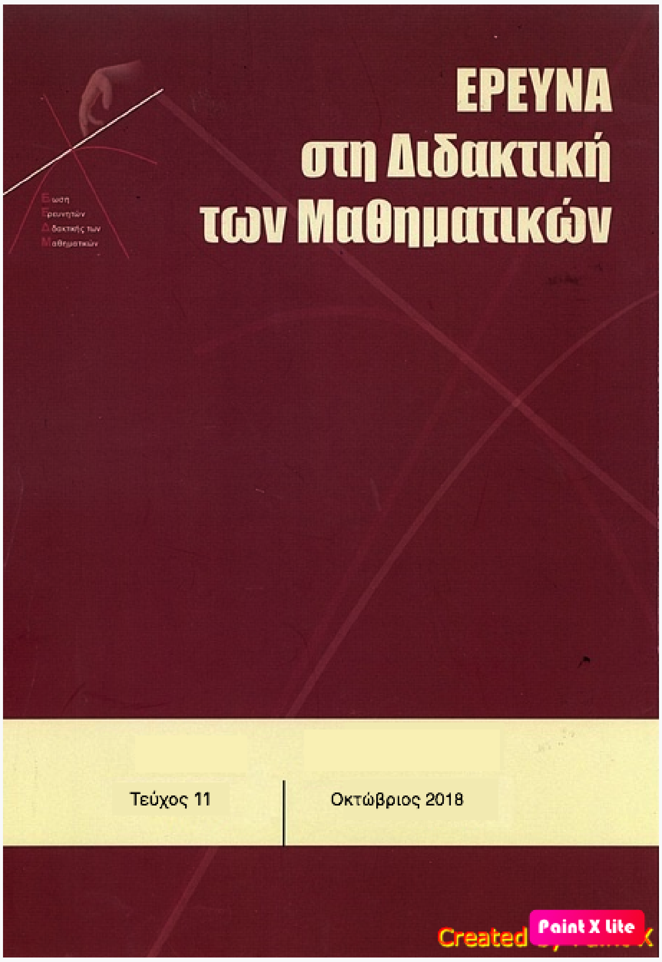
Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 11 (2018)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: ΠΩΣ ΤΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στέλλα Δημητρακοπούλου (Styliani Dimitrakopoulou), Κωνσταντίνος Χρήστου (Konstantinos Christou)

doi: [10.12681/enedim.18938](https://doi.org/10.12681/enedim.18938)

Βιβλιογραφική αναφορά:

Δημητρακοπούλου (Styliani Dimitrakopoulou) Σ., & Χρήστου (Konstantinos Christou) Κ. (2018). ΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: ΠΩΣ ΤΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (11), 31–52. https://doi.org/10.12681/enedim.18938 http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/index

ΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: ΠΩΣ ΤΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στέλλα Α. Δημητρακοπούλου[1] και Κωνσταντίνος Π. Χρήστου[2]
Β/θμια Εκπαίδευση[1], Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας[2]
stelladimitrakopoulou1@gmail.com[1], kpchristou@gmail.com[2]

Περίληψη: Η παρούσα ερευνητική εργασία εστιάζει στην έννοια της μεταβλητής στα σχολικά μαθηματικά και αποτελείται από δυο μελέτες. Στη μελέτη Α΄ διερευνάται με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές του Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών στις αλγεβρικές παραστάσεις και τι τιμές θεωρούν ότι αυτές μπορούν να πάρουν. Τα αποτελέσματα των ατομικών συνεντεύξεων έδειξαν ότι οι μαθητές αναγνώριζαν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούσαν περισσότερους του ενός αριθμούς, αλλά ότι οι αριθμοί αυτοί ήταν κατά προτεραιότητα φυσικοί αριθμοί. Στη μελέτη Β΄ εξετάζεται με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου και τι αριθμητικές τιμές τους αποδίδονται. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στην πλειοψηφία τους τα γράμματα εμφανίζονταν ως σύμβολα που αναπαριστούσαν περισσότερους του ενός αριθμούς και ότι οι τιμές που τους αποδίδονταν ήταν μη-φυσικοί και φυσικοί αριθμοί σε ίδιο περίπου ποσοστό. Τα αποτελέσματα και των δυο μελετών συζητιούνται θεωρητικά και προτείνονται παιδαγωγικές εφαρμογές.

Λέξεις κλειδιά: μεταβλητές, προκατάληψη του φυσικού αριθμού, σχολικά βιβλία, άλγεβρα

Abstract: This paper reports results from two empirical studies. The first study focuses on how students interpret literal symbols that stand for variables in school mathematics and more specifically students' tendency to think that variables stand mostly for natural numbers. The results showed that students tended to interpret literal symbols as generalized numbers, that is more than one specific number, but these numbers are natural numbers in priority. The second study examined how middle school textbooks of mathematics in the Greek public junior high school present the literal symbols as variables and whether the numerical values assigned to them are mostly natural numbers. The use of variables as generalized number dominated the uses of variables and natural and non-natural numbers appeared with the same frequency as values of the variables. The results support the findings from other related studies in the literature. Educational implications are discussed.

Keywords: variables, natural number bias, textbooks, algebra

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία εστιάζει στη μελέτη της χρήσης των γραμμάτων ως μαθηματικών συμβόλων και πιο συγκεκριμένα στη χρήση τους ως μεταβλητές στην άλγεβρα. Οι πολλές και διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις των μεταβλητών δυσχεραίνουν την κατανόησή τους από τους μαθητές και τους δημιουργούν δυσκολίες που ευθύνονται για χαμηλές επιδόσεις και πολλά από τα λάθη τους (Knuth et al, 2005). Ιδιαίτερα, οι μαθητές συναντούν εμπόδια στο να κατανοήσουν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, δυσκολεύονται να δεχθούν αρχικά ότι οι μεταβλητές είναι σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς, αλλά και όταν το επιτύχουν αυτό, θεωρούν ότι αναπαριστούν κατά προτεραιότητα φυσικούς αριθμούς (Christou, 2017; Dimitrakopoulou & Christou, 2014). Η τάση αυτή των μαθητών, να θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών και όχι οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού, θα μπορούσε να οφείλεται στο φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού (*natural number bias phenomenon)*. Με τον όρο *προκατάληψη του φυσικού αριθμού,* χαρακτηρίζεται η τάση των μαθητών να εφαρμόζουν την προϋπάρχουσα γνώση και εμπειρία τους με τους φυσικούς αριθμούς σε περιπτώσεις όπου χειρίζονται κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς (Ni & Zhou, 2005).

Τα σχολικά εγχειρίδια κατέχουν έναν καθοριστικό ρόλο στην εκπαιδευτική και μαθησιακή διαδικασία κι επηρεάζουν άμεσα την παρεχόμενη γνώση (Dogbey & Kersaint, 2012). Παρόλα αυτά, ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζουν τις μεταβλητές έχει μόνο σε μικρό βαθμό εξετασθεί από τους ερευνητές. Επιπλέον, το ποιες τιμές αποδίδονται στις μεταβλητές μέσα στα σχολικά βιβλία, για παράδειγμα αν οι μεταβλητές αντικαθίστανται από *φυσικούς* ή *μη-φυσικούς* αριθμούς, ως ερευνητικό αντικείμενο απουσιάζει εντελώς από τη διεθνή βιβλιογραφία.

Η παρούσα έρευνα, στη μελέτη Α΄, θέλησε να εξετάσει τους τρόπους με τους οποίους ερμηνεύουν οι μαθητές τις μεταβλητές και αν οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να τις αντικαθιστούν κυρίως με *φυσικούς* αριθμούς. Στη μελέτη Β΄ εξετάσθηκαν οι τρόποι με τους οποίους εμφανίζονται οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία και αν οι τιμές που τους αποδίδονται είναι τιμές *φυσικών* ή *μη-φυσικών* αριθμών. Τα αποτελέσματα και των δυο μελετών συζητούνται συνολικά και προτείνονται ορισμένες παιδαγωγικές εφαρμογές.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η έννοια της μεταβλητής

Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής είναι μια δύσκολη διαδικασία κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα (Küchemann, 1978, 1981; McNeil & Weinberg, 2010). Οι πολλές και διαφορετικές αναπαραστάσεις των μεταβλητών, όπως για παράδειγμα η μεταβλητή ως συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός, ως σταθερά ή ως παράμετρος, δυσχεραίνουν την κατανόησή τους από τους μαθητές και τους δημιουργούν δυσκολίες που ευθύνονται για τις χαμηλές επιδσεις τους και πολλά από τα λάθη τους στα μαθηματικά (Knuth et al., 2005). Σύμφωνα με τον Küchemann, η έννοια της μεταβλητής ως ενός οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού, δηλαδή ως *γενικευμένου αριθμού*, συνιστά ένα ανώτερο επίπεδο κατανόησης κατά το οποίο οι μαθητές κατανοούν, ότι η μεταβλητή μπορεί να λάβει πολλές και διαφορετικές αριθμητικές τιμές. Το επίπεδο αυτό, το κατακτούν μόνον όσοι είναι ήδη ικανοί στο χειρισμό του τυπικού διαδικαστικού επιπέδου, το οποίο σύμφωνα με τον Piaget κατακτάται περίπου στην ηλικία των δώδεκα ετών. Από την ηλικία αυτή και μετά και μέχρι το τέλος της εφηβείας τους οι μαθητές εισέρχονται στο στάδιο της γενίκευσης και της αφηρημένης σκέψης και άρα μπορούν να αρχίζουν να συλλαμβάνουν την έννοια της μεταβλητής ως αυτής του γενικευμένου αριθμού (Farmaki, Klaoudatos & Verikios, 2015).

Πρόσφατες έρευνες όμως έχουν δείξει ότι οι μαθητές μπορούν να χειρισθούν αυτές τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες αρκετά νωρίτερα απ' ότι προέβλεπε το Πιαζετιανό μοντέλο (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2001; Schmittau, 2005). Οι Asquith, Stephens, Knuth και Alibali (2007) έδωσαν μέσω ερωτηματολογίων σε μαθητές ΣΤ΄ Δημοτικού, Α΄ και Β΄ Γυμνασίου την αλγεβρική παράσταση 2n+3, τους ρώτησαν τι αναπαριστούσε το γράμμα *n* κι εκείνοι στην πλειοψηφία τους απάντησαν ότι το γράμμα αναπαριστούσε έναν οποιοδήποτε αριθμό. Στη συνέχεια ζήτησαν από τους μαθητές να συγκρίνουν τις αλγεβρικές παραστάσεις *3n* και *n+6* και οι μαθητές απάντησαν ότι, αν μια παράσταση ήταν μεγαλύτερη, εξαρτιόταν από την τιμή της μεταβλητής, δείχνοντας έτσι ότι κατανοούσαν τις μεταβλητές ως *γενικευμένους αριθμούς.*

Προκύπτει όμως το ερώτημα, αν οι μαθητές από τη στιγμή που έχουν κατανοήσει ότι οι μεταβλητές είναι σύμβολα που μπορούν να αναπαραστήσουν ένα εύρος αριθμητικών τιμών, αποδίδουν σ' αυτές τιμές *μη-φυσικών* αριθμών ή τους αποδίδουν κυρίως τιμές *φυσικών* αριθμών. Στο ερώτημα αυτό είχε αναφερθεί η Booth (1984) σε έρευνά της ειδικά σχεδιασμένη για την ενδυνάμωση της κατανόησης των μεταβλητών ως *γενικευμένων αριθμών* από τους μαθητές, όπου διαπίστωσε συγκεκριμένες δυσκολίες και παρατήρησε ότι αρκετοί μαθητές συνδέουν άμεσα τα γράμματα-μεταβλητές με τους *φυσικούς* αριθμούς καθώς τα αντιστοιχούν διατακτικά με τα γράμματα της αλφαβήτου. Σχετικά πρόσφατα όμως, ο Christou και οι συνεργάτες του (2005, 2007, 2012) σε μια σειρά μελετών τους εξέτασαν το ερώτημα αυτό και διαπίστωσαν ότι υπάρχει μια ισχυρή τάση των μαθητών να αποδίδουν στις μεταβλητές τιμές κυρίως *φυσικών* αριθμών.

Στις έρευνές τους, μαθητές ακόμα και της Α΄ Λυκείου, μέσα από τις απαντήσεις τους σε συνεντεύξεις και ερωτηματολόγια ανοικτού και κλειστού τύπου, εμφάνιζαν έντονη την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα στις αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούσαν κατά προτεραιότητα φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, αλγεβρικές παραστάσεις όπως το *4γ* θεωρούσαν ότι αναπαριστούσαν φυσικούς αριθμούς πολλαπλάσιους του 4, το *κ+3* φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 3 και το *–β* αρνητικούς ακέραιους αριθμούς. Αν και αυτές οι απαντήσεις είναι σωστές δεν παύει να είναι ενδεικτικές της τάσης των μαθητών να θεωρούν τα γράμματα στην άλγεβρα ως σύμβολα μόνο φυσικών αριθμών. Όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν σε ανοιχτού τύπου ερωτηματολόγιο για τιμές που *δεν* μπορούν να λάβουν οι ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις στην πλειοψηφία τους απαντούσαν αντικαθιστώντας τα γράμματα με αρνητικούς ακεραίους αριθμούς (π.χ. ότι το –β δεν μπορεί να λάβει τις τιμές -1, -2 και ότι το κ+3 δεν μπορεί να λάβει την τιμή -2+3, κοκ). Σε αντίστοιχα ερωτηματολόγια κλειστού τύπου, όπου δίνονταν στους μαθητές εναλλακτικές επιλογές αριθμών που περιείχαν φυσικούς αριθμούς, κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς τόσο θετικούς όσο και αρνητικούς και τους ζητούνταν να υποδείξουν ποιοι από αυτούς δεν μπορούν να αποδοθούν στις μεταβλητές των παραπάνω αλγεβρικών παραστάσεων, μόνο το 1/3 από τους μαθητές επέλεγε την επίσης δοσμένη σωστή απάντηση που ήταν «οποιοσδήποτε από τους παραπάνω αριθμούς θα μπορούσε να αποδοθεί στη συγκεκριμένη αλγεβρική παράσταση». Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύθηκαν και από τα αποτελέσματα αντίστοιχης μελέτης με Φλαμανδούς μαθητές της $9^{ης}$ βαθμίδας (Van Dooren, Christou & Vamvakoussi, 2010).

Όταν δόθηκε στους μαθητές της Α΄ Λυκείου να συγκρίνουν αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν γράμματα, όπως για παράδειγμα το 5δ και το $\frac{4}{\delta}$, τα αποτελέσματα έδειξαν πως στην πλειοψηφία τους οι μαθητές απαντούσαν ότι το 5δ είναι πάντα μεγαλύτερο γιατί είναι πολλαπλασιασμός και ο πολλαπλασιασμός αυξάνει πάντα έναν αριθμό, φαινόμενο που ισχύει φυσικά μόνο όταν το δ λαμβάνει τιμές φυσικών αριθμών. Μάλιστα υποστήριζαν την απάντησή τους αυτή αποδίδοντας στο γράμμα μια σειρά από φυσικούς αριθμούς που επαλήθευαν τον ισχυρισμό τους (Christou & Vosniadou, 2012).

Σε πλέον πρόσφατη έρευνά του, ο Christou (2015) έδωσε σε 111 μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης Δημοτικού ένα τεστ με πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς που δίνονταν και αριθμούς που έλειπαν, για παράδειγμα δίνονταν η ισότητα 9:_=4 και τους ζητούσαν να απαντήσουν αν οι ισότητες αυτές θα μπορούσαν να είναι αληθείς. Οι μαθητές απάντησαν στατιστικώς σημαντικά καλύτερα στα ερωτήματα που οι αριθμοί που έλειπαν ήταν *φυσικοί* από εκείνα που ήταν *μη-φυσικοί*. Οι ερευνητές ερμήνευσαν την τάση αυτή των μαθητών να θεωρούν ότι οι μεταβλητές και αντίστοιχα τα σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς που λείπουν μπορούν να λάβουν τιμές μόνον φυσικών αριθμών και όχι οποιωνδήποτε πραγματικών αριθμών όπως έχουν διδαχθεί, ως αποτέλεσμα μια γενικότερης *προκατάληψης του φυσικού αριθμού*. Η *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* (whole number bias) (Ni & Zhou, 2005) είναι ένα φαινόμενο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους *φυσικούς* αριθμούς στην κατανόηση των *μη-φυσικών* αριθμών όπως οι ρητοί και οι αρνητικοί αριθμοί.

Οι μαθητές από πολύ νωρίς κατασκευάζουν μια κατανόηση του αριθμού στη βάση της εμπειρίας τους με τους φυσικούς αριθμούς και τις αρχές της απαρίθμησης (Gelman, 2000). Η κατανόηση αυτή των μαθητών για τους αριθμούς ξεκινά από τα προσχολικά τους χρόνια με την απαγγελία της σειράς των αριθμών και συνεχίζεται και στα πρώτα σχολικά τους χρόνια όπου μαθαίνουν και εμβαθύνουν στις πράξεις και τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Αυτή η αρχική κατανόηση της έννοιας του αριθμού, η οποία στρέφεται γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού, έχει θεωρηθεί ότι αποτελεί ένα αρχικό πλαίσιο κατανόησης για τον αριθμό, που επηρεάζει το τι θεωρούν οι μαθητές ότι κάνει ο αριθμός και το πως μοιάζει (Vamvakoussi & Vosniadou 2010). Έτσι, οι μαθητές τείνουν να θεωρούν ότι οι αριθμοί αναπαριστώνται με έναν συγκεκριμένο και μοναδικό τρόπο και ακολουθούν τους κανόνες της διάταξης και των πράξεων, με τον τρόπο που το κάνουν οι φυσικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, αρκετοί μαθητές πιστεύουν ότι κάθε αριθμός έχει συγκεκριμένο επόμενο και προηγούμενο αριθμό, δηλαδή ότι η διακριτότητα των αριθμών είναι και ιδιότητα των ρητών όπως ακριβώς και των φυσικών, θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα σε δύο ψευτοδιαδοχικούς αριθμούς π.χ. στους 0,3 και 0,4 (Vambakoussi & Vosniadou, 2010). Επομένως, η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τους αριθμούς και ο τρόπος με τον οποίο αυτή είναι οργανωμένη θα μπορούσε να ευθύνεται για την τάση τους να θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα μόνο φυσικών αριθμών. Μία πιθανή αιτία της ενίσχυσης του φαινομένου αυτού θα μπορούσε να είναι και ο τρόπος που αναπαρίστανται οι μεταβλητές μέσα στα σχολικά βιβλία, ο οποίος ίσως επηρεάζει και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χειρίζονται τα γράμματα-μεταβλητές.

Τα σχολικά βιβλία

Η σημασία της χρήσης των σχολικών βιβλίων στην εκπαιδευτική διαδικασία έχει τονισθεί ιδιαίτερα στη διεθνή βιβλιογραφία (Peacock & Cleghorn, 2004) καθώς κατέχουν ένα καθοριστικό ρόλο στην παρεχόμενη σχολική γνώση (Ματσαγγούρας, 2006; Dogbey & Kersaint, 2012). Στα προγράμματα σπουδών θεωρούνται ο συνδετικός κρίκος ανάμεσα στους στόχους που τίθενται και στα προσδοκώμενα αποτελέσματα (Valverde et al., 2002) αποτελώντας συγχρόνως την κύρια πηγή άντλησης του διδακτικού υλικού για κάθε εκπαιδευτικό και μαθητή (Eisner, 1987; McKnight et al., 1987; Johansson, 2005). Όσον αφορά το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, τα σχολικά βιβλία είναι τα μοναδικά εγκεκριμένα από το αρμόδιο Υπουργείο προς χρήση, σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ, 2003) και γι' αυτό κατέχουν έναν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Η μελέτη των σχολικών βιβλίων αποτελεί ένα δύσκολο εγχείρημα και η εγκυρότητά της μπορεί να διασφαλισθεί μόνον με τον ακριβή καθορισμό των κριτηρίων και των εργαλείων που θα χρησιμοποιηθούν. Ο Falk Pingel, συγγραφέας του μεθοδολογικού εγχειριδίου για την έρευνα των σχολικών βιβλίων, που εξέδωσε η UNESCO το 1999 και επανεκδόθηκε το 2010, έθεσε τέσσερις βασικούς άξονες απαραίτητους για το σχεδιασμό μιας έρευνας σχολικού βιβλίου: α)τον καθορισμό του κατάλληλου δείγματος, β) την επιλογή μεθόδων και τεχνικών τόσο για ποσοτική όσο και για ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων, γ) τις γενικές οδηγίες για το πλαίσιο, τα κριτήρια που θα τεθούν και τα ερωτήματα που θα υποβληθούν πλήρως συγχρονισμένα με τους σκοπούς και τους στόχους της μελέτης των συγκεκριμένων βιβλίων και δ) ορισμένες επιπρόσθετες οδηγίες που λαμβάνουν υπόψη ευρύτερους παράγοντες, όπως οικονομικούς ή κοινωνικούς. Παρόλη τη μεγάλη σημασία τους στη διδακτική πράξη, τα σχολικά βιβλία μέχρι πρόσφατα είχαν εξετασθεί σε μικρό βαθμό από τους ερευνητές όσον αφορά την έννοια της μεταβλητής.

Στην παρούσα έρευνα, έχοντας ληφθεί υπόψη όλες οι παραπάνω έρευνες, εξετάστηκαν συγχρόνως ο τρόπος κατανόησης των μεταβλητών από τους μαθητές και ο τρόπος που εμφανίζονται οι μεταβλητές μέσα στα σχολικά βιβλία, διερευνώντας πιθανές σχέσεις ανάμεσα στα δύο. Παράλληλα μελετήθηκε πόσο ισχυρή είναι η τάση που εμφανίζουν οι μαθητές να αντικαθιστούν τις μεταβλητές κυρίως με *φυσικούς* αριθμούς, όπως επίσης πόσο συχνά οι μεταβλητές που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία, αναπαριστούν *φυσικούς* ή *μη-*

φυσικούς αριθμούς. Επίσης εξετάστηκε αν οι μαθητές παρουσιάζουν κάποια βελτίωση από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες τάξεις, όσον αφορά τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών αλλά και όσον αφορά τους αριθμούς που επιλέγουν για να τις αντικαταστήσουν, όταν αυτό χρειαστεί. Για τη διερεύνηση αυτών των ερωτημάτων σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν δύο μελέτες, η μελέτη Α΄ και η μελέτη Β΄. Στη μελέτη Α΄ μέσα από προσωπικές συνεντεύξεις εξετάστηκαν οι τρόποι με τους οποίους κατανοούν οι μαθητές τις μεταβλητές και στη μελέτη Β΄ εξετάστηκαν οι τρόποι με τους οποίους εμφανίζονται οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία.

ΜΕΛΕΤΗ Α΄

Στόχοι και υποθέσεις

Στην μελέτη Α΄ διερευνήθηκε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές των τριών τάξεων του Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών στις αλγεβρικές παραστάσεις. Αναμένονταν, σύμφωνα με την έρευνα της Asquith και των συνεργατών της (2007), ότι οι μαθητές θα εμφάνιζαν την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα-μεταβλητές αναπαριστούν έναν οποιονδήποτε αριθμό, δηλαδή ότι οι μαθητές κατανοούν τις μεταβλητές ως *γενικευμένους* αριθμούς. Δεύτερος στόχος της μελέτης Α΄ ήταν να εξετασθεί αν οι μαθητές εμφάνιζαν την τάση να αντικαθιστούν τις μεταβλητές με *φυσικούς* αριθμούς. Αναμένονταν, σύμφωνα με τις έρευνες του Christou και των συνεργατών του (2005, 2007, 2012) ότι οι μαθητές θα εμφάνιζαν ισχυρή την τάση να αντικαθιστούν τις μεταβλητές κυρίως με *φυσικούς* αριθμούς. Επίσης εξετάστηκε αν εμφανίζονταν διαφορές ανάμεσα στις τάξεις, οι οποίες θα έδειχναν αν υπήρχε βελτίωση ή όχι, από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες ηλικίες, στις πεποιθήσεις αυτές των μαθητών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ Α΄

Πλαίσιο και Συμμετέχοντες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2012-2013 και οι μαθητές τη σχολική αυτή χρονιά διδάσκονταν τα ίδια σχολικά βιβλία που διδάσκονται μέχρι και σήμερα στα Ελληνικά σχολεία. Οι συμμετέχοντες ήταν 86 μαθητές ενός δημόσιου σχολείου Γυμνασίου-Λυκείου που βρίσκεται στην πόλη του Βόλου από τους οποίους οι 44 δήλωσαν αγόρια και οι 42 κορίτσια. Ανά τάξη ήταν 22 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, 20 της Β΄ Γυμνασίου, 23 της Γ΄ Γυμνασίου και 21 της Α΄ Λυκείου. Επιλέχθηκαν να εξετασθούν οι μαθητές αυτών των σχολικών βαθμίδων γιατί έχουν διδαχθεί συστηματικά την έννοια της μεταβλητής από την Α΄ Γυμνασίου και οι μαθητές της Α΄ Λυκείου έχουν ολοκληρώσει τον πρώτο κύκλο της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσής τους, διδασκόμενοι την έννοια της μεταβλητής αποκλειστικά μέσα από τα προαναφερθέντα σχολικά βιβλία.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Δόθηκαν στους μαθητές τρεις αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν από μία μεταβλητή. Οι παραστάσεις αυτές είχαν χρησιμοποιηθεί στην έρευνα των Asquith, Stephens, Knuth και Alibali (2007) και αφορούσαν παρόμοιες ηλικιακά ομάδες, έτσι ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων της δικής τους έρευνας με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας. Μέσα από την διαδικασία των ατομικών συνεντεύξεων τέθηκαν στους μαθητές τρία ερωτήματα. Αρχικά οι μαθητές ρωτήθηκαν «τι παριστάνει το β στην παράσταση 2β+3», στην συνέχεια ρωτήθηκαν «αν μία από τις παραστάσεις 3ν και ν+6 είναι μεγαλύτερη και γιατί» και τέλος «με ποιους αριθμούς μπορούν να αντικαταστήσουν το ν στην αλγεβρική παράσταση 3ν». Τα ανοιχτά αυτά ερωτήματα κρίθηκαν να είναι κατάλληλα για να εξεταστούν τα ερωτήματα της μελέτης Α΄, αναφορικά με τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων όταν αυτά εμφανίζονται μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις. Τα συγκεκριμένα γράμματα είναι ουδέτερα και πολύ συνηθισμένα στη χρήση τους ως μεταβλητές. Το γράμμα *ν* δεν τους δημιουργεί την πεποίθηση ότι είναι φυσικός αριθμός καθώς οι μαθητές διδάσκονται για πρώτη φορά τα βασικά στοιχεία της θεωρίας αριθμών στην Α΄ Λυκείου, άρα δεν γνωρίζουν, πλην εξαιρέσεων, ότι το ν συμβολίζει φυσικούς αριθμούς.

Οι μαθητές συμμετείχαν όλοι σε ατομικές συνεντεύξεις, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα μικρής δεκάλεπτης περίπου συζήτησης με κάθε έναν ατομικά. Στην περίπτωση που δεν απαντούσαν σωστά, για κάθε ερώτημα, τους δίνονταν ορισμένες υποβοηθήσεις με σκοπό να ελεγχθεί αν επέμεναν στην αρχική τους λανθασμένη απάντηση ή είχαν τη διάθεση να μετακινηθούν και να την αλλάξουν. Με τον τρόπο αυτό θα γινόταν πιο ευκρινές αν οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών οφείλονταν σε έλλειψη γνώσης ή είχαν τις ρίζες τους στην *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* που τους ωθεί να απαντούν με φυσικούς αριθμούς ενώ γνωρίζουν και άλλους αριθμούς. Οι υποβοηθήσεις αυτές ήταν για το πρώτο ερώτημα: «υπάρχει κάτι άλλο που θα μπορούσε να αντικαταστήσει το β;», για το δεύτερο ερώτημα: «υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η αρχική σου απάντηση; αν αντικαταστήσεις τη μεταβλητή με κάποιον άλλον αριθμό;» και για το τρίτο ερώτημα: «άλλα είδη αριθμών γνωρίζεις που να μπορεί να πάρει ο ν;». Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης καταγράφηκαν οι αρχικές και οι μετά τις υποβοηθήσεις τελικές απαντήσεις των μαθητών.

Στις απαντήσεις των μαθητών και στα τρία ερωτήματα, αφού πρώτα κατηγοριοποιήθηκαν, έγιναν οι ανάλογες κωδικοποιήσεις για κάθε ερώτημα ξεχωριστά οι οποίες στη συνέχεια καταχωρήθηκαν στο πρόγραμμα SPSS. Κατόπιν έγιναν οι κατάλληλες στατιστικές αναλύσεις Chi-square ανά ζεύγη τάξεων, για να ελεγχθεί αν υπάρχει βελτίωση στις απαντήσεις των μαθητών από τη μια τάξη στην επόμενη. Η διαδικασία αυτή για κάθε ερώτημα περιγράφεται αναλυτικά στα αποτελέσματα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ Α΄

Οι απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα «τι παριστάνει το β στην παράσταση 2β+3» κατατάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες που βασίστηκαν στις κατηγοριοποιήσεις του Küchemann (1978, 1981) και της Asquith και των συνεργατών της (2007) και ήταν: α) *ετικέτα-επιγραφή*, αν η απάντηση του μαθητή έδειχνε μια κατανόηση του γράμματος ως συμβόλου που αναπαριστούσε ένα αντικείμενο, όπως ότι το β συμβόλιζε βιβλία ή ότι αναπαριστούσε ένα γεωμετρικό ή διανυσματικό μέγεθος, για παράδειγμα αν ο μαθητής απαντούσε ότι το β συμβόλιζε το βάρος, ή μια δύναμη, ή μια πλευρά ενός γεωμετρικού σχήματος, β) *συγκεκριμένος αριθμός,* αν η απάντηση του μαθητή έδειχνε κατανόηση του γράμματος ως συμβόλου που θα μπορούσε να λάβει μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή, όπως για παράδειγμα τον αριθμό 2 και γ) *γενικευμένος αριθμός*, αν η απάντηση του μαθητή έδειχνε μια κατανόηση του γράμματος ως συμβόλου που θα μπορούσε να αντικατασταθεί από οποιονδήποτε αριθμό. Οι κατηγορίες των απαντήσεων των μαθητών κωδικοποιήθηκαν με κωδικοποίηση 1, 2 και 3 για κάθε κατηγορία και οι τάξεις από την Α΄ Γυμνασίου μέχρι και την Α΄ Λυκείου κωδικοποιήθηκαν με κωδικοποίηση 1 έως και 4.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά εμφάνισης των αρχικών και των τελικών, μετά τις υποβοηθήσεις, απαντήσεων των μαθητών ανά τάξη. Για όλες τις τάξεις, η πιο ενισχυμένη κατηγορία στις αρχικές και στις τελικές απαντήσεις των μαθητών, είναι αυτή του *γενικευμένου αριθμού* με το μεγαλύτερο ποσοστό αρχικών (74%) και τελικών (82%) απαντήσεων να εμφανίζεται στη Γ΄ Γυμνασίου, ενώ έπονται οι κατηγορίες *ετικέτα-επιγραφή* και *συγκεκριμένος αριθμός*. Μετά τις υποβοηθήσεις η κατηγορία *γενικευμένος αριθμός*

παρουσιάζεται περισσότερο ενισχυμένη δείχνοντας ότι οι μαθητές μπορούν να αλλάξουν τις απαντήσεις τους όταν τους δοθούν οι κατάλληλες υποβοηθήσεις .

Πίνακας 1: Συχνότητες και ποσοστά αρχικών/τελικών απαντήσεων των μαθητών για την αλγεβρική παράσταση 2β+3 ανά τάξη

Κατηγορία\Τάξη	**Α΄ Γυμνασίου**		**Β΄ Γυμνασίου**		**Γ΄ Γυμνασίου**		**Α΄ Λυκείου**	
	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές
Ετικέτα-Επιγραφή	-----	-----	4(20%)	3(15%)	3(13%)	2 (9%)	6(28%)	5(24%)
Συγκεκριμένος αριθμός	5(23%)	3(14%)	-----	-----	3(13%)	2 (9%)	1(5%)	1(5%)
Γενικευμένος αριθμός	17(77%)	19(86%)	16(80%)	17(85%)	17(74%)	19(82%)	14(67%)	15(71%)
Σύνολο/τάξη	22 (100%)		20 (100%)		23 (100%)		21 (100%)	

Για να εξετασθεί εάν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις συχνότητες εμφάνισης των κατηγοριών των αρχικών απαντήσεων των μαθητών ανά τάξη πραγματοποιήθηκε έλεγχος Chi-Square ανά ζευγάρι τάξεων. Ο έλεγχος αυτός έδειξε στατιστικά σημαντική διαφορά στις συχνότητες εμφάνισης των κατηγοριών των μεταβλητών της Α΄ Γυμνασίου με της Β΄ Γυμνασίου [$\chi^2(2)=8.96$, $p<.05$] και της Α΄ Γυμνασίου με της Α΄ Λυκείου [$\chi^2(2)=8.94$, $p<.05$]. Για τα υπόλοιπα ζεύγη τάξεων δεν υπήρξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Ο στατιστικός έλεγχος για τις τελικές απαντήσεις των μαθητών ανά ζεύγη τάξεων έδωσε παρόμοια αποτελέσματα. Στατιστικά σημαντικές διαφορές εμφανίστηκαν μεταξύ των τάξεων της Α΄ Γυμνασίου με της Β΄ Γυμνασίου [$\chi^2(2)=6.03$, $p=.05$] και μεταξύ της Α΄ Γυμνασίου με της Α΄ Λυκείου [$\chi^2(2)=6.45$, $p<.05$], ενώ για τα υπόλοιπα ζεύγη τάξεων δεν υπήρξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Οι διαφορές αυτές θα μπορούσε να οφείλονται στην απουσία της κατηγορίας *ετικέτα-επιγραφή* στις απαντήσεις των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου και στην απουσία της κατηγορίας *συγκεκριμένος αριθμός* στις απαντήσεις των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου. Επίσης θα μπορούσε να οφείλονται στο γεγονός ότι στις απαντήσεις των μαθητών της Α΄ Λυκείου παρουσιάσθηκε αυξημένη η κατηγορία *ετικέτα-επιγραφή*, καθώς υπήρξαν αρκετοί μαθητές που απάντησαν ότι το γράμμα μπορεί να παριστάνει μια δύναμη, όπως το βάρος ενός σώματος. Οι απαντήσεις τους αυτές ήταν πιθανά επηρεασμένες από τη χρήση της μεταβλητής στη Φυσική, την οποία οι μαθητές γνώριζαν από τα γυμνασιακά τους χρόνια. Η κατηγορία *γενικευμένος αριθμός,* που για όλες τις τάξεις κυμάνθηκε περίπου στα ίδια επίπεδα και ήταν σχετικά σταθερή, μάλλον δεν επηρέασε τις διαφορές αυτές και το αυξημένο ποσοστό της θα μπορούσε να θεωρηθεί αρκετά αισιόδοξο όσον αφορά την κατανόηση των γραμμάτων από τους μαθητές όταν αυτά εμφανίζονται μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις.

Στο δεύτερο ερώτημα που ήταν «αν μια από τις παραστάσεις 3ν και ν+6 είναι μεγαλύτερη και γιατί» ως σωστές ελήφθησαν οι απαντήσεις εκείνες που δήλωναν με οποιονδήποτε τρόπο ότι αυτό *«εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής».* Για την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών, οι απαντήσεις τους κωδικοποιήθηκαν με 1 και 2 για τις σωστές και τις λανθασμένες απαντήσεις και οι τάξεις από την Α΄ Γυμνασίου μέχρι και την Α΄ Λυκείου κωδικοποιήθηκαν με 1 έως και 4 αντίστοιχα.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αρχικών και των τελικών, μετά τις υποβοηθήσεις, απαντήσεων των μαθητών ανά τάξη. Συνολικά τα αποτελέσματα για όλες τις τάξεις έδειξαν ένα χαμηλό ποσοστό (17%) των μαθητών να δίνει αρχικά σωστή απάντηση ενώ οι περισσότεροι (83%) απάντησαν λανθασμένα. Μετά τις υποβοηθήσεις που δόθηκαν στους μαθητές, το 33% όσων αρχικά απάντησαν λανθασμένα, άλλαξαν την απάντηση τους και είπαν ότι η σύγκριση εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής. Διαμορφώθηκε έτσι το τελικό ποσοστό σωστών απαντήσεων για το σύνολο των μαθητών και για όλες τις τάξεις σε 50%, με τους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου να εμφανίζουν το μεγαλύτερο ποσοστό μεταβολής της απάντησής τους (40%). Το υπόλοιπο 50% του συνόλου των μαθητών παρά το γεγονός ότι του δόθηκαν οι κατάλληλες υποβοηθήσεις