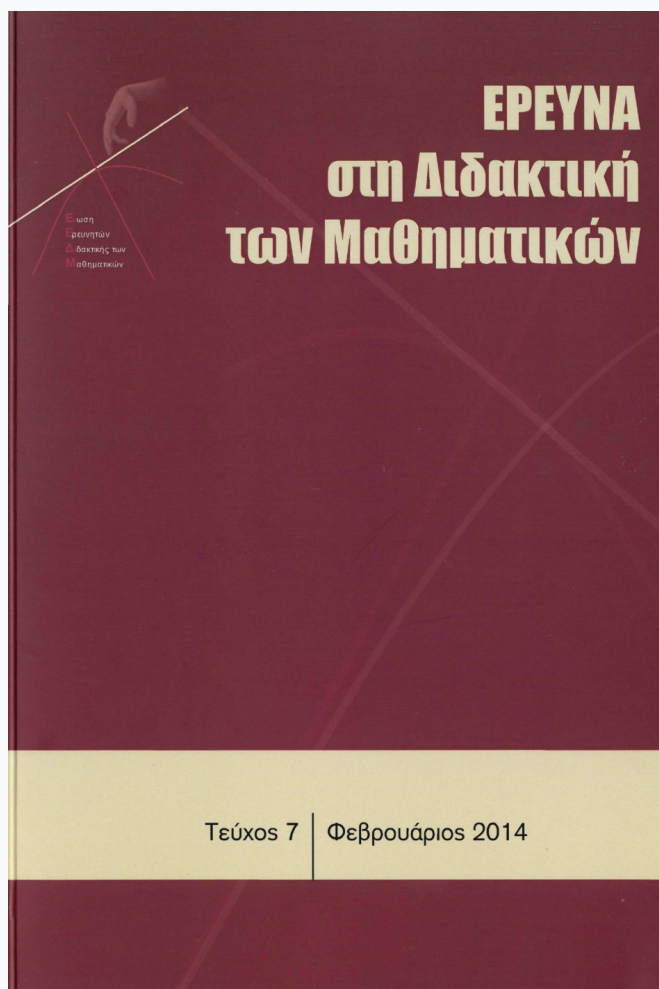


Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 7 (2014)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΛΕΚΤΙΚΗΣ ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Στυλιανή Τσεσμελή (Styliani Tsesmeli), Βασιλική Λιάπη (Vasiliki Liapi), Μαρία Χιονίδου-Μοσκοφόγλου (Maria Chionidou - Moskofoglou)

doi: [10.12681/enedim.18839](https://doi.org/10.12681/enedim.18839)

Copyright © 2018, Στυλιανή Τσεσμελή (Styliani Tsesmeli), Βασιλική Λιάπη (Vasiliki Liapi), Μαρία Χιονίδου-Μοσκοφόγλου (Maria Chionidou - Moskofoglou)



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Βιβλιογραφική αναφορά:

Τσεσμελή (Styliani Tsesmeli) Σ., Λιάπη (Vasiliki Liapi) Β., & Χιονίδου-Μοσκοφόγλου (Maria Chionidou - Moskofoglou) Μ. (2018). Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΛΕΚΤΙΚΗΣ ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (7), 67–89. <https://doi.org/10.12681/enedim.18839>

Η συμβολή της λεκτικής αναδιατύπωσης και της εικονιστικής αναπαράστασης στην Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος σε μαθητές Δημοτικού Σχολείου

Τσεσμελή Ν. Στυλιανή

stsesmeli@rhodes.aegean.gr

Λιάπη Βασιλική

liapivaso@gmail.com

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου Μαρία

mchionidou@rhodes.aegean.gr

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σκοπός της μελέτης ήταν να εξετάσει την επίδραση της λεκτικής αναδιατύπωσης και της εικονιστικής αναπαράστασης στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε ένα δείγμα 57 μαθητών που φοιτούσαν στις τρεις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Οι μαθητές κάθε τάξης αξιολογήθηκαν σε δύο μαθηματικές δοκιμασίες, όπως παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια, ενώ σε μια εβδομάδα επαναξιολογήθηκαν στις ίδιες δοκιμασίες με τη βοήθεια λεκτικής αναδιατύπωσης των κειμένων τους ή εικονιστικής αναπαράστασης των προβλημάτων τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές βελτίωσαν σημαντικά την επίδοσή τους μετά τη λεκτική αναδιατύπωση των κειμένων, ενώ η επίδοσή τους δε διαφοροποιήθηκε σημαντικά με τη χρήση της εικονιστικής αναπαράστασης, παρά το γεγονός ότι η ποιοτική ανάλυση λαθών έδειξε ότι υπήρχαν ποιοτικές διαφοροποιήσεις στις απαντήσεις τους. Περαιτέρω ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η επίδραση της λεκτικής αναδιατύπωσης και εικονιστικής αναπαράστασης βοήθησε μαθητές διαφορετικών μαθηματικών ικανοτήτων, η βελτίωση όμως ήταν σημαντικότερη για την ομάδα των μαθητών με υψηλότερες μαθηματικές ικανότητες. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σημαντικά για την ανάπτυξη εναλλακτικών διδακτικών στρατηγικών στα Μαθηματικά σε σχέση με τις ατομικές διαφορές των μαθητών στα πλαίσια της ενιαίας τάξης.

Λέξεις κλειδιά: Επίλυση Προβλήματος, Λεκτική αναδιατύπωση, Εικονιστική αναπαράσταση, Ατομικές Διαφορές

► Εισαγωγή

Η κατανόηση στα μαθηματικά πηγάζει από την ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται και να χειρίζεται τα μαθηματικά αντικείμενα ως έννοιες και να ανακαλύπτει τις σχέσεις που τις διέπουν με απώτερο στόχο να οδηγηθεί σε διαδικασίες επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος. Η επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά, όπως αναφέρουν οι Καραντζής και Τσαγγάρης (2003), είναι μια πολυδιάστατη διαδικασία, η οποία εμπεριέχει όχι μόνο τη γνώση βασικών αριθμητικών δεδομένων, των πράξεων και των αλγορίθμων τους, αλλά και της γλώσσας με την οποία εκφράζονται οι ποσοτικές σχέσεις των στοιχείων ενός μαθηματικού προβλήματος. Επίσης, σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), οι μαθητές που πρόκειται να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, χρειάζεται να ασχοληθούν και με τα πέντε βασικά κριτήρια διαδικασίας επίλυσης, τα οποία είναι η επίλυση προβλημάτων, η συλλογιστική σκέψη, η επικοινωνία, οι συσχετισμοί και η αναπαράσταση του μαθηματικού προβλήματος.

Οι περισσότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές του Δημοτικού σχολείου εντοπίζονται κυρίως στο πρώτο στάδιο της επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος, το οποίο αφορά στη μετάφραση των στοιχείων του προβλήματος σε νοερή αναπαράσταση. Σύμφωνα με μελέτες (Αγαλιώτης, 2000. Καραντζής & Τσαγγάρης, 2003), οι δυσχέρειες που σχετίζονται με ελλιπείς νοερές αναπαραστάσεις έχουν συνήθως σχέση με την ασαφή γλωσσική διατύπωση του προβλήματος που μπορεί να οδηγήσει σε πολυσήμαντες ερμηνείες από τους μαθητές, αλλά επίσης και με τη δυσκολία τους να ανιχνεύσουν τις κατάλληλες λέξεις-κλειδιά για την επιλογή των αντίστοιχων μαθηματικών πράξεων, ώστε να οδηγηθούν στην ορθή επίλυση του προβλήματος. Δυσκολίες επίσης εντοπίζονται και στο συνδυασμό όλων των επιμέρους νοητικών αναπαραστάσεων σε μια ευρύτερη και πληρέστερη νοητική αναπαράσταση μέσω της οποίας οι μαθητές θα επινοήσουν ένα σχέδιο επίλυσης των ζητούμενων που αποτελεί το δεύτερο στάδιο στην επίλυση προβλήματος. Τέλος, το τελευταίο στάδιο της εκτέλεσης του σχεδίου επίλυσης μέσω συγκεκριμένων αριθμητικών πράξεων και εύρεσης του ζητούμενου αποτελέσματος απαιτεί τη γνώση των αλγορίθμων που δομούν τις χρησιμοποιούμενες αριθμητικές πράξεις, όπου επίσης μπορεί να δυσκολεύονται οι μαθητές (Αγαλιώτης, 2000).

