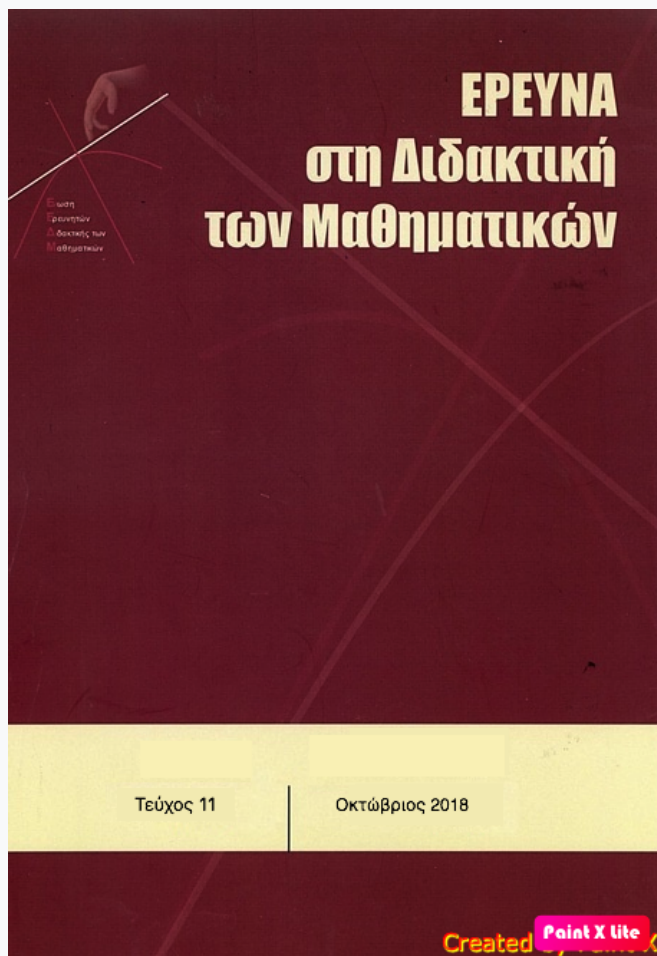


## Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 11 (2018)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



### ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΕΥΧΟΥΣ

Χαρούλα Σταθοπούλου (Charoula Stathopoulou)

doi: [10.12681/enedim.18936](https://doi.org/10.12681/enedim.18936)

Copyright © 2018, Χαρούλα Σταθοπούλου (Charoula Stathopoulou)



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Σταθοπούλου (Charoula Stathopoulou) Χ. (2018). ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΕΥΧΟΥΣ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (11), 3–9. <https://doi.org/10.12681/enedim.18936>

Αγαπητοί συνάδελφοι,

Έχουμε τη χαρά να μοιραστούμε το 11<sup>ο</sup> τεύχος — τρίτο ψηφιακό— του περιοδικού της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.

Το τεύχος αυτό φιλοξενεί τρία άρθρα, τα οποία καλύπτουν διαφορετικές πτυχές της Διδακτικής των Μαθηματικών και παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον τόσο για τους ερευνητές όσο και τους εκπαιδευτικούς, καθώς πραγματεύονται μια ποικιλία από έννοιες όπως αυτή της *βαθιάς μαθηματικής κατανόησης*, των παραμέτρων που συνδέονται με την *ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης* καθώς και των διδακτικών πρακτικών για τη *βελτίωση της χωρικής ικανότητας*.

Η πρώτη εργασία των Μ. Μπεμπένη, Μ. Καλδρυμίδου και Ξ. Βαμβακούση με τίτλο *Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των Μαθηματικών: μια μελέτη περίπτωσης εξαιρετικών μαθητών*, αποτελεί μια ποιοτική έρευνα μελέτης δύο μαθητών με εξαιρετική επίδοση και βαθιά εννοιολογική κατανόηση στα Μαθηματικά ως προς συγκεκριμένους δείκτες. Στόχο της μελέτης αυτής αποτελεί ο σχεδιασμός ενός εργαλείου μέτρησης για τη *βαθιά προσέγγιση* στη μάθηση των Μαθηματικών.

