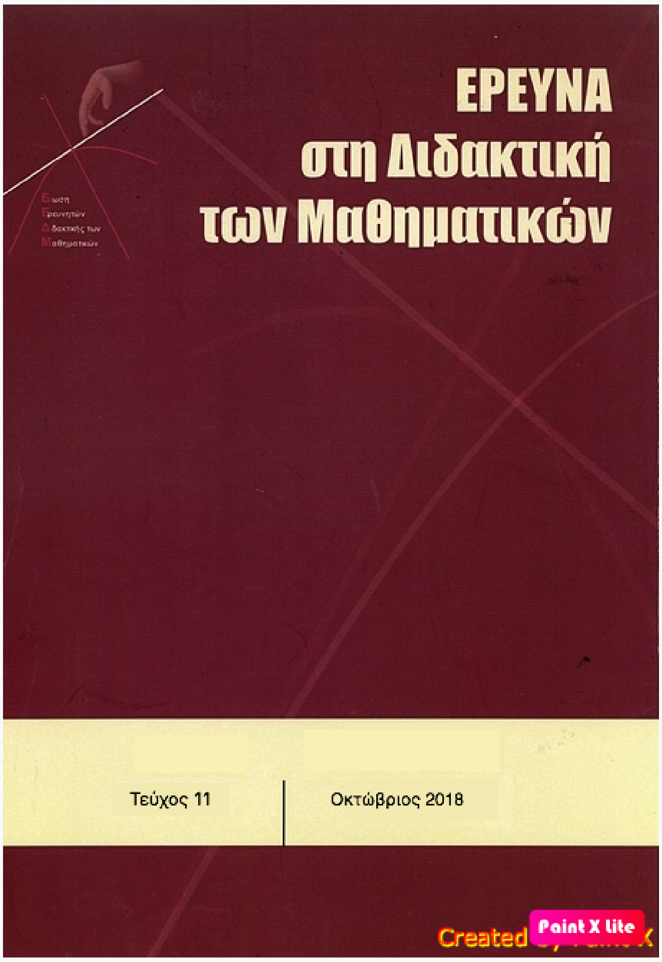
Αρ. 11 (2018)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ




# ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΒΑΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΜΙΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

*Μαρία Μπεμπένη (Maria Bempeni), Μαρία Καλδρυμίδου (Maria Kaldrymidou), Ξένια Βαμβακούση (Xenia Vamvakousi)*

doi: [10.12681/enedim.18937](https://doi.org/10.12681/enedim.18937)

# ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΒΑΘΙΑΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Μαρία Μπεμπένη, Μαρία Καλδρυμίδου και Ξένια Βαμβακούση

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, mbempeni@cc.uoi.gr, mkaldrim@uoi.gr, xvamvak@cc.uoi.gr

*Περίληψη: Είναι ευρέως αποδεκτό ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών συνοδεύεται ποιοτικά από υψηλού επιπέδου μαθησιακά αποτελέσματα. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να διερευνήσει τις συνιστώσες της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών. Πραγματοποιήθηκε μελέτη περίπτωσης δύο μαθητών με εξαιρετική επίδοση και βαθιά εννοιολογική γνώση στα μαθηματικά. Παρουσιάζονται δείκτες της βαθιάς προσέγγισης στους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μάθησης, Στοιχεία, Αυτορρύθμισης και Κίνητρα, όπως αυτοί προέκυψαν από την προσαρμογή και τον εμπλουτισμό προηγούμενου εργαλείου μας. Οι δείκτες αυτοί μπορούν να αξιοποιηθούν στο σχεδιασμό εργαλείου μέτρησης για τις προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών.*

*Λέξεις κλειδιά: βαθιά προσέγγιση στη μάθηση, μαθηματικά, δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δείκτες*

*Abstract: It is widely acknowledged that there are individual differences in the way students approach the learning process, and that these are reflected in the learning outcomes. Little research has been done from the learning approaches perspective regarding mathematics learning. We report an exploratory study investigating the features of the deep approach to mathematics learning. We present the case study of two exceptionally competent students who participated in an in-depth interview. Indicators of the deep learning approach along the categories Goals, Study/Learning strategies, Self-regulation aspects, and Motivation are presented as they emerged by adapting and enriching our previous instrument. These findings can be employed in the design of instruments to be used in quantitative research.*

*Keywords: learning approach, mathematics, secondary education, indicators*

## Θεωρητικό πλαίσιο

Εδώ και αρκετά χρόνια πολλοί ερευνητές έχουν επισημάνει ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν τη μάθηση ενός αντικειμένου (π.χ. Entwistle & McCune, 2004). Οι Marton και Säljö (1976) χρησιμοποιώντας την καινοτόμο μέθοδο της φαινομενογραφίας ζήτησαν από πρωτοετείς φοιτητές να διαβάσουν ένα επιστημονικό άρθρο και εν συνεχεία να περιγράψουν την κεντρική ιδέα του κειμένου. Βασιζόμενοι στις απαντήσεις των φοιτητών εισήγαγαν δύο όρους που περιέγραφαν δύο ποιοτικά διαφορετικές διαδικασίες μάθησης: την επιφανειακή, όταν το υποκείμενο εστίαζε στο κείμενο αυτό καθαυτό, και τη βαθιά, όταν το υποκείμενο εστίαζε στην εξαγωγή νοήματος από το κείμενο. Στη συνέχεια, η διάκριση αυτή υιοθετήθηκε και από πολλούς άλλους ερευνητές αλλά με διαφορετική ορολογία (Pask, 1976; Svensson, 1977). Ωστόσο στη συνέχεια θεωρήθηκε (Marton & Säljö, 1979) ότι ο όρος διαδικασία είναι πολύ περιορισμένος για να συμπεριλάβει την πρόθεση του υποκειμένου κατά τη μάθηση και αντικαταστάθηκε από τον όρο προσέγγιση. Η επικρατέστερη, μέχρι σήμερα, διάκριση που αποτυπώνει τις ποιοτικές διαφορές στη μάθηση είναι αυτή της επιφανειακής έναντι της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση (Entwistle & Ramsden, 1983; Entwistle & McCune, 2004). Η επιφανειακή προσέγγιση (surface approach) σχετίζεται με την πρόθεση του υποκειμένου να μπορεί να αναπαραγάγει το περιεχόμενο, όταν του ζητηθεί. Αντίθετα, η βαθιά προσέγγιση (deep approach) στη μάθηση συνδέεται με την πρόθεση του υποκειμένου να κατανοήσει το αντικείμενο της μάθησης. Είναι ευρέως αποδεκτό ότι το είδος της προσέγγισης στη μάθηση του αντικειμένου οδηγεί σε ποιοτικά διαφορετικά μαθησιακά αποτελέσματα (π.χ. Chin & Brown, 2000˙ Entwistle & Ramsden, 1983). Ειδικότερα, η επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση συνδέεται με φτωχή εννοιολογική κατανόηση, ενώ η βαθιά προσέγγιση συνδέεται με βαθιά εννοιολογική κατανόηση του εκάστοτε αντικειμένου μάθησης (Entwistle, 2007˙ Smith & Wood, 2000˙ Stathopoulou & Vosniadou, 2007). Η εικόνα γίνεται πιο περίπλοκη, αν ληφθεί υπόψη και η ακαδημαϊκή επίδοση. Πιο συγκεκριμένα, η σύγχρονη έρευνα υποστηρίζει ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται με την υψηλή ακαδημαϊκή επίδοση (Chin & Brown, 2000˙ Chiu, 2011˙ Entwistle, 2000˙ García, Rodríguez, Betts, Areces, & González-Castro, 2016˙ Smith & Wood, 2000˙ Stathopoulou & Vosniadou, 2007), μόνο όταν η αξιολόγηση επιβραβεύει τη μάθηση με κατανόηση (Baeten, Kyndt, Struyven, & Dochy, 2010). Αντίστοιχα, υπάρχουν περιπτώσεις μαθητών με επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση και πολύ φτωχή εννοιολογική γνώση που έχουν την ίδια ακαδημαϊκή επίδοση ως προς τους βαθμούς με μαθητές που υιοθετούν βαθιά προσέγγιση και έχουν βαθιά κατανόηση του περιεχομένου (Bempeni & Vamvakoussi, 2015˙ Stathopoulou & Vosniadou, 2007).

Το γεγονός ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση συνοδεύεται από καλά αποτελέσματα όσον αφορά την κατανόηση, αλλά όχι απαραίτητα ικανοποιητικά όσον αφορά την αξιολόγηση (Byrne, Flood, & Willis, 2002˙ Flegg, Mallet, & Lupton, 2012), οδηγεί ορισμένες φορές στην υιοθέτηση πραγματιστικών προσεγγίσεων στη μάθηση από μαθητές που, ενώ ενδιαφέρονται για την κατανόηση αυτών που μαθαίνουν, προσαρμόζονται και στις απαιτήσεις του εκπαιδευτικού πλαισίου στοχεύοντας και στην ακαδημαϊκή επιτυχία. Σχετικά ευρήματα έχουν οδηγήσει ορισμένους ερευνητές να εισηγηθούν την προσθήκη μιας ακόμα κατηγορίας στις προσεγγίσεις μάθησης, αυτήν της στρατηγικής προσέγγισης (strategic approach) (Cano & Berben, 2009˙ Entwistle & Cune, 2004). Ωστόσο, στην εργασία αυτή υιοθετούμε την άποψη ότι η στρατηγική προσέγγιση θα μπορούσε να υπαχθεί στην κατηγορία της βαθιάς προσέγγισης (Zeegers, 2004), εφόσον διατηρείται ο στόχος της κατανόησης του αντικειμένου μάθησης.