Η χρήση της λεκτικής αναδιατύπωσης και εικονιστικής αναπαράστασης στα Μαθηματικά

Σύμφωνα με την Κολέζα (2006), απαραίτητη προϋπόθεση της κατανόησης των πληροφοριών που παρουσιάζονται με μαθηματική μορφή είναι η κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας. Οι δυσκολίες στη μετάφραση του προβλήματος εξαιτίας της γλωσσικής διατύπωσης του μαθηματικού προβλήματος φαίνεται να συνδέονται με αναγνωστικές δυσχέρειες των μαθητών γενικής ή ειδικής φύσης, γεγονός

που καθιστά προβληματική την κατανόηση των λέξεων, των μαθηματικών εννοιών αλλά και τη σύνδεση των αντίστοιχων λέξεων με τα μαθηματικά σύμβολα. Η κατανόηση γίνεται περισσότερο δυσχερής όταν οι μαθητές συναντούν μαθηματικούς όρους που δε συνδέονται με τον καθημερινό τους λόγο. Τη στενή σχέση μεταξύ αναγνωστικής κατανόησης και ικανότητας επίλυσης λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων σε ελληνόφωνους μαθητές δημοτικού σχολείου, έχουν επισημάνει ερευνητικά οι Maridaki-Kassotaki και Chionidou-Moskofoglou (2004), οι οποίες βρήκαν ότι οι μαθητές 7-8 χρόνων διευκολύνθηκαν σημαντικά στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης μετά τη χρήση λεκτικής αναδιατύπωσης των προβλημάτων τους και ιδιαίτερα με την εισαγωγή χρονικών επεξηγηματικών φράσεων από την οικεία καθημερινότητα των παιδιών (π.χ., *πριν τα γενέθλια*). Επίσης, πολλοί ερευνητές, όπως οι De Corte και Verschaffel (1987) ασχολήθηκαν με τη λεκτική διατύπωση των προβλημάτων και τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται τα δεδομένα και τα ζητούμενα και εντόπισαν τη δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν το περιεχόμενο τους. Επίσης, συνέδεσαν τη δυσκολία επίλυσης των προβλημάτων από τους μαθητές περισσότερο με τη μη κατάλληλη παρουσίαση του προβλήματος, και λιγότερο με τη δυσκολία επιλογής των κατάλληλων μαθηματικών πράξεων. Η Τζεκάκη (2007) επίσης σχετίζει τις δυσκολίες που συναντάνε οι μαθητές του Δημοτικού στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων όχι μόνο με το περιεχόμενο και το είδος των προβλημάτων, αλλά ιδιαίτερα με τον *τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται* και διαχειρίζονται μέσα στην τάξη. Η συγγραφέας τονίζει ότι οι επιδόσεις των παιδιών αλλάζουν σε συνάρτηση με το αν το πρόβλημα είναι συγκεκριμένο και οικείο, αν παρουσιάζεται λεκτικά ή παριστάνεται με παραστατικούς ή συμβολικούς τρόπους.

Η ιδέα της χρήσης εικονικών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά δεν είναι καινούρια και αποτελεί μια άλλη παρεμβατική στρατηγική εκτός της λεκτικής αναδιατύπωσης. Οι οπτικές αναπαραστάσεις (διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, σχέδια) θεωρούνταν ανέκαθεν απαραίτητα εργαλεία στο έργο των μαθηματικών, ενώ πολλοί επιστήμονες (Ηλία, Χρυσάνθου & Φιλίππου, 2003) υποστήριξαν ότι η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων μπορεί να διευκολύνει την επίλυση προβλήματος σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας του. Ο Polya (1998) μάλιστα εισηγήθηκε τη στρατηγική «*κάνε ένα σχέδιο*» για την επίλυση του προβλήματος, το οποίο περιλάμβανε την κατανόηση του μαθηματικού προβλήματος, την επινόηση ενός σχεδίου για την επίλυσή του, την υλοποίηση του σχεδίου καθώς και τον τελικό έλεγχο για την ορθότητα της επίλυσής του. Επίσης, σύμφωνα με τον Κόκκοτα (2004), οι αναπαραστάσεις επιτρέπουν στα άτομα να κατανοήσουν ένα πρόβλημα και να σκεφτούν για τη λύση του. Μια καλή νοητική αναπαράσταση επιτρέπει στο λύτη να οργανώσει στοιχεία προγραμματισμένων κινήσεων, ελαττώνει τις απαιτήσεις από τη μνήμη, και τον βοηθά να φτάσει σε ένα σημείο που να προβλέπει δυναμικά εμπόδια για να φθάσει στη λύση.

Σύμφωνα με πρόσφατες ταξινομήσεις (Carney & Levin, 2002. Elia & Philiprou, 2004. Ηλία, Χρυσάνθου & Φιλίππου, 2003) των αναπαραστάσεων, αυτές κατηγοριοποιούνται σε σχέση με τη χρήση τους στην επίλυση προβλήματος σε: (i) *Διακοσμητικές*, οι οποίες δε βοηθούν καθόλου τους μαθητές για την επίλυση του προβλήματος, αποτελώντας συνήθως διακοσμητικά στοιχεία (π.χ., η εικόνα ενός λεωφορείου), (ii) *Βοηθητικές- Αναπαραστατικές*, οι οποίες αναπαριστούν ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος, όμως δεν είναι απαραίτητες για την επίλυσή του, (iii) *Βοηθητικές- Οργανωτικές*, οι οποίες βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν ή να γράψουν κάτι, όμως δεν είναι αναγκαίες για την επίλυση του προβλήματος, και τέλος, (iv) οι *Πληροφοριακές εικόνες*, οι οποίες δίνουν πληροφορίες που είναι απαραίτητες για να λυθεί ένα πρόβλημα, δηλ. η επίλυση του προβλήματος στηρίζεται στην εικόνα, η οποία είναι απαραίτητο στοιχείο για την επίλυσή του.

Η παρούσα μελέτη

Σκοπός της μελέτης αυτής είναι να εξετάσει σε ποιο βαθμό η λεκτική αναδιατύπωση και η εικονιστική αναπαράσταση θα μπορούσε να διαφοροποιήσει την επίδοση ενός δείγματος μαθητών των τριών τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου σε σχέση με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων ως προς τη χρήση τους ως εναλλακτικές διδακτικές στρατηγικές. Οι κυριότερες ερευνητικές υποθέσεις της παρούσας μελέτης διατυπώνονται ως εξής: (i) Οι μαθητές κάθε τάξης θα παρουσιάσουν υψηλότερη επίδοση μετά τη λεκτική αναδιατύπωση των μαθηματικών προβλημάτων. (ii) Οι μαθητές κάθε τάξης θα παρουσιάσουν καλύτερη επίδοση με τη βοήθεια της εικονιστικής αναπαράστασης των μαθηματικών προβλημάτων. (iii) Οι μαθητές με υψηλό βαθμό κατάκτησης των μαθηματικών ικανοτήτων μπορούν να ωφεληθούν μέσα από τη χρήση της λεκτικής αναδιατύπωσης και εικονιστικής αναπαράστασης. (iv) Οι μαθητές με χαμηλό βαθμό κατάκτησης των μαθηματικών ικανοτήτων μπορούν να ωφεληθούν μέσα από τη χρήση της λεκτικής αναδιατύπωσης και εικονιστικής αναπαράστασης.

► Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στη μελέτη αυτή ήταν 57 μαθητές (29 αγόρια, 28 κορίτσια) τριών δημοτικών σχολείων της περιφέρειας Ν. Δωδεκανήσων. Η κατανομή των μαθητών ανάλογα με την τάξη φοίτησης ήταν η εξής: (i) *Δ' τάξη* (n=23) με Μ.Ο. 9.04 (Τ.Α.=0.03), (ii) *Ε' τάξη* (n=20) με Μ.Ο. 10.05 (Τ.Α.=0.03), και (iii) *Στ' τάξη* (n=14) με Μ.Ο. 10.98 Μ.Ο. (Τ.Α.=0.27). Όλοι οι μαθητές είχαν φυσιολογική ανάπτυξη και νοημοσύνη και κάλυπταν ένα εύρος κοινωνικο-οικονομικών στρωμάτων. Τα ονόματα που χρησιμοποιούνται στη μελέτη είναι ψευδώνυμα.

Προκαταρκτική Αξιολόγηση

Η προκαταρκτική αξιολόγηση διενεργήθηκε ομαδικά από τον/την εκπαιδευτικό της τάξης σε δύο συνεδρίες για να εκτιμηθεί η ανάπτυξη της κατάκτησης λεξιλογίου και αναγνωστικής κατανόησης των μαθητών, οι οποίοι αποτελούν σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση του μαθηματικού προβλήματος (Maridaki-Kassotaki & Chionidou-Moskofoglou, 2004. Χασάπης, 2004). Επίσης, εξετάστηκαν τα επίπεδα μαθηματικής ικανότητας των συμμετεχόντων με στόχο την κατανομή τους σε ομάδες υψηλής και χαμηλής μαθηματικής ικανότητας. Η υποκλίμακα αυτή χορηγήθηκε ατομικά σε όλους τους συμμετέχοντες από τη δεύτερη συγγραφέα.