Η εργασία εντάσσεται σε έναν ευρύτερο προβληματισμό για ουσιαστική μάθηση και διδασκαλία με κατανόηση. Μια σειρά ερευνών σ' αυτή την περιοχή εστιάζουν σ' αυτή καθαυτή τη γνώση ή διαφορετικές παραμέτρους που επηρεάζουν την κατανόηση ή μη των Μαθηματικών όπως είναι οι εκπαιδευτικοί ή τα σχολικά εγχειρίδια.

Ήδη από το 1976 ο Skemp αναφέρεται στη διάκριση εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης αλλά και μέχρι πρόσφατα ερευνητές όπως οι Newton και Sword (2018) διερευνούν θέματα σχετικά με τη γνώση και την ουσιαστική κατανόηση των Μαθηματικών, αναδεικνύοντας τη σημασία της. Η κατανόηση αυτή συνδέεται συχνά με πλαίσια τα οποία προσφέρονται για την παραγωγή νοήματος μέσα στην τάξη, όπως για παράδειγμα η δημιουργία συνδέσεων και η την ικανότητα των μαθητών να την πραγματοποιήσουν (Selvianiresa & Prabawanto, 2017).

Επίκαιρη είναι πάντα η συζήτηση για την τάση των εκπαιδευτικών να δίνουν έμφαση σε τυποποιημένες λύσεις στερώντας από τους μαθητές ευκαιρίες για βαθύτερη μάθηση (Lithner, 2017), καθώς και το ρόλο των σχολικών εγχειριδίων στην ανάπτυξη της μαθηματικής μάθησης. Στην έρευνα τους οι Shield και Dole (2013) μελέτησαν σχολικά εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ως προς τις δυνατότητές τους να οικοδομήσουν και να εφαρμόσουν βαθιές μαθηματικές γνώσεις για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι τα εγχειρίδια που εξέτασαν δεν παρείχαν την κατάλληλη υποστήριξη. Αντίστοιχα, οι Mellor και Clark (2018) σε μια συγκριτική μελέτη εγχειριδίων από δυο χώρες (Γερμανία και Ν. Αφρική) αναζήτησαν τις διαφορές που συνδέονται με την ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι διαφορές αυτές οφείλονται σε διαφορετικά σχολικά εγχειρίδια τα οποία δημιουργούν διαφορετικές μαθησιακές εμπειρίες.

Με βάση τα παραπάνω, η συνεισφορά του άρθρου των Μ. Μπεμπένη, Μ. Καλδρυμίδου και Ξ. Βαμβακούση έγκειται στην εστίαση του στο μαθητή: ποιος είναι ο μαθητής, ποια χαρακτηριστικά του συνδέονται με τη βαθιά προσέγγιση στη μάθηση και την ανάπτυξη έτσι ουσιαστικής μαθηματικής γνώσης. Από την έρευνα αναδείχθηκαν μια σειρά δεικτών ως προς άξονες όπως οι στόχοι, οι στρατηγικές μάθησης/μελέτης, στοιχεία αυτορρύθμισης και κίνητρα. Στο άρθρο υποστηρίζεται ότι η ύπαρξη εσωτερικού κινήτρου και η προσωπική κατασκευή νοήματος όπως και το ενδιαφέρον για τη μαθηματική πρόκληση είναι κεντρικά στη στάση που διαμορφώνουν οι συγκεκριμένοι μαθητές και στη διαμόρφωση της υποκειμενικότητάς τους (subjectivity), η οποία προφανώς συναρτάται και αλληλοδιαπλέκεται με το πλαίσιο, οικογενειακό, σχολικό, ευρύτερο κοινωνικό. Η στάση που διαμορφώνουν αυτοί οι μαθητές αποτυπώνεται σε στρατηγικές, όπως για παράδειγμα για την επίλυση μη οικείων προβλημάτων, στρατηγικές οι οποίες συμβάλουν στη διαμόρφωση της βαθιάς κατανόησης και τελικά τους οδηγούν να μπορούν να υποστηρίξουν, όπως αναφέρει μια μαθήτρια, ότι «... η επίλυση πολλών παρόμοιων ασκήσεων δε μ' αρέσει.... Αυτό που μαθαίνουν τα παιδιά πώς να λύνουν μια άσκηση και με το που την βλέπουν ξέρουν πώς να τη λύσουν, αυτό δεν πιστεύω πως είναι μαθηματικά. [...]»