Ένα βασικό ζητούμενο σε αυτό το χώρο έρευνας είναι ο προσδιορισμός των συνιστωσών της κάθε μιας προσέγγισης, ιδιαίτερα της βαθιάς, και των δεικτών τους (Cano & Berbén, 2009˙ Entwistle & Cune, 2004). Διάφοροι ερευνητές έχουν επισημάνει (Biggs, 1994˙ Entwistle, & McCune, 2000) ότι οι παράγοντες που «ευθύνονται» για την ποιότητα των μαθησιακών αποτελεσμάτων μέσω της προσέγγισης στη μάθηση μπορεί να σχετίζονται είτε με το άτομο (αυτορρύθμιση, κίνητρα, γνωστικό προφίλ, στάσεις) είτε με το πλαίσιο (είδος έργου, διδακτική μέθοδος, αξιολόγηση). Στην παρούσα έρευνα εστιάζουμε στους ατομικούς παράγοντες οι οποίοι πρέπει να μελετηθούν ώστε να αξιοποιηθούν για τη διαμόρφωση του πλαισίου που θα στοχεύει στην υιοθέτηση βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση.

Υπάρχουν διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση. Αρχικά, η ανάπτυξη των εργαλείων βασίστηκε σε "εκ των κάτω προς τα άνω" ποιοτικές μελέτες που εξέταζαν κυρίως την κατανόηση κειμένου (βλ. φαινομενογραφική προσέγγιση των Marton και Säljö (1976) (Entwistle, 2007). Οι ποιοτικές αυτές μελέτες αποτέλεσαν τη βάση για τη δημιουργία ποσοτικών εργαλείων, με την εφαρμογή των "εκ των κάτω προς τα άνω" ποσοτικών μεθοδολογιών. Τα εργαλεία αυτά εξέταζαν την προσέγγιση στη μάθηση κυρίως μέσω της προσέγγισης στην καθημερινή μελέτη με το δεδομένο ότι η προσέγγιση στη μάθηση γενικά είναι συμβατή με την προσέγγιση στη μελέτη (studying approach) (Entwistle & Cune, 2000). Παραδείγματα τέτοιων εργαλείων είναι τα «Approaches to Studying Inventory» (ASI· Entwistle & Ramsden, 1983), «Study Process Questionnaire» (SPQ· Biggs, 1987) και το «The Approaches and Study Skills Inventory for Students» (ASSIST· Tait, Entwistle, & McCune, 1998), το οποίο αποτελεί την εξέλιξη του ASI. Οι τρεις βασικές κοινές κλίμακες που συναντάμε στα παραπάνω εργαλεία είναι η βαθιά, η επιφανειακή και η στρατηγική προσέγγιση, ωστόσο υπάρχουν κάποιες μικρές διαφοροποιήσεις. Για παράδειγμα στο εργαλείο ASI συναντάται μία επιπλέον κλίμακα, αυτή της μη ακαδημαϊκής προσέγγισης που περιλαμβάνει ως υποκλίμακα μη ευνοϊκούς παράγοντες για τη μάθηση (π.χ. αρνητικές στάσεις) (Entwistle & McCune, 2004· Kember 1998). Αντίθετα, στο εργαλείο ASSIST οι μη ευνοϊκοί παράγοντες για τη μάθηση παρουσιάζονται ως υποκλίμακα της απαθούς-επιφανειακής προσέγγισης. Να σημειώσουμε ότι στα παραπάνω εργαλεία (ASI, SPQ) για καθεμία από τις συνιστώσες των κατηγοριών υπάρχουν τα αντίστοιχα κίνητρα και στρατηγικές. Επιπλέον, υπάρχουν ποιοτικές διαφορές ανάμεσα στις υποκλίμακες της στρατηγικής προσέγγισης (achieving approach) του Biggs (1987) και των Entwistle & Ramsden (1983) (strategic orientation). Ενώ στην κλίμακα της στρατηγικής προσέγγισης είναι κοινή η υποκλίμακα του κινήτρου για την επίτευξη του στόχου (achievement motivation) στα δύο εργαλεία, ωστόσο οι άλλες υποκλίμακες διαφέρουν, από την άποψη ότι το εργαλείο ASI των των Entwistle & Ramsden (1983) περιλαμβάνει χαρακτηριστικά που σχετίζονται κυρίως με την επιφανειακή προσέγγιση του SPQ (βαθμολογία, προσπάθεια για εντυπωσιασμό του διδάσκοντα)(Kember 1998). Από την άλλη μεριά, η στρατηγική προσέγγιση του Biggs (1987) αναφέρεται σε ένα μοντέλο για τη προσέγγιση στη μελέτη. Το γεγονός ότι τα όρια δεν είναι καθόλου σαφή για τη βαθιά/επιφανειακή προσέγγιση και τη στρατηγική προσέγγιση οδήγησε στο διαχωρισμό της στρατηγικής προσέγγισης σε βαθιά-στρατηγική και επιφανειακή-στρατηγική προσέγγιση (βλ. Entwistle, McCune, & Tait, 2013 για μία λεπτομερή ανάλυση).

Κατά καιρούς έχουν γίνει διάφορες απόπειρες προσδιορισμού των ποιοτικών χαρακτηριστικών της βαθιάς και τη επιφανειακής προσέγγισης καθώς και των αντίστοιχων δεικτών τους. Τα εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν τις διάφορες εκδοχές προέρχονται κυρίως από το χώρο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (π.χ. Entwistle et al., 2013). Ειδικότερα για το πεδίο των μαθηματικών, αναπτύχθηκαν εργαλεία που βασίζονταν σε προηγούμενα σταθμισμενα εργαλεία (π.χ. Biggs, 1987), μέσω των οποίων αναδείχθηκαν ατομικές διαφορές στην προσέγγιση της μάθησης των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι οι εκλεπτυσμένες αντιλήψεις του υποκειμένου για τα μαθηματικά ως αντικείμενο στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, συνοδεύονται από βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών (Crawford, Gordon, Nicholas, & Prosser, 1994˙ 1998). Όπως επισημαίνουν και οι Entwistle και McCune (2004), η χρήση των εργαλείων σε άλλες ηλικιακές ομάδες και για άλλα αντικείμενα δεν μπορεί να γίνει άμεσα, ωστόσο έχουν γίνει κάποιες απόπειρες. Οι έρευνες που έχουν γίνει με μαθητές της δευτεροβάθμιας αφορούν κυρίως τις φυσικές επιστήμες. Τα αποτελέσματά τους συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται με το επίπεδο κατανόησης του αντικειμένου (Chin & Brown, 2000˙ Stathopoulou & Vosniadou, 2007). Αντίστοιχα αποτελέσματα είχαμε σε προηγούμενη μελέτη (Bempeni & Vamvakoussi, 2015), στην οποία βρήκαμε ότι μαθητές Γυμνασίου με φτωχή εννοιολογική γνώση στα κλάσματα ακολουθούν επιφανειακή προσέγγιση, ενώ οι μαθητές με προχωρημένη εννοιολογική γνώση ακολουθούν βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Στη μελέτη αυτή υιοθετήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο των Stathopoulou & Vosniadou (2007), στο οποίο προτάσσονται τρεις άξονες: στόχοι, στρατηγικές μάθησης και επίγνωση για την κατανόηση. Τα αποτελέσματά μας έδειξαν ότι οι μαθητές που ακολουθούν επιφανειακή προσέγγιση έχουν ως στόχο την επίδοση στο σχολείο, υιοθετούν την απομνημόνευση και την επανάληψη ως στρατηγικές μάθησης, και παρουσιάζουν χαμηλή επίγνωση για την κατανόησή τους και για την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών μάθησης. Αντίθετα, οι μαθητές που ακολουθούν βαθιά προσέγγιση έχουν ως στόχο την κατανόηση, υιοθετούν ως στρατηγικές μάθησης το συνδυασμό θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων και τη συστηματική επένδυση χρόνου και παρουσιάζουν υψηλή επίγνωση της κατανόησης και της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών μελέτης τους. Από την ανάλυση των δεδομένων μας, ωστόσο, αναδείχθηκαν χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων που δεν ανήκαν στις κατηγορίες που είχαμε προβλέψει, όπως τα κίνητρα (π.χ., η βαθιά προσέγγιση συνδέθηκε με το ενδιαφέρον για τη μαθηματική πρόκληση). Επιπλέον, τα δεδομένα μας για τις στρατηγικές μάθησης όσον αφορά τη βαθιά προσέγγιση ήταν φτωχά, πιθανόν γιατί οι ερωτήσεις μας ήταν πολύ γενικές.