1. Εκτίμηση ανάπτυξης λεξιλογίου των μαθητών: Για τον προσδιορισμό της λεξιλογικής ανάπτυξης των μαθητών, χρησιμοποιήθηκε η σταθμισμένη δοκιμασία της Τάφα (1995). Στους μαθητές δόθηκαν 40 λέξεις διαβαθμισμένης σημασιολογικά δυσκολίας μέσα σε προτασιακά πλαίσια και ζητήθηκε να επιλέξουν την κατάλληλη λέξη ανάμεσα σε τέσσερις άλλες λέξεις, η οποία θα ικανοποιούσε συντακτικά και σημασιολογικά τη συνθήκη της κάθε πρότασης.

2. Εκτίμηση αναγνωστικής κατανόησης των μαθητών: Η αξιολόγηση της αναγνωστικής κατανόησης των μαθητών έγινε με βάση την υποκλίμακα *Κατανόηση Κειμένου* της *Δοκιμασίας Αναγνωστικής Επίδοσης (ΔΑΕ)* (Παντελιάδου & Σιδερίδης, 2002). Η δοκιμασία αυτή περιλαμβάνει έξι κείμενα αυξανόμενης δυσκολίας, όπου ο μαθητής χρειάζεται να διαβάσει σιωπηρά και να απαντήσει κατάλληλα στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Στη μελέτη αυτή χρησιμοποιήθηκαν τα τέσσερα τελευταία κείμενα τα οποία ήταν κατάλληλα για το αναγνωστικό επίπεδο των τριών τελευταίων τάξεων των μαθητών που συμμετείχαν στην μελέτη.

3. Εκτίμηση μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών: Η αξιολόγηση των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών διενεργήθηκε με βάση τη σταθμισμένη υποκλίμακα *‘Αριθμητική’* της *Ελληνικής Κλίμακας Νοημοσύνης για παιδιά* του Wechsler (*Ελληνικό WISC-III*) (Γεώργας, Παρασκευόπουλος, Μπεζεβέγκης & Γιαννίτσας, 1997). Η υποκλίμακα περιλαμβάνει 24 δοκιμασίες διαβαθμισμένης δυσκολίας, οι οποίες κυμαίνονται από την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν απλές μαθηματικές πράξεις μέχρι την επίλυση σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων σε προφορικό επίπεδο. Η βαθμολογία κάθε μαθητή στηρίζεται όχι μόνο στην ορθή επίλυση των μαθηματικών δοκιμασιών, αλλά και στην επίλυσή τους σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (χρονοχρέωση). Τα αποτελέσματα της ψυχομετρικής αξιολόγησης των μαθητών δίνονται στο Παράρτημα Ι.

Υλικά και Διαδικασία

Η κύρια μελέτη αφορά στην επίδραση της λεκτικής αναδιατύπωσης και εικονιστικής αναπαράστασης στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από τους μαθητές

και περιλάμβανε δύο στάδια για κάθε παράγοντα: (α) Αρχική αξιολόγηση και (β) Τελική αξιολόγηση, οι οποίες απείχαν χρονικά μεταξύ τους μια σχολική εβδομάδα. Οι δύο αξιολογήσεις διενεργήθηκαν ομαδικά από τον/την εκπαιδευτικό της τάξης μετά την προκαταρκτική αξιολόγηση κατά τη διάρκεια του δεύτερου εξαμήνου του σχολικού έτους σε δύο συνεδρίες των 45 λεπτών.

Αρχική αξιολόγηση. Κατά την αρχική αξιολόγηση δόθηκαν στους μαθητές κάθε τάξης 2 μαθηματικές δοκιμασίες, διαφορετικές για κάθε μια τάξη (2 για την Δ' τάξη, 2 για την Ε' τάξη, 2 για την ΣΤ' τάξη). Η επιλογή των μαθηματικών δοκιμασιών έγινε από τα αντίστοιχα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών κάθε τάξης του ΟΕΔΒ με αλλαγή των ονομάτων ή αριθμών της εκφώνησης των προβλημάτων, ώστε να μην παραπέμπουν σε λύση τους. Οι μαθηματικές δοκιμασίες ήταν σύνθετης φύσης, εμπεριείχαν δηλ. για την επίλυσή τους τη χρήση και των τεσσάρων μαθηματικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση), ενώ ένα παράδειγμα Αρχικής Αξιολόγησης δίνεται στο Παράρτημα II.

Τελική αξιολόγηση. Κατά την τελική αξιολόγηση χορηγήθηκαν στους μαθητές κάθε τάξης οι ίδιες 2 μαθηματικές δοκιμασίες, διαφορετικές για κάθε μια τάξη που δόθηκαν και στην Αρχική Αξιολόγηση. Η χορήγηση όμως των δοκιμασιών διέφερε από την Αρχική αξιολόγηση ως εξής:

(i) *Χορήγηση δοκιμασίας Με Λεκτική Αναδιατύπωση.* Μια από τις δοκιμασίες της Αρχικής Αξιολόγησης χορηγήθηκε στους μαθητές, αφού διενεργήθηκε λεκτική αναδιατύπωση ορισμένων φράσεων ή λέξεων του αρχικού κειμένου που θεωρήθηκαν ότι θα δυσκόλευαν την κατανόηση του προβλήματος από τους μαθητές και συνεπώς την τελική επίλυσή του. Για παράδειγμα, στη δεύτερη Μαθηματική Δοκιμασία της Αρχικής Αξιολόγησης της Ε' τάξης (βλ. Παράρτημα Ι) υπάρχουν οι φράσεις 'έπτά δωδεκαμελείς ομάδες' και 'μοιράζονται ανά 3, ένα στεφάνι' αναδιατυπώθηκαν λεκτικά ως εξής: 'Κάθε ομάδα αποτελείται από 12 παιδιά. Η γυμνάστρια δίνει ένα στεφάνι σε κάθε 3 παιδιά.'

(ii) *Χορήγηση δοκιμασίας Με Εικονική Αναπαράσταση.* Η πρώτη δοκιμασία της Αρχικής Αξιολόγησης χορηγήθηκε στους μαθητές, αφού εμπλουτίστηκε με εικονιστικές αναπαραστάσεις συγκεκριμένων μαθηματικών δεδομένων του προβλήματος και οδηγούσε τους μαθητές στην επίλυση του κατά στάδια. Σύμφωνα με πρόσφατες ταξινομήσεις των αναπαραστάσεων αυτών (Carney & Levin, 2002. Elia & Philippou, 2004), το είδος των εικονιστικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη ανήκει στις *βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες*, οι οποίες βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν ή να γράψουν κάτι, ενώ η χρήση τους δεν είναι απαραίτητη για την τελική επίλυσή του. Η επιλογή αυτή έγινε διότι τα ερευνητικά δεδομένα (Gagatsis & Elia, 2004) δείχνουν ότι το είδος αυτό της αναπαράστασης επηρέασε σημαντικά την επίδοση των μαθητών στην οργάνωση επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων σε αντίθεση με τα υπόλοιπα είδη αναπαράστασης (βλ. ενότητα 1.1.). Η επιμέλεια

των προβλημάτων με εικονιστικές αναπαραστάσεις διενεργήθηκε από τη δεύτερη συγγραφέα. Στην πρώτη Μαθηματική Δοκιμασία της Αρχικής Αξιολόγησης της Δ' τάξης, για παράδειγμα, επιλέχτηκε να παρουσιαστεί το μαθηματικό πρόβλημα σε τρία στάδια με ένα ερώτημα-ζητούμενο για κάθε στάδιο. Μια λέξη-κλειδί από κάθε στάδιο, η οποία κρίθηκε ότι θα δημιουργούσε δυσκολία κατανόησης στους μαθητές, αποφασίστηκε να αναπαρασταθεί εικονιστικά προς διευκόλυνσή τους. Π.χ., οι λέξεις 'πεντάδα σοκολατάκια αμυγδάλου' με πέντε εικόνες από σοκολατάκια αμυγδάλου, η 'δεκάδα σοκολατάκια φουντουκιού' με 10 εικόνες από σοκολατάκια φουντουκιού και τα '8 πακέτα' με 8 εικόνες πακέτων (βλ. Παράρτημα II).

► Αποτελέσματα

Οι απαντήσεις των μαθητών στις μαθηματικές δοκιμασίες βαθμολογήθηκαν με 1 για κάθε σωστή επίλυση τους και 0 για κάθε λανθασμένη επίλυση τους. Οι τιμές σε κάθε στατιστική ανάλυση είναι η κατά μέσο όρο ποσοστιαία επίδοση των συμμετεχόντων και αφορούν την *ορθή επίλυση* τους στα μαθηματικά έργα.

Επιδόσεις σε σχέση με την λεκτική αναδιατύπωση

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει την επίδοση των τριών τάξεων στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος χωρίς (Αρχική Αξιολόγηση) και με τη βοήθεια λεκτικής αναδιατύπωσης (Τελική Αξιολόγηση). Η 3 x 2 ανάλυση διακύμανσης, με την Τάξη (Δ', Ε', Στ') ως δι-υποκειμενικό παράγοντα και τη Διαφορά Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης ως ενδο-υποκειμενικό παράγοντα ανάλυσης, έδειξε μη στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των τριών τάξεων ($F(2, 54)=1.940$; ns), ενώ οι διαφορές στην επίδοση μεταξύ Αρχικής και Τελικής Αξιολόγησης ήταν στατιστικά σημαντικές ($F(1, 54)=10.304$; $p<.01$), υποδηλώνοντας τη σημασία του παράγοντα της λεκτικής αναδιατύπωσης στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος από τους μαθητές. Η αλληλεπίδραση της Τάξης x Διαφοράς Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης ήταν μη σημαντική ($F(2, 54)=2.017$; ns), διότι η επίδραση του παράγοντα της λεκτικής αναδιατύπωσης ήταν ίδια για κάθε τάξη.

Πίνακας 1

Μέση ποσοστιαία επίδοση (και τυπικές αποκλίσεις) μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος με και χωρίς τη βοήθεια λεκτικής αναδιατύπωσης

	<i>Χωρίς Αναδιατύπωση</i>	<i>Με Αναδιατύπωση</i>
<i>Δ' τάξη</i>	43.48 (50.68)	47.83 (51.07)
<i>Ε' τάξη</i>	38.10 (49.76)	61.90 (49.76)
<i>Στ' τάξη</i>	53.85 (51.88)	92.31 (27.73)

Επιδόσεις σε σχέση με την εικονιστική αναπαράσταση

Η επίδοση των τριών τάξεων στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος χωρίς (Αρχική Αξιολόγηση) και με τη βοήθεια εικονικής αναπαράστασης (Τελική Αξιολόγηση) παρουσιάζεται στον Πίνακα 2. Η 3 (Τάξη: Δ', Ε', Στ') x 2 (Αξιολόγηση: Αρχική, Τελική) ανάλυση διακύμανσης έδειξε μη στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των τριών τάξεων ($F(2, 54)=1.196$; ns), ενώ οι διαφορές στην επίδοση μεταξύ Αρχικής και Τελικής Αξιολόγησης απέτυχαν να είναι σημαντικές ($F(1, 54)=3.484$; $p=.067$) παρότι τη βελτίωση της επίδοσης ιδιαίτερα στις δύο μεγαλύτερες τάξεις. Η αλληλεπίδραση της Τάξης x Διαφοράς Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης δε έφτασε όμως τα επίπεδα σημαντότητας ($F(2, 54)=1.026$; ns).

Πίνακας 2

Μέση ποσοστιαία επίδοση (και τυπικές αποκλίσεις) μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος με και χωρίς τη βοήθεια εικονιστικής αναπαράστασης

	<i>Χωρίς Αναπαράσταση</i>	<i>Με Αναπαράσταση</i>
<i>Δ' τάξη</i>	60.87 (49.90)	60.87 (49.90)
<i>Ε' τάξη</i>	42.86 (50.70)	57.14 (50.70)
<i>Στ' τάξη</i>	61.54 (50.63)	84.62 (37.55)

Ανάλυση λαθών σε σχέση με την εικονιστική αναπαράσταση

Για να μελετηθεί ενδελεχέστερα η επίδραση της εικονιστικής αναπαράστασης στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος από τους μαθητές, διενεργήθηκε ποιοτική ανάλυση στις λανθασμένες απαντήσεις που έδωσαν στην Αρχική και Τελική Αξιολόγηση (βλ. Πίνακα 3). Οι λανθασμένες απαντήσεις τους εντάχτηκαν στις εξής κατηγορίες: (i) *Ορθή ανάπτυξη σχεδίου - Λάθος αλγόριθμοι*, κατά την οποία ο μαθητής οργανώνει ένα σωστό σχέδιο επίλυσης του προβλήματος με την επιλογή των σωστών πράξεων, αλλά κάνει λάθη στην εκτέλεση αυτών, (ii) *Μερική ανάπτυξη σχεδίου-Ημιτελής λύση*, όπου ο μαθητής καταστρώνει ένα σχέδιο λύσης του προβλήματος με την επιλογή των περισσότερων σωστών πράξεων, οι οποίες εκτελούνται και σωστά, αλλά συνήθως παραλείπει την τελική αριθμητική πράξη που θα τον οδηγήσει στη λύση του προβλήματος, και (iii) *Μηδενική /Λανθασμένη ανάπτυξη σχεδίου*, όπου ο μαθητής δεν καταστρώνει κανένα σχέδιο λύσης του προβλήματος ή επιτυγχάνει να καταστρώσει ένα σχέδιο λύσης, αλλά επιλέγει λάθος πράξεις ή δεν εκτελεί καμία πράξη. Οι λανθασμένες επιδόσεις των τριών τάξεων χωρίς (Αρχική Αξιολόγηση) και με τη βοήθεια εικονιστικής αναπαράστασης (Τελική Αξιολόγηση) σε κάθε μια από τις άνω κατηγορίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3

Μέση ποσοστιαία επίδοση (και τυπικές αποκλίσεις) λαθών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος με και χωρίς τη βοήθεια εικονιστικής αναπαράστασης

	Δ' τάξη		Ε' τάξη		Στ' τάξη	
	Αρχική	Τελική	Αρχική	Τελική	Αρχική	Τελική
Ορθή ανάπτυξη σχεδίου	0.00 (0.00)	8.70 (28.81)	4.76 (21.82)	14.29 (35.85)	7.69 (27.73)	7.69 (27.73)
Μερική ανάπτυξη σχεδίου	0.00 (0.00)	26.09 (44.89)	9.52 (30.07)	19.05 (40.23)	0.00 (0.00)	0.00 (0.00)
Λάθος/ μηδενική ανάπτυξη σχεδίου	30.43 (47.04)	4.35 (20.85)	19.05 (40.23)	9.52 (30.07)	7.69 (27.73)	7.69 (27.73)

Η 3 x 2 ανάλυση διακύμανσης, με την Τάξη (Δ', Ε', Στ') ως δι-υποκειμενικό παράγοντα και τη Διαφορά Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης ως ενδο-υποκειμενικό παράγοντα ανάλυσης στην πρώτη κατηγορία έδειξε μη στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των τριών τάξεων ($F(2, 54)=0.303$; ns), στη διαφορά επίδοσης μεταξύ Αρχικής και Τελικής Αξιολόγησης ($F(1, 54)=2.934$; ns), καθώς και στην αλληλεπίδραση της Τάξης x Διαφοράς Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης ($F(2, 54)=0.622$; ns). Αντιθέτως, αντίστοιχες 3 x 2 αναλύσεις διακύμανσης στις άλλες δύο κατηγορίες έδειξαν ότι οι μαθητές βελτίωσαν σημαντικά την επίδοσή τους ως αποτέλεσμα της εικονιστικής αναπαράστασης (Διαφορά Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης: $F(1, 54)=4.944$; $p<.05$) σε σχέση με τη συνολική κατάστρωση του προβλήματος και την κατάλληλη επιλογή των αριθμητικών πράξεων, ενώ απέτυχαν μόνο στην επίλυση της τελευταίας αριθμητικής πράξης. Η επίδραση της Τάξης ($F(2, 54)=1.897$; ns), καθώς και η αλληλεπίδραση της Τάξης x Διαφοράς Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης ($F(2, 54)=2.073$; ns) δεν ήταν σημαντικές. Παρομοίως, οι μαθητές μείωσαν σημαντικά από την αρχική στην τελική αξιολόγηση τις λανθασμένες επιδόσεις τους που, είτε αφορούσαν την απουσία οργανωμένου σχεδίου επίλυσης του προβλήματος, είτε την επιλογή λανθασμένων αριθμητικών πράξεων (Διαφορά Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης: $F(1, 54)=4.944$; $p<.05$). Τέλος, η επίδραση της Τάξης ($F(2, 54)=0.492$; ns) καθώς και η αλληλεπίδραση της Τάξης x Διαφοράς Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης ($F(2, 54)=2.073$; ns) δεν ήταν σημαντικές, υποδηλώνοντας ότι η μείωση ήταν παρόμοια για κάθε τάξη.

Η επίδραση του επιπέδου κατάκτησης της μαθηματικής ικανότητας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος

Στη συνέχεια, κρίθηκε σημαντικό να διερευνηθεί η επίδραση της λεκτικής αναδιατύπωσης και της εικονιστικής αναπαράστασης σε μαθητές με διαφορετικό βαθμό κατάκτησης της μαθηματικής ικανότητας. Για το λόγο αυτό, όλοι οι μαθητές κατηγοριοποιήθηκαν σε δύο ομάδες -υψηλής και χαμηλής μαθηματικής ικανότητας- ανάλογα με την επίδοσή τους στην *Αριθμητική της Κλίμακας Νοημοσύνης για παιδιά* (βλ. ενότητα 2.2.). Η ομάδα υψηλής μαθηματικής ικανότητας (N=41) βαθμολογήθηκε υψηλά στην Αριθμητική υποκλίμακα με τυπικούς βαθμούς της τάξης των 10-19, ενώ η ομάδα χαμηλής μαθηματικής ικανότητας (N=16) βαθμολογήθηκε χαμηλά στο ίδιο κριτήριο (τυπικοί βαθμοί: 2-9).

Η επίδραση της λεκτικής αναδιατύπωσης σε μαθητές με υψηλή/χαμηλή μαθηματική ικανότητα

Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει την επίδοση των δύο ομάδων με υψηλή και χαμηλή μαθηματική ικανότητα στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος χωρίς (Αρχική Αξιολόγηση) και με τη βοήθεια της λεκτικής αναδιατύπωσης (Τελική Αξιολόγηση). Η 2 (Ομάδα με Υψηλή Μαθηματική Ικανότητα, Ομάδα με Χαμηλή Μαθηματική Ικανότητα) x 2 (Αξιολόγηση: Αρχική, Τελική) ανάλυση διακύμανσης έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των δύο ομάδων ($F(1, 55)=4.914$; $p<.05$) όσον αφορά την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος πριν και μετά τη λεκτική αναδιατύπωση. Επισκόπηση του Πίνακα 4 δείχνει ότι η ομάδα με τη χαμηλή μαθηματική ικανότητα βελτιώθηκε μόνο 6.25% εξαιτίας της λεκτικής αναδιατύπωσης των μαθηματικών προβλημάτων, ενώ η ομάδα με την υψηλή ικανότητα ωφελήθηκε σε τετραπλάσιο βαθμό (24.93%). Οι διαφορές στην επίδοση μεταξύ Αρχικής και Τελικής Αξιολόγησης σε σχέση με τον παράγοντα της λεκτικής αναδιατύπωσης ήταν επίσης σημαντικές ($F(1, 55)=4.099$; $p<.05$). Η αλληλεπίδραση της Ομάδας x Διαφοράς Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης ήταν μη σημαντική ($F(1, 55)=1.437$; ns), υποδηλώνοντας ότι η επίδραση του παράγοντα της λεκτικής αναδιατύπωσης ήταν θετική για κάθε ομάδα.

Πίνακας 4

Μέση ποσοστιαία επίδοση (και τυπικές αποκλίσεις) στην επίδοση επίλυσης προβλήματος με/χωρίς λεκτική αναδιατύπωση από μαθητές χαμηλής και υψηλής μαθηματικής ικανότητας

	<i>Χωρίς Αναδιατύπωση</i>	<i>Με Αναδιατύπωση</i>
Υψηλή ικανότητα	48.78 (50.61)	73.17 (44.86)
Χαμηλή ικανότητα	31.25 (47.87)	37.50 (50.00)

Η επίδραση της εικονιστικής αναπαράστασης σε μαθητές με υψηλή/ χαμηλή μαθηματική ικανότητα

Η επίδοση των δύο ομάδων υψηλής και χαμηλής μαθηματικής ικανότητας σε σχέση με την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος χωρίς (Αρχική Αξιολόγηση) και με τη βοήθεια της εικονιστικής αναπαράστασης (Τελική Αξιολόγηση) παρουσιάζεται στον Πίνακα 5. Η 2 (Ομάδα με Υψηλή Μαθηματική Ικανότητα, Ομάδα με Χαμηλή Μαθηματική Ικανότητα) x 2 (Αξιολόγηση: Αρχική, Τελική) ανάλυση διακύμανσης έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των δύο ομάδων ($F(1, 55)=8.882; p<.01$). Ο Πίνακας 5 δείχνει ότι τόσο οι μαθητές με χαμηλή μαθηματική ικανότητα (6.25%), όσο και η ομάδα με υψηλή μαθηματική ικανότητα (12.20%) βελτίωσαν την επίδοσή τους ως επίδραση της εικονιστικής αναπαράστασης. Οι διαφορές όμως αυτές στην επίδοση μεταξύ Αρχικής και Τελικής Αξιολόγησης απέτυχαν να είναι σημαντικές ($F(1, 55)=1.616; ns$). Η αλληλεπίδραση της Ομάδας x Διαφοράς Αρχικής /Τελικής Αξιολόγησης ήταν μη σημαντική ($F(1, 55)=0.168; ns$), υποδηλώνοντας ότι η επίδραση του παράγοντα της εικονιστικής αναπαράστασης ήταν ωφέλιμη για κάθε ομάδα.

Πίνακας 5

Μέση ποσοστιαία επίδοση (και τυπικές αποκλίσεις) στην επίδοση επίλυσης προβλήματος με/χωρίς εικονιστική αναπαράσταση από μαθητές χαμηλής και υψηλής μαθηματικής ικανότητας

	<i>Χωρίς Αναπαράσταση</i>	<i>Με Αναπαράσταση</i>
<i>Υψηλή ικανότητα</i>	63.40 (48.77)	75.60 (43.48)
<i>Χαμηλή ικανότητα</i>	31.25 (47.87)	37.50 (50.00)

Συσχετίσεις προκαταρκτικής αξιολόγησης με τα μαθηματικά έργα

Τα αποτελέσματα μέχρι τώρα έδειξαν ότι οι δυσκολίες των μαθητών στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων συνδέονται με τα επίπεδα κατάκτησης της μαθηματικής τους ικανότητας και πιθανότατα και με τα επίπεδα κατάκτησης της αναγνωστικής τους κατανόησης και λεξιλογίου (βλ. επίσης Πίνακα 4). Για το λόγο αυτό, η σχέση αυτή διερευνήθηκε περαιτέρω μέσω αναλύσεων συνάφειας (Pearson). Ειδικότερα, ο Πίνακας 6 αναφέρει τους δείκτες συνάφειας μεταξύ των μαθηματικών έργων και της ψυχομετρικής αξιολόγησης. Ο Πίνακας δείχνει ότι οι δείκτες συνάφειας ήταν στατιστικά σημαντικοί και υψηλοί τόσο ανάμεσα στα έργα της ψυχομετρικής αξιολόγησης και των μαθηματικών έργων πριν και μετά την εφαρμογή της λεκτικής αναδιατύπωσης, όσο και ανάμεσα στα έργα της ψυχομετρικής αξιολόγησης και των μαθηματικών έργων πριν και μετά την εφαρμογή της εικονιστι-

κής αναπαράστασης. Για να είμαστε ακριβέστεροι, η συσχέτιση της μαθηματικής ικανότητας με τις μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών πριν ($r=0.412$, $p<.01$) και μετά τη λεκτική αναδιατύπωση ($r=0.468$, $p<.01$) φαίνεται να είναι ελάχιστα ισχυρότερη σε σχέση με τη συνάφεια της αναγνωστικής ικανότητας με τα ίδια μαθηματικά έργα (πριν: $r=0.404$, $p<.01$, μετά: $r=0.307$, $p<.05$) καθώς και του λεξιλογίου (πριν: $r=0.330$, $p<.05$, μετά: $r=0.272$, $p<.05$). Τέλος, η συσχέτιση της μαθηματικής επίδοσης πριν την υιοθέτηση της εικονιστικής αναπαράστασης με το λεξιλόγιο και τη μαθηματική ικανότητα αποδείχτηκε ότι ήταν ισχυρότερη ($r=0.401$, $p<.01$, $r=0.363$, $p<.01$) σε σχέση με την αναγνωστική ικανότητα ($r=0.325$, $p<.05$). Επίσης, η συσχέτιση της μαθηματικής επίδοσης μετά την εφαρμογή της εικονιστικής αναπαράστασης με την αναγνωστική κατανόηση και τη μαθηματική ικανότητα φάνηκε ότι ήταν ελάχιστα ισχυρότερη ($r=0.490$, $p<.01$ και $r=0.441$, $p<.01$) σε σχέση με την κατάκτηση του λεξιλογίου ($r=0.418$, $p<.01$). Η επίδραση των ψυχομετρικών αυτών παραγόντων φαίνεται εναργέστερα στην ανάλυση των ατομικών περιπτώσεων μαθητών/τριών που ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες ικανοτήτων και παρουσιάζονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Πίνακας 6

Συσχετίσεις προκαταρκτικής αξιολόγησης με μαθηματικά έργα

	<i>Αναγνωστική κατανόηση</i>	<i>Λεξιλόγιο</i>	<i>Μαθηματική ικανότητα</i>
<i>Λεκτική αναδιατύπωση</i>			
<i>Αρχική</i>	0.404**	0.330*	0.412**
<i>Τελική</i>	0.307*	0.272*	0.468**
<i>Εικονιστική αναπαράσταση</i>			
<i>Αρχική</i>	0.325*	0.401**	0.363**
<i>Τελική</i>	0.490**	0.418**	0.441**

Κλειδί: * $p<.05$, ** $p<.01$.

Η ανάλυση ατομικών περιπτώσεων διαφορετικών ικανοτήτων σε σχέση με τη χρήση εικονιστικής αναπαράστασης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται αναλυτικά οι ατομικές επιδόσεις τριών μαθητών (Δέσποινα- Δ΄, Φάνης- Ε΄, Γιάννης- ΣΤ΄) με την υψηλότερη μαθηματική ικανότητα, σύμφωνα με τη σταθμισμένη κλίμακα της Αριθμητικής (βλ. ενότητα 2.2. και 3.4.2.), αλλά με μηδενικές επιδόσεις στην Αρχική Αξιολόγηση των μαθηματικών έργων πριν την εικονιστική αναπαράσταση για να φανεί η μεταβολή της επίδοσης στην Τελική Αξιολόγηση, καθώς επίσης και τριών μαθητών (Άννα- Δ΄, Ράνια- Ε΄, Γαβριήλ- ΣΤ΄) με τη χαμηλότερη μαθηματική ικανότητα. Ο Πίνακας 7 δείχνει τις επιδόσεις των μαθητών αυτών τόσο στα ψυχομετρικά κριτήρια της προκαταρκτικής αξιολόγησης (μαθηματική ικανότητα, αναγνωστική κατανόηση, λεξιλόγιο) όσο

και στα μαθηματικά έργα πριν και μετά την εφαρμογή της εικονιστικής αναπαράστασης, καθώς επίσης και τα αποτελέσματα της ποιοτικής ανάλυσης λαθών σε σχέση με τον παράγοντα αυτό.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 7, παρατηρούμε ότι οι μαθητές που ανήκουν στην ομάδα χαμηλής μαθηματικής ικανότητας δε παρουσιάζουν σοβαρές αδυναμίες μόνο στην μαθηματική ικανότητα, αλλά και στην κατάρκτηση της αναγνωστικής κατανόησης και του λεξιλογίου, στοιχείο που αναδείχτηκε στις αναλύσεις συνάφειας στην προηγούμενη ενότητα (βλ. 3.5.). Επίσης, οι μαθητές αυτοί παρουσιάζουν μηδενική επίδοση στα μαθηματικά προβλήματα που τους δόθηκαν τόσο στην αρχική αξιολόγηση όσο και στην τελική αξιολόγηση, παρά τη χρήση εν δυνάμει ενισχυτικών παραγόντων, όπως η εικονιστική αναπαράσταση. Τέλος, τα δεδομένα σε σχέση με την υιοθέτηση στρατηγικών επίλυσης σε κάθε μια από τις ποιοτικές κατηγορίες λαθών δείχνουν ότι μόνο δύο από τους τρεις μαθητές κατόρθωσαν τουλάχιστον να οδηγηθούν σε μερική επίλυση του μαθηματικού προβλήματος μετά τη χρήση της εικονιστικής αναπαράστασης.

Παραλλήλως, οι μαθητές που ανήκουν στην ομάδα υψηλής μαθηματικής ικανότητας παρουσιάζουν υψηλή κατάρκτηση όχι μόνο της μαθηματικής ικανότητας, αλλά και των υπόλοιπων ικανοτήτων της αναγνωστικής κατανόησης και του λεξιλογίου (βλ. Πίνακα 7). Οι μαθητές αυτοί όχι μόνο οδηγήθηκαν άμεσα στην ορθή επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων στην τελική αξιολόγηση, αλλά και διαφοροποίησαν ποιοτικά τις στρατηγικές επίλυσης τους μετά τη χρήση της εικονιστικής αναπαράστασης, όπως φαίνεται κι από την ποιοτική ανάλυση λαθών.

Πίνακας 7

Επιδόσεις ατομικών περιπτώσεων στα ψυχομετρικά έργα (Μαθηματικά, Ανάγνωση, Λεξιλόγιο) με/χωρίς την Εικονιστική Αναπαράσταση

	Μαθ	Αναγ	Λεξ	Αρχική	Τελική	Αρχική	Τελική
Υψηλή							
Δέσποινα	14	80	75	0	1	Μερική	Σωστή
Φάνης	13	100	63	0	1	Λάθος	Σωστή
Γιάννης	11	60	37	0	1	Λάθος	Σωστή
Χαμηλή							
Άννα	3	10	2	0	0	Λάθος	Μερική
Ράνια	3	20	12	0	0	Λάθος	Ορθή
Γαβριήλ	2	30	2	0	0	Λάθος	Λάθος

Σημείωση: Οι επιδόσεις στα Μαθηματικά, την Ανάγνωση και το Λεξιλόγιο δίνονται σε εκατοστημόρια. Η Αρχική και Τελική Αξιολόγηση δίνεται σε 0 (λάθος απάντηση) και 1 (σωστή απάντηση), ενώ οι όροι Μερική και Ορθή σημαίνουν Μερική και Ορθή Επίλυση Προβλήματος και αναφέρονται στις κατηγορίες ποιοτικής ανάλυσης λαθών (βλ. Ενότητα 3.2.1., Πίνακα 3).

► Συζήτηση

Σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν να εξετάσει σε ποιο βαθμό η λεκτική αναδι-ατύπωση και η εικονιστική αναπαράσταση θα μπορούσε να διαφοροποιήσει την επίδοση ενός δείγματος μαθητών των τριών τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου σε σχέση με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την αρχική υπόθεση εργασίας για σημαντική βελτίωση των μαθητών μετά τη χρήση λεκτικής αναδιατύπωσης των μαθηματικών κειμένων, γεγονός που συνάδει με σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα (De Corte & Verschaffel, 1987. Maridaki-Kassotaki & Chionidou-Moskofoglou, 2004). Τα δεδομένα αυτά φαίνεται επίσης να ερμηνεύονται από τη σημαντική συσχέτιση που βρέθηκε ανάμεσα στις σταθμισμένες μετρήσεις της αναγνωστικής κατανόησης και του λεξιλογίου σε σχέση με την επίλυση του προβλήματος στην αρχική δοκιμασία, αλλά και στη τελική δοκιμασία μετά τη χρήση λεκτικής αναδιατύπωσης, υποδεικνύοντας με σαφήνεια ότι όταν οι μαθητές δυσκολεύονται εξαιτίας αναγνωστικών δυσκολιών και πτωχού λεξιλογίου στην κατανόηση των μαθηματικών κειμένων, αυτό επηρεάζει σοβαρά την τελική επίλυση του μαθηματικού προβλήματος. Η σημασία της αναγνωστικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά φαίνεται και στην περίπτωση της εικονιστικής αναπαράστασης, όπως δείχνουν οι ισχυρές συσχετίσεις της προκαταρκτικής αξιολόγησης με την αρχική, αλλά και την τελική αξιολόγηση μετά τη χρήση της εικονιστικής αναπαράστασης.

Επισκόπηση του Πίνακα 2, δείχνει ότι οι μαθητές βελτίωσαν την επίδοσή τους με τη χρήση εικονιστικής αναπαράστασης, η βελτίωση αυτή όμως δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Οι Θεοδούλου και Γαγάτσης (2003) υποστήριξαν, μέσω της μελέτης τους με παιδιά δημοτικού, ότι τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων, όπως οι εικόνες, δεν εγγυώνται πάντα την επιτυχή υπερπήδηση γνωστικών εμποδίων που μπορεί να έχουν αρκετοί μαθητές, διότι δεν υπάρχει αναπαράσταση που να είναι άριστη για όλες τις περιπτώσεις, ούτε κάποια που να είναι κατάλληλη για όλα τα άτομα (Κόκκοτας, 2004). Παρά ταύτα, η ποιοτική ανάλυση λαθών (βλ. Πίνακα 3) που διενεργήθηκε για να διερευνηθούν σε μεγαλύτερο βάθος τα δεδομένα, έδειξε ότι οι μαθητές ωφελήθηκαν από τη χρήση των εικονιστικών αναπαραστάσεων, ιδιαίτερα εκείνοι των μικρότερων τάξεων. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της Δ' τάξης, ενώ στην αρχική αξιολόγηση αδυνατούσαν πλήρως ή μερικώς να αναπτύξουν ένα σχέδιο επίλυσης του προβλήματος σε ποσοστό 30%, μετά τη χρήση της εικονιστικής αναπαράστασης και της καθοδήγησής τους να επιλύσουν το πρόβλημα κατά στάδια, μπόρεσαν να ακολουθήσουν επιτυχώς το σχέδιο επίλυσης και να επιλέξουν τους ορθούς αλγόριθμους σε ποσοστό 29%, αποτυγχάνοντας όμως να ολοκληρώσουν την τελική επίλυση του προβλήματος. Παρομοίως, οι μαθητές της Ε' τάξης κατάφεραν, από ένα ποσοστό 19% πλήρους ή μερικής αποτυχίας στην επίλυση, να μετακινηθούν σε παρόμοια ποσοστά επιτυχημένης κατάστροφης επίλυσης και επιλογής ορθών αλγορίθμων. Επίσης, χρειάζεται εδώ να σημειωθεί, ότι

ένα πρόσθετο μέρος των δυσκολιών των μαθητών σε κάθε τάξη αφορούσαν στην ελλιπή κατάρκτηση στη γνώση των αλγορίθμων και των κατάλληλων αριθμητικών πράξεων (Δ' τάξη: 8.70%, Ε' τάξη: 14%, Στ' τάξη: 7.70%), όπως αναφέρει και ο Αγαλιώτης (2000).

Αξιοπρόσεκτα επίσης είναι τα δεδομένα που προέκυψαν σε σχέση με τις ομάδες που σχηματίστηκαν με βάση την κατάρκτηση των μαθηματικών δεξιοτήτων. Οι μαθητές που είχαν υψηλές επιδόσεις στη μαθηματική ικανότητα με βάση τη σταθμισμένη κλίμακα Αριθμητικής, βελτιώθηκαν *περισσότερο* σε σχέση με εκείνους που είχαν χαμηλές επιδόσεις στη μαθηματική ικανότητα με βάση την ίδια κλίμακα μετά τη χρήση της λεκτικής αναδιατύπωσης (35.67% έναντι 17.53%). Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι μαθητές αυτοί έχοντας υψηλές μαθηματικές ικανότητες μπορούν και αξιοποιούν τεχνικές που τους προσφέρονται (π.χ., τη λεκτική αναδιατύπωση) προς όφελος τους σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό συγκριτικά με τους αδύναμους μαθητές. Παρόμοια αποτελέσματα διαφάνηκαν και σε σχέση με την επίλυση προβλήματος μετά τη χρήση της εικονιστικής αναπαράστασης, όπου οι μαθητές με υψηλές μαθηματικές δεξιότητες παρουσίασαν σημαντικότερη βελτίωση από τους μαθητές με χαμηλές μαθηματικές δεξιότητες (38.10% έναντι 32.15%).

Οι μαθητές με χαμηλές ικανότητες στην αναγνωστική κατανόηση, στο λεξιλόγιο και στα μαθηματικά, επέδειξαν τις ίδιες χαμηλές επιδόσεις στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων της κύριας μελέτης, σε μεγαλύτερο βαθμό στην αρχική αξιολόγηση, ενώ στην τελική αξιολόγηση παρουσίασαν κάποια μικρά ποσοστά βελτίωσης. Σε αντίθετη περίπτωση, οι μαθητές, με υψηλές ικανότητες στην αναγνωστική κατανόηση, στο λεξιλόγιο και στα μαθηματικά επέδειξαν εξίσου υψηλές επιδόσεις και στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Τα ερευνητικά αυτά αποτελέσματα έχουν σημαντικές εκπαιδευτικές προεκτάσεις. Το γεγονός ότι η γραπτή λεκτική αναδιατύπωση φάνηκε να λειτουργήσει ενισχυτικά στην κατανόηση των μαθηματικών προβλημάτων από τους μαθητές, δείχνει με τρόπο ξεκάθαρο ότι οι δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν τα συντακτικά, σημασιολογικά και πραγματολογικά χαρακτηριστικά της γλώσσας μας δυσχεραίνουν την κατανόηση του λόγου στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Χασάπης, 2004). Για το λόγο αυτό, όπου η γραπτή λεκτική αναδιατύπωση δεν είναι εφικτή, προτείνεται να καταστεί ο διάλογος «ως εργαλείο σκέψης» που μεταδίδει νοήματα, συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας των Μαθηματικών, ώστε να διασφαλίζεται κατά το δυνατόν μια διαρκής κατανοησιμότητά του από όλους τους μαθητές (Χασάπης, 2004). Επίσης, τα δεδομένα της μελέτης αυτής έδειξαν ότι οι εικονιστικές αναπαραστάσεις επιτρέπουν στα άτομα να κατανοήσουν καλύτερα ένα πρόβλημα και να οργανώσουν επιτυχέστερα στρατηγικές επίλυσής του. Για το λόγο αυτό, πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν την ανάγκη δημιουργίας αναπαραστάσεων για τα μαθηματικά προβλήματα με πραγματικά αντικείμενα, εικόνες

ή σχήματα (De Corte & Verschaffel, 1987. Τζεκάκη, 2007). Τέλος, ο συνδιασμός των δύο εναλλακτικών μεθόδων από τον/την εκπαιδευτικό στα πλαίσια της σχολικής τάξης θα μπορούσε να αποφέρει πιο γόνιμα αποτελέσματα για την κατανόηση των προβλημάτων αυτών. Τέτοιες μελέτες, παρότι το γεγονός ότι χρειάζεται να επαναλειτουργούν σε μεγαλύτερα δείγματα, έχουν σημαντικές συνέπειες για την εκπαιδευτική διαδικασία, όπου ιδιαίτερα οι μαθητές με δυσκολίες στη μάθηση, θα μπορούσαν να ωφεληθούν έστω και σε μικρότερο βαθμό σε σχέση με τους μαθητές υψηλότερων ικανοτήτων, μέσα από την εφαρμογή εναλλακτικών διδακτικών μεθόδων, όπως είναι η χρήση της λεκτικής αναδιατύπωσης ή των εικονιστικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών προβλημάτων. Ολοκληρώνοντας, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι εξατομικευμένες μέθοδοι διδασκαλίας θα μπορούσαν να επιφέρουν σημαντικότερες μεταβολές στις επιδόσεις των μαθητών με χαμηλές ικανότητες, παρότι το γεγονός ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να υποστηριχτεί από την παρούσα μελέτη.

► ABSTRACT

The aim of the study was to examine the effects of verbal rewording and visual representations on mathematical problem solving on a sample of 57 students who follow the last three years of a primary school. Students of every class were assessed on two mathematical tasks which were given within a week, as follows: (i) children had to solve mathematical problems as presented in school books, (ii) children had to solve the same math problems after either verbally reworded or visually represented. Findings showed that students improved their performance on math problem solving considerably only after the use of verbal rewording, but the qualitative analysis showed that there were also differences in students' answers after the use of visual representations. Further analysis of the data, showed that the effects of verbal rewording and visual representations assist students of various abilities, but the improvement was higher for the group of students with higher mathematical abilities, based on standardized maths measurements. These findings are important for the development of alternative teaching strategies for maths in relation to individual differences of students in the context of the school class.

Keywords: *problem solving, verbal reproduction, visual representation, individual differences*

► Βιβλιογραφία

Αγαλιώτης, Ι. (2000). *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά. Αιτιολογία-Αξιολόγηση-Αντιμετώπιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

- Γεώργας, Δ., Παρασκευόπουλος, Ι., Μπεζεβέγκης, Η., & Γιαννίτσας, Ν. (1997). *Ελληνικό WISC-III, Wechsler Κλίμακες Νοημοσύνης για Παιδιά*. Αθήνα: Ψυχομετρικό Εργαστήριο, Φιλοσοφική Σχολή, Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Carney, R.N., & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review*, 14(1), 101-120.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on the first-graders strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 363-381.
- Elia, I., & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 327-334.
- Ηλία, Ι., Χρυσάνθου, Α., & Φίλιππου, Γ. (2003). *Ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος*. Κύπρος: Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Θεοδούλου, Ρ., & Γαγάτσης, Α. (2003). *Μια εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις... Ποιό είδος εικόνας όμως βοηθά στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος*; Κύπρος: Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Καραντζής, Ι. & Τσαγγάρης, Γ. (2003). Μαθηματικά. Στο: Κ. Πόρποδας (Επιμ.), *Διαγνωστική Αξιολόγηση και Αντιμετώπιση των Μαθησιακών Δυσκολιών στο Δημοτικό Σχολείο*. Πάτρα: Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Κόκκοτας, Π. (2004). *Διδακτική Φυσικών Επιστημών (Μέρος II). Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών*. Αθήνα: Αυτοέκδοση.
- Κολέζα, Ε. (2006). *Μαθηματικά και Σχολικά Μαθηματικά. Επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Maridaki-Kassotaki, A. & Chionidou-Moskofoglou, M. (2004). *Linguistic factors influencing problem solving performance in early school years*. Leader Books: Themes in Education.
- Παντελιάδου, Σ., & Σιδερίδης, Γ. (2002). Δοκιμασία Αναγνωστικής Επίδοσης. Στο: Α. Σταλίκας, Σ. Τριβίλα, & Π. Ρούσση (Εκδ.). *Τα ψυχομετρικά εργαλεία στην Ελλάδα*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Polya (1998). *Πώς να το λύσω*. Αθήνα: Καρδαμίτσα.
- Τάφα, Ε. (1995). *Τεστ Ανίχνευσης της Αναγνωστικής Ικανότητας*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά Νοήματα-Προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Αθήνα: Gutenberg.
- Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική Διδασκαλία*. Αθήνα: Δαρδανός-Τυπωθήτω.
- Χασάπης, Δ. (2004). Σημειωτικές προσεγγίσεις της μάθησης και της διδασκαλίας των Μαθηματικών: μια σκιαγράφιση του πεδίου. Στο: Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Εικόνα, Σχήμα και Λόγος στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Πρακτικά Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Διδασκαλείο 'Δημήτριος Γληνός', Π.Τ.Δ.Ε., Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Πίνακας: Ψυχομετρικά αποτελέσματα μαθητών ανά τάξη

	<i>Αναγνωστική κατανόηση</i>	<i>Λεξιλόγιο</i>	<i>Μαθηματική ικανότητα</i>
<i>Δ' τάξη</i>	63.98 (21.37)	79.67 (26.06)	67.93 (9.01)
<i>Ε' τάξη</i>	71.43 (14.64)	91.43 (11.55)	79.17 (12.36)
<i>Στ' τάξη</i>	71.98 (17.61)	78.46 (26.43)	77.56 (13.67)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΕΣ ΑΡΧΙΚΗΣ/ΤΕΛΙΚΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Α. Για την Ε' τάξη

Αρχική Αξιολόγηση

Στα προγράμματα ρυθμικής γυμναστικής του Δημοτικού Σχολείου μας συμμετέχουν επτά δωδεκαμελείς ομάδες. Τα παιδιά μοιράζονται, ανά 3, ένα στεφάνι. Πόσα στεφάνια χρειάζονται για όλα;

Τελική Αξιολόγηση με Λεκτική Αναδιατύπωση

Στα προγράμματα ρυθμικής γυμναστικής του Δημοτικού Σχολείου μας συμμετέχουν 7 ομάδες. Κάθε ομάδα αποτελείται από 12 παιδιά. Η γυμνάστρια δίνει ένα στεφάνι σε κάθε 3 παιδιά. Πόσα στεφάνια χρειάζονται για όλα τα παιδιά;

Β. Για την Δ' τάξη

Αρχική Αξιολόγηση

Στο ζαχαροπλαστείο «Η Γλύκα» οι ζαχαροπλάστες έφτιαξαν 4 πεντάδες σοκολατάκια φουντουκιού και 2 δεκάδες σοκολατάκια αμυγδάλου. Στη συνέχεια τα συσκεύασαν σε 8 ίδια πακέτα. Πόσα σοκολατάκια περιέχει το κάθε πακέτο;

Τελική Αξιολόγηση με Εικονιστική Αναπαράσταση

1.α. Στο ζαχαροπλαστείο «Η Γλύκα» οι ζαχαροπλάστες έφτιαξαν 4 πεντάδες σοκολατάκια φουντουκιού. Πόσα σοκολατάκια φουντουκιού έφτιαξαν;

Λύση:

1 πεντάδα σοκολατάκια φουντουκιού



Απάντηση: _____

1.β. Στο ζαχαροπλαστείο «Η Γλύκα» οι ζαχαροπλάστες έφτιαξαν ακόμα 2 δεκάδες από σοκολατάκια αμυγδάλου. Πόσα σοκολατάκια αμυγδάλου έφτιαξαν;

Λύση:

1 δεκάδα σοκολατάκια αμυγδάλου



Απάντηση: _____

1.γ. Στο ζαχαροπλαστείο «Η Γλύκα» οι ζαχαροπλάστες συσκευάσαν τα σοκολατάκια σε 8 ίδια πακέτα. Πόσα σοκολατάκια περιέχει το κάθε πακέτο;

Λύση:



Απάντηση: _____

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

Α. Πρωτόκολλο Αρχικής Αξιολόγησης χωρίς Λεκτική Αναδιατύπωση Φάνης, μαθητής Ε τάξης

2) Στα προγράμματα ρυθμικής γυμναστικής του Δημοτικού Σχολείου μας συμμετέχουν επτά δωδεκαμελείς ομάδες. Τα παιδιά μοιράζονται ανά 3, ένα στεφάνι. Πόσα στεφάνια χρειάζονται για όλα;
Λύση:

Πώς έλυσες το πρόβλημα, Εξήγησε μου τον τρόπο που σκέφτηκες.

Δεν μπορώ να το λύσω γιατί με παρεξέχει
πως θα μοιράζονται ανά 3 και
οχι ανά ομάδες.

Σας Ευχαριστώ πολύ

Β. Πρωτόκολλο Τελικής Αξιολόγησης με Λεκτική Αναδιατύπωση
Φάνης, μαθητής Ε τάξης

2. Στα προγράμματα ρυθμικής γυμναστικής του Δημοτικού Σχολείου μας συμμετέχουν 7 ομάδες. Κάθε ομάδα αποτελείται από 12 παιδιά. Η γυμνάστρια δίνει ένα στεφάνι σε κάθε 3 παιδιά. Πόσα στεφάνια χρειάζονται για όλα τα παιδιά;

Λύση:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 7 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 3 \\ -84 & 28 \\ \hline 00 & \end{array}$$

Απάντηση: 28 στεφάνια θα πάρουν στεφάνι

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV

Α. Πρωτόκολλο Αρχικής Αξιολόγησης χωρίς Εικονιστική Αναπαράσταση
Δέσποινα, μαθήτρια Δ΄ τάξης

1^η ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Όνομα: ΔΕΣΠΟΙΝΑ Ψύλο: καρίτσι Τάξη: Δ΄
Ημερομηνία Γέννησης: 16-8-1999
Χρονολογική ηλικία: 9 ετών
Ημερομηνία Εξέτασης: 20-3-2003

Προσπαθήστε να λύσετε τα προβλήματα:

1. Στο ζαχαροπλαστείο «Η Γλύκα» οι ζαχαροπλάστες έφτιαξαν 4 πεντάδες σοκολατάκια φουντουκιού και 2 δεκάδες σοκολατάκια αμυγδάλου. Στη συνέχεια τα συσκευάσαν σε 8 ίδια πακέτα. Πόσα σοκολατάκια περιέχει το κάθε πακέτο;

Λύση:

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 8 \\ \hline 160 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ \times 8 \\ \hline 160 \end{array} \quad \begin{array}{r} 160 \\ + 160 \\ \hline 320 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 320 \overline{) 8} \\ \underline{32} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

Απάντηση: Το κάθε πακέτο περιέχει 40 σοκολατάκια.

Γράψε μου τον τρόπο που σκέφτηκες για να λύσεις το πρόβλημα.

Σκέφτηκα ότι οι 4 πεντάδες είναι $4 \times 5 = 20$ και $20 \times 8 = 160$
και σοκολατάκια ακόμα ότι οι 2 δεκάδες είναι $2 \times 10 = 20$ ήρα
 $20 \times 8 = 160$. Μετά τα δύο μου δέκα δυ συσκευάσαν
σε 8 ίδια πακέτα, για να συσκευάσω. Έπειτα για να
βρω πόσα σοκολατάκια περιέχει το κάθε πακέτο
έκανα διαίρεση, έτσι βρήκα μετά και την απάντηση
40 σοκολατάκια.

Β. Πρωτόκολλο Τελικής Αξιολόγησης με Εικονιστική Αναπαράσταση
Δέσποινα, μαθήτρια Δ' τάξης

2^η ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Όνομα: ΔΕΣΠΟΙΝΑ	Έτος: <u>Κορίτσι</u>	Τάξη: <u>Δ'</u>
Ημερομηνία Γέννησης: <u>16-8-2009</u>		
Χρονολογική ηλικία: <u>9</u>		
Ημερομηνία Εξέτασης: <u>27-3-2009</u>		

19

9,07

Προσπαθήστε να λύσετε τα προβλήματα:

1.α. Στο ζαχαροπλαστείο «Η Γλύκα» οι ζαχαροπλάστες έφτιαξαν 4 πεντάδες σοκολατάκια φουντουκιού. Πόσα σοκολατάκια φουντουκιού έφτιαξαν;

Λύση: $4 \times 5 = 20$

1 πεντάδα σοκολατάκια φουντουκιού



Απάντηση: 20 σοκολατάκια φουντουκιού έφτιαξαν.

1.β. Στο ζαχαροπλαστείο «Η Γλύκα» οι ζαχαροπλάστες έφτιαξαν ακόμα 2 δεκάδες από σοκολατάκια αμυγδαλίου. Πόσα σοκολατάκια αμυγδαλίου έφτιαξαν;

Λύση: $2 \times 10 = 20$

1 δεκάδα σοκολατάκια αμυγδαλίου



Απάντηση: 20 σοκολατάκια αμυγδαλίου έφτιαξαν.

1.γ. Στο ζαχαροπλαστείο «Η Γλύκα» οι ζαχαροπλάστες συσκευάσαν τα σοκολατάκια σε 8 ίδια πακέτα. Πόσα σοκολατάκια περιέχει το κάθε πακέτο;

Λύση:

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 20 \\ \hline 40 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 8} \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

Απάντηση: 5 σοκολατάκια περιέχει το κάθε πακέτο.