Το επόμενο άρθρο των Σ. Δημητρακοπούλου και Κ. Χρήστου με τίτλο *Χρήση γραμμάτων ως μεταβλητές: τρόποι κατανόησης από τους μαθητές και τρόποι εμφάνισης τους στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου*, διερευνά θέματα που

αφορούν στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής από τους μαθητές, καθώς και τις μορφές με τις οποίες εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία όπως και το είδος αριθμών στους οποίους παραπέμπουν.

Η κατανόηση της μεταβλητής, λόγω της ευρείας εφαρμοσιμότητας κυρίως στην Άλγεβρα αλλά και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, θεωρείται κρίσιμη για τη μαθηματική ανάπτυξη, ενώ τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον είναι εστιασμένο και στην πρώιμη Άλγεβρα, καθώς ο ρόλος της εμφανίζεται κρίσιμος για την περαιτέρω ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών. Για παράδειγμα, οι Brizuela και Schliemann (2004) αναζητούν απαντήσεις στο ερώτημα, γιατί ενώ εντοπίζεται σημαντική κατανόηση αλγεβρικών εννοιών, συμπεριλαμβανομένης και της έννοιας της μεταβλητής (για παράδειγμα χρήση μεταβλητών στην επίλυση εξισώσεων) από μαθητές του δημοτικού (Δ' τάξης), στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο θέμα αυτό. Οι ερευνητές καταλήγουν ότι το φαινόμενο είναι αποτέλεσμα μάλλον της διδασκαλίας και του γεγονότος ότι οι μαθητές δεν έχουν από νωρίς πραγματευτεί έννοιες της Άλγεβρας.

Πιο πρόσφατες έρευνες μελετούν στρατηγικές για την κατάκτηση της αλγεβρικής μεταβλητής, όπως για παράδειγμα οι Sun-Lin και Chiu (2017) που εξετάζουν τα αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης στρατηγικών αυτο-εξήγησης και παιχνιδιών ανταμοιβής στη διαδικασία εκμάθησης της αλγεβρικής μεταβλητής από τους μαθητές. Οι ερευνητές αυτοί όπως και οι Carragher και Schliemann (2018) επισημαίνουν ότι κάτω από κατάλληλες υποστηρικτικές συνθήκες οκτάχρονοι μαθητές του δημοτικού μπορούν να κατανοήσουν αλγεβρικές έννοιες και να αντιληφθούν διαστάσεις της μεταβλητής. Για το λόγο αυτό υποστηρίζουν τη διδασκαλία της άλγεβρας σε μικρότερες ηλικίες, και προτείνουν προγράμματα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών κατάλληλα για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης.

Έρευνες που εστίασαν στη διερεύνηση δυσκολιών, αντιλήψεων και στάσεων απέναντι στην Άλγεβρα (Chow, 2011) ανέδειξαν τις δυσκολίες και παρερμηνείες των μαθητών αναφορικά με την κατανόηση των γραμμάτων και τη θέση τους στα Μαθηματικά όπως και γενικότερα το χειρισμό των γραμμάτων ή των μεταβλητών. Κατάλληλες διδακτικές προσεγγίσεις μπορούν να βοηθήσουν την εννοιολογική αλλαγή στη χρήση των γραμμάτων και να δώσουν απαντήσεις στις δυσκολίες αυτές.

Πάνω στο ζήτημα αυτό η Brizuela (2016) πραγματοποίησε πείραμα για να διερευνήσει πώς μαθητές της Γ' Δημοτικού αρχίζουν να ενσωματώνουν μη-αριθμητικά σύμβολα στις μαθηματικές τους εκφράσεις, τι κατανοήσεις έχουν και τι προκλήσεις αντιμετωπίζουν στη χρήση αυτή, για να καταλήξει σε κατάλληλες διδακτικές προτάσεις για την κατανόηση των μεταβλητών από πιο μικρά παιδιά.

Στο άρθρο που παρουσιάζεται σ' αυτό το τεύχος συζητούνται τα αποτελέσματα δυο εμπειρικών μελετών, από τις οποίες η πρώτη διερευνά αρχικά τους τρόπους με τους οποίους κατανοούν οι μαθητές του Γυμνασίου και της Α' Λυκείου τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών στις αλγεβρικές παραστάσεις και στη συνέχεια το είδος των αριθμών που θεωρούν ότι μπορούν αυτές οι τιμές να λάβουν, ενώ η δεύτερη αφορά στη διερεύνηση των μορφών με τις οποίες εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου, καθώς και οι αριθμητικές τιμές που τους αποδίδονται.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στην πλειοψηφία τους τα γράμματα εμφανίζονταν ως σύμβολα που αναπαριστούν περισσότερους του ενός αριθμούς και ότι οι τιμές που τους αποδίδονται είναι μη φυσικοί και φυσικοί αριθμοί σε ίδιο περίπου ποσοστό. Σε συμφωνία και με τους Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel και Van Dooren, (2015) η έρευνα έδειξε επίσης ότι παρότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ουσιαστικό μέρος του μαθηματικού γραμματισμού, προκαλούν πολλές δυσκολίες στους μαθητές με κύρια αιτία την προκατάληψη με τους φυσικούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα και των δυο μελετών συζητιούνται θεωρητικά και προτείνονται παιδαγωγικές εφαρμογές.

Το τεύχος κλείνει με το άρθρο των Μ. Ευσταθίου και Ρ. Παναούρα, οι οποίοι μελετούν την *Επίδραση παρεμβατικού προγράμματος βελτίωσης της ικανότητας νοητικής περιστροφής στην επίδοση σε έργα στερεομετρίας*.

Η Νοητική περιστροφή αποτελεί μια από τις συνιστώσες της χωρικής σκέψης (ΝΠ, χωρική αντίληψη και η χωρική οπτικοποίηση). Η χωρική σκέψη παρουσιάζεται ως μια ολοκληρωμένη κατασκευή με επίδραση στην καθημερινή ζωή, τις σχολικές επιδόσεις και την επιτυχία σε ορισμένους τομείς εργασίας και η σημασία τόσο για τη σχολική επιτυχία όσο και τις ευρύτερη εφαρμογή έχει αναγνωριστεί παγκοσμίως. Η πρόσφατη βιβλιογραφία εντοπίζονται έρευνες που εστιάζουν στη φύση των χωρικών ικανοτήτων, τους παράγοντες που

συνδέονται με την ανάπτυξή του και τις έμφυλες διαφοροποιήσεις του (Yilmaz, 2017).

Έρευνες πάνω στις χωρικές ικανότητες αμφισβητούν παλαιότερα τεστ που μετράνε τη χωρική ικανότητα αποκλειστικά με νοερούς χωρικούς μετασχηματισμούς αντικειμένων και προτείνουν τη χρήση αναλυτικών στρατηγικών, καθώς η ικανότητα να χρησιμοποιούνται πιο αποτελεσματικές αναλυτικές στρατηγικές μπορεί να είναι μια σημαντική διάσταση στη μέτρηση της χωρικής ικανότητας (Hegarty, 2018).

Για την κατανόηση των αιτίων που σχετίζονται με την ανάπτυξη των σχετικών ικανοτήτων και την βελτίωση τους (τόσο στα αγόρια όσο και στα κορίτσια καθώς οι έρευνες ως προς την έμφυλη διάσταση καταλήγουν σε αντιφατικά συμπεράσματα) διερευνώνται βιολογικοί και κοινωνικοπολιτισμικοί παράγοντες. Γενικά οι έρευνες αυτές δεν εντοπίζουν σημαντικές διαφορές λόγω φύλου αν και, σε κάποιες περιπτώσεις, τα αγόρια μοιάζουν να υπερτερούν σε δραστηριότητες που εμπλέκουν ικανότητα κατανόησης εννοιών χώρου.

Παρόμοια μελέτη (Morris, 2018) με στόχο τη σύγκριση των έμφυλων διαφορών σε τρεις τύπους μαθηματικών χωρικών ικανοτήτων, τη χωρική αντίληψη, τη χωρική οπτικοποίηση και την νοερή περιστροφή, ανέδειξε τελικά διαφορές λόγω φύλου. Οι ερευνητές προτείνουν περαιτέρω διερεύνηση των αιτίων όπως και των κατάλληλων διδακτικών πρακτικών που θα τροποποιήσουν τα αρνητικά στερεότυπα και θα αυξήσουν το ποσοστό των κοριτσιών που σπουδάζουν και ασχολούνται επαγγελματικά με τις επιστήμες, τα μαθηματικά και την τεχνολογία και γενικά ανταποκρίνονται στα πεδία των STEM.

Παράλληλα, αναζητούνται εναλλακτικές διδακτικές πρακτικές, με τη χρήση υλικών, που μπορεί να αυξήσουν την ικανότητα νοερής περιστροφής. Για παράδειγμα οι Ogunkola και Knight (2018), αλλά και οι Delavar, Kolesnikova, Rahimzade, Ghahhari, Mosapuro και Moradi A. (2018) μελέτησαν τη χρήση τεχνικών σχεδίων όπως και τη χρήση τρισδιάστατων παζλ για την ανάπτυξη της ικανότητας νοερής περιστροφής σε μαθητές του δημοτικού, με πολύ θετικά αποτελέσματα.

Συμβάλλοντας στους παραπάνω προβληματισμούς οι Μ. Ευσταθίου και Α. Παναούρα στην έρευνά τους διερευνούν την έμφυλη διάσταση στην ανάπτυξη

ΝΠ μέσω ενός παρεμβατικού προγράμματος που είχε στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας νοητικής περιστροφής μαθητών Γ΄ Γυμνασίου σε έργα στερεομετρίας τα οποία απαιτούσαν περιστροφή. Στη συγκεκριμένη έρευνα δεν παρατηρήθηκαν έμφυλες διαφορές, ενώ φάνηκε ότι η ικανότητα νοητικής περιστροφής όσο και η εξάρτηση/ανεξαρτησία από το πεδίο είναι παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης στη στερεομετρία, καθώς το παρεμβατικό πρόγραμμα φάνηκε να επηρέασε με θετικό πρόσημο την επίδοση όλων των μαθητών. Σε διάλογο με άλλες έρευνες οι συγγραφείς επιβεβαιώνουν τη δυνατότητα βελτίωσης της χωρικής ικανότητας μέσα από κατάλληλες διδακτικές πρακτικές και επισημαίνουν την ανάγκη για ευρύτερης κλίμακας έρευνα ώστε να διερευνηθούν σε βάθος «... διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα ως προς τις στρατηγικές επίλυσης ασκήσεων στερεομετρίας, ιδιαίτερα έργων που η χρήση ΝΠ αποτελεί κύρια στρατηγική επίλυσης τους...».

## Βιβλιογραφία

- Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the learning of Mathematics*, 24(2), 33-40.
- Brizuela, B. M. (2016). Variables in elementary mathematics education. *The Elementary School Journal*, 117(1), 46-71.
- Carraher, & Schliemann A.D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. In: Kieran C. (Eds.) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs*. Springer,
- ChamSun-Lin, H.Z., & Chiou, G.F. (2017). Effects of Self-explanation and Game-reward on Sixth Graders' Algebra Variable Learning. *Journal of Educational Technology & Society*, 20(4), 126-137.
- Chow, T. C. F. (2011). *Students' difficulties, conceptions and attitudes towards learning algebra: an intervention study to improve teaching and learning* (Doctoral dissertation). Curtin University.
- Hegarty, M. (2018). Ability and sex differences in spatial thinking: What does the mental rotation test really measure? *Psychonomic bulletin & review*, 25(3), 1212-1219.
- Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM*, 49(6), 937-949.

- Mellor, K., Clark, R., & Essien, A. A. (2018). Affordances for learning linear functions: A comparative study of two textbooks from South Africa and Germany. *Pythagoras*, 39(1), 12.
- Morris, S. W. (2018). The Effect of Gender on Spatial Ability and Spatial Reasoning Among Students in Grades 2-8. (Διδακτορική διατριβή) ([https://digitalcommons.liberty.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://scholar.google.gr/scholar?cites=12565746385585102110&as\\_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=el&httpsredir=1&article=2810&context=doctoral](https://digitalcommons.liberty.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://scholar.google.gr/scholar?cites=12565746385585102110&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=el&httpsredir=1&article=2810&context=doctoral))
- Newton, K., & Sword, S. (2018). *Mathematical Learning and Understanding in Education*. Routledge.
- Ogunkola, B., & Knight, C. (2018). Does Technical Drawing Increase Students' Mental Rotation Ability? *Cogent Education*, 148 - 209.
- Selvianiresa, D., & Prabawanto, S. (2017, September). Contextual Teaching and Learning Approach of Mathematics in Primary Schools. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 895, No. 1, p. 012-171). IOP Publishing.
- Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183-199.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, 37, 30-38.
- Yılmaz, H. B. (2017). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 1(2), 83-96.