Στην παρούσα εργασία αποπειραθήκαμε να εντοπίσουμε και να περιγράψουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα χαρακτηριστικά της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών, μελετώντας παιδιά με εξαιρετική σχολική επίδοση, αλλά και βαθιά κατανόηση στα μαθηματικά. Αυτό αποτελεί ένα πρώτο βήμα για το σχεδιασμό εργαλείων για τη διερεύνηση προσεγγίσεων στη μάθηση των μαθηματικών σε μεγαλύτερη κλίμακα. Η έρευνα είχε δύο φάσεις. Δεδομένου ότι η σχολική επίδοση δε συμβαδίζει απαραίτητα με την εννοιολογική κατανόηση (Baeten et al., 2010˙ Bempeni & Vamvakoussi, 2015˙ Stathopoulou & Vosniadou, 2007), στην πρώτη φάση εξετάσαμε την εννοιολογική γνώση των συμμετεχόντων στα μαθηματικά, επικεντρώνοντας στους ρητούς αριθμούς. Στη δεύτερη φάση εξετάσαμε την προσέγγιση στη μάθηση προσαρμόζοντας κατάλληλα και εμπλουτίζοντας το προηγούμενο εργαλείο μας.

## Μέθοδος

### *Συμμετέχοντες*

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν δύο μαθητές, μία μαθήτρια της ΣΤ' Δημοτικού (στο εξής, $M_1$) και ένας μαθητής της Γ' Γυμνασίου (στο εξής, $M_2$), με εξαιρετική επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών σύμφωνα με τους καθηγητές τους. Δεδομένου ότι η εξαιρετική επίδοση στο σχολικό πλαίσιο δε συνοδεύεται πάντα από την αντίστοιχη εννοιολογική κατανόηση, δεν αρκεστήκαμε μόνο σ' αυτή την πληροφορία αλλά εξετάσαμε την εννοιολογική τους γνώση στο πεδίο των ρητών αριθμών. Η αξιολόγηση της εννοιολογικής τους γνώσης επιβεβαίωσε την πληροφορία των καθηγητών τους περί εξαιρετικής επίδοσης.

### *Ερευνητικά Εργαλεία*

Για την πρώτη φάση της έρευνας, σχεδιάσαμε ένα δοκίμιο που περιλάμβανε 25 έργα, με στόχο την εννοιολογική γνώση για τους ρητούς, τα οποία εντάσσονταν στις κατηγορίες των Rittle-Johnson και Schneider (2014): α) αξιολόγηση μη οικείων διαδικασιών, β) αξιολόγηση παραδείγματος σχετικά με την έννοια γ) αξιολόγηση απαντήσεων που έχουν δοθεί από άλλους, δ) αναπαράσταση κλασμάτων και πράξεων με κλάσματα, ε) σύγκριση κλασμάτων χωρίς χαρτί και μολύβι, στ) απλοποίηση διαδικασιών με βάση κάποια αρχή, ζ) διατύπωση ορισμού και η) επεξήγηση διαδικασιών. Για τη δεύτερη φάση της έρευνας αναπτύξαμε 29 ερωτήσεις, διατυπωμένες με τη μορφή σεναρίου που περιέγραφε μία κατάσταση για σχολιασμό (π.χ. «Αν έπρεπε να συμβουλεύσεις ένα μικρότερο παιδί πώς πρέπει να διαβάζει μαθηματικά, τι θα θεωρούσες πολύ σημαντικό να του πεις;», «Παρατηρείς έναν/μία φίλο/η σου που μελετά μαθηματικά χωρίς να λύνει ασκήσεις. Αφιερώνει πολύ χρόνο να μελετά τη θεωρία, να φτιάχνει διαγράμματα, να ανατρέχει σε προηγούμενες ενότητες και να κρατά σημειώσεις. Εσύ μελετάς μαθηματικά με τον ίδιο τρόπο; Έχεις να τον/τη συμβουλεύεις κάτι;», «Φέρε ένα παράδειγμα άσκησης που σε δυσκόλεψε. Τι έκανες για να τη λύσεις;», «Ένα μικρότερο παιδί δυσκολεύεται με τη σύγκριση κλασμάτων. Τι θα έκανες για να το βοηθήσεις;», «Σου έχει συμβεί να «κολλήσεις» με ένα μαθηματικό πρόβλημα ή ερώτημα και να αφιερώσεις πολύ χρόνο για να το λύσεις; Αν ναι, γιατί πιστεύεις ότι έγινε αυτό;»). Οι ερωτήσεις για την προσέγγιση στη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών παρουσιάζονται στον Πίνακα 2, μετά το τμήμα Αναφορές.

### *Διαδικασία*

Τα παιδιά συμμετείχαν σε δύο ημιδομημένες συνεντεύξεις διάρκειας περίπου μιάμισης ώρας η καθεμία. Στην πρώτη αντιμετώπισαν τα ιδιαίτερα απαιτητικά έργα του πρώτου δοκιμίου και η επίδοσή τους ήταν ενδεικτική της προχωρημένης εννοιολογικής τους γνώσης στο πεδίο των ρητών αριθμών καθώς και του υψηλού επιπέδου της μαθηματικής τους σκέψης.

Στη δεύτερη, τρεις μέρες αργότερα, απάντησαν τα ερωτήματα σχετικά με την προσέγγιση που ακολουθούν στη μάθηση των μαθηματικών. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν.

***Ανάλυση δεδομένων***

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε ως αφετηρία τους άξονες του προηγούμενου εργαλείου μας (Bempeni & Vamvakoussi, 2015) και επιπλέον τους άξονες Κίνητρα και Αυτορρύθμιση, οι οποίοι αποτελούν σημαντικές όψεις της προσέγγισης στη μάθηση (Entwistle et al., 2013) επιτρέποντας ωστόσο τη διαφοροποίηση των αρχικών κατηγοριών ή την προσθήκη νέων καθώς και των αντίστοιχων δεικτών τους. Απώτερος στόχος του παρόντος εγχειρήματος είναι η κατασκευή εργαλείου που θα επιτρέπει τη διαχείριση ποσοτικών δεδομένων.

| **Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών** | |
|---|---|
| **Άξονες** | **Δείκτες** |
| Στόχοι | Κατανόηση – προσωπική κατασκευή νοήματος<br>Ακαδημαϊκή επιτυχία |
| Στρατηγικές μάθησης/μελέτης | Ενεργός συμμετοχή στο σχολικό μάθημα<br>Τεκμηρίωση<br>Συνδυασμός κατανόησης θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων<br>Συστηματική επένδυση χρόνου – Επίλυση μη οικείων προβλημάτων<br>Συνδέσεις |
| Στοιχεία Αυτορρύθμισης | Παρακολούθηση / έλεγχος της κατανόησης<br>Επίγνωση της κατανόησης και της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών<br>Ρύθμιση της συμπεριφοράς και του πλαισίου στη μελέτη<br>Ρύθμιση των συναισθημάτων στην εξέταση<br>Ευελιξία στη χρήση στρατηγικών |
| Κίνητρα | Ενδιαφέρον για τη μαθηματική πρόκληση |

**Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών**

Πιο συγκεκριμένα, η ανάλυση είχε ως σημείο εκκίνησης τους άξονες α) Στόχοι, β) Στρατηγικές μάθησης/μελέτης, γ) Επίγνωση, δ) Αυτορρύθμιση και ε) Κίνητρα. Οι δείκτες για κάθε άξονα ήταν: α) Κατανόηση - προσωπική κατασκευή νοήματος, β) Συνδυασμός θεωρίας και εξάσκησης, Τεκμηρίωση, Επένδυση χρόνου, Συνδέσεις, γ) Υψηλή, δ) Παρακολούθηση, Ρύθμιση, Έλεγχος της νόησης και των συναισθημάτων και ε) Μαθηματική πρόκληση, αντίστοιχα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015· Entwistle et al., 2013). Εξετάσαμε όλα τα αποσπάσματα και τα εντάξαμε σε κάποιο άξονα, όταν αυτό ήταν εφικτό. Επιλέξαμε προτάσεις ως μονάδα ανάλυσης, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις, και ολόκληρες παραγράφους, έτσι ώστε να αποκτηθεί μία συνολική αίσθηση του νοήματος. Αναζητήσαμε προτάσεις που περιείχαν λέξεις κλειδιά για τους αντίστοιχους δείκτες. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις λέξεις κατανοώ, καταλαβαίνω, νόημα για το δείκτη Κατασκευή νοήματος, τις λέξεις επαληθεύω, ελέγχω, λογικό αποτέλεσμα για το δείκτη Τεκμηρίωση και τις λέξεις εμπεδώνω, εξάσκηση, (να μη δημιουργούνται) κενά για το δείκτη Συστηματική Επένδυση χρόνου – επίλυση μη οικείων προβλημάτων.

Τοποθετήσαμε τις προτάσεις στους αρχικούς δείκτες και δημιουργήσαμε καινούργιους όπου χρειαζόταν. Οι άξονες και οι αντίστοιχοι δείκτες παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Σημειώνουμε ότι προέκυψαν νέοι δείκτες για τους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μάθησης/Μελέτης, Αυτορρύθμιση και Κίνητρα, όπως για παράδειγμα ο δείκτης Ενεργός συμμετοχή στο σχολικό μάθημα για τον άξονα Στρατηγικές Μαθησης/Μελέτης. Τα δεδομένα στους άξονες Επίγνωση και Αυτορρύθμιση παρουσίαζαν μεγάλη συνάφεια, επομένως συγχωνεύσαμε τους άξονες Επίγνωση και Αυτορρύθμιση σε έναν άξονα (Στοιχεία Αυτορρύθμισης).

