με δύο διαισθητικά εμπόδια: το ένα συνδέεται με την ασυμμετρότητα των άρρητων μεγεθών και το άλλο με την υπεραριθμησιμότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Σε αντίθεση προς τις προσδοκίες, οι μελέτες τους έδειξαν ότι αυτές οι διαισθητικές δυσκολίες δεν εκδηλώνονται στις αντιδράσεις των συμμετεχόντων. Αντί γι' αυτό, διαπίστωσαν ότι οι συμμετέχοντες όλων των επιπέδων δεν ήταν ικανοί να ορίσουν σωστά τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς ή να τοποθετήσουν τους δοσμένους αριθμούς στα σύνολα που ανήκουν. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα εμπόδια δεν είναι πρωτογενή, αλλά οφείλονται κυρίως στην έλλειψη μαθηματικής ωριμότητας την οποία οι συμμετέχοντες δεν κατείχαν.

Σε μια μελέτη από τους Arcavi, Bruckheimer, και Ben-Zvi (1987), που πήραν μέρος εν ενεργεία και εκπαιδευόμενοι καθηγητές μαθηματικών, διαπιστώθηκε ότι πολλοί από αυτούς δυσκολεύονταν να διακρίνουν τους αριθμούς ως ρητούς και άρρητους. Διαπίστωσαν ότι «*μια από τις πηγές της σύγχυσης ανάμεσα στους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς είναι οι κοινή χρήση ρητής προσέγγισης για έναν άρρητο όσο και για τον ίδιο τον άρρητο*» (σελ. 19). Το παράδειγμά τους για μια τέτοια προσέγγιση ήταν η χρήση του 3,14 ή του 22/7 στην περίπτωση του π. Μια μελέτη από τους Peled και Hershkovitz (1999), που περιέλαβε 70 μελλοντικούς δασκάλους των μαθηματικών στο δεύτερο ή τρίτο έτος των σπουδών τους, έδειξε ότι οι φοιτητές γνώριζαν τους ορισμούς και τα χαρακτηριστικά των άρρητων αριθμών, αλλά απέτυχαν σε δοκιμασίες που απαιτούσαν μια ευέλικτη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Θεώρησαν ως κύρια πηγή δυσκολίας τις παρανοήσεις που συνδέονται με τη διαδικασία του ορίου και πρότειναν τον σχεδιασμό ερευνητικών δοκιμασιών που διευκολύνουν την ενσωμάτωση διαφορετικών γνωστικών ενοτήτων.

Οι Sirotic και Zazkis (2007a), βρήκαν ότι πολλοί μελλοντικοί εκπαιδευόμενοι δάσκαλοι των μαθηματικών συνδέουν αποκλειστικά τους άρρητους αριθμούς με τετραγωνικές ρίζες και το π. Επίσης μια άλλη έρευνα από τις Zazkis και Sirotic (2010), με ερωτηματολόγια σε 46 μελλοντικούς δασκάλους μαθηματικών και συνεντεύξεις σε 16 από αυτούς, είχε ως θέμα τις διαφορετικές παραστάσεις που υπεισέρχονται στην κατανόηση των άρρητων αριθμών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα οι συμμετέχοντες δεν στηρίχθηκαν σε μια δεδομένη διαφανή παράσταση (π.χ. 53/83) για να προσδιορίσουν εάν ένας αριθμός είναι ρητός ή άρρητος. Επιπλέον βασίστηκαν στον μικροϋπολογιστή και προτίμησαν τη δεκαδική από την κλασματική παράσταση, ενώ επέδειξαν σύγχυση ανάμεσα στην αρρητότητα και την άπειρη δεκαδική παράσταση, αδιαφορώντας για τη δομή αυτής της παράστασης. Στη διδασκαλία συστήνουν να δοθεί έμφαση στις παραστάσεις και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη συνεξέτασή τους. Ειδικότερα επισημαίνουν ότι η προσεκτική ενασχόληση ανάμεσα στις δεκαδικές και τις άλλες παραστάσεις ενός αριθμού (γεωμετρικές, συμβολικές, κλασματικές και ίσως συνεχή κλάσματα) αποτελούν ένα πλεονέκτημα για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές.

Ο πλατωνικός διάλογος *Μένων* είναι ένα φιλοσοφικό[3] και διδακτικό πείραμα που έχει εξαιρετική μαθηματική σημασία, γιατί σε αυτόν υπεισέρχεται το γεω-

3. Στον εν λόγω διάλογο ο Σωκράτης με τη μαιευτική μέθοδο βοηθεί έναν νεαρό δούλο να ανακαλύψει γεωμετρικές έννοιες τις οποίες δεν διδάχτηκε ποτέ. Ανακαλύπτει έτσι θεμελιώδεις αλήθειες τις οποίες, όπως διατείνεται ο Πλάτων, ο καθένας μπορεί να βρει μέσα του, γιατί κάθε ανθρώπινη

μετρικό πρόβλημα της ασυμμετρότητας (συνδέεται με τον άρρητο αριθμό $\sqrt{8}$), δηλαδή ότι η πλευρά του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν είναι ασύμμετρη προς την πλευρά του αρχικού τετραγώνου. Η σωκρατική προσέγγιση δεν είναι θεωρητική αλλά εποπτική, αφού η αιτιολόγηση γίνεται με μετρήσεις πάνω στο γεωμετρικό σχήμα. Επιπλέον, περιγράφει μια άμεση και απτή απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος με τη βοήθεια του οποίου οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν και απέδειξαν την ασυμμετρότητα της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου. Αυτή είναι η μεγαλύτερη μαθηματική ανακάλυψη στην αρχαιότητα (Maor, 2007).

Επιπλέον, ο δημοφιλής διάλογος *Μένων* θεωρείται υποδειγματική μορφή της σωκρατικής μεθόδου διδασκαλίας[4] (Marchive, 2002). Η σωκρατική μέθοδος δεν καταλήγει πάντα στη βεβαιότητα. Η "σωκρατική ειρωνεία" δημιουργεί μια κατάσταση απορίας, έκπληξης και επιθυμίας για μάθηση (Πετράκης, 2008, 149α7-9). Αυτά αποτελούν ενεργά κίνητρα που υποκινούν τη συναισθηματική δέσμευση των μαθητών στην προσπάθεια για την υπερπήδηση εμποδίων και την πνευματική γέννηση της νέας γνώσης. Τα σύγχρονα μοντέλα διδασκαλίας και μάθησης που κυριαρχούν στην εποχή μας έχουν επηρεαστεί άμεσα ή έμμεσα από τη μαιευτική του Σωκράτη. Οι θεωρίες ενεργητικής μάθησης δίνουν έμφαση στις αρχικές αντιλήψεις και τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, ενώ οι νέες γνώσεις στηρίζονται πάνω στην ενεργοποίηση των ήδη υπαρχουσών γνώσεων. Η «μαιευτική ή σωκρατική μέθοδος», κυρίως όπως αυτή παρουσιάζεται στον πλατωνικό διάλογο *Μένων*, αποτελεί σημείο κριτικής αναφοράς για σύγχρονες θεωρητικές και

ψυχή γνωρίζει όλα τα πράγματα. Σύμφωνα με τους αναπτυσσόμενους ισχυρισμούς η ψυχή μπορεί να ξαναθυμηθεί όσα είχε δει και συναντήσει αλλού, δηλαδή ανακαλεί στη μνήμη γνώσεις που είχε αποκτήσει πριν από τη γέννηση (Πετράκης, 2008 — Vlastos, 1991). Επομένως, η μάθηση είναι ανάμνηση. Το κίνητρο του Πλάτωνα στον *Μένωνα* ήταν κατά βάση φιλοσοφικό (θεωρίες της *ανάμνησης* και των *ιδεών*) και δευτερευόντως μαθηματικό και παιδαγωγικό. Η φιλοσοφική μελέτη του θέματος αυτού δεν περιλαμβάνεται στις επιδιώξεις αυτής της εργασίας.

4. Ο Σωκράτης δεν ήταν μόνο φιλόσοφος αλλά και παιδαγωγός. Στην παιδαγωγική βιβλιογραφία αναφέρεται ως ο πρώτος μεγάλος δάσκαλος που εισήγαγε τη μαιευτική μέθοδο διδασκαλίας. Ο Σωκράτης έθετε στους συνομιλητές του ηθικούς και πολιτικούς προβληματισμούς και τους προκαλούσε να επανεξετάσουν τις πεποιθήσεις τους και να διατυπώσουν νέες. Υπάρχουν πολλές εργασίες που εκθέτουν τα παιδαγωγικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της σωκρατικής μεθόδου (Κανάκης, 1990 – Κονιτσιδιώτης, 1961) και κριτικές μελέτες και ερμηνείες υπό το πρίσμα των διαφόρων επιστημών. Σύμφωνα με τον Seeskin K. (1987) η σωκρατική μέθοδος προκαλεί την επιθυμία για διανοητική δραστηριότητα. Άλλοι θεωρούν τη σωκρατική ως δασκαλοκεντρική μέθοδο (Parlebas, 1980), ως ένα «σχήμα παθητικοποίησης του υποκειμένου», (Paturet, 1998) ή ως μια παραδοσιακή διδακτική τεχνική που δεν επηρεάζει πλέον τη διδασκαλία της σύγχρονης εποχής (Ogilvy, 1971). Στη βιβλιογραφία συγκαταλέγονται εργασίες που αναλύουν τις φιλοσοφικές όψεις της πλατωνικής διδασκαλίας (Brumbaugh, 1970) και άλλες που υποστηρίζουν ότι περιέχει μεγάλες ομοιότητες με την ψυχαναλυτική μέθοδο (Broudy & Palmer, 1965). Τέλος η σωκρατική μέθοδος βρίσκει εφαρμογή σε αλληλεπιδραστικά περιβάλλοντα με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή (Chong et *al.*, 1998).

ερευνητικές προσεγγίσεις στη Διδακτική των Μαθηματικών. Θα μνημονεύσουμε ορισμένες από αυτές.

Σύμφωνα με τον Brousseau (1998) η σωκρατική μαιευτική μέθοδος των ερωταποκρίσεων περιορίζει τις συνδέσεις ανάμεσα στις καλές ερωτήσεις και τις καλές απαντήσεις μόνο σε αυτές που μπορεί να επιτύχει ο ίδιος ο μαθητής. Επιπλέον, η ομαδική μαιευτική παρά την ευρεία χρήση της προκαλεί πολυάριθμα διδακτικά αποτελέσματα, περισσότερο ή λιγότερο αρνητικά. Ο διδάσκων γνωρίζει τη λύση και την αφήνει να ξεδιπλωθεί σταδιακά χρησιμοποιώντας κατά βάση τις δικές του ιδέες και στρατηγικές. Ο κατευθυνόμενος διάλογος είναι γραμμικός και συγκλίνει προς την προκαθορισμένη μέθοδο λύσης που έχει σχεδιαστεί χωρίς ευλυγισία από τον διδάσκοντα. Στο τέλος ο μαθητής, μετά την ακατάπαυστη διαδοχή ενός μεγάλου πλήθους ερωτημάτων, συνήθως κλειστών και ρητορικών, υποχρεώνεται να ανακαλέσει τις προϋπάρχουσες γνώσεις του και να χρησιμοποιήσει τις στρατηγικές λύσης και τα αποτελέσματα, τα οποία είναι γνωστά στο δάσκαλο, διαφέρουν όμως από τη διαίσθησή του. Γι' αυτό η κλασική μαιευτική μέθοδος διδασκαλίας συγκαταλέγεται στις παραδοσιακές μεθόδους (Brousseau,1998).

Ο Piaget (1969) τοποθετεί το Σωκράτη μεταξύ των προδρόμων των ενεργητικών μεθόδων διδασκαλίας υπογραμμίζοντας: «*Το ότι η μαιευτική του Σωκράτη είναι μια επίκληση στην ενεργητικότητα του μαθητή κι όχι στη δουλικότητά του είναι βέβαια κάτι το προφανές...*» (σελ. 104). Ο μαθητής, για να μάθει, πρέπει να ανακαλύψει. Η τελική γνώση είναι δικό του εύρημα αφού μαθαίνει πάντα με την ενεργό σκέψη του πάνω σε προβλήματα που τον θέτουν σε πνευματική εγρήγορση, με τις δικές του διανοητικές δυνάμεις και ικανότητες. Ο Freudenthal (1973) γράφει για τη σωκρατική μέθοδο: «*Θα υποθέσω, όπως έκανε ο Σωκράτης, ότι το θεματικό περιεχόμενο ανακαλύπτεται εκ νέου κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας... Οι μαθητές πρέπει να μείνουν με την εντύπωση ότι το θέμα προέκυψε από τη διδακτική διαδικασία, ότι γεννήθηκε κατά τη διάρκεια του μαθήματος, και ο δάσκαλος ήταν πράγματι μια μαία*» (Freudenthal, σελ. 101). Ο Freudenthal, υποστήριξε μαθησιακές καταστάσεις στην τάξη στις οποίες οι μαθητές με τη βοήθεια του δασκάλου δημιουργούν τα δικά τους μαθηματικά. Ο δάσκαλος εφαρμόζοντας τη μαιευτική τέχνη σαν τη «μαία», τη μαμμή, συμβάλλει στον τοκετό για την επώδυνη γέννηση της γνώσης. Επιπλέον, γνωρίζοντας την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών θα πρέπει να προκαλέσει τους μαθητές να την επανανακαλύψουν. Επομένως, η επανεφεύρεση απαιτεί καθοδήγηση.

Η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να αξιοποιήσει τη σωκρατική μέθοδο κυρίως επειδή ο μαθηματικός διάλογος συμβάλλει στη βελτίωση της κατανόησης και την επίλυση προβλήματος (Fernandez, 1994 – Halmos, 1994 – Kaiser, 2002). Μια εμπλουτισμένη νεο-σωκρατική μέθοδος που δίνει περισσότερη εμπιστοσύνη στις δυνατότητες του μαθητή θα μπορούσε να συμβάλει στη βελτίωση της σχολικής μαθηματικής διδασκαλίας (Loska, 1998). Η ανάπτυξη αυτής της μεθόδου διατηρεί την κύρια μαιευτική ιδέα αλλά, παρέχει στους μαθητές το δικαίωμα να ακολουθούν τους δικούς τους συλλογισμούς και να κάνουν λάθη. Σύμφωνα με την εν λόγω εκδοχή ο δάσκαλος δεν πρέπει να επεμβαίνει στο περιεχόμενο της εργασίας των μαθητών, αλλά να θέτει εύστοχες ερωτήσεις που μπορούν να προσανατολίσουν τη συζήτηση των μαθητών προς γόνιμες κατευθύνεις. Για να γίνει αυτό, ο δάσκαλος πρέπει να κατανοεί τις δομές αλληλεπίδρασης και προτού επέμβει να έχει κάνει πολλές διαγνώσεις.

Οι ερευνήτριες Koellner-Clark κ. ά. (2002) και η Pihlgren (2008) χρησιμοποίησαν τα «σωκρατικά σεμινάρια», όπου οι μαθητές τακτοποιούνται σε κυκλική διάταξη και συζητούν προκλητικά μαθηματικά προβλήματα ή ερωτήματα. Οι μαθητές πριν από τη γενική συζήτηση σκέφτονται τις απαντήσεις τους. Οι συμμετέχοντες απευθύνονται ονομαστικά στους συμμαθητές τους και κρατούν σημειώσεις. Ο ρόλος του δασκάλου είναι κατά βάση να επιλέγει το θέμα, να συντονίζει τη συζήτηση χρησιμοποιώντας προετοιμασμένο ερωτηματολόγιο και να διατυπώνει ερωτήσεις που εστιάζουν στο συζητούμενο θέμα. Επιπλέον, θα πρέπει να διευκρινίζει τις σημαντικές ιδέες που αναδεικνύονται στη συζήτηση, να ενθαρρύνει τους μαθητές να μοιράζονται τις ιδέες τους και να προβάλλουν τα επιχειρήματά τους, καθώς και να αποτρέπει ανεπίτρεπτα σχόλια ή συμπεριφορές. Σε κάθε περίπτωση το μαθησιακό έργο είναι υπόθεση των μαθητών. Τα εν λόγω σεμινάρια αποδείχτηκαν αποτελεσματικά στην προβολή του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών και την ανάπτυξη επικοινωνιακών δεξιοτήτων (Koellner-Clark κ. ά., 2002).

Τα τελευταία χρόνια με σημείο αναφοράς τον *Μένωνα* γνωρίζουν ιδιαίτερη άνθιση ανάλογες έρευνες στον ελλαδικό χώρο. Θα αναφερθούμε σε ορισμένες από αυτές. Ο Φράγκος (1993) εφάρμοσε τη μαιευτική μέθοδο, όπως περιγράφεται στο *Μένωνα*, σε μαθητές του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου. Εισηγείται ένα σχηματικό διδακτικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο ο μαθητής, με τη βοήθεια του δασκάλου, μέσω μιας διαδικασίας διαλεκτικού ελέγχου που περιλαμβάνει την επιβεβαίωση, την αναγνώριση και την απόδειξη του λάθους, προχωρεί στην εκρίζωση και αλλαγή των λανθασμένων απαντήσεων. Σε εργασία των Κοθάλη κ. ά. (1991) για τη μαιευτική μέθοδο του Σωκράτη παρουσιάζεται το αρχαίο κείμενο του *Μένωνα* και η μετάφρασή του και ακολουθεί η κατασκευή αντίστοιχης σειράς ερωταποκρίσεων για ένα άλλο πρόβλημα από το σχολικό βιβλίο μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου. Η διδακτική εφαρμογή της μεθόδου πραγματοποιήθηκε σε τρεις διαφορετικές ομάδες μαθητών του Πειραματικού Γυμνασίου Τρίπολης. Στα συμπεράσματα τονίζεται ότι η γνώση είναι ανάμνηση και ο καθοδηγητικός ρόλος του δασκάλου συνίσταται στην αποκάλυψη και εξουδετέρωση των λανθασμένων γνώσεων των μαθητών. Η Χιονίδου (2002) σκιαγραφεί μια βιωματική διαθεματική δραστηριότητα στο πλαίσιο της «Ζώνης καινοτόμων δράσεων», όπου προτείνεται η αξιοποίηση του κειμένου του *Μένωνα* στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών.

Ορισμένες πρόσφατες έρευνες (Δεληκανλής, 2007 – Δεληκανλής, 2009 – Chassapis, 2008) εξετάζουν τη χρήση διαμεσολαβητικών εργαλείων στην τάξη των μαθηματικών. Στην πρώτη έρευνα ο Δεληκανλής (2007) μελετά τον τρόπο αντιμετώπισης του ιστορικού μαθηματικού προβλήματος του *Μένωνα* από 43 μαθητές της Α΄ Λυκείου με χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας 33% των μαθητών διαπράττουν λάθος γραμμικότητας (αν διπλασιάσουμε την πλευρά, τότε διπλασιάζεται και το εμβαδόν), 28% δίνουν σωστή αλγεβρική λύση (η ζητούμενη πλευρά είναι $\sqrt{8}$), 14 % παρέχουν δεκαδική απάντηση, 4% σωστή λύση οπτικοποίησης, ενώ 21% δεν γνωρίζουν. Στη δεύτερη έρευνα με 40 μαθητές της Α΄ Λυκείου (Δεληκανλής, 2009) εξετάζεται η επίδραση του δικτυωτού τριγωνικού πλέγματος στη μεταβολή των απαντήσεων των μαθητών. Το εν λόγω πλέγμα είναι ειδικό τετραγωνισμένο χαρτί όπου με διαδοχικές εναλλαγές έχουν χαραχτεί οι μισές διαγώνιοι κάθε διεύθυνσης έτσι ώστε κάθε τετράγωνο να είναι χωρισμένο σε δύο ίσα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα (μη ισομετρικός καμβάς). Με τη μεσολάβηση του προαναφερόμενου είδους χαρτιού το ποσοστό των μαθητών που αρχικά διέπραξαν το λάθος γραμμικότητας μειώνεται από 43% σε 30% και αυτών που αρχικά προτίμησαν την αλγεβρική λύση μειώνεται από 30% σε 20% (5% μετατοπίστηκαν προς τη δεκαδική λύση και 5% υπέδειξαν τη λύση στο τριγωνικό πλέγμα). Οι λύσεις οπτικοποίησης έλαβαν 7%. Ακολουθεί ποιοτική ανάλυση των συνεντεύξεων στις οποίες περιγράφονται με λεπτομέρεια οι πιο ενδιαφέρουσες στρατηγικές. Στην τρίτη έρευνα (Chassapis, 2008), έλαβαν μέρος 65 μαθητές ηλικίας 10 ώς 11 ετών οι οποίοι εργάστηκαν ατομικά για τη λύση του ιστορικού προβλήματος του διπλασιασμού του τετραγώνου. Τα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους τρία διαφορετικά είδη χαρτιού (λευκό, τετραγωνισμένο και δικτυωτό τριγωνικό πλέγμα). Η ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών έδειξε την επίδραση του οπτικού φόντου στην υιοθέτηση αντίστοιχων στρατηγικών. Η χρήση του λευκού χαρτιού συνδέθηκε με υπολογισμούς που καταλήγουν σε μια προσεγγιστική αριθμητική απάντηση. Το τετραγωνισμένο χαρτί κατά βάση οδήγησε τους μαθητές στη σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων χωρίς σεβασμό των περιορισμών του προβλήματος (σχεδίασαν ορθογώνιο με διπλάσιο εμβαδόν ή τετράγωνο με τετραπλάσιο εμβαδόν). Στο δικτυωτό τριγωνικό πλέγμα η οπτική σκέψη είναι εμφανής και οι μαθητές εστίασαν τους υπολογισμούς τους αποκλειστικά στα εμβαδά χρησιμοποιώντας τριγωνικές μονάδες. Οι τρεις προαναφερόμενες έρευνες καταδεικνύουν τη σημασία του πολιτιστικού εργαλείου στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και τη λύση του προβλήματος.

Οι Καλδρυμίδου και Τζεκάκη (1995) ερευνούν τη χρήση του ιστορικού κειμένου του *Μένωνα* ως μέσον ανάλυσης των επιστημολογικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών. Ειδικότερα οι εν λόγω ερευνήτριες καταγίνονται με τη μελέτη του ορισμού, τον έλεγχο εγκυρότητας και απόδειξης, τη γενίκευση και την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη αναδεικνύοντας τη σημασία της ιστορικής διάστασης στις αντιπαραθέσεις της σχολικής τάξης και τη «μύηση» των μαθητών στον μαθηματικό πολιτισμό. Αναφέρουν: «*Με την υποστήριξη ιστορικών κειμένων μπορούμε να δημιουργήσουμε διδακτικό περιβάλλον κατάλληλο για τη διαπραγμάτευση ιστορικών, επιστημολογικών και φιλοσοφικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών*» (σελ. 415). Η ενσωμάτωση όχι απλώς διανθιστικών πληροφοριών αλλά ιστορικών κειμένων με μαθηματικά προβλήματα της αρχαίας ελληνικής και παγκόσμιας γραμματείας είναι μια συναρπαστική πρόκληση που, φωτίζοντας τα μονοπάτια σχηματισμού και εκδίπλωσης των εννοιών στον χρόνο, από εποχή σε εποχή και από πολιτισμό σε πολιτισμό, εμπλουτίζει την καθημερινή διδασκαλία. Μπορεί έτσι να κεντρίσει το ενδιαφέρον των σημερινών μαθητών, να τούς καταστήσει απαιτητικούς ερευνητές σε μια ανθρώπινη δραστηριότητα και να αποτελέσει ένα συμπληρωματικό συστατικό για την βαθύτερη μαθηματική κατανόηση. Προς αυτή την κατεύθυνση επιδιώκει να καταθέσει τη συνεισφορά της η παρούσα εργασία.

Ερευνητική σκηνοθεσία

Η φιλοσοφική θεώρηση: Πρόθεσή μας δεν είναι ούτε να επαινέσουμε ούτε να απορρίψουμε τη σωκρατική μέθοδο ή να παρουσιάσουμε μια θεωρία της ασυμμετρότητας. Σε αντίθεση προς την πλατωνική θεωρία, αντιλαμβανόμαστε τα μαθηματικά ως δημιουργήματα της σκέψης που επινοούνται από τον ίδιο τον άνθρωπο, όχι αυθαίρετα, αλλά με βάση τα υπάρχοντα μαθηματικά αντικείμενα και τις ανάγκες της επιστήμης και της καθημερινής ζωής. Οι μαθηματικές εφευρέσεις είναι ένα μέρος του πολιτισμού. Η εν λόγω αντίληψη παραπέμπει στις σύγχρονες κοινωνικο-κονστρουκτιβιστικές απόψεις σύμφωνα με τις οποίες η μαθηματική γνώση είναι μια ανθρώπινη κοινωνική δραστηριότητα, η οποία δεν αποτελείται από αιώνιες, αντικειμενικές και απόλυτες αλήθειες, αλλά είναι προσωρινή, αβέβαιη και αναθεωρήσιμη (Ernest, 1991 – Davis & Herch, 1980 – Bauersfeld, 1995 – Steffe et *al*., 1996 – Potari & Jaworski 2002). Στο πλαίσιο αυτής της αντίληψης η εκφώνηση του προβλήματος πρέπει να είναι ανοιχτή, να μη «προδίδει» άμεσα στους μαθητές τη λύση ούτε τα μαθηματικά εργαλεία που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν (Arsac & Mante, 2007 – Kosyvas, 2010 – Κόσυβας, 1996).

Στόχος της εργασίας: Κύριος στόχος της εργασίας μας είναι η διερεύνηση των αυθόρμητων αντιλήψεων των δωδεκάχρονων μαθητών που προετοιμάζουν την έννοια του άρρητου αριθμού καθώς και η επισήμανση των αντίστοιχων αναπαραστάσεων, προτού δεχτούν συστηματική διδασκαλία. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας ως διδακτικό ερέθισμα το ιστορικό πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου, αναμένουμε ότι θα αναδειχθεί η αντίθεση ανάμεσα στην αριθμητική και τη γεωμετρική προσέγγιση και το πιθανό διαισθητικό πλησίασμα της ασυμμετρότητας στη σύγχρονη σχολική τάξη.

Η ανοιχτή μαθηματική δραστηριότητα: Οργανώσαμε μια κατάσταση προβληματισμού, έρευνας και επικοινωνίας στην τάξη με την πρόθεση όχι να διδάξουμε, αλλά κυρίως να προκαλέσουμε τη δέσμευση των μαθητών στη δική τους δραστηριότητα. Η εκφώνηση του προβλήματος που τέθηκε στην τάξη για ομαδοσυνεργατική επίλυση σε σύγχρονη διατύπωση είναι η ακόλουθη: *Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με 2 εκατοστά και έπειτα ένα δεύτερο με διπλάσιο εμβαδόν. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν από το εμβαδόν ενός δεδομένου τετραγώνου με πλευρά 2 εκατοστών;* Βεβαίως το πρόβλημα του *Μένωνα* θα μπορούσε να αντιστραφεί, δηλαδή από ένα τετράγωνο να καταλήξουμε σε ένα δεύτερο τετράγωνο με μισό εμβαδόν. Στην εν λόγω έρευνα χωρίσαμε το διδακτικό σενάριο στην τάξη σε τρεις διαδοχικές χρονικές φάσεις: την ατομική έρευνα, τη συνεργασία στις ομάδες με τη σύνταξη διαφανειών και τη μαθηματική συζήτηση με ολόκληρη την τάξη (Κόσυβας, 2011). Οι μαθητές αναλαμβάνουν το ρόλο του ερευνητή και κρίνουν οι ίδιοι τι είναι σωστό ή λάθος.

Πλαίσιο έρευνας και συμμετέχοντες: Ο εν λόγω πειραματισμός πραγματοποιήθηκε στις 21 Ιουνίου 2004 στην πρώτη τάξη του Ευρωπαϊκού Σχολείου Βρυξελλών III (21 μαθητές ελληνικής καταγωγής, ηλικίας 12 ετών περίπου, χωρισμένοι σε 5 ομάδες). Ο εκπαιδευτικός ήταν καθηγητής μαθηματικών του σχολείου. Οι μαθητές προέρχονταν κατά βάση από τα ανώτερα στρώματα υπαλλήλων των υπηρεσιών της Ευρωπαϊκής Κοινότητας. Χρησιμοποιήθηκαν δύο διαδοχικές διδακτικές ώρες των 50 λεπτών. Η πρώτη διδακτική ώρα αφορούσε την ατομική και συλλογική έρευνα και τη σύνταξη διαφανειών από τους μαθητές. Η δεύτερη αφιερώθηκε στην ανοιχτή μαθηματική συζήτηση στην τάξη.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων: Με βιντεοσκόπηση καταγράφηκε ο πειραματισμός με όλες τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και τους μαθητές, καθώς και στις ομάδες των μαθητών κατά τη διάρκεια της συνεργασίας τους. Επίσης, λήφθηκαν υπόψη οι γραπτές σημειώσεις κάθε μαθητή κατά τη διάρκεια της λύσης του προβλήματος. Η ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και αφορά κυρίως τη λεπτή παρατήρηση των μαθηματικών αλληλεπιδράσεων δασκάλου-μαθητών και μαθητών-μαθητών. Εξετάζουμε κυρίως την ανάπτυξη της ερμηνείας και του συλλογισμού κατά τη διάρκεια της κοινής δραστηριότητας (Erickson, 1986 – Cobb et *al.*, 2003 – Collins et *al.*, 2004 – Kosyvas, 2005 – Κόσυβας, 2011).

Παρουσίαση και συζήτηση των αποτελεσμάτων

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε τους συλλογισμούς των δωδεκάχρονων μαθητών όπως αυτοί αποτυπώνονται στις μαθηματικές αλληλεπιδράσεις της τάξης. Οι αυθόρμητες αντιλήψεις των μαθητών ταξινομήθηκαν σε τρεις κατηγορίες.

Το κλασικό λάθος στον «Μένωνα» και στους σημερινούς μαθητές: αν διπλασιάσουμε την πλευρά, τότε διπλασιάζεται το εμβαδόν.

Κατά τη διάρκεια της ομαδικής έρευνας του προβλήματος με στόχο τη σύνταξη μιας κοινής διαφάνειας (πρώτη διδακτική ώρα), αρχικά η πλειονότητα των μαθητών της τάξης πίστευε ότι εάν διπλασιαστεί το μήκος των πλευρών του τετραγώνου, τότε θα διπλασιαστεί και το εμβαδόν του. Οι μαθητές νόμιζαν ότι αν η πλευρά των 2 cm γίνει 4 cm, τότε το εμβαδόν των 4 cm^2 θα γίνει 8 cm^2. Στα ατομικά φύλλα εργασίας τους εκδηλώθηκαν μαζικά αυτές οι αυθόρμητες ιδέες. Αυτός ο λανθασμένος συλλογισμός των μαθητών είναι παρόμοιος με αυτόν που περιγράφεται στον *Μένωνα* (Πετράκης, 2008, 82α-82δ). Χρησιμοποιώντας σύγχρονα μαθηματικά σύμβολα θα μπορούσαμε να παραστήσουμε το συλλογισμό τους με τον ακόλουθο τρόπο:

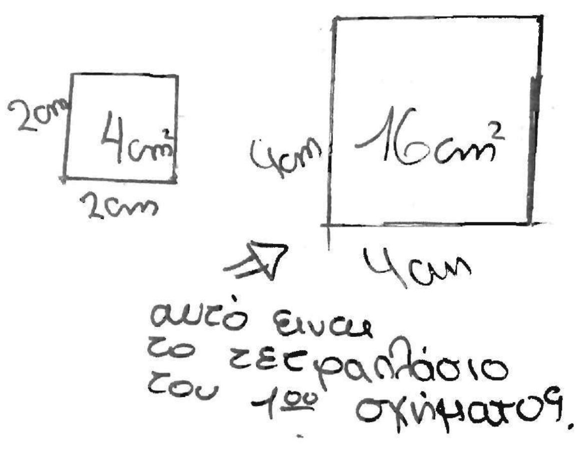
$$\begin{cases} 2\times 2 = 4 & (\text{μήκος: σωστό}) \\ 4^2 = 4\times 4 = 16 \neq 8 & (\text{εμβαδόν: λάθος}) \end{cases}$$

Κατά την πρώτη φάση της έρευνας στις ομάδες η πλειονότητα των μαθητών είχε τη διαισθητική αντίληψη ότι ο διπλασιασμός του μήκους της πλευράς του τετραγώνου οδηγεί αυτόματα και στο διπλασιασμό του εμβαδού. Είχαν την τάση να βλέπουν κατά βάση αναλογικές σχέσεις και να εφαρμόζουν την αναλογία ακόμα και σε καταστάσεις που η χρήση της είναι αναιτιολόγητη. Αυτή η συμπεριφορά στην αρχή φαινόταν αυθόρμητη και σχεδόν ασυνείδητη. Η επίμονη παρουσία αυτού του φαινομένου ονομάστηκε «ψευδαίσθηση γραμμικότητας» και έχει επισημανθεί σε πολλές έρευνες (De Bock et *al.* 2002 – Van Dooren et *al.* 2005).

Ένα απόσπασμα διαλόγου από την τάξη είναι το ακόλουθο:

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: ... *Θα εξετάσουμε την εργασία της ομάδας Α. Βλέπετε το πρώτο μέρος της διαφάνειας της ομάδας Α. Συζητήστε και σκεφτείτε. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Είναι σωστή η προτεινομένη λύση; (Η εργασία της ομάδας Α προβάλλεται και όλοι οι μαθητές της τάξης μπορούν να διαβάσουν τη σύνταξη της ομάδας).*

Το μέρος της διαφάνειας που προβλήθηκε για να συζητηθεί είναι το ακόλουθο:



ΜΑΘΗΤΕΣ: *Όχι. Λάθος !*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Όχι έτσι. Πρέπει να εξηγήσετε τη γνώμη σας. Συζητήστε και σκεφτείτε.*

ΤΖΕΣΙΚΑ: *Εγώ νομίζω ότι η λύση που βλέπουμε στη διαφάνεια είναι σωστή.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Δηλαδή;*

ΤΖΕΣΙΚΑ: *Κατασκεύασαν το σωστό τετράγωνο και βρήκαν το μήκος της πλευράς του.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που ψάχνουμε;*

ΤΖΕΣΙΚΑ: *Είναι 4 cm.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Τι λένε οι μαθητές των άλλων ομάδων;*

ΑΛΙΚΗ: (Ομάδα Δ) *Δεν συμφωνώ. Δεν είναι 4 cm η πλευρά του τετραγώνου που ζητάμε.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Δηλαδή;*

ΑΛΙΚΗ: *Δεν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα άλλο τετράγωνο με διπλάσια πλευρά, αλλά με διπλάσιο εμβαδόν.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Δηλαδή η ομάδα Α μάς είπε ότι αν διπλασιάσουμε την πλευρά, τότε θα διπλασιαστεί το εμβαδόν;*

ΛΕΩΝΙΔΑΣ: *Όχι! Το 16 είναι το τετραπλάσιο του 4. Αν διπλασιάσουμε την πλευρά, το εμβαδόν δεν διπλασιάζεται.*

ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ: (Ομάδα Β) *Πολλαπλασίασαν τις πλευρές με το 2 για να βρουν το διπλάσιο εμβαδόν. Πρώτα θα έπρεπε να βρουν το εμβαδόν και έπειτα την πλευρά. Έκαναν το αντίθετο. Διπλασίασαν την κάθε πλευρά.*

ΣΤΕΡΓΙΟΣ: (Εξηγεί την προβαλλόμενη διαφάνεια) *Δεν καταλαβαίνω. Πώς βρίσκουν εδώ 16 cm^2, ενώ η πλευρά είναι 2,8 cm.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Θα μας το εξηγήσουν.*

ΜΑΘΗΤΕΣ: (από την ομάδα Α): *Δεν βρήκαμε αυτό!*

ΜΑΡΙΑ: *Το εμβαδόν του τετραγώνου που πρέπει να κατασκευάσουμε δεν είναι 16, είναι 8.*

ΜΙΧΑΛΗΣ: (από την ομάδα Α): *Κύριε, δεν είναι αυτή η λύση μας !*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Ποιος θα παρουσιάσει τη λύση της ομάδας;*

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι δύο από τους μαθητές της ομάδας Α στις εσωτερικές συζητήσεις είχαν ταχθεί υπέρ του διπλασιασμού της πλευράς του αρχικού τετραγώνου, ενώ οι άλλοι δύο ήταν αντίθετοι. Η ερμηνεία του ανωτέρω σχήματος από τις διμελείς υποομάδες ήταν διαφορετική. Το ακόλουθο απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό.

ΣΤΕΡΓΙΟΣ: (Σηκώνεται για να εξηγήσει). *Στο πρώτο μέρος της διαφάνειας γρά-*

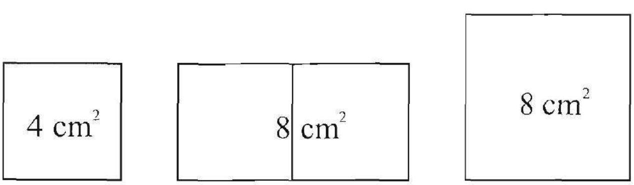
φουν το διπλό εμβαδόν και στη δεύτερη το τετραπλό.

ΜΙΧΑΛΗΣ: (από την ομάδα Α) *Δεν κατάλαβες. Δεν το γράψαμε αυτό για λύση του προβλήματος. Απλώς λέμε ότι αν διπλασιάσουμε τις πλευρές του τετραγώνου, τότε το εμβαδόν τετραπλασιάζεται. Επίσης γράψαμε στη διαφάνεια ότι «το εμβαδόν του δεύτερου τετραγώνου είναι το τετραπλάσιο του πρώτου». Αυτό είναι ένα σωστό συμπέρασμα και όχι η λύση που γράψαμε στο δεύτερο μέρος της διαφάνειας.* (Την παρουσιάζουμε λίγο παρακάτω)

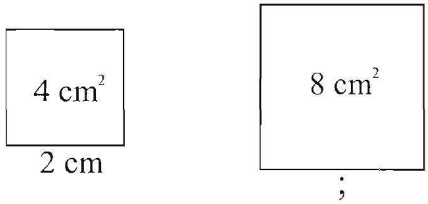
Ο αναλογικός τρόπος συλλογισμού αποδείχθηκε εξαιρετικά ισχυρός κατά την πρώτη φάση της εργασίας στις ομάδες, ενώ σταδιακά εγκαταλείφθηκε. Επίσης στη φάση της ανοιχτής μαθηματικής συζήτησης σε ολόκληρη την τάξη παρατηρήθηκε ελάχιστα. Η συζήτηση στο εσωτερικό των ομάδων βοήθησε ώστε οι μαθητές που είχαν κάνει λάθος να αλλάξουν την άποψή τους. Διαπίστωσαν ότι εάν διπλασιάσουμε το μήκος των πλευρών του τετραγώνου, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου δεν διπλασιάζεται αλλά τετραπλασιάζεται, εφόσον $2^2=4$, ενώ $4^2=16$. Το κλασικό λάθος που παρουσιάζεται στον *Μένωνα* ξεπεράστηκε με τη γόνιμη αλληλεπικοινωνία στις τετραμελείς ομάδες και σε ολόκληρη την τάξη. Η πρόοδος των μαθητών απαιτεί την κατανόηση των αναλογικών και μη αναλογικών σχέσεων και τη διάκριση διδακτικών καταστάσεων που μπορούν να περιγραφούν σύμφωνα με το μοντέλο της γραμμικής συνάρτησης από αυτές που δεν μπορούν.

Η αριθμητική προσέγγιση του προβλήματος: προσεγγιστικά μαθηματικά

Η αριθμητική προσέγγιση συνίσταται στον αυθόρμητο χειρισμό των αριθμητικών δεδομένων του προβλήματος με στόχο την αριθμητικοποίηση του μήκους της πλευράς του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν. Όταν παραθέσουμε το αρχικό τετράγωνο δίπλα του, τότε σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο. Το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου συνίσταται στην κατασκευή ενός τετραγώνου το οποίο να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου (παρακάτω σχήμα). Πρέπει επομένως να μετασχηματίσουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε ένα τετράγωνο που να έχει το ίδιο εμβαδόν.



Οι μαθητές πρέπει να βρουν ένα τετράγωνο διπλάσιου εμβαδού από αυτό που έχει πλευρά 2 cm. Με άλλα λόγια, θέτουμε το ακόλουθο ερώτημα: «*Ποια είναι η πλευρά αυτού του νέου τετραγώνου;*».



Ο αριθμός που βρήκαν οι μαθητές αντιστοιχεί στο μήκος της πλευράς του ζητούμενου τετραγώνου. Αφού αυτοί προσδιόρισαν την πλευρά σχεδίασαν το ζητούμενο τετράγωνο. Κατά τη διάρκεια της ατομικής έρευνας οι μαθητές έκαναν τουλάχιστον μια δοκιμή. Μερικοί περίμεναν να βρουν έναν ακέραιο αριθμό. Ίσως να διέθεταν τη διαισθητική αντίληψη ότι όλα τα μήκη είναι σύμμετρα (η υπόθεση που προκάλεσε την κρίση στους Πυθαγόρειους). Εφόσον ήταν αδύνατο να βρουν έναν ακέραιο ή ρητό αριθμό (ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά είναι άρρητος αριθμός), έβγαλαν το συμπέρασμα ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Κύριε ! Δεν μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα. Είναι άλυτο.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Γιατί;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Γιατί 2×2=4 και 3 ×3=9.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Λοιπόν ?*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Δεν βρίσκουμε 8.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Γιατί ?*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Δεν υπάρχει κανένας αριθμός για να βρούμε 8. Το πρόβλημα δεν λύνεται.*

Οι μαθητές έπρεπε να βρουν το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με εμβαδόν 8. Χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα έβλεπαν ότι οι απαντήσεις τους παρέπεμπαν στην τετραγωνική ρίζα του 8, αφού το σύμβολο $\sqrt{\ }$ αποτελεί ένα εργαλείο του πολιτισμού που γνώριζαν κυρίως από την επαφή τους με τον μικροϋπολογιστή τσέπης. Αλλά στην αρχή οι περισσότεροι πίστευαν ότι η λύση έπρεπε να είναι ακέραιος αριθμός, επειδή διακατέχονταν από την πρωτογενή διαισθητική αντίληψη ότι κάθε μήκος μπορεί να μετρηθεί ακριβώς και να εκφραστεί από έναν ακέραιο αριθμό. Στη συνέχεια δοκίμασαν ενδιάμεσους αριθμούς ανάμεσα στο 2 και το 3 όπως για παράδειγμα το 2,5.

Οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιώντας την αριθμομηχανή έκαναν πολλές αυθόρμητες δοκιμές με δεκαδικούς αριθμούς. Έκαναν υποθετικές εκτιμήσεις για το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν και πολλαπλασιάζοντας δύο ίδιους αριθμούς (ή υψώνοντας στο τετράγωνο) προσπαθούσαν να βρουν τον αριθμό 8, δηλαδή το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου. Ορισμένοι μαθητές δεν ακολούθησαν μια τυφλή μέθοδο δοκιμής και πλάνης, αλλά εργάστηκαν συστηματικά.

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα, οργανωμένα σε ζεύγη, τα οποία βρήκαν με μικροϋπολογιστή τσέπης:

1ο	2ο	3ο	4ο	
$2^2=4$	$(2,8)^2=7,84$	$(2,82)^2=7,9524$	$(2,828)^2=7,997584$	…
$3^2=9$	$(2,9)^2=8,41$	$(2,83)^2=8,0089$	$(2,829)^2=8,003241$	

Η διαδικασία τη προσεγγιστικής απάντησης στο πρόβλημα παραπέμπει στο δεύτερο στάδιο του πλατωνικού διαλόγου (Πετράκης, 2008, 82ε-83), με τη διαφορά ότι δεν υποστηρίζεται από γεωμετρική εποπτεία. Οι εν λόγω μαθητές, χωρίς να το εκφράζουν με ανισοτικές σχέσεις, εσωκλείουν την τετραγωνική ρίζα του 8 ανάμεσα σε δύο τερματιζόμενους δεκαδικούς αριθμούς ξανά και ξανά (κιβωτισμός) και δείχνουν να αντιλαμβάνονται ότι αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον και δεν σταματά ποτέ. Κάνοντας αριθμητικούς χειρισμούς, βρήκαν διαδοχικές προσεγγίσεις της τετραγωνικής ρίζας του 8 : 2,8, 2,82, 2,828. Δηλαδή :

$$\sqrt{8} \approx 2{,}8 \quad \sqrt{8} \approx 2{,}83\,, \ \sqrt{8} \approx 2{,}828\,.$$

Οι μαθητές καταγίνονται με μελετημένες δοκιμές. Κάθε νέα δοκιμή είναι αιτιολογημένη, γίνεται με βάση την προηγούμενη και τη βελτιώνει. Προοδευτικά οι διαδοχικές δοκιμές αναπροσαρμόζονται και πλησιάζουν όλο και περισσότερο το μήκος της πλευράς του ζητούμενου τετραγώνου.

Από τις 5 ομάδες οι 4 έγραψαν μία τουλάχιστον αριθμητική απάντηση στη συλλογική διαφάνεια. Αρκέστηκαν σε μια δεκαδική προσεγγιστική τιμή, επειδή ίσως η εργασία τους έπρεπε να τελειώσει με μια αριθμητική λύση. Η εμπιστοσύνη τους προς τις αριθμητικές μετρήσεις είναι αξιοσημείωτη. Πίστευαν ότι οι δεκαδικοί αριθμοί είναι αυτοί που προσφέρονται για τις μετρήσεις μηκών. Η αριθμομηχανή είναι ένα εργαλείο που παρέχει ευχέρεια στους υπολογισμούς, οικονομία χρόνου, μειώνει την πιθανότητα λάθους και αυξάνει τη δυνατότητα πολλαπλών δοκιμών. Ωστόσο η εκατοστοποίηση των αριθμών αποτελεί ένα εγγενές μειονέκτημα: οι αριθμοί παριστάνονται σε δεκαδική μορφή, και μάλιστα με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Οι περισσότεροι μαθητές δεν προβληματίστηκαν για το είδος του αριθμού που προκύπτει με το πάτημα ενός κουμπιού στην αριθμομηχανή. Οι σημειωτικές παραστάσεις ήταν αδιαφανείς, αφού απέκρυπταν την ύπαρξη μιας επ' άπειρον διαδικασίας (πιθανή απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση, περιοδική ή όχι). Δεν μπορούσαν να αμφισβητήσουν τον παρεχόμενο αριθμό και να σκεφτούν ότι ενδεχομένως θα μπορούσε να είναι μη δεκαδικός. Οι μαθητές δεν γνώριζαν ότι δεν υπάρχει πεπερασμένος δεκαδικός αριθμός ίσος με την τετραγωνική ρίζα του 8. Ούτε χρησιμοποίησαν τη λέξη «άρρητος» ούτε πίστευαν ότι η ακριβής τιμή της πλευράς του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν είναι η τετραγωνική ρίζα του 8, δηλαδή ο αριθμός $\sqrt{8}$. Έδειχναν να πιστεύουν ότι η ακριβής τιμή είναι ένας δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. Ήταν αδύνατο να διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα στις ρητές προσεγγίσεις των άρρητων αριθμών και τους ίδιους τους άρρητους (Arcavi et *al.*, 1987).

Ωστόσο, έλεγαν ότι πρέπει να βρουν την τετραγωνική ρίζα του 8 για να καταλήξουν στη ζητούμενη πλευρά. Έτσι έκαναν πολλούς υπολογισμούς. Στις σημειώσεις των παιδιών υπήρχαν πολλές δοκιμές με επιτυχίες και αποτυχίες. Η συζήτηση συνεχίστηκε σε ολόκληρη την τάξη: Τα ακόλουθα επιχειρήματα αναδεικνύουν τις αριθμητικές στρατηγικές των μαθητών.

ΑΛΙΚΗ: *Το εμβαδόν του πρώτου τετραγώνου είναι 4 cm^2 και το εμβαδόν του δεύτερου τετραγώνου είναι 8 cm^2. Επομένως πρέπει να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του 8, δηλαδή να μαντέψουμε έναν αριθμό που αν τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του θα βρούμε 8.*

ΜΑΡΙΑ: *Το πρώτο τετράγωνο έχει εμβαδόν 2×2=4 cm^2 και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν, δηλαδή 8 cm^2. Πρέπει να βρούμε τις πλευρές του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν. Υπολογίζουμε την τετραγωνική ρίζα του 8. Κάθε πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος 2,8 cm. Αυτή είναι η ακριβής τιμή.*

ΣΤΕΡΓΙΟΣ: *Ο φίλος μας ο Γιάννης βρήκε την απάντηση. Στην αρχή δεν καταλάβαμε καλά πώς το βρήκε. Δοκιμάσαμε πολλούς αριθμούς. Ο αριθμός 2,8 είναι η σωστή λύση. Εφαρμόσαμε μια άλλη μέθοδο. Η τετραγωνική ρίζα του 8 είναι 2,8 εφόσον 2,8×2,8=7,84. Επομένως βρήκαμε την πλευρά και μπορούμε να γράψουμε ότι η τετραγωνική ρίζα του 8 είναι ίση με 2,8. Βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα με την ομάδα Ε.*

ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ: *Βρήκαμε, όπως και οι άλλοι, την τετραγωνική ρίζα του 8. Πρώτα βρήκαμε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά 2 cm. Πολλαπλασιάσαμε τη μία πλευρά με την άλλη και βρήκαμε 4 cm^2. Λοιπόν το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου είναι 8 cm^2. Στη συνέχεια ότι, είπαμε για να βρούμε την πλευρά του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν, πρέπει να υπολογίσουμε ... την τετραγωνική ρίζα του 8. Και το κάναμε ...*

Είδαμε ότι, όταν πολλαπλασιάζαμε 2,8×2,8, υπήρχε μεγάλη διαφορά από το 8, γι' αυτό βρήκαμε τελικά 2,82 και αυτό το αποτέλεσμα είναι λεπτομερειακό και πιο ακριβές ...

Είναι φανερό ότι οι μαθητές μετέτρεψαν το πρόβλημα σε αριθμητικό: πρώτα έδωσαν μια αριθμητική προσέγγιση του μήκους της πλευράς (2,8 ή 2,82) και ύστερα έκαναν πρόχειρη σχεδίαση (χωρίς κανόνα και διαβήτη). Σε σχετική έρευνα πάνω στο ίδιο πρόβλημα στις απαντήσεις των μαθητών της πέμπτης και της έκτης δημοτικού που χρησιμοποίησαν συνηθισμένο λευκό χαρτί κυριάρχησαν οι υπολογιστικές αριθμητικές διαδικασίες (Chassapis, 2008)[5].

5. Σε άλλη έρευνα πάνω στο ιστορικό πρόβλημα του Μένωνα 28% των μαθητών της Α΄ Λυκείου χρησιμοποίησαν το Πυθαγόρειο θεώρημα και ανέφεραν ότι η ζητούμενη πλευρά έχει μήκος $\sqrt{8}$ (Δε-

Είναι φανερό ότι οι αριθμητικές στρατηγικές επικρατούν στις εργασίες των παιδιών. Οι απαντήσεις των μαθητών διαφέρουν στο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων. Επιπλέον οι συλλογισμοί των παιδιών για την προσέγγιση και την έννοια του απείρου είναι ενδιαφέροντες:

ΡΩΜΑΝΟΣ: *Βρήκαμε 2,8×2,8 =7,84. Αυτό το αποτέλεσμα είναι μια προσέγγιση του* $\sqrt{8}$.

ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ: *Βρήκαμε 2,82 όπου το αποτέλεσμα είναι λεπτομερειακό και πιο ακριβές. Είναι μια καλή προσέγγιση του* $\sqrt{8}$.

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ: *Ορισμένοι έγραψαν :* $\sqrt{8}=2{,}828\ldots$ *Τα δεκαδικά ψηφία είναι αμέτρητα, αλλά ο δεκαδικός αριθμός αλλάζει λίγο. Τις τελείες δεν τις βρίσκω σωστές.*

ΔΩΡΑ: *Κατά τη γνώμη μου το σωστό είναι* $\sqrt{8}=2{,}828\ldots$ *γιατί υπάρχουν και άλλα δεκαδικά ψηφία. Πρέπει να βρούμε όλα τα ψηφία και να σταματήσει ο δεκαδικός αριθμός.*

Οι δυσκολίες των μαθητών αυτής της ηλικίας είναι αναμενόμενες και αιτιολογημένες. Οι συλλογισμοί των μαθητών πάνω στην απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση και την προσέγγιση του αποτελέσματος διατυπώθηκαν κατά τη γενική συζήτηση στην τάξη. Στη συνέχεια συγκεντρώνουμε τις ιδέες που σταχυολογήσαμε :

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Τι σημαίνουν οι τελείες στον αριθμό* $\sqrt{8}=2{,}828\ldots$ *?*

ΦΙΛΟΜΕΝΑ: *Θα μπορούσαμε να πούμε ότι παριστάνουν το "περίπου".*

ΕΛΛΗ: *Μπορούμε να κάνουμε στρογγυλοποίηση και έτσι να έχουμε μια προσέγγιση του αριθμού.*

ΛΕΩΝΙΔΑΣ: *Αν δεν υπήρχαν οι τελείες, το αποτέλεσμα θα ήταν ακριβές.*

ΓΙΑΝΝΗΣ: *Οι τελίτσες δηλώνουν κάτι το ασυμπλήρωτο, σημαίνουν κάτι που δεν έχει τελειώσει.*

ΦΙΛΟΜΕΝΑ: *Οι τελίτσες σημαίνουν ότι ο αριθμός δεν είναι τελειωμένος. Συνεχίζεται.*

ΣΕΒΙΝΑ: *Ο αριθμός συνεχίζεται.*

ΡΩΜΑΝΟΣ: *Όταν γράφουμε 2,82... ο αριθμός είναι ασυμπλήρωτος. Έχει πολλά*

ληκανλής, 2007). Διδακτικό πείραμα που πραγματοποιήσαμε στη Β΄ τάξη του Βαρβακείου Λυκείου με το ίδιο πρόβλημα (2010-2011) έδειξε ότι από τους 26 μαθητές της τάξης οι 22 έδωσαν ως απάντηση για το μήκος τη ζητούμενης πλευράς τον αριθμό $2\sqrt{2}$ ή $\sqrt{8}$ και προχώρησαν στην γεωμετρική κατασκευή του ζητούμενου τετραγώνου. Ωστόσο, ο εν λόγω χειρισμός άφηνε δυσεξιχνίαστη την εννοιολογική φύση της αρρητότητας. Αξιοσημείωτο είναι ότι κανένας δεν έδωσε την τιμή της πλευράς με δεκαδική προσέγγιση. Σε ανάλογη έρευνα πάνω στο ίδιο πρόβλημα οι περισσότεροι φοιτητές των μαθηματικών τμημάτων και καθηγητές των μαθηματικών, αφού πρώτα υπολόγισαν αλγεβρικά τη διαγώνιο του αρχικού τετραγώνου, επέλεξαν αυτό το μήκος ($x\sqrt{2}$) ως πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου που θα έχει διπλάσιο εμβαδόν (Καλδρυμίδου & Τζεκάκη, 1995).

δεκαδικά ψηφία. Ο αριθμός είναι άπειρος. Δεν τελειώνει ποτέ.

ΧΡΙΣΤΙΝΑ: *Χωρίς τελίτσες έχουμε έναν αριθμό τελειωμένο, αλλά με τις τελίτσες το μήκος είναι άπειρο.*

ΜΙΧΑΛΗΣ: *Δεν πρέπει να βάλουμε τις τελίτσες, γιατί το μήκος είναι καθορισμένο, συγκεκριμένο. Είναι η διαγώνιος. Τα σημεία είναι αμελητέα!*

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ: *Το 2,82 έχει τα βασικά ψηφία. Τα άλλα ψηφία είναι τα ίδια δηλαδή 2,828282... και δεν είναι τίποτα. Είναι σκόνη !*

ΓΙΑΝΝΗΣ: *Οι τελίτσες παριστάνουν το άγνωστο. Είναι αυτό που συμπληρώνει τον αριθμό!*

ΧΡΗΣΤΟΣ: *Ο αριθμός συνεχίζεται. Έχει και άλλα ψηφία τα οποία είναι πολυάριθμα, ίσως είναι αμέτρητα...*

ΔΩΡΑ: *Αν δεν βάζαμε τις τελείες, θα κάναμε λάθος. Το εμβαδόν του τετραγώνου δεν θα ήταν σωστό. Θα το βρίσκαμε λάθος, χωρίς να ξέραμε γιατί.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Ορισμένοι βρήκαν 2,8, άλλοι 2,82 και άλλοι 2,82... Κρατάμε αυτά τα αποτελέσματα και συνεχίζουμε.*

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, η ουσιαστική πραγμάτευση του ερωτήματος «*Τι σημαίνουν οι τελείες στον αριθμό* $\sqrt{8}=2{,}828...$?» αποδεικνύεται δύσκολη για τους δωδεκάχρονους μαθητές, συνιστά ένα «επιστημολογικό εμπόδιο» η υπέρβαση του οποίου θα μπορούσε να καταλήξει σε μαθησιακή πρόοδο. Καθώς η προϋπάρχουσα γνώση δρα ανασταλτικά για τη νέα γνώση η διεύθυνση της τάξης δεν είναι εύκολη υπόθεση. Στο κοινωνικό επίπεδο, διαπιστώσαμε ότι οι μαθητές της τάξης συλλειτουργούσαν σε ένα ανεπτυγμένο επικοινωνιακό κλίμα, αλλά είχαν δυσκολίες στη διευθέτηση των διαφωνιών. Ορισμένοι επαναλαμβάνουν παραπλήσιες ιδέες και άλλοι εκθέτουν διαφορετικές, ενώ η κριτική συνεξέτασή τους δεν τελεσφορεί, καθώς οι μαθητές της τάξης αδυνατούν να εμπλακούν σε μια γνωστική σύγκρουση που η δυναμική της προάγει την κατανόηση της έννοιας του αριθμού. Ωστόσο, οι μαθητές, μπροστά στην αναγκαιότητα να δώσουν μια αριθμητική απάντηση στην ερώτηση που τέθηκε, παίρνουν το λόγο αυθόρμητα χρησιμοποιώντας και άτυπες εκφράσεις, οι οποίες είναι οικείες και κατανοητές στους ίδιους. Σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο οι τελίτσες της ισότητας $\sqrt{8}=2{,}828...$ θεωρούνται άχρηστες (*Οι τελίτσες είναι αμελητέες! Είναι σκόνη!*). Οι εκφράσεις όπως (*Οι τελείες παριστάνουν το "περίπου"* και *Μπορούμε να κάνουμε στρογγυλοποίηση και έτσι να έχουμε μια προσέγγιση του αριθμού*) ίσως μαρτυρούν μια δυσκολία αποδοχής του απείρως μικρού. Οι ιδέες που διατυπώθηκαν είναι πλούσιες και αποκαλύπτουν αποκλίνουσα επιχειρηματολογία για μη τερματιζόμενους αριθμούς (*ασυμπλήρωτοι, άπειροι, αμέτρητοι, συνεχίζονται, το άγνωστο, έχουν πολλά δεκαδικά ψηφία* ...), υποθέτοντας ότι παραμένουν πεισματικά ανολοκλήρωτοι ό,τι κι αν συμβεί, χωρίς να διασαφηνίζεται η ύπαρξη ή όχι περιοδικότητας. Μέσα σε ένα κλίμα σύγχυσης σε ορισμένους μαθητές διαφαίνεται μια θολή διαίσθηση του απειροψήφιου δεκαδικού αναπτύγματος, χωρίς να σημαίνει ότι οι μαθητές έχουν κατασκευάσει την έννοια του άρρητου αριθμού που εννοούν οι μαθηματικοί (π.χ. το μοναδικό κοινό στοιχείο των κλειστών διαστημάτων που ορίζουν οι δεκαδικές προσεγγίσεις του ή το όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών). Θα μπορούσαμε ίσως να υποθέσουμε ότι η απόδοση νοήματος στην απειροψήφια δεκαδική παράσταση 2,828... αποτελεί για τους μαθητές *σημαίνον εν αναμονή σημαινομένου*.

Οι δυσκολίες της πλειονότητας των μαθητών προέρχονται από μια καταχρηστική μεταφορά των γνώσεων που διέθεταν για τους ακέραιους αριθμούς (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004 – Merenluoto & Lehtinen, 2004– Yujing & Yong-Di, 2005), αλλά και ένα είδος σύγχυσης που παραπέμπει στην κατανόηση της αδιαφάνειας των σημειωτικών αναπαραστάσεων (*2,828..., 2,828282..., με τις τελίτσες το μήκος είναι άπειρο*) και της διάκρισής τους από την έννοια του άρρητου αριθμού. Μπορούμε να διπλασιάσουμε, να τριπλασιάσουμε κλπ. το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος και να το διαιρέσουμε με 2, με 3 κτλ. Ξεκινώντας με τη μονάδα μήκους, βρίσκουμε τμήματα μήκους μ/ν, όπου οι μ, ν είναι φυσικοί αριθμοί. Αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα αντιστοιχούν σε ρητούς θετικούς αριθμούς, τα οποία, όπως γνωρίζουμε, σχηματίζουν μια αριθμήσιμη ακολουθία. Παρά την πυκνότητά τους οι ρητοί αριθμοί δεν μπορούν να «γεμίσουν» όλα τα σημεία ενός συνεχούς διαστήματος, εφόσον τα εν λόγω σημεία σχηματίζουν μια ακολουθία «περισσότερο άπειρη». Το σύμβολο της απειροψήφιας δεκαδικής αναπαράστασης $\sqrt{8} = 2{,}828...$ προκαλεί σύγχυση στους μαθητές (Πατρώνης, 1996). Αρκεί να σκεφτούμε ότι το σύμβολο $\sqrt{8} = 2{,}828...$ συνιστά ένα «μόρφωμα» το οποίο υιοθετήθηκε μόνο πριν δύο αιώνες. Βεβαίως, αυτή η αναπαράσταση είναι σημαντική για τον σχηματισμό της έννοιας του άρρητου αριθμού και απαιτείται να μελετηθεί συστηματικά το νόημα που προσδίδουν σε αυτήν οι μαθητές στις διάφορες ηλικίες.

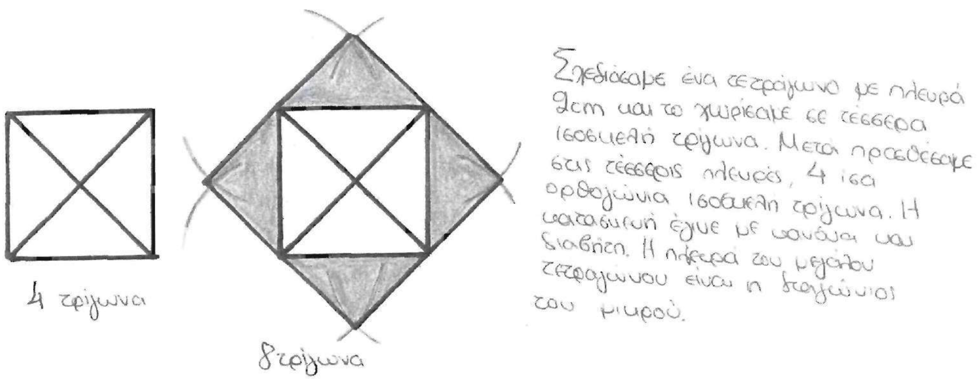
Εάν θέλουμε να επιτρέψουμε στους μαθητές να σχηματίσουν μια πιο σαφή ιδέα των δεκαδικών αριθμών, των χαρακτηριστικών τους και των ορίων τους, καθώς επίσης και των ρητών και των άρρητων αριθμών, μπορούμε να σχεδιάσουμε κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις που εστιάζουν στις δυσκολίες κατανόησης που αποκαλύπτονται από τις αυθόρμητες απαντήσεις των μαθητών κατά τις διάφορες φάσεις χειρισμού του προβλήματος (Sirotic & Zazkis, 2007b). Το ζήτημα της επιλογής κατάλληλων δραστηριοτήτων και μελετημένων ερωτημάτων που εμβαθύνουν στην κατανόηση της αρρητότητας από τους μαθητές παραμένει ανοιχτό.

Η γεωμετρική προσέγγιση του προβλήματος: ακριβή μαθηματικά.

Παρακάτω παρουσιάζουμε μια γεωμετρική λύση την οποία βρήκαν δωδεκάχρονοι μαθητές (ομάδα Α). Τόσο το Πυθαγόρειο θεώρημα όσο και άλλες γεωμετρικές αποδείξεις δεν είχαν διδαχθεί στην πρώτη τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του Ευρωπαϊκού Σχολείου.

Η ακόλουθη λύση προετοιμάστηκε στο πλαίσιο της τετραμελούς ομάδας και κατά βάση ήταν αποτέλεσμα κοινής δημιουργικής επεξεργασίας και γνωστικής αλληλοσυμπλήρωσης δύο μελών της, της Φιλομένας και του Μιχάλη. Τα άλλα δύο μέλη (Αλέξανδρος, Ελισάβετ), που είχαν προσκολληθεί στο γραμμικό λάθος, απλώς έδωσαν τη συγκατάθεσή τους. Ο τρόπος συνεπίδρασης των διμελών ομάδων ήταν ασύμμετρος και μεταβλητός και περιείχε στοιχεία ασυμφωνίας που συνιστούσαν μια μονοδρομική επεξεργασία. Παρά την πρόθεσή τους, δεν κατάφεραν να συμφωνήσουν σε μια κοινή λύση.

Τα παρακάτω σχήματα αποτελούν ένα μέρος της ομάδας Α:



Κατά τη φάση της μαθηματικής συζήτησης σε ολόκληρη την τάξη τα μέλη τη ομάδας Α εξηγούν:

ΦΙΛΟΜΕΝΑ: (Έρχεται και εξηγεί τη λύση της προβαλλόμενης διαφάνειας): *Αρχίσαμε με ένα πρώτο τετράγωνο. Έπειτα, το κόψαμε σε 4 μέρη, πρώτα σε 2 και ύστερα σε 4 και βρήκαμε 4 τρίγωνα. Θέλαμε να βρούμε μια λύση του προβλήματος. Θέλαμε να βρούμε ένα άλλο τετράγωνο που να έχει διπλάσιο εμβαδόν. Λοιπόν, τα προσθέσαμε εδώ... Κατασκευάσαμε τέσσερα ίσα τρίγωνα με κανόνα και διαβήτη. Έτσι κατασκευάσαμε 4 ίσα ισοσκελή τρίγωνα στο εξωτερικό του πρώτου τετραγώνου. Επομένως, κατασκευάσαμε ένα μεγάλο τετράγωνο που έχει 8 ίσα τρίγωνα, δηλαδή με διπλάσιο εμβαδόν. Το μικρό τετράγωνο αποτελείται από 4 τρίγωνα, αλλά το μεγάλο από 8. Επομένως, έχει διπλάσιο εμβαδόν. Η πλευρά είναι 2,8.*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Καταλάβατε τη λύση;*

ΜΑΡΙΑ: *Δεν κατάλαβα όλη τη λύση. Γιατί πρέπει να κόψουμε το τετράγωνο σε τέσσερα τρίγωνα;*

ΦΙΛΟΜΕΝΑ: *Κατά τη γνώμη μου έτσι πρέπει.*

ΜΑΡΙΑ: *Δεν συμφωνώ. Ξέρουμε ότι η μονάδα μέτρησης της επιφάνειας είναι το τετράγωνο και όχι το τρίγωνο.*

ΦΙΛΟΜΕΝΑ: *Κανονικά είναι το τετράγωνο. Όμως ...* (σιωπή)

ΜΑΡΙΑ: *Μάθαμε το τετραγωνικό μέτρο, το τετραγωνικό εκατοστό, ...*

ΦΙΛΟΜΕΝΑ: *Ναι ...* (σιωπή)

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Μπορεί κάποιος άλλος μαθητής από την ομάδα να εξηγήσει;*

ΜΙΧΑΛΗΣ: (Έρχεται και εξηγεί τη λύση της προβαλλόμενης διαφάνειας): *Το τετραγωνικό μέτρο και το τετραγωνικό εκατοστό είναι οι συνηθισμένες μονάδες επιφάνειας. Γιατί να μην έχουμε το δικαίωμα να χρησιμοποιήσουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο; Μπορώ να το εξηγήσω περισσότερο;*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Βεβαίως.*

ΜΙΧΑΛΗΣ: *Χαράξαμε τις διαγώνιους του τετραγώνου και δημιουργήσαμε 4 ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα. Όλα αυτά τα τρίγωνα είναι ίσα. Έπειτα, κατασκευάσαμε στο εξωτερικό του αρχικού τετραγώνου άλλα 4 ίδια τρίγωνα. Αν μετρήσουμε το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου με μονάδα μέτρησης αυτό το τρίγωνο, τότε το εμβαδόν του είναι 4 τρίγωνα. Παρατηρήσαμε ότι, αν διπλασιάσουμε το πλήθος των τριγώνων, τότε το εμβαδόν θα διπλασιαστεί. Τοποθετήσαμε πάλι τα 4 τρίγωνα, σε μια άλλη θέση, στο εξωτερικό: εδώ, εδώ, εδώ και εδώ (δείχνει τη διαφάνεια). Το μεγάλο τετράγωνο αποτελείται τώρα από 8 ίσα τρίγωνα, 4 αυτά και άλλα 4 απέξω. Συμφωνείτε;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Ναι τώρα κατάλαβα!*

ΜΙΧΑΛΗΣ: *Λοιπόν, έχουμε το μεγάλο τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν από το αρχικό. Η διαγώνιος του μικρού τετραγώνου είναι η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου. Μπορούμε να πάρουμε για πλευρά του μεγάλου τετραγώνου τη διαγώνιο του μικρού τετραγώνου. Να αυτήν εδώ. Έτσι δεν είναι;*

ΜΑΘΗΤΕΣ: *Ναι έτσι είναι!*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Επομένως, τι μπορούμε να συμπεράνουμε ;*

ΜΙΧΑΛΗΣ: *Η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου είναι ίση με τη διαγώνιο του μικρού τετραγώνου. Τώρα η κατασκευή είναι εύκολη. Η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου είναι περίπου 2,8 cm.*

ΛΕΩΝΙΔΑΣ: *Στη διαφάνεια πώς το κατασκευάσατε ;*

ΜΙΧΑΛΗΣ: *Πήραμε για ακτίνα το μισό της διαγωνίου του αρχικού τετραγώνου. Να η κατασκευή!*

ΛΕΩΝΙΔΑΣ: *Χωρίς να μετρήσετε 2,8 cm ; Πώς γίνεται αυτό!* (Στη συνέχεια ο Μιχάλης εξηγεί στην τάξη τον τρόπο κατασκευής με κανόνα και διαβήτη)

Παρότι στο τέλος η Φιλομένα και ο Μιχάλης προσκομίζουν ένα αριθμητικό επιχείρημα, πρωταρχική σημασία αποδίδεται στη Γεωμετρία. Συνέλαβαν μια κατασκευή, και την εκτέλεσαν με κανόνα και διαβήτη. Στον *Μένωνα* είχαμε απλή σχεδίαση στην άμμο από τον Σωκράτη, όχι ακριβή γεωμετρική κατασκευή. Επιπλέον αυτή η λύση διαφέρει από τη λύση του Σωκράτη στο πλήθος των τριγώνων στα οποία έχει τεμαχιστεί το αρχικό τετράγωνο: Στο *Μένωνα* το τετράγωνο διαιρείται στα δύο, (Πετράκης, 2008, 85α-85β – Fowler, 1990 – Taylor, 2001) ενώ σε αυτούς τους μαθητές στα τέσσερα[6]. Οι μαθητές χώρισαν το αρχικό τετράγωνο σε 4 ορθογώνια τρίγωνα διατηρώντας σταθερή τη θέση του. Στη συνέχεια με χρήση γεωμετρικών οργάνων σχεδίασαν περιμετρικά 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Έτσι το τελικό σχήμα είναι ένα τετράγωνο με 8 τρίγωνα (τα 4 του αρχικού τετραγώνου και τα 4 σκιασμένα) και έχει προφανώς διπλάσιο εμβαδόν από το πρώτο τετράγωνο. Πριν από τη σύνθεση της λύσης προηγήθηκαν δοκιμές, χαράξεις ή μετατοπίσεις σχημάτων. Για ορισμένα παιδιά ήταν δύσκολο να δεχτούν ως δομική μονάδα μέτρησης το τρίγωνο. Το εύρημα αυτό συμπλέει με άλλες έρευνες σύμφωνα με τις οποίες το σχήμα της επιλεγμένης μονάδας μέτρησης ταυτίζεται συνήθως με το σχήμα της επιφάνειας που πρέπει να επικαλυφτεί ή να καταμετρηθεί (Ζαχάρος, 2002). Είναι φανερό ότι η προηγούμενη στρατηγική είναι μια άριστη ανακάλυψη. Η περιγραφή, η αιτιολόγηση και η συνοχή της επιχειρηματολογίας ήταν έκπληξη για μας.

Αυτή η εφεύρεση είχε θεμελιώδη σημασία για την κατανόηση του προβλήματος. Οι πρωταγωνιστές διακατέχονται από εμφανή βιώματα επιτυχίας και αναγνώρισης. Εντούτοις υπάρχουν αντιρρήσεις:

ΣΤΕΡΓΙΟΣ: *Και όμως όλες οι άλλες ομάδες έχουν παρουσιάσει μια άλλη μέθοδο. Γιατί πρέπει να την κάνουμε τόσο πολύπλοκη; Αυτή η λύση της ομάδας Α είναι πολύ πολύπλοκη.*

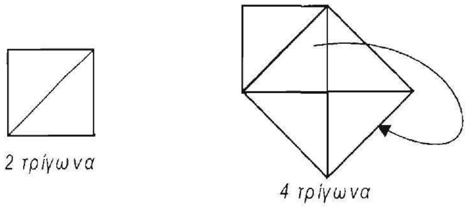
ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Υπάρχει μια απάντηση σε αυτή την κριτική;*

ΜΙΧΑΛΗΣ: *Όχι ! είναι μια απλή λύση. Δεν είναι απαραίτητο να μετρήσουμε. Αρκεί να φέρουμε τη διαγώνιο. Τώρα έχουμε δύο τρίγωνα. Μπορούμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω τετράγωνο που έχει διπλάσιο εμβαδόν.* (Σχεδιάζει τα σχήματα στον πίνακα)

---

6. Ο Σωκράτης στον *Μένωνα* οδήγησε προοδευτικά τον νεαρό δούλο σε ένα «στριφτό» τετράγωνο. Παραθέτει τέσσερις φορές το αρχικό τετράγωνο και προτείνει μια κατασκευή που συνίσταται στη χάραξη της διαγωνίου με διαφορετικό κάθε φορά προσανατολισμό σε καθένα από αυτά και στο τέλος την απομάκρυνση των τεσσάρων ορθογωνίων τριγώνων που είναι διευθετημένα περιμετρικά. Μετά από μερικές ερωτήσεις ο νεαρός δούλος διαπιστώνει ότι το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα δεν είναι παρά η διαγώνιος του αρχικού τετραγώνου (Σταμάτης, 1972 –Taylor, 2001). Για να εξασφαλιστεί ότι το τετράγωνο που έχει πλευρά τη διαγώνιο έχει διπλάσιο εμβαδόν αρκεί με πλευρά τη διαγώνιο του αρχικού τετραγώνου να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο και να απαριθμηθούν τα ίσα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα που συνθέτουν την επιφάνεια των τετραγώνων (Πετράκης, 2008, 85α-85β – Devereux, 1978 – Klein, 1965). Εδώ η γόνιμη ιδέα είναι ο τεμαχισμός του αρχικού τετραγώνου σε 2 ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα και η υιοθέτηση αυτού του τριγώνου ως μονάδας μέτρησης για τη σύγκριση του αρχικού και του νέου τετραγώνου: το πρώτο τετράγωνο αποτελείται από δύο τριγωνάκια και το τελικό από τέσσερα, άρα είναι διπλάσιο σε εμβαδόν (Τσικοπούλου, 2010).

Δεύτερη λύση



Μπορούμε να γυρίσουμε και να διπλασιάσουμε αυτό το τρίγωνο. Εδώ έχουμε δύο τρίγωνα και εδώ τέσσερα τρίγωνα, δηλαδή κατασκευάσαμε ένα τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν. Είναι μια άλλη σωστή εξήγηση. Συμφωνείς; (Συμπληρώνει την σχεδίαση)

ΣΤΕΡΓΙΟΣ: *Ναι κατάλαβα. Αλλά ποιο είναι το μήκος της πλευράς του νέου τετραγώνου;*

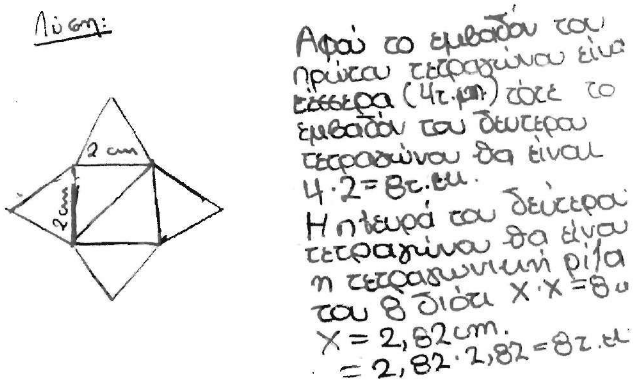
ΜΙΧΑΛΗΣ: *Είναι το μήκος της διαγωνίου του μικρού τετραγώνου. Μπορούμε να το μετρήσουμε. Αλλά αυτή η λύση δεν είναι ακριβής. Η γεωμετρική κατασκευή μάς δίνει την καλύτερη λύση. Ο αριθμός 2,8 δεν είναι η ακριβής τιμή της διαγωνίου. Είναι μια προσέγγιση.*

ΣΤΕΡΓΙΟΣ: *Η καλύτερη λύση είναι η δική μας ! Αν μετρήσουμε τη διαγώνιο η λύση θα είναι επίσης προσεγγιστική. Πρέπει να δώσουμε μια αριθμητική απάντηση στο ερώτημα «ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν;». Κατά τη γνώμη μου η σωστή απάντηση είναι η τετραγωνική ρίζα του 8! Δηλαδή ο ακριβής αριθμός 2,8.*

ΜΙΧΑΛΗΣ: *Αλλά 2,8 δεν είναι ακριβές, εφόσον ο αριθμός 2,828 – και με στρογγυλοποίηση 2,83 – είναι πιο σωστός. Η λύση είναι το μήκος της διαγωνίου. Αυτό εδώ! Κάνουμε πρώτα την κατασκευή και ύστερα μετράμε με υποδεκάμετρο το μήκος της πλευράς ...*

Στην αντιπαράθεση των δύο τελευταίων μαθητών βρίσκουμε το ιστορικό πρόβλημα της διχοτόμησης ανάμεσα στο διακριτό και το συνεχές, ανάμεσα στην αριθμητική και τη γεωμετρική ποσότητα. Ο Στέργιος χωρίς να διακρίνει τη διαφορά ανάμεσα στην ακριβή και προσεγγιστική τιμή επιμένει στην αριθμητική λύση (πιστεύει ότι η ακριβής τιμή είναι ο δεκαδικός αριθμός 2,8 , δηλαδή ότι $\sqrt{8} = 2{,}8$). Ο Μιχάλης από τη μια πλευρά μιλά για μέτρηση μηκών: «Κάνουμε πρώτα την κατασκευή και ύστερα μετράμε το μήκος της πλευράς» και «Η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου είναι περίπου 2,8 cm», και από την άλλη βρήκε μια πρωτότυπη γεωμετρική λύση επιμένοντας στην ιδέα: «η λύση είναι το μήκος της διαγωνίου». Στην εν λόγω απάντησή του ο Μιχάλης δεν αναφέρεται σε εκατοστά. Εδώ προεξάρχει η έννοια του ακριβούς μεγέθους και όχι του αριθμού ως αποτελέσματος μέτρησης. Το μέτρο του μεγέθους (αριθμός) περιορίζεται σε ένα απτό και καθορισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αισθητά άκρα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτή η απάντηση είναι μια πρωτογενής ιδέα η οποία αγγίζει διαισθητικά ένα εντελώς διαφορετικό είδος αριθμού, τον άρρητο αριθμό, προετοιμάζοντας τη μεταγενέστερη κατάκτηση του. Η ιδέα του διακριτού είναι πολύ ισχυρή για την πλειονότητα των μαθητών. Τα εμπόδια που συνδέονται με την ασυμμετρότητα μεγεθών (εδώ των μηκών) και τη μη αριθμησιμότητα των άρρητων παραμένουν δύσκολα για τους μαθητές του Λυκείου, ακόμα και για μελλοντικούς μαθηματικούς (Fischbein et al., 1995 – Arcavi et al., 1987 – Peled & Hershkovitz, 1999). Ο Μιχάλης για να πείσει ανακαλύπτει μια δεύτερη γεωμετρική λύση που αποτελεί μια απλοποίηση της λύσης που παρουσιάζει ο Σωκράτης στον Μένωνα (Πετράκης, 2008, 85α-85β). Έχουμε τον τεμαχισμό του αρχικού τετραγώνου σε δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα, τη μετατόπιση του ενός με στροφή 1800 και τη συμπλήρωση του νέου τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν. Για τη γεωμετρική λύση πιστεύουμε ότι το πρόβλημα απαιτεί αποδέσμευση από την πρώτη αντίληψη και αλλαγή οπτικής γωνίας. Απαιτεί ακόμα την αναδιοργάνωση του αρχικού σχήματος και την κατασκευή ενός νέου σχήματος (Duval, 2005). Πρόκειται για μια ευρετική προσέγγιση που αποκαλύπτει βαθειά κατανόηση του σχήματος. Τα παιδιά τεμαχίζουν το τετράγωνο σε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα, χειρίζονται τις διευθετήσεις, κάνουν άμεσες συγκρίσεις εμβαδών (με εγκλεισμούς, τεμαχισμούς, αποκοπές). Νέα δομική μονάδα είναι πλέον το μισό τετράγωνο ή το ένα τέταρτο του τετραγώνου. Χωρίζουν το αρχικό τετράγωνο σε τέσσερα ή δύο τρίγωνα, φαντάζονται με γενική οπτική αντίληψη ένα τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν (τέσσερα ή οκτώ τρίγωνα) αλλάζουν το συνηθισμένο προσανατολισμό του τετραγώνου και σχηματίζουν το ζητούμενο τετράγωνο.

Κατά τη διάρκεια της συλλογικής έρευνας ένας μαθητής της ομάδας Β αντέγραψε το σχήμα από την ομάδα Α και το μετέφερε στην ομάδα του. Ένα απόσπασμα από την εργασία της ομάδας Β είναι το ακόλουθο:



Κατά τη διάρκεια της «διαμάχης» υπήρξαν αντιρρήσεις:

ΛΕΩΝΙΔΑΣ: (Ομάδα Β): *Ιδού η λύση μας. Κατασκευάσαμε αυτό το σχέδιο.*

(Παρουσιάζει τη διαφάνεια)

ΔΩΡΑ: (Ομάδα Γ): *Η λύση 2,82 είναι σωστή, αλλά το σχέδιο δεν είναι καλό. Σχεδιάσατε ένα αστέρι. Όχι ένα τετράγωνο !*

Οι ομάδες Α και Β διαφωνούν για την πατρότητα της εν λόγω λύσης του προβλήματος.

ΛΕΩΝΙΔΑΣ: *Εσύ ? Δεν ξέρεις ! (Δείχνει τη διαφάνεια) Κανονικά, σχεδιάσαμε ένα μεγάλο τετράγωνο, χωρισμένο σε 8 τρίγωνα, αλλά το δοσμένο τετράγωνο είναι χωρισμένο σε 4. Επομένως το εμβαδόν είναι διπλάσιο.*

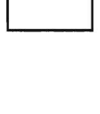
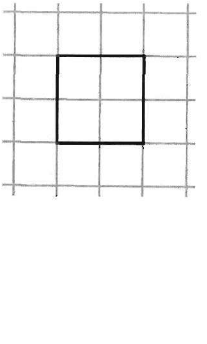
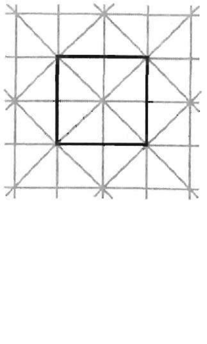
ΜΙΧΑΛΗΣ: (Ομάδα Α): *Η λύση δεν έχει αιτιολογηθεί καλά στη διαφάνεια. Σχεδιάσατε ένα αστέρι χωρίς να εξηγήσετε τον κατασκευή. Αρχικά δεν είχατε γράψει αυτή τη λύση στη διαφάνεια. Είδες τη δική μας λύση και επαναλαμβάνεις τα συμπεράσματα της προηγούμενης συζήτησης. Αντιγράψατε την ιδέα μας.*

ΛΕΩΝΙΔΑΣ: *Όχι ! Τη βρήκαμε πριν από σας! Η ανακάλυψη είναι δική μας. Κύριε, είδατε τη δική μας αρχική ιδέα. Είμαστε οι πρώτοι. Όχι εσείς! Η ανακάλυψη μάς ανήκει !*

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: *Ίσως δεν έχει νόημα να καυγαδίζετε για την πρωτιά. Σημασία έχει ότι η λύση αυτή είναι πλέον κτήμα όλης της τάξης. Ανήκει σε όλους μας...*

Μετά τη συζήτηση η γεωμετρική λύση ήταν σαφής. Με την εποπτεία, στα μάτια των μαθητών οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες φαντάζουν ξεκάθαρες και συγκεκριμένες. Οι αιτιολογήσεις γίνονται πλέον απτές και κατανοητές. Αυτή η αίσθηση εξομάλυνε τις δυσκολίες, διευκόλυνε την κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων και όπλισε με μαθηματική αυτοπεποίθηση τους αδύνατους μαθητές. Αναμφίβολα η εικονιστική παράσταση της γεωμετρικής λύσης υπέβαλε στους μαθητές μαθηματικές ιδέες και βοήθησε στην κατανόηση (Arcavi, 2003).

Τα προηγούμενα ευρήματα απαιτούν μια συγκριτική συσχέτιση με ανάλογη έρευνα σε μαθητές ηλικίας 10-11 ετών η οποία εξετάζει τον ρόλο των μεσολαβητικών εργαλείων και της οπτικοποίησης στη λύση του προαναφερόμενου ιστορικού προβλήματος (Chassapis, 2008). Στην έρευνα αυτή οι μαθητές ήταν ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουν λευκό χαρτί, τετραγωνισμένο χαρτί ή δικτυωτό τριγωνικό πλέγμα.

Σύμφωνα με τα ευρήματα η αξιοποίηση του τριγωνικού πλέγματος πλεονεκτεί στην ανάπτυξη της οπτικής σκέψης των μαθητών, παρότι δεν είναι εμφανής η κατανομή των προτιμήσεων των μαθητών στα τρία μέσα εργασίας. Κανένας από τους μαθητές δεν συνεξέτασε τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων των δύο τετραγώνων.

Η συνδρομή ανάλογων υποστηρικτικών μέσων δεν ευνόησε άμεσα την κατανόηση της αρρητότητας σε μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Όπως έχει προαναφερθεί, ο Δεληκανλής (2007, 2009) πραγματοποίησε δύο έρευνες στην Α΄ Λυκείου. Στην πρώτη έρευνα (Δεληκανλής 2007), 28% των μαθητών έδωσαν σωστή αλγεβρική λύση, ενώ οι περισσότεροι από αυτούς αδυνατούσαν να δώσουν στην απάντησή τους γεωμετρική λύση και 4% έδωσαν σωστή λύση οπτικοποίησης με χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού. Στην ποιοτική ανάλυση δύο διδακτικών επεισοδίων επισημαίνεται η σημασία της αναπλαισίωσης του προβλήματος με την επιλογή κατάλληλης μονάδας μέτρησης (το τετραγωνάκι λαμβάνεται ως μονάδα εμβαδού 2 ή χωρίζεται σε δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα). Στο ένα διδακτικό επεισόδιο προεξάρχει η αλγεβρική λύση (Πυθαγόρειο θεώρημα, τριγωνομετρία), ενώ στο άλλο η οπτική στρατηγική (με συνύπαρξη αλγεβρικών στοιχείων). Στη δεύτερη έρευνα (Δεληκανλής, 2009) ο ερευνητής συμπεραίνει ότι 30% των μαθητών που έλαβαν μέρος στο πείραμα αποδέχτηκαν τη χρήση του τριγωνικού πλέγματος και από αυτούς 7% προτίμησαν τη μέθοδο οπτικοποίησης (ανακάλυψαν με επιτυχία ένα τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν και έδειξαν την πλευρά του). Επιπλέον, αναφέρονται παραδείγματα μαθητών με χαμηλές επιδόσεις οι οποίοι έλυσαν επιτυχώς το πρόβλημα με οπτική σκέψη. Είναι προφανές ότι ούτε ο αλγοριθμικός χειρισμός ούτε η σωστή απάντηση με οπτικοποίηση αποτελούν ασφαλείς εγγυήσεις για την εννοιολογική κατανόηση του άρρητου αριθμού.

Η ιδιαίτερη φύση του εκάστοτε τεχνουργήματος συνυφαίνεται με αντίστοιχα διδακτικά και επιστημολογικά γνωρίσματα. Η χρήση του λευκού χαρτιού παρέχει πλήρη ελευθερία δράσης (γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη, πρόχειρη σχεδίαση). Η έτοιμη δομή του τετραγωνισμένου χαρτιού απαλλάσσει τους μαθητές από ένα μέρος της σχεδίασης και τους προσφέρει ένα ασφαλές διευκολυντικό πλαίσιο να εργαστούν. Μπορούν για παράδειγμα με χαράξεις των διαγωνίων να χωρίσουν τα τετράγωνα που δίνονται σε 2 ή σε 4 ορθογώνια τρίγωνα. Όμως δύσκολα αποδεσμεύονται από τον δεδομένο προσανατολισμό των τετραγώνων και συνήθως συγκεντρώνουν το ενδιαφέρον τους αποκλειστικά στα μήκη ή τα εμβαδά. Το τριγωνικό πλέγμα είναι ένας μη ισομετρικός καμβάς που παρέχει ένα σταθερό δικτυωτό φόντο με χαραγμένες τις μισές διαγωνίους των δύο διευθύνσεων, όπου κάθε τετράγωνο είναι χωρισμένο σε 2 ετοιμοπαράδοτες τριγωνικές δομικές μονάδες (ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα). Η κατασκευή απαιτεί την επιτυχή οπτική αναγνώριση τόσο του αρχικού όσο και του ζητούμενου τετραγώνου μέσα στον καμβά. Το εν λόγω υποστηρικτικό πλαίσιο περιορίζει τον βαθμό συμμετοχής των μαθητών καθώς και το είδος των παραγόμενων λύσεων. Μέσα στο τριγωνικό πλέγμα οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν μονάδα μέτρησης εμβαδών, που συνήθως έρχεται σε αντίθεση με τις επικρατούσες τετραγωνικές μονάδες, και να κάνουν οπτικές συγκρίσεις εμβαδών. Επιπλέον τα δύο τετράγωνα πρέπει να εντοπιστούν με διαφορετικό προσανατολισμό. Παραμένει ανοιχτό το ερώτημα εάν από τη συνεξέταση της πλευράς με τη διαγώνιο οι μαθητές θα είναι σε θέση να φτάσουν στην αρρητότητα.

Σε σύγκριση με τα παραπάνω, η διατύπωση του προβλήματός μας είναι ανοιχτή αφού ζητεί από τους μαθητές να κατασκευάσουν (με όποιο τρόπο θέλουν) ένα τετράγωνο που θα έχει διπλάσιο εμβαδόν από το αρχικό τετράγωνο. Όπως παρακολουθήσαμε, εκτός από την επικράτηση στρατηγικών αριθμητικής προσέγγισης μια ομάδα δωδεκάχρονων μαθητών χρησιμοποιώντας αναλυτικές και συνθετικές διαδικασίας έφτασε κοντά στην αυθόρμητη ανακάλυψη της ασυμμετρότητας «με τον τρόπο» των Πυθαγορείων. Τα περιθώρια πρωτοβουλιακής ενεργοποίησης των μαθητών ήταν αυξημένα αφού δεν κλήθηκαν να περιοριστούν στα ετοιμοπαράδοτα αναλυτικά μοντέλα που προδιαγράφονται από τα προαναφερόμενα τετραγωνικά ή τριγωνικά πλέγματα. Η εν λόγω ανακάλυψη συζητήθηκε διεξοδικά πρώτα στη συγκροτημένη τετραμελή μικρο-ομάδα και ύστερα τέθηκε στη βάσανο της κριτικής σε ολόκληρη τη σχολική τάξη. Στα ανταλλασσόμενα επιχειρήματα των μαθητών διευκρινίζονται οι αντιλήψεις που αγγίζουν την αρρητότητα, ενώ προεξάρχουσα σημασία έχει η αντίθεση ανάμεσα στην αριθμητικοποιημένη και τη γεωμετρική προσέγγιση.

Στο πλαίσιο της γεωμετρικής προσέγγισης ο οπτικός τεμαχισμός του αρχικού τετραγώνου σε 2 ή 4 ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα φανερώνει ότι το εμβαδόν παραμένει αμετάβλητο. Η ακριβής γεωμετρική λύση απαιτεί τον διπλασιασμό και την επανένωση όλων των μερών με άλλο τρόπο, τη δυναμική αναδιευθέτηση ή αναδιοργάνωσή τους. Με χρήση κατάλληλου εποπτικού υλικού έχει βρεθεί ότι τη λύση μπορούν να μάς διδάξουν ακόμα και οκτάχρονα παιδιά (Διονυσοπούλου, 1987). Τέτοια ανοιχτά προβλήματα μοιάζουν με πάζλ ή με το κινέζικο τάνγκραμ και δύσκολα μπορούμε να φανταστούμε τη λύση, η οποία μάλλον οικοδομείται από μια ικανότητα συνειδητής διορατικότητας συνεπικουρούμενη από μια ξαφνική και υποσυνείδητη διαίσθηση. Προβλήματα αυτού του τύπου παραπέμπουν στη δημιουργική ανακάλυψη, που έχει μελετηθεί από τη «μορφολογική ψυχολογία» και προέρχεται από μια στιγμιαία σύλληψη των σχέσεων που συνδέουν τα διάφορα συνθετικά μέρη.

Πράγματι, προβλήματα τεμαχισμού εμβαδών και ανασύστασης μιας ζητούμενης μορφής είναι συνηθισμένα στην καθημερινή ζωή. Ο εργάτης που δεν διαθέτει το απαραίτητο εργαλείο για να κατασκευάσει ένα έργο ή ακόμη ο μαθητής που πρέπει να γράψει μια έκθεση ξεκινώντας από ένα σύνολο ασυστηματοποίητων ιδεών έχουν απέναντί τους αυτόν τον τύπο προβλήματος. Έτσι, έχουμε ποικίλες καταστάσεις που μας ζητούν να βρούμε έναν τρόπο χρήσης ενός συνόλου στοιχείων, να τα χειριστούμε και να τα οργανώσουμε με νέο τρόπο. Πρόκειται για συστατικά όπως η πρωτοτυπία, η ευχέρεια και η ευλιξία που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική δημιουργικότητα (Leikin, 2009).

Συμπεράσματα: Ακριβή ή προσεγγιστικά μαθηματικά;

Η παρούσα έρευνα συμπλέει με τη σωκρατική μέθοδο στην ενεργοποίηση των αρχικών γνώσεων των μαθητών. Όχι όμως για να επιβεβαιωθεί η πλατωνική θεωρία της ανάμνησης, αλλά για να αναδειχτούν οι γνώσεις που εν μέρει ενυπάρχουν μέσα στους μαθητές υπό μορφή προϋπάρχουσας άτυπης γνώσης. Η μαθηματική συζήτηση στην τάξη ευνοεί τη μετεξέλιξη των αρχικών μαθηματικών ιδεών, την αναδόμηση και ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Με όχημα το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου διερευνήσαμε τις αυθόρμητες αντιλήψεις δωδεκάχρονων μαθητών που προετοιμάζουν την αρρητότητα. Σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε ένα διδακτικό πείραμα στην τάξη. Η εν λόγω έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης και τα αποτελέσματα συνιστούν προσωρινές ενδείξεις που δεν προσφέρονται για γενίκευση. Απλώς υποδεικνύουν ορισμένες ερευνητικές κατευθύνσεις που θα επέτρεπαν μια ευρύτερη και πληρέστερη διερεύνηση του θέματος. Συνοψίζοντας και επεκτείνοντας όσα έχουν αναφερθεί θα θέλαμε να σημειώσουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

Η αυθόρμητη παρουσία του φαινομένου που αποκαλείται «ψευδαίσθηση γραμμικότητας» φαίνεται ότι είναι παλιά και ίσως οικουμενική. Η αναλογία λειτουργεί για τα μήκη, αλλά δεν είναι εφαρμόσιμη στα εμβαδά. Όχι μόνο ο νεαρός δούλος του *Μένωνα* (Πετράκης, 2008, 82α-82δ), αλλά και οι σύγχρονοι μαθητές χρησιμοποιώντας έναν απρόσφορο συλλογισμό, γενικεύουν τον διπλασιασμό των μηκών και για τις επιφάνειες δείχνοντας πεπεισμένοι ότι η εν λόγω αύξηση είναι αναλογική. Έχουμε ένα φαινόμενο υπεργενίκευσης της αναλογίας σε μη αναλογικά μοντέλα (Modestou & Gagatsis, 2007 – Δεληκανλής, 2009).

Η αριθμητική προσέγγιση παραπέμπει στο χειρισμό των δεδομένων του προβλήματος για να αριθμητικοποιηθεί το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν. Ορισμένοι εκφράζουν αυθόρμητες απειροψήφιες δεκαδικές αναπαραστάσεις χωρίς να έχουν σαφή επίγνωση αν πρόκειται για ρητούς ή άρρητους αριθμούς. Για την πλειονότητα των μαθητών η έννοια του διακριτού μεγέθους είναι πολύ ισχυρή και παραπέμπει στις πρότερες εμπειρίες τους για τους φυσικούς αριθμούς. Τα παιδιά του Γυμνασίου στρέφουν την προσοχή τους στην αριθμητική και προσπαθούν να βρουν το μήκος της πλευράς και ύστερα, να χρησιμοποιήσουν την πλευρά για να πραγματοποιήσουν την κατασκευή του τετραγώνου με το διπλάσιο εμβαδόν. Έτσι αποδυναμώνεται και φτωχαίνει το νόημα των αριθμών. Βεβαίως, η αριθμητική σε σύγκριση με τη γεωμετρική κουλτούρα είναι περισσότερο διαδεδομένη στον σύγχρονο κόσμο και κυριαρχεί στις παραστάσεις που οικοδομούν οι μαθητές μέσα από τα σχολικά μαθηματικά βιώματα. Στα μαθηματικά που διδάσκονται προεξάρχει η αριθμητική και η αλγεβρική σκέψη. Για παράδειγμα, αυτό το φαινόμενο είναι ιδιαίτερα έκδηλο στη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος (Β΄ Γυμνασίου), όπου από θεώρημα της Γεωμετρίας και των γεωμετρικών μεγεθών (ορθή γωνία, μήκη, εμβαδά) μετατρέπεται σε θεώρημα της Άλγεβρας (αλγεβρική ισότητα στην οποία τα γράμματα αντικαθίσταται από ακέραιους αριθμούς). Έχουμε την πεποίθηση ότι η πρόωρη και υπερβολική αριθμητικοποίηση τραυματίζει τη γεωμετρική διαίσθηση. Γενικά, η πλούσια εμπειρία των μαθητών με γεωμετρικές μορφές πριν ακόμη εισαχθούν στην αριθμητικοποίηση και την αναλυτική απόδειξη είναι όχι απλώς χρήσιμη αλλά και αναγκαία (Πατρώνης, 1996).

Η γεωμετρική προσέγγιση συνίσταται στο χωρισμό του αρχικού τετραγώνου σε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα και την ανασύσταση ενός άλλου τετραγώνου, όπως σε ένα παζλ. Με κατάλληλους χειρισμούς και διευθετήσεις οι σύγχρονοι μαθητές (όπως και ο νεαρός δούλος στον *Μένωνα*) κατανοούν ότι το τετράγωνο που βρίσκουν έχει διπλάσιο εμβαδόν από αυτό του αρχικού τετραγώνου. Ανακαλύπτουν τη λύση με πρωτότυπη οπτική σκέψη χωρίς να βρουν μια αριθμητική προσέγγιση του μήκους της πλευράς. Εδώ η λύση απαιτεί τον έξοδο των μαθητών από τη στενότητα και μονομέρεια του πλαισίου της αριθμητικής. Εφόσον τα παιδιά αποδεσμευτούν ριζικά από την πρώτη αντίληψη και επιδείξουν φαντασία και ευελιξία εφευρίσκοντας άμεσες συγκρίσεις εμβαδών, τότε η διορατικότητα και η δημιουργική σκέψη οδηγούν σε πλούτο στρατηγικών. Επί πλέον δεν περιορίζονται μόνο σε ένα τρόπο σκέψης, αλλά προσπαθούν να προσεγγίσουν τις όψεις της κατάστασης από ποικίλες οπτικές γωνίες, αποκαλύπτοντας τις προαναφερόμενες πρωτογενείς αντιλήψεις που φτάνουν μέχρι την ασυμμετρότητα. Έτσι η αναγωγή του προβλήματος σε πρόβλημα τεμαχισμού και αναδιοργάνωσης των μερών θέτει το πρόβλημα της αρρητότητας με διαφορετικούς όρους: μέσα σε πολύ απλές καταστάσεις μετασχηματισμού σχημάτων, είναι αδύνατο να αριθμητικοποιήσουμε γεωμετρικά μεγέθη όπως το μήκος αν περιοριστούμε στους ρητούς αριθμούς. Αντιθέτως είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε σχήματα και να προβούμε σε μια αριθμητικοποίηση μεγεθών (εμβαδών) πάνω στα σχήματα αυτής της κατασκευής, για να βεβαιώσουμε ότι το τετράγωνο που βρίσκουμε είναι τελικά διπλάσιο σε εμβαδόν από το αρχικό τετράγωνο, αποδίδοντας προβάδισμα στη γεωμετρική ακρίβεια.

Μαθηματικά γεωμετρικής ακρίβειας ή αριθμητικής προσέγγισης; Ή διαφορετικά: εφαρμοσμένα ή καθαρά μαθηματικά; Το κλάσμα 3/7 και η $\sqrt{8}$ είναι σύμβολα από τα ακριβή μαθηματικά, ενώ το 0,43 και το 2,83 από τα προσεγγιστικά μαθηματικά. Και το 3/7 και η τετραγωνική ρίζα του 8 κατασκευάζονται επακριβώς με κανόνα και διαβήτη. Ασύμμετρα μεγέθη που δεν μπορούν να «ειπωθούν» με ακρίβεια, κατασκευάζονται γεωμετρικά και η αριθμητικοποίηση των μηκών (και γενικά των μεγεθών) αντικαθίσταται από μια ακριβή γεωμετρική κατασκευή. Τέτοια ευθύγραμμα τμήματα των οποίων το μήκος είναι άρρητο (όπως ο αριθμός

$\sqrt{8}$) μπορούν να παρασταθούν πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών με σημεία. Υπάρχουν ακόμα άλλοι άρρητοι αριθμοί οι οποίοι δεν κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη (όπως ο αλγεβρικός άρρητος αριθμός $\sqrt[3]{2}$ που εμφανίζεται στον διπλασιασμό του κύβου και ο υπερβατικός άρρητος αριθμός π), οι οποίοι επίσης παριστάνονται πάνω στην πραγματική ευθεία από ένα μοναδικό σημείο. Βεβαίως, αξιωματικά και χωρίς καμία διαίσθηση από την πλευρά των μαθητών!

Το γεωμετρικό σχήμα ως υποστηρικτικό διδακτικό πλαίσιο βοηθεί στη διατύπωση εικασιών και επιχειρημάτων αναπτύσσοντας τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών (Κόσυβας, 2008). Έχει πιθανότητες να κινήσει το ενδιαφέρον τους για ακριβείς θεωρητικές προσεγγίσεις που υπερβαίνουν και διαφυλάσσουν το επίπεδο των προσεγγιστικών μαθηματικών. Κατάλληλες γεωμετρικές κατασκευές μπορούν να υποστηρίξουν στη διδασκαλία την κατανόηση των ρητών και των κατασκευάσιμων άρρητων αριθμών. Πώς όμως με ενδιάμεσες δραστηριότητες μπορούν να γεφυρωθούν οι μετρήσεις γεωμετρικών μεγεθών με την αριθμητική των ακεραίων αριθμών; Πώς θα μπορούσε η συνειδητοποίηση των περιορισμών στις μετρήσεις να ευνοήσει τη διαίσθηση της πυκνότητας, της ασυμμετρότητας και ίσως της συνέχειας; Πώς ακόμα οι διάφορες μεταβάσεις μεταξύ των σημειωτικών αναπαραστάσεων θα μπορούσαν να ευνοήσουν την εννοιολογική κατανόηση του άρρητου αριθμού; Τα ερωτήματα παραμένουν ανοιχτά. Σε κάθε περίπτωση ο χειρισμός των αρρήτων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στο Γυμνάσιο και το Λύκειο απαιτεί πολύ λεπτή προσοχή.

Abstract

In this paper, findings of a teaching experiment, carried out on 12-year-old students are presented and discussed. Particularly, strategies and arguments concerning the solution of the "doubling the square problem", are analysed, a problem which was presented for the first time in the platonic dialogue "Meno". This research focuses on the cooperative solution of the problem and the qualitative data used. Among the results the following are included: a) the illusion of linearity: "if we double the side of α square, its *area is also doubled", b) the numerical strategy: approximate estimation of the length of the side of the square followed by its construction and c) the geometric strategy: cutting the initial square, reconstructing it, representation of a new square that has double its initial area and geometric construction. Geometry, in comparison with arithmetic, reveals spontaneous perceptions made by the students that lead to irrationality. Nowdays, geometric culture is on the decline, while excessive standardisation and arithmetisation could hurt the intuition. However, the geometric figure, as in ancient Greece, is a dynamic context, where the exactness of the length could support the comprehension of irrationality.*

Keywords: *spontaneous perceptions, approximation of square root of a number, atithmetisation of magnitudes, transparent/non-transparent decimal representation, duplicating the square, "Meno", irrationality, illusion of linearity.*

Αναφορές

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics, 7*(2), 18–23.

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures: development and function of mathematizing as a social practice. In L. Steffe & J. Gale (Eds.). *Constuctivism in education* (pp. 137-158). Hillsdale, NJ: LEA Publishers.

Broudy, H. & Palmer, J. (1965). *Exemplars of teaching method*, Rand McNally & Co Chicago.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Brumbaugh, R.S. (1970). Plato's Philosophy of Education: the Meno experiment and the republic curriculum, *Educational Theory, 20*, 207-228.

Bryan, M. (2005). Students' Early Mathematical Representation Knowledge: The Effects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving, Educational Studies in Mathematics, 60, 37-69.

Caveing, M. (1982). Quelques remarques sur le traitement du continu dans les Eléments d'Euclide et la Physique d'Aristote. Au Guénard & G. Lelièvre (Eds), *Penser les Mathématiques, Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale supérieure*. Editions du Seuil, Inédit Sciences.

Chassapis, D. (2008). The influence of a cultural tool on approaching a problem from the history: solving a geometry problem on graph paper. In M. Kourkoulos & C. Tzanakis (Eds), *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, (vol. II, pp.183-191). University of Crete, Department of Education, Rethymnon.

Christer Bergsten, (2008). On the influence of theory on research in mathematics education: the case of teaching and learning limits of functions, *ZDM, 40*(2), 189-199.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15–42.

Chong, K., Lin, M. & Chen, S. (1998). Application of the Socratic Dialogue on corrective learning of subtraction. *Computers and Education, 31*(1), 55-68.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et obstacles*, Thèse de doctorat de troisième cycle L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Courant, R. & John F. (1999). *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I. New York: Springer-Verlag.

Courant, R. & Robbins, H. (1941/1996). *What is mathematics*? Oxford University Press.

De Bock, D., Van Doorem, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors, *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 311-334.

Devereux, D. T. (1978). Nature and teaching in Plato's Meno, *Phronesis*, *23*, 118-126.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS based analysis: Part 1, *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS based analysis: Part 2, *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 253-266.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M.C. Merlin (Ed.), *Handboock of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan Publishing Company.

Ernest, P. (1991): *The philosophy of mathematics education*. Hampshire: The Falmer Press.

Fernandez, E. (1994). A kinder, gentler Socrates: Conveying new images of mathematics dialogue, *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 43 -47.

Finney, R., Weir M., Giordano, F. (2001). Thomas' Calculus. Boston: Pearson Education, Addison Wesley.

Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen, C. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. In J. da Ponte & J. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 352–359). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29-44.

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 3-40.

Fowler, D.H. (1999). *The Mathematics of Plato's Academy*. Oxford: Oxford University Press.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht - Holland: Reidel Publishing Company.

González-Martín, A. S.; Giraldo, V., Souto, A. M. &. (2011). Representations and tasks involving real numbers in school. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 449-456). Ankara, Turkey : PME.

Halmos, P. R. (1994). What is teaching. *American Mathematical Monthly*, *101*(9), 848 - 854.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In: I. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, (v. 2, pp. 198-219). Hillsdale, NJ: LEA Publishers.

Hass, J, Weir M. & Thomas, G. (2007). *University Calculus*. New York: Pearson.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of Algebra. In C. Kieran & S. Wagner (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 60-86). Hillsdale, NJ: LEA Publishers.

Kaiser, G. (2002). Educational philosophies and their influence on mathematics education, an ethnographic study in English and German mathematics classrooms, *ZDM*, Vol. *34* (6), 241-257.

Klein, J. (1965). *A commentary on Plato's "Meno"*, University of North Carolina Press.

Koellner-Clark, K., Stallings, L., & Hoover, S. A. (2002). Socratic Seminars in Mathematics, *Mathematics Teacher, 95*(9), 682-687.

Kosyvas, G. & Baralis G. (2010). Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré, *Repères IREM, 78*, 13-36.

Kosyvas, G. (2005). *Une méthode vécue et communicative d'un problème ouvert : Du problème de la duplication du carré dans la méthode socratique du «Menon» de Platon reformulé en problème ouvert avec une expérimentation didactique en classe*, ULB-UMH, essai inédit (mémoire).

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouvertes: notion, catégories et difficultés, *Annales de Didactique et des Sciences cognitives, 15*, IREM de Strasbourg, 43-71.

Lay, S. (2006). *Analysis to an introduction to proof*. New Jersey: Pearson.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical Creativity using multiple solution tasks, In: R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*, (pp. 129-145). Rotterdam: Sense Publishers.

Loska, R. (1998). Teaching without instruction: The neo-Socratic method. In H. Steinbring, M. Bartolini-Busso & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 235-246). Inc. Reston, Virginia: NCTM.

Mamona, J. (1990). Sequences and Series Sequences and Functions: Students' Confusions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21, 2*, 333-337.

Maor, E. (2007). *The Pythagorean Theorem, a 4000 year history*. Princeton University.

Marchive, A. (2002). Maïeutique et didactique, l'exemple du "Ménon", *Penser l'éducation, 12*, 73-92.

Mastorides, E. & Zachariades, T. (2004) Secondary mathematics teachers' knowledge concerning the concept of limit and continuity. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 481–488).

McDonald J. & Weiss N. (1999). A course in Real Analysis. San Diego: Academic Press.

Merenluoto, K. - Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change, *Learning and Instruction, 14*, 519–53.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27*(1), 75-92.

Moseley, B. (2005). Students' Early Mathematical Representation Knowledge : The Effects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving, Educational Studies in Mathematics, 60, 37-69.

O'Connor, M.C. (2001). Can any fraction be turned into a decimal? A case study of a mathematical group discussion, *Educational Studies in Mathematics, 46*, 143–185.

Ogilvy, J. (1971). Socratic Method, Platonic Method and Authority, *Educational Theory, 21*(1), 3-16.

Parlebas, P. (1980). Un modèle d'entretien hyperdirectif : la maïeutique de Socrate, *Revue Française de Pédagogie, 1*, 4-19.

Paturet, J.-B. (1998). Socrate ou l'anti-maître, *Penser l'éducation, 2*, 71-85.

Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 39–46.

Pihlgren, A. (2008). *Socrates in the Classroom. Rationales and Effects of Philosophizing with Children*. www.diva-portal.org/su/theses /abstract.xsql?dbid=7392.

Potari, D. & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis, *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 351-380.

Roh, K. H. (2010). An empirical study of students understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity, *Educational Studies in Mathematics, 73*, 263-279.

Ross, K. (2000). *Elementary Analysis, the theory of Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Seeskin, K. (1987). *Dialogue and Discovery: A Study in Socratic Method*. Albany, New York: State University of New York Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: Falmer Press.

Sirotic, N & Zazkis, R (2007a). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge, *Educational Studies in Mathematics 65*, 49–76.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on a number line – Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(4), 477-488.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A. & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter, *Cognitive Psychology, 51*, 101-140.

Steffe, L-P., Nesher P., Cobb, P., Goldin, G. A. & Grer, B. (1996). *Theories of mathematical learning*. Mahwah, New Jersey: LEA Publishers.

Tall, D. & Schwarzenberger, L. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Published in Mathematics teaching, 82*, 44-49.

Tall, D. O. (2001). Natural and formal infinities, *Educational Studies in Mathematics 48*(2–3), 199–238.

Tall, D.O. (1992). Students' Difficulties in Calculus, *Proceedings of Working Group3, ICME-7, Québec, Canada*, 13-28.

Taylor, A. E. (2001). Plato: The Man and His Work. Dover Publications.

Toeplitz, O. (2007). The Calculus: A Genetic Approach University. The university of Chicago Press.

Tsamir, P. (2001). When 'the same' is not perceived as such: the case of infinite sets, *Educational Studies in Mathematics 48*, 289-307

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set rational numbers: Conceptual change approach, *Learning and Instruction, 14*, 453-467.

Van Dooren, W. (2005). *The linear imperative. A search for the roots and an evaluation of the impact of the over-use of linearity*. Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.

Vlastos, G. (1991). Socrates. Cambridge University Press.

Voskoglou, M. & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers, *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica* (QRDM), *21*, 127-141, G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy, http://math.unipa.it/~grim/quaderno21.htm).

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, D. (2011). Preservice Teachers' Understandings of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion: Strength and Stability of Belief, *Canadian Journal for Science, Mathematics, and Technology Education*, 11(2), 129-159.

Yujing, N. & Yong-Di, Z. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias, *Educational Psychologist*, 40, 27 - 52.

Zazkis, R & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link, *CBMS, Issues in Mathematics* Education, *16*, 1-27. AMC.

Davis, P. J. & Hersh R. (1980/1991). *Η μαθηματική εμπειρία*. Αθήνα: Τροχαλία.

Piaget, J. (1979). *Ψυχολογία και Παιδαγωγική*. Αθήνα: Νέα Σύνορα.

Spivak, M. (1980/1991). *Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Fowler, D. H. (2001). Το ιστορικό της ανακάλυψης της ασυμμετρίας: μια νέα θεώρηση. *Νεύσις* 10, 45-61.

Βαμβακούση, Ξ. & Βοσνιάδου, Σ. (2007). Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα... Όψεις της κατανόησης των παιδιών για τους ρητούς αριθμούς και το συμβολισμό τους, *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*, 145-155, Αλεξανδρούπολη.

Βόσκογλου, Μ. & Κόσυβας, Γ. (2009). Η κατανόηση των άρρητων αριθμών, *Πρακτικά 26ου συνεδρίου της ΕΜΕ*, 305-314, ΕΜΕ.

Βόσκογλου, Μ. & Κόσυβας, Γ. (2012). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών, *Ευκλείδης Γ , 76*, 11-47, Αθήνα: ΕΜΕ.

Δεληκανλής Π (2007). Χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού στην επίλυση προβλήματος: η ανάμνηση της διαμέτρου του τετραγώνου στο Μένωνα του Πλάτωνα. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.*, 459-468.

Δεληκανλής, Π. (2009). Πλάτωνος, Μένων: "Σωκράτης: ... αν δεν θέλεις να το εκφράσεις αριθμητικά, δείξε μας τουλάχιστον τη γραμμή". *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.*, 445-454.

Διονυσοπούλου, Τ. (1987). Τι φταίει στο χώρο των σχολικών μαθηματικών; *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, 180-184.

Ζαχάρος, Κ. (2002). Ο ρόλος του σχήματος στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και οι διδακτικές προοπτικές μιας ιστορικής «ανάγνωσης» της έννοιας του εμβαδού, στο Δ. Χασάπης (Επιμ): *Η ιστορία των μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο*. Θεσσαλονίκη: *Πρακτικά διημέρου διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών*, ΑΠΘ-ΠΤΔΕ., 67- 80.

Καλδρυμίδου, Μ. & Τζεκάκη, (1995). Ιστορία, επιστημολογία και διδασκαλία των Μαθηματικών: Μια εναλλακτική προσέγγιση του νοήματος των Μαθηματικών, *Πρακτικά 12ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε.*, 409-426.

Κανάκης, Ι. (1990). *Η Σωκρατική στρατηγική διδασκαλίας-μάθησης. Θεωρητική θεμελίωση και εμπειρική διερεύνηση*. Εκδόσεις Γρηγόρη, Αθήνα,

Κοθάλη, Ε., Χουντής, Μ., Μπόβης, Α. Κωστιάνης, Ζ. & Παπαδόπουλος, Δ. (1991). Η μαιευτική μέθοδος του Σωκράτη και η εφαρμογή της στο ελληνικό σχολείο, *Ευκλείδης Γ΄, 28*, 75-97, Αθήνα: ΕΜΕ.

Κονιτσιδιώτης, Β. (1961). *Μαιευτική Παιδαγωγική*. Αθήνα.

Κόσυβας, Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Κόσυβας, Γ. (2008). Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη, *Πρακτικά 25ου συνεδρίου της ΕΜΕ*, 434-448, ΕΜΕ.

Κόσυβας Γ. (2010). Η παιδαγωγική της έκπληξης με μαθηματικά παράδοξα στο Λύκειο, *Πρακτικά 27ου συνεδρίου της ΕΜΕ*, 584-601, ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2011). Είδη συλλογισμού κατά την ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος του κουμπαρά στην Α΄ Γυμνασίου, *Ευκλείδης Γ , 74*, 56-82, Αθήνα: ΕΜΕ.

Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1987). *Απειροστικός λογισμός*. Τόμος Ι, Αθήνα: εκδόσεις Αίθρα.

Πατρώνης, Τ. (1996). *Σύγχρονες θεωρήσεις και έρευνες στη μαθηματική παιδεία*. Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού.

Πετράκης, Ι. (2008). *Πλάτων-Μένων* (Εισαγωγή-Μετάφρ.-Σχόλια). Αθήνα: εκδόσεις Πόλις.

Σταμάτης, Ε. (1972). *Επιστημονικαί εργασίαι, άρθρα*. τόμος Α΄ : Αθήνα, 143-151.

Τσικοπούλου, Σ. (2010). Τετράγωνο από ίσα τετράγωνα. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 74, 80-91.

Φράγκος, Χ. (1993). *Παιδαγωγικές έρευνες και εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: University Studio Press, 65-127.

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (2002). Μένων (Πλάτων) - Μαθηματικά. Μια βιωματική διαθεματική δραστηριότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε.*, 204-213.

Διεύθυνση Αλληλογραφίας: Γιώργος Κόσυβας, Σεβαστουπόλεως 92-94, 11526, Αθήνα.
Γιώργος Κόσυβας, Phd, Msc, DES, Σχολικός σύμβουλος Μαθηματικών Α΄ Αθήνας.
E-mail: gkosyvas@yahoo.com