## Ενδεικτικά Αποτελέσματα 1ης φάσης της έρευνας

Σημειώνουμε ότι οι δύο μαθητές απάντησαν σωστά σε όλα σχεδόν τα εννοιολογικά έργα της πρώτης φάσης, κάποια από τα οποία ήταν ιδιαίτερα απαιτητικά. Δεν παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα αυτής της φάσης, αλλά ενδεικτικά οι απαντήσεις τους σε ένα μόνο πρόβλημα, γιατί στόχος μας ήταν απλά να επιβεβαιώσουμε την εξαιρετική τους επίδοση στα μαθηματικά.

Ερευνήτρια: Στο ερώτημα "Βρες έναν αριθμό ανάμεσα στο 1/2 και το ¾" μια μαθήτρια απαντάει: "είναι το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 (αριθμητές) και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4 (παρονομαστές). Συμφωνείς;

Μ1: Ο αριθμός αυτός είναι ανάμεσα στα 1/2 και ¾ αλλά πιστεύω πως ο συλλογισμός της είναι λάθος γιατί σε κάποια άλλα κλάσματα που μπορεί να σου ζητηθεί να βρεις έναν αριθμό μπορεί να μην ισχύει. Μπορούμε να βρούμε τέτοια παραδείγματα. Για παράδειγμα ανάμεσα στο 1/6 και το 15/16 δε γίνεται να βρίσκεται το 14/7 γιατί αυτό είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα. Αυτό όμως είναι μεγαλύτερο κι από τα δύο κλάσματα, ενώ θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερο από το 1/6 που είναι κιόλας αλλά μικρότερο από το 15/16 για να είναι ενδιάμεσο. Το 14/16 για παράδειγμα, θα ήταν ανάμεσα. Δεν ισχύει αυτός ο κανόνας, δεν είναι σταθερός. Κι αν στα μαθηματικά ένας κανόνας δεν είναι σταθερός, τότε δεν ισχύει.

M2: Δεν είναι σωστό αυτό που έχει κάνει. Γιατί κανονικά για να κάνουμε αυτό πρέπει το ½ να το κάνουμε ομώνυμο με το ¾ , όπου θα γίνει 3/4 και το ενδιάμεσο είναι το 1,5/4. [...] Το ½=6/12, το ¾=9/12. Το 2/3=8/12, άρα είναι ανάμεσα, άρα ισχύει για τη συγκεκριμένη περίπτωση. Πρέπει να ανακαλύψω παράδειγμα για το οποίο δεν ισχύει και δε θα ισχύει τότε. Να πάρουμε το... Ξέρετε κάτι, τι νομίζω.... Το ένα είναι το μισό του 4, το άλλο είναι τα ¾ του 4, άρα εφόσον οι αριθμητές και οι παρανομαστές έχουν διαφορά 1, τότε ισχύει. Δηλαδή, αν πάρουμε το ½ και το 4/5, δεν μπορούμε να πούμε ότι το 2/4 είναι ανάμεσα, είναι ίσο με το ½. Άρα απλά έτυχε εδώ. Λογικά, δεν ισχύει. Όχι, δεν ισχύει.

Όπως είναι φανερό από τα παραπάνω, οι δύο μαθητές χρησιμοποίησαν την αποδεικτική μέθοδο τους αντιπαραδείγματος, για να αποδείξουν ότι ο ισχυρισμός της υποθετικής μαθήτριας δεν ισχύει. Η συστηματική χρήση των προχωρημένων εννοιολογικών στρατηγικών διαφαίνεται και από τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις του δεύτερου ερωτηματολογίου.

## Αποτελέσματα 2ης φάσης της έρευνας

Στο τμήμα αυτό θα παρουσιάσουμε αναλυτικά αποτελέσματα από τη δεύτερη φάση της έρευνας.

### *Στόχοι*

Και τα δύο παιδιά δήλωσαν ότι ενδιαφέρονται για τη βαθμολογία, αλλά και για τη γνώμη του εκπαιδευτικού και των συμμαθητών τους. Ωστόσο, τόνισαν τη σημασία της κατανόησης στα μαθηματικά, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην προσωπική κατασκευή νοήματος.

$M_1$: [*Τα μαθηματικά*] δεν είναι να ξέρεις κάτι παπαγαλία, απ'έξω. Γιατί σε ένα πρόβλημα μπορεί να συναντήσεις αυτό που ξέρεις απ' έξω πιο μπερδεμένο και να μην μπορείς να το κάνεις. [...] Το θέμα είναι να προσπαθούμε οι ίδιοι και να καταλαβαίνουμε. Αν δεν τα κατάφερνα και [*ο δάσκαλος*] μου έβαζε, πιο υψηλό βαθμό απ' ό,τι νόμιζα, θα προσπαθούσα κι άλλο. [*Τα μαθηματικά*] είναι ένα βασικό μάθημα, θα μου χρειαστούν στη ζωή μου και πρέπει να τα καταλάβω. Το κάνω για μένα και όχι για το δάσκαλο. […] Τα μαθηματικά είναι σύνθετα... στα άλλα μαθήματα μαθαίνεις απ'έξω ένα κομμάτι και αυτό είναι. Πάει τελείωσε... [...] Τα κλάσματα δεν έχουν να κάνουν μόνο με τους κανόνες της σύγκρισης. Καταρχάς, θα έπρεπε να καταλάβεις τι είναι κλάσμα. Όταν τα έχεις όλα στο μυαλό σου και ξέρεις, όταν έχεις μπροστά σου ένα κλάσμα και ξέρεις τι συμβολίζει αυτό που βλέπεις, σίγουρα σε βοηθάει στο να λύσεις αυτά που σου ζητούνται και γενικά να τα θεωρήσεις πιο εύκολα και πιο οικεία.

$M_2$: [*Τα μαθηματικά δεν είναι σαν την ιστορία που*] τα μαθαίνεις απέξω και πας και τα γράφεις - πρέπει να βάλεις το μυαλό σου να δουλέψει λογικά. [*Προτιμώ να ανακαλύπτω μόνος μου*], γιατί τότε δεν τα ξεχνάω ποτέ. […] [*Για να συγκρίνεις κλάσματα*] υπάρχουν κι άλλοι τρόποι εκτός από τους κανόνες. Τόσες φορές που τους έχω ακούσει, τους θυμάμαι. Δεν λύνονται πάντα οι ασκήσεις έτσι. Αν οι παρανομαστές για παράδειγμα ήταν μεγάλοι αριθμοί και δεν απλοποιούνταν. Έτσι αποφεύγεις τους κανόνες. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι. Η σύγκριση με τη μονάδα για παράδειγμα. Πρέπει να καταλαβαίνεις το κλάσμα ως ποσότητα, να το αναπαριστάς με σχήματα. Στο περίπου το κάνεις, με τη λογική.

***Στρατηγικές μάθησης***

**Ενεργός συμμετοχή στο σχολικό μάθημα.** Και τα δύο παιδιά ανέφεραν ότι δε τους χρειάζεται να μελετήσουν τη θεωρία στο σπίτι, γιατί τη μαθαίνουν στην τάξη.

$M_1$: Παρακολουθώ και στην τάξη το μάθημα, οπότε δεν έχω πρόβλημα στα μαθηματικά. Δεν είναι χρονοβόρα. Γενικά δε διαβάζω ποτέ πολλή ώρα μαθηματικά, ακόμα και τεστ να γράφω. Πιο πολύ τα ξέρω από το σχολείο. Όταν προσέχεις, καταλαβαίνεις.

$M_2$: Γενικά αν προσέχεις στην τάξη, τα μαθαίνεις από κει. Οπότε, σε όλα τα μαθήματα δε διαβάζω ιδιαίτερα, γιατί τα ξέρω ήδη από το σχολείο.

Φαίνεται ότι συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα των μαθηματικών: αναγνωρίζουν τι δεν καταλαβαίνουν, δε διστάζουν να εκφράσουν τις απορίες τους και αξιολογούν τις πληροφορίες που παίρνουν από τον εκπαιδευτικό:

$M_1$: [Ένας καλός μαθητής] όταν έχει μία απορία δε θα ντραπεί να την εκφράσει και θα υποστηρίξει την άποψή του. [...] Πολλές φορές έχω υπάρξει αντίθετη με τη γνώμη της κυρίας μας και γενικά θα της το πω. Καμιά φορά ξέρεις ότι έχεις δίκιο. Για παράδειγμα δεν μπορούσα να καταλάβω γιατί δεν πρέπει να βάζουμε δεκαδικούς σε κλάσματα. Δεν μπορούσα να το αποδεχτώ. Αφού παριστάνει μια διαίρεση, γιατί να μη βάζουμε δεκαδικούς; Δηλαδή, οι δεκαδικοί δε διαιρούνται;

$M_2$: Πολλές φορές [έχει *τύχει να προβληματιστώ με κάτι που είπε ο καθηγητής*]. Σηκώθηκα πάνω στον πίνακα και του το είπα. Κάναμε επιστημονική κουβέντα. Όταν ήμουν σίγουρος ότι είχα λάθος και ότι είναι σωστό αυτό που λέει, τότε τα παράτησα. Μου έχει τύχει όμως να αποδειχθεί ότι είχα δίκιο.

**Τεκμηρίωση.** Όπως είναι φανερό από τα αμέσως προηγούμενα αποσπάσματα, στο πλαίσιο των μαθηματικών, τα δύο παιδιά δεν είναι διατεθειμένα να αποδεχτούν κάτι, αν δεν είναι επαρκώς τεκμηριωμένο. Σε πολλά διαφορετικά σημεία της συνέντευξης δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν τη «λογική τους» για να ελέγξουν τα αποτελέσματά τους, ή τα βήματα στην επίλυση προβλήματος (βλ. και αποσπάσματα στην ενότητα «Στοιχεία Αυτορρύθμισης). Σημειώνουμε επίσης ότι κατά την επίλυση των έργων για τους ρητούς, και τα δύο παιδιά τεκμηρίωναν συστηματικά τις ενέργειές τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι και τα δύο χρησιμοποίησαν αντιπαραδείγματα (βλ. και Ενδεικτικά Αποτελέσματα 1ης φάσης της έρευνας).

Μ$_1$: Θυμάμαι, μία άσκηση που όταν έκανα την επαλήθευση μου έβγαινε πάντα λάθος. Ενώ έφτιαχνα κανονικά τους λόγους και τη λύση, κάτι δε μου έβγαινε καλά, δε μου ταίριαζε. Στο τέλος κάνεις και επαλήθευση για να δεις αν όντως το έχεις κάνει σωστά. Επαληθεύω με το μυαλό μου όμως, χωρίς να κάνω πράξεις.

Μ$_2$: Τις περισσότερες φορές [*ξέρω αν έχω κάνει λάθος σε μία άσκηση*]. Πείτε το ένστικτο μετά από τόσα χρόνια που κάνω μαθηματικά. Από τη λογική σου το καταλαβαίνεις... Αν δεν είναι λογικό το αποτέλεσμα....

**Συνδυασμός κατανόησης θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων.** Τα δύο παιδιά τόνισαν ότι είναι απαραίτητος ο συνδυασμός κατανόησης της θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων.

Μ$_1$: Τα μαθηματικά είναι και θεωρία, χωρίς τη θεωρία δε μπορείς να λύνεις τα προβλήματα. Ο σωστός τρόπος είναι να διαβάζεις πάντα τη θεωρία, ειδικά στην περίπτωση που δεν την έχεις καταλάβει. Πάντα κρύβεται κάποια θεωρία από πίσω. Πώς θα λύσεις ένα πρόβλημα με ανάλογα ποσά αν δεν ξέρεις τι είναι ανάλογα ποσά; [*Πρέπει κανείς*] να λύνει και πολλές ασκήσεις. [...] Το να λέω τους κανόνες απ'έξω δε βοηθάει. Μετά στα προβλήματα, πού θα μου χρησιμεύσουν; Θα πάω να γράψω τον κανόνα; Πώς θα λύσω το πρόβλημα;

Μ$_2$: Και η θεωρία χρειάζεται, και οι ασκήσεις χρειάζονται. Αν δε διαβάζεις θεωρία, μένεις στάσιμος σε ένα επίπεδο. Δε μπορείς να αντιμετωπίσεις όλες τις ασκήσεις. [*Πρέπει να προσέχει κανείς*] τη θεωρία, γιατί στις λεπτομέρειες κρίνονται τα πράγματα.

**Συστηματική Επένδυση χρόνου – επίλυση μη οικείων προβλημάτων**. Και τα δύο παιδιά τόνισαν τη σημασία του να επενδύει κανείς συστηματικά χρόνο στα μαθηματικά και δήλωσαν ότι αναζητούν και επιλύουν προβλήματα που δεν έχουν λύσει στο σχολείο. Γι' αυτά τα παιδιά, η εξάσκηση δεν περιορίζεται στη μελέτη λυμένων ή τη λύση παρόμοιων ασκήσεων.

Μ$_1$: Τα μαθηματικά χρειάζονται εξασκηση. Εγώ πάντως δε θα καθόμουν ποτέ να λύσω ένα εκατομμύριο παρόμοιες ασκήσεις. Αυτό δε βοηθάει [*το μαθητή*]- μετά αν δε δει κάτι παρόμοιο δε θα μπορούσε να το λύσει γιατί τις ασκήσεις αυτές τις λύνει μηχανικά, ξέρει ένα τρόπο και είναι όλες ίδιες, απλά με άλλους αριθμούς. Αν δεν κατανοήσει κάποιος την ύλη και δεν αφήσει το μυαλό του να πάει λίγο παραπέρα, να μη μαθαίνει μηχανικά να λύνει το πρόβλημα με ένα κι μόνο τρόπο, δε θα μπορεί να προχωρήσει παρακάτω, να λύσει άλλα προβλήματα. [...] Θα συμβούλευα το μαθητή να κάνει πολλές πρακτικές ασκήσεις στα μαθηματικά ιδιαίτερα αν τον δυσκολεύει κάτι και να μην αφήνει κενά, γιατί όταν στα μαθηματικά δημιουργούνται κενά και μετά πάνω σ' αυτό κάνεις κάτι άλλο πιο δυσκολο δε θα μπορείς να το καταλάβεις ούτε κι αυτό αν δεν έχεις εμπεδώσει τα προηγούμενα. [....] Λύνω και παραπάνω ασκήσεις.

Προχθές για παράδειγμα τύπωσα ένα φυλλάδιο με άσκήσεις στα ποσοστά από το ιντερνετ για να εξασκηθώ για το τεστ που θα γράφαμε την επόμενη μέρα.

$M_2$: [*Η επίλυση πολλών παρόμοιων ασκήσεων*] δε μ' αρέσει. Καταντάει ένα πράγμα σαν ιστορία τα μαθηματικά. Αυτό που μαθαίνουν τα παιδιά πώς να λύνουν μια άσκηση και με το που την βλέπουν ξέρουν πώς να τη λύσουν, αυτό δεν πιστεύω πως είναι μαθηματικά. [...] Θα συμβούλευα άνα μαθητή να να λύνει γενικές ασκήσεις και όχι μόνο εφαρμογές, για παράδειγμα, μόνο μια εξίσωση. [...] Κάνω από μόνος μου παραπάνω ασκήσεις, δεν περιορίζομαι σε αυτά που κάνουμε στο σχολείο.

**Συνδέσεις.** Και οι δύο μαθητές αναφέρθηκαν στη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών ενοτήτων στα μαθηματικά, τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα μαθήματα (Φυσική, Χημεία), και την καθημερινή ζωή.

$M_1$: Ναι, [*συνδέονται τα προηγούμενα με τα επόμενα στα μαθηματικά*] για παράδειγμα είχαμε κάνει ανάλογα ποσά και μετά ποσοστά τα οποία λύνονταν πάλι με ανάλογα ποσά, με τον ίδιο τρόπο. Και για να ξέρεις καλά ανάλογα ποσά, πρέπει να ξέρεις καλά τα κλάσματα. Και με τη φυσική για παράδειγμα. Τώρα πρόσφατα, είχαμε κάνει τη μάζα το βάρος στη Φυσική και μετά από λίγο καιρό κάναμε και στα μαθηματικά το βάρος.

$M_2$: Την επιμεριστική ιδιότητα την είχαμε μάθει από την ΣΤ' Δημοτικού με αριθμούς, τώρα τη μάθαμε και με μεταβλητές, όπως και όλες τις ιδιότητες. Και στα άλλα θετικά μαθήματα συναντάμε τα μαθηματικά, π.χ. τη Φυσική, Χημεία. Ένα παράδειγμα είναι οι χημικές εξισώσεις… Γι' αυτό στις πανελλήνιες, τα δίνεις όλα αυτά μαζί.

Χαρακτηριστικό είναι ότι αναφέρθηκαν στη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς και με την καθημερινή ζωή, ως κατάλληλη διδακτική πρακτική:

$M_1$: Να τα παρουσιάζουμε στα παιδιά ζωντανά, έτσι για να μπορούν να το παρατηρήσουν και μέσα από τη ζωή τους. Δηλαδή όταν λέμε ¼ του κιλού γραβιέρα, πόσο είναι;

$M_2$: Τα παιδιά σε μικρή ηλικία δεν έχουν καταλάβει το κλάσμα σαν ποσότητα. [*Θα βοηθούσα ένα μικρότερο παιδί*] με τα σχέδια, τις αναπαραστάσεις.

***Στοιχεία αυτορρύθμισης***

Και τα δύο παιδιά έδειξαν ότι παρακολουθούν, ελέγχουν και ρυθμίζουν τον εαυτό τους, στο επίπεδο της νόησης, των συναισθημάτων, και της συμπεριφοράς σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών.

$M_1$: Πιστεύω ότι η σκέψη μου μπορεί να πάει παραπέρα, αλλά όταν λύνω προβλήματα, τα λύνω με τον τρόπο που ξέρω, που ξέρω ότι θα λύσει το πρόβλημα. Όταν δε λύνεται με αυτόν το τρόπο, δοκιμάζω κάτι άλλο ακόμα κι αν δεν είμαι σίγουρη. [*Όταν δυσκολεύομαι με ένα πρόβλημα*] προσπαθώ να δω το πρόβλημα από όλες τις μεριές και να φτιάξω στο μυαλό μου ένα πίνακα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα. [*Ξέρεις ότι τα πηγαίνεις καλά*] αν παρακολουθείς τη λύση σου και δεν το κάνεις μηχανικά. Κάνεις και επαλήθευση για να δεις αν όντως το έχεις κάνει σωστά. Επαληθεύω με το μυαλό μου όμως, όχι να κάνω πράξεις. Ναι, το αποτέλεσμα πρέπει να το παρακολουθείς, να είναι λογικό το αποτέλεσμα.

$M_2$: [*Είμαι σίγουρος ότι έχω καταλάβει την εκφώνηση ενός προβλήματος*] όταν ξέρω ακριβώς τι λέει και μπορώ να την πω με δικά μου λόγια, όταν την έχω στο μυαλό μου χωρίς να τη διαβάζω κάθε τρεις και λίγο. [*Όταν με δυσκολεύει μια εκφώνηση*] την απλοποιώ σε πιο μικρά κομμάτια, προσπαθώ να καταλάβω μήπως εννοεί κάτι που εγώ δεν έχω καταλάβει. Τη σπάω σε μικρά κομμάτια και το πάω σιγά σιγά μήπως εγώ κάνω κάτι λάθος ή δεν καταλαβαίνω κάτι. [...] Στη θεωρία, όταν δυσκολεύεσαι, παίρνεις ένα χαρτί, το σπας σε κομμάτια, σιγά σιγά τα γράφεις και τα αποκωδικοποιείς, είναι 3-4 διαφορετικά πράγματα και βρίσκεις αυτό που σε μπερδεύει.

Ως αποτέλεσμα, τα δύο παιδιά φαίνεται να έχουν επίγνωση της κατανόησής τους και μάλιστα διαχωρίζουν τις δυσκολίες στην κατανόηση από τις απαιτήσεις του σχολικού πλαισίου:

$M_1$: Ε, στην αρχή τα κλάσματα μου φάνηκαν λίγο δύσκολα. Βέβαια, το να κάνεις πράξεις και αυτά που μου ζητούσαν οι ασκήσεις ήταν εύκολα.

$M_2$: [*Τα κλάσματα*] εντάξει δε μου φάνηκαν ιδιαίτερα δύσκολα, βατά ήταν. Τα επόμενα χρόνια ακόμη πιο εύκολα. Έτσι είναι συνήθως με τα μαθηματικά, μετά τα καταλαβαίνεις. Αυτά που έχεις μάθει στο Γυμνάσιο, τα καταλαβαίνεις καλά στο Λύκειο. Αυτά με τις Πιθανότητες που κάναμε τελευταία, δεν τα κατάλαβα καλά γιατί ήταν λίγο αόριστα, κάθισα και τα είδα στο χαρτί. Αυτό ας πούμε για το «χιαστί» γινόμενο, έχω μάθει και το χρησιμοποιώ. Αν το ψάξεις λίγο το καταλαβαίνεις κιόλας.

Χαρακτηριστική είναι η αναφορά τους στον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν ένα μη οικείο πρόβλημα στο πλαίσιο της εξέτασης:

$M_1$: Μέχρι και την τελευταία στιγμή προσπαθείς. Αν από την αρχή που είδες την άσκηση πεις τα παράτησα και κατευθείαν πέσεις σε αρνητικές σκέψεις και να ξέρεις να τη λύσεις, δεν πρόκειται. Αν έχεις χρόνο και μπορείς να προσπαθήσεις μέχρι το τέλος, γιατί να την παρατήσεις από την αρχή;

$M_2$: Πρώτα λες, ωχ Παναγία μου, μετά αρχίζεις να βρίζεις τον καθηγητή και στο τέλος λες, δε βαριέσαι, διαγώνισμα τριμήνου είναι, ό,τι κάνω.

Και τα δύο παιδιά φάνηκαν να αναγνωρίζουν ότι στην επίλυση προβλήματος απαιτείται ένας συνδυασμός επιμονής στην προσπάθεια και ευελιξίας:

$M_1$: Την είχα αφήσει αυτή την άσκηση. Μετά που το ξανασκέφτηκα το πήρα από άλλη πλευρά για να μπορέσω να βρω αυτό το δεδομένο που μου έλειπε. [*Όταν* *δεν έχει αποτελέσματα η μέθοδός μου*] δοκιμάζω κάτι άλλο από αυτά που έχω μάθει, ακόμη κι αν δεν είμαι σίγουρη.

$M_2$: Απλά έκανα διάφορες σκέψεις. Κι όταν δε μου έβγαιναν οι σκέψεις, τις απέρριπτα. Σκεφτόμουν διάφορα πράγματα ως προς τη λύση της άσκησης και απέρριπτα όποια δε μου έβγαιναν. Κι αν δω ότι το παλεύω, το παλεύω, το παλεύω και δε βγαίνει, δεν παραδίνομαι, είναι ήττα.

Σημειώνουμε ότι η $M_1$ δήλωσε ότι είναι πάντα συγκεντρωμένη όταν μελετά, ώστε να χρειάζεται λιγότερο χρόνο. Ο $M_2$ «αποκάλυψε» ότι ξεκίνησε ιδιαίτερα μαθήματα γιατί χρειαζόταν κάποιον να τον κινητοποιεί για να κάνει παραπάνω εξάσκηση. Και τα δύο παιδιά επέδειξαν αυτοπεποίθηση σε σχέση με τις τρέχουσες στρατηγικές μάθησής τους στα μαθηματικά. Ο $M_2$ ανέφερε ότι στο παρελθόν διαπίστωσε ότι δεν πρόσεχε αρκετά τη θεωρία, προσθέτοντας ότι *«μετά το κατάλαβα, αργά δεν πιστεύω ότι ήταν»*. Επιπλέον, αναφερόμενος στη στρατηγική του να επικεντρώνει περισσότερο στις ασκήσεις, δήλωσε:

$M_2$: Εγώ τα καταλαβαίνω με αυτόν τον τρόπο. Αν δω ότι δεν αποδίδει τα μετέπειτα χρόνια, θα το αλλάξω.

***Κίνητρα***

Και τα δύο παιδιά κινητοποιούνται από τα μη τετριμμένα μαθηματικά προβλήματα.

$M_1$: Με ενδιαφέρουν περισσότερο τα προβλήματα που είναι δύσκολα και χρειάζεται να κάνεις κάτι παραπάνω για να το λύσεις, και όχι σαν τα άλλα που λύνονται με ένα συνηθισμένο τρόπο, μηχανικά. Βαρετές μου φαίνονται αυτές με τα πινακάκια και να κάνουμε όλη την ώρα «χιαστί», που λύνονται με ένα συγκεκριμένο τρόπο και κάνεις μόνο αυτό και είναι σαν να το κάνεις μηχανικά.

$M_2$: Γενικά όσα έχω ξανακάνει [*μου φαίνονται βαρετά*], δηλ. όσα δεν πάνε το μυαλό σου να σκεφτεί παραπέρα. Κάτι που έχει πράξεις και κάνεις τα ίδια και τα ίδια. Γι' αυτό η Γεωμετρία είναι πιο ενδιαφέρον κομμάτι.

Επιπλέον ο Μ2 εξέφρασε το ενδιαφέρον του για τη μαθηματική πρόκληση.

$M_2$: Μία φορά που είχα κολλήσει [*με ένα πρόβλημα*], τελικά το έκανα μετά από ώρες [...] Κάτι τέτοια σκέφτομαι στα μαθηματικά και ώρες-ώρες πάω να τρελαθώ...

## Συμπεράσματα–Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών των μαθητών με εξαιρετική επίδοση με σκοπό να εντοπίσουμε τα χαρακτηριστικά της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών. Η ανάλυση των συνεντεύξεων των δύο παιδιών ανάδειξε δείκτες της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών στους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μάθησης, Στοιχεία Αυτορρύθμισης και Κίνητρα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015· Entwistle et al., 2013).

Ειδικότερα, τα δύο παιδιά έχουν ως στόχο την ακαδημαϊκή επιτυχία, αλλά αποδίδουν ιδιαίτερη αξία στην προσωπική κατασκευή νοήματος. Επενδύουν χρόνο στη μελέτη των μαθηματικών, την οποία εκλαμβάνουν κυρίως ως επίλυση μη οικείων προβλημάτων. Παρά το γεγονός ότι αναγνωρίζουν την αξία της θεωρίας, δεν αφιερώνουν πολύ χρόνο στη μελέτη της. Αυτή η εκ πρώτης όψεως ασυνέπεια εξηγείται, αν λάβει κανείς υπόψη την ποιότητα της συμμετοχής τους στο σχολικό μάθημα, που αποτελεί κεντρική στρατηγική μάθησης γι' αυτά τα παιδιά. Επιπλέον, φαίνεται ότι τα παιδιά αυτά δεν αντιμετωπίζουν τη μαθηματική γνώση αποσπασματικά, αλλά δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, μαθηματικών ενοτήτων, διαφορετικών μαθημάτων, καθώς και με παραδείγματα από την καθημερινή ζωή. Ιδιαίτερα σημαντικός για το χώρο των μαθηματικών είναι ο δείκτης Τεκμηρίωση: φαίνεται ότι τα παιδιά αυτά απαιτούν την τεκμηρίωση στο σχολικό πλαίσιο, παράγουν τεκμηριώσεις όταν επιλύουν προβλήματα και χρησιμοποιούν την τεκμηρίωση ως μέσο ελέγχου της μαθηματικής τους δραστηριότητας. Επιπλέον, τα δύο παιδιά παρακολουθούν, ρυθμίζουν και ελέγχουν τη νόηση, τα συναισθήματα και τη συμπεριφορά τους σε σχέση με τα μαθηματικά. Ως αποτέλεσμα, έχουν υψηλή επίγνωση για την κατανόησή τους και τις στρατηγικές μάθησής τους και ευελιξία. Τέλος, κινητοποιούνται από τη μαθηματική πρόκληση. Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι τα παιδιά έχουν μαθηματική επάρκεια (mathematical proficiency) με βάση το μοντέλο που προτάθηκε από τους Kilpatrick, Swafford και Findell (2001) και περιλαμβάνει εννοιολογική κατανόηση, διαδικαστική ευχέρεια, ευελιξία στη χρήση στρατηγικών, προσαρμοστικό συλλογισμό (λογική σκέψη, αναστοχασμό, τεκμηρίωση) και παραγωγική προδιάθεση (ενδιαφέρον, θετική στάση).

Ο προσδιορισμός των ποιοτικών χαρακτηριστικών της βαθιάς προσέγγισης καθώς και των δεικτών τους μπορεί να αξιοποιηθεί για τη δημιουργία κατάλληλου μαθησιακού - διδακτικού περιβάλλοντος που θα ενθαρρύνει τους μαθητές, αν όχι να υιοθετήσουν τη βαθιά προσέγγιση στη μάθηση, τουλάχιστον να αποκτήσουν στη μάθησή τους χαρακτηριστικά της βαθιάς προσέγγισης. (Smith & Wood, 2000). Άλλωστε, η προηγούμενη έρευνα έχει δείξει ότι η "πρόκληση" και η υιοθέτηση της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση στην ολοτητά της είναι μία εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση (Baeten et al., 2010· Entwistle, & McCune, 2000· Entwistle & Peterson, 2004). Ένας βασικός λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ότι οι μαθητές που τυγχάνει να βιώνουν την ακαδημαϊκή επιτυχία ακολουθώντας επιφανειακή ή βαθιά προσέγγιση, έχουν την τάση να την ακολουθούν με συνέπεια σε διάφορες καταστάσεις και να αντιστέκονται στην οποιαδήποτε αλλαγή (Entwistle, 2007· Entwistle & Peterson, 2004, García et al., 2016). Επίσης, η αρχική προσέγγιση του ατόμου, επιφανειακή ή βαθιά, έχει βρεθεί ότι είναι ικανή να προβλέψει την προσέγγιση και στη μετέπειτα ακαδημαϊκή πορεία του ατόμου (Crawford et al., 1998). Ο βαθμός ωστόσο στον οποίο μπορεί να αναστραφεί η τάση αυτή, με βασικό ζητούμενο τη μετάβαση από την επιφανειακή στη βαθιά προσέγγιση, εξαρτάται από προσωπικά του χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα την ικανότητά του (Biggs, 1987) αλλά και από το πλαίσιο (Entwistle, 2000). Τα υπάρχοντα ερευνητικά δεδομένα υποστηρίζουν ότι η εφαρμογή μαθητοκεντρικών διδακτικών μεθόδων σε παρεμβάσεις μακράς διαρκείας μπορούν να ενισχύσουν τη χρήση βαθιάς προσέγγισης από τους μαθητές (Baeten et al., 2010· Leung, Lu, Chen, & Lu, 2008). Οι διδάσκοντες μπορούν, ως ένα σημείο, να προωθήσουν τη μάθηση με κατανόηση (Entwistle, 2000· Scouller, 1998) καθορίζοντας σαφείς στόχους στο μάθημα τους, αναθέτοντας εργασίες που ενθαρρύνουν την αυτόνομη μελέτη, θέτοντας ανοιχτά προβλήματα στις γραπτές δοκιμασίες και όχι εφαρμογές που απαιτούν ανάκληση πληροφοριών, κάνοντας διαδραστικό μάθημα στο οποίο θα παρέχεται στους μαθητές συνεχής ανατροφοδότηση από τους ίδιους αλλά και από τους συμμαθητές τους, αξιολογώντας τους μαθητές από τον προσωπικό τους φάκελο (portfolio), σχεδιάζοντας δραστηριότητες που επιτρέπουν τη διασύνδεση του μαθήματος με τον μελλοντικό επαγγελματικό τους προσανατολισμό κ.α. (βλ. Baeten et al., 2010 για μία εκτενή συζήτηση). Ωστόσο, η διαδικασία της αξιολόγησης, η οποία συχνά περιορίζει το διδάσκοντα, φαίνεται τελικά να έχει τη μεγαλύτερη επιρροή τόσο στη διαδικασία όσο και στο αποτέλεσμα της μάθησης. Πρέπει λοιπόν μαθησιακό–διδακτικό περιβάλλον, τα αναλυτικά προγράμματα και, κυρίως, η αξιολόγηση, να ευθυγραμμιστούν προς κατευθύνσεις που θα ενθαρρύνουν την υιοθέτηση χαρακτηριστικών βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών (Biggs, 1999).

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας δίνουν μία πιο λεπτομερή εικόνα των χαρακτηριστικών της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών, και μπορούν να αποτελέσουν τη βάση σχεδιασμού ενός ερευνητικού εργαλείου που θα επιτρέψει τη διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών σε μεγαλύτερη κλίμακα. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι τα ευρήματα αυτά δείχνουν ότι η έννοια “προσέγγιση στη μάθηση” είναι μάλλον ευρεία και πιθανόν αλληλοκαλύπτεται με έννοιες που προκύπτουν από άλλες ερευνητικές οπτικές, (όπως “στοχευμένη μάθηση”, “αυτορρυθμιζόμενη μάθηση” – για παρόμοια ανάλυση δείτε Cano & Berbén, 2009· Berger & Karabenick, 2011). Απαιτείται μία πιο λεπτομερής ανάλυση αυτών των εννοιών με σκοπό να αναδειχθούν πιθανές ομοιότητες και διαφορές.

Επιπλέον, η διάκριση της επιφανειακής έναντι της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση περιορίζεται στην πρόθεση του υποκειμένου και τη στρατηγική που ακολουθεί κατά την ολοκλήρωση του έργου. Ως εκ τούτου, η υιοθέτηση μιας τέτοιας ερευνητικής προσέγγισης αδυνατεί να καλύψει άλλες πτυχές, όπως την αντίληψη των πλαισιακών παραγόντων από το υποκείμενο, που ίσως είναι ενδεικτικές της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση/μελέτη των μαθηματικών (π.χ. αντίληψη υποκειμένου για τη βέλτιστη διδασκαλία) (Baeten et al., 2010). Μελλοντική ποσοτική έρευνα που θα στηριχθεί στην παρούσα ποιοτική μελέτη, πιθανόν να αναδείξει τους παραπάνω περιορισμούς που προκύπτουν από την αλληλοκάλυψη ή την παράλειψη παραγόντων της βαθιάς προσεγγισης στη μάθηση των μαθηματικών.

## Αναφορές (References)

Bempeni, M. & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students’ knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research, 3,* 17-34.

Baeten M., Kyndt E., Struyven K., & Dochy F. (2010). Using student-centred learning environments to stimulate deep approaches to learning: Factors encouraging or discouraging their effectiveness. *Educational Research Review, 5,* 243-260.

Berger, J. L., & Karabenick, S. A. (2011). Motivation and students' use of learning strategies: Evidence of unidirectional effects in mathematics classrooms. *Learning and Instruction, 21,* 416 – 428. doi:10.1016/ j.learninstruc.2010.06.002

Biggs, J. B. (1987). *Study process questionnaire manual.* Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Biggs, J. (1994). Asian learners through Western eyes: An astigmatic paradox. *Australian and New Zealand Journal of Vocational Educational Research, 2*(2), 40–63.

Biggs, J. B. (1999). *Teaching for Quality Learning at University*. Buckingham: Open University Press.

Byrne, M., Flood, B., & Willis, P. (2002). Approaches to learning of European business students. *Journal of Further and Higher Education, 26,* 19-28.

Cano F. & Berbén A. B. G. (2009). University students' achievement goals and approaches to learning in mathematics , *British Journal of Educational Psychology, 79,* 131–153

Chin, C. & Brown, D. (2000). Learning in Science: A comparison of deep and surface approaches. *Journal of Research in Science Teaching, 37,* 109-138.

Chiu, M. S. (2012). Identification and assessment of Taiwanese children's conceptions of learning mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10,* 163-191.

Crawford K., Gordon S., Nicholas J., & Prosser M. (1994). Conceptions of mathematics and how it is learned: the perspectives of students entering university. *Learning and Instruction. 4,* 331-345.

Crawford K., Gordon S., Nicholas J., & Prosser M. (1998) Qualitatively different experiences of learning mathematics at university*. Learning and Instruction. 5,* 455–468.

Entwistle, N. (1997). Introduction: *Phenomenography in higher education. Higher Education Research & Development, 16,* 125–126

Entwistle, N. (2000). Promoting deep learning through teaching and assessment: Conceptual frameworks and educational contexts. *Paper presented at the first annual conference of the Teaching and Learning Research Programme. Leicester*. Ανακτήθηκε από http://www.etl.tla.ed.ac.uk/publications.html.

Entwistle, N. (2007). Conceptions of learning and the experience of understanding: Thresholds, contextual influences, and knowledge objects. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction (pp. 123-143). Oxford, UK: Elsevier.

Entwistle, N. & McCune V. (2004). The conceptual bases of study strategy inventories. *Educational Psychology Review, 16,* 325-345.

Entwistle, N., McCune, V., & Tait, H. (2013). Approaches to learning and studying inventory (ASSIST) (3rd edition). Ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/50390092

Entwistle, N. & Peterson, E. (2004). Conceptions of learning and knowledge in higher education: Relationships with study behavior and influences of learning environments. *International Journal of Educational Research, 41*(6), 407–428.

Entwistle, N., & Ramsden, P. (1983). *Understanding student learning.* London: Croom Helm.

Flegg, J., Mallet, D., & Lupton, M. (2012). Students' perceptions of the relevance of mathematics in engineering. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(6), 717-732.

García, T., Rodríguez C., Betts L., , Areces D., , & González-Castro P., 2016. How affective-motivational variables and approaches to learning predict mathematics achievement in upper elementary levels. *Learning and Individual Differences, 49,* 25-31.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Marton, F., and Säljö, R. (1976). On qualitative differences in learning. I - Outcome and process, *British Journal of Educational Psychology 46,* 4--11.

Pask, G. (1976). Styles and strategies of learning', *British Journal of Educational Psychology, 46*, 128-148.

Postareff L., Paspala, A., & Lindblom-Ylänne S. (2015). Factors contributing to changes in a deep approach to learning in different environments. *Learning Environ Res, 18,* 315-333.

Rittle-Johnson B. & Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition.* Oxford Press.

Scouller, K. (1998). The influence of assessment method on students' learning approaches: Multiple choice question examination versus assignment essay. *Higher Education, 35,* 453–472.

Smith G. & Wood L. (2000). Assessment of learning in university mathematics, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 125-132.

Stathopoulou, C., & Vosniadou, S. (2007). Conceptual change in physics and physics-related epistemological beliefs: A relationship under scrutiny. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction (pp. 145-164). Oxford, UK: Elsevier.

Svensson, L. (1977). *On qualitative differences in learning: 3. Study skill and learning. British Journal of Educational Psvchology, 47,* 233-243.

Tait, H., Entwistle, N. J. & McCune, V. (1998). ASSIST: a reconceptualisation of the Approaches to Studying Inventory*, In Improving Student Learning*(Ed, Rust, C.) Oxford Centre for Staff and Learning Development, Oxford, 262-271.

Zeegers, P. (2004). Student learning in higher education: A path analysis of academic achievement in science. *Higher Education Research and Development, 23*(1), 35–56.

| **Ερωτήσεις για την προσέγγιση στη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών** |
| --- |
| Αν έπρεπε να συμβουλεύσεις ένα μικρότερο παιδί πώς πρέπει να διαβάζει μαθηματικά, τι θα θεωρούσες πολύ σημαντικό να του πεις; |
| Μπορείς να θυμηθείς μια εργασία που σε ευχαρίστησε και μία που σε έκανε να βαρεθείς; |
| Φέρε ένα παράδειγμα άσκησης που σε δυσκόλεψε αλλά τελικά κατάφερες να ολοκληρώσεις. Τι έκανες για να τη λύσεις; |
| Τι είναι αυτό που σε κάνει να προσπαθείς στα μαθηματικά; Υπάρχουν φορές που τα μαθηματικά σου φαίνονται συναρπαστικά; Σου έχει συμβεί να «κολλήσεις» με ένα μαθηματικό πρόβλημα ή ερώτημα και να αφιερώσεις πολύ χρόνο για να το λύσεις; Αν ναι, γιατί πιστεύεις ότι έγινε αυτό; |

| |
|---|
| Αφιερώνεις πολύ χρόνο στη μελέτη των μαθηματικών; Ασχολείσαι με τα μαθηματικά και πέραν των υποχρεώσεων του σχολείου; |
| Όταν μελετάς μαθηματικά σκέφτεσαι πώς μπορεί η νέα γνώση να συνδέεται με προηγούμενη γνώση σου από τα μαθηματικά ή από κάποιο άλλο μάθημα; Μπορείς να μου πεις ένα παράδειγμα; |
| Διαβάζεις μαθηματικά με τον ίδιο τρόπο που διαβάζεις και τα άλλα μαθήματα; Υπάρχουν ομοιότητες και διαφορές; Ένα παιδί μου είπε ότι τα μαθηματικά είναι πιο πρακτικά από άλλα μαθήματα. Δε χρειάζεται να ασχολείσαι τόσο με τη θεωρία, αρκεί να ξέρεις τι πρέπει να χρησιμοποιήσεις για να λύνεις ασκήσεις. Συμφωνείς; |
| Γιατί πιστεύεις ότι τα μαθηματικά προκαλούν μεγαλύτερη δυσκολία στους μαθητές απ' ότι τα άλλα μαθήματα; Εσύ τα προτιμάς σε σχέση με τα υπόλοιπα; |
| Παρατηρείς μια φίλη που μελετά μαθηματικά χωρίς να λύνει ασκήσεις. Τη βλέπεις να αφιερώνει πολύ χρόνο διαβάζοντας τη θεωρία, να φτιάχνει διαγράμματα, να γυρνά πίσω σε προηγούμενες ενότητες, να κρατά σημειώσεις. Μοιάζει με τον τρόπο που μελετάς εσύ μαθηματικά; Έχεις κάτι να τη συμβουλεύσεις; |
| Με μια γρήγορη ανάγνωση της εκφώνησης ενός μαθηματικού προβλήματος διαπιστώνεις ότι δεν έχεις ξανασυναντήσει κάτι παρόμοιο. Τι κάνεις στη συνέχεια; Τα παρατάς; Αν όχι, πώς διαχειρίζεσαι την εκφώνηση; |
| Σου έχει τύχει ποτέ να προβληματιστείς για κάτι που έχει αναφέρει ο δάσκαλος/καθηγητής στα μαθηματικά και εσύ δεν κατάλαβες ή είχες αντίθετη γνώμη; Τι έκανες; |
| Πόσο επηρεάζει η βαθμολογία του δασκάλου την προσπάθειά σου; Έχεις ενδιαφερθεί ποτέ να μάθεις πράγματα στα οποία δε θα βαθμολογηθείς; |
| Σου έχει συμβεί να έχεις αφιερώσει πολύ χρόνο για να προετοιμαστείς για ένα διαγώνισμα μαθηματικών και να μην τα πας καλά; Γιατί πιστεύεις ότι συνέβη αυτό; Τι θα άλλαζες; |
| Σε ένα διαγώνισμα μπαίνει μια άσκηση που δε μοιάζει με καμία από αυτές που έχεις δει στο βιβλίο ή έχετε λύσει στην τάξη. Τι από τα παρακάτω σε εκφράζει καλύτερα;<br>- Απογοήτευση: Την πάτησα, δεν υπάρχει περίπτωση να τη λύσω.<br>- Θυμός: Δεν είναι σωστό να μας ζητούνται ασκήσεις που δεν έχουμε λύσει.<br>- Θα την αφήσω τελευταία και θα προσπαθήσω να την αντιμετωπίσω με ό,τι γνωρίζω. |
| Γνωρίζεις κάποιο παιδί που θεωρείς ότι είναι πολύ καλό στα μαθηματικά; Γιατί το θεωρείς πολύ καλό στα μαθηματικά; Σε σχέση με αυτό, εσύ είσαι ισάξια; Καλύτερος/η; Γιατί; Θα μπορούσες να γίνεις το ίδιο καλός/ή στα μαθηματικά; Πώς; |
| Συνάντησες τα κλάσματα πρώτη φορά στην τρίτη Δημοτικού. Σου φάνηκαν εύκολα, δύσκολα; Άλλαξε κάτι τα επόμενα χρόνια; Γιατί; |
| Η ύλη για τα κλάσματα στο σχολείο σου φαίνεται ενδιαφέρουσα/ χρήσιμη; Τι θα άλλαζες στη διδασκαλία για να γίνει πιο ενδιαφέρουσα/ χρήσιμη; |
| Ένα μικρότερο παιδί ζητά τη βοήθειά σου γιατί δεν καταλαβαίνει τη σύγκριση κλασμάτων. Τι θα έκανες για να το βοηθήσεις; |

| |
|---|
| Ποια είναι η μεγαλύτερη δυσκολία που συνάντησες με τα κλάσματα; Τι έκανες για να την ξεπεράσεις; Ένα παιδί της ηλικίας σου μου είπε ότι ότι τα κλάσματα δεν είναι δύσκολα, απλώς πρέπει να θυμάσαι τους κανόνες. Εσύ θυμάσαι τους κανόνες σύγκρισης απ' έξω; Πώς τους θυμάσαι; Τους χρησιμοποιείς πάντα; |
| Υπάρχει κάτι για τα κλάσματα που δεν έχεις καταλάβει; Υπάρχει κάτι που ξέρεις ότι δεν το είχες καταλάβει στην αρχή, αλλά τώρα το έχεις καταλάβει καλά; Πώς είσαι σίγουρος/η ότι το κατάλαβες καλά; |

**Πίνακας 2: Ερωτήσεις για την προσέγγιση στη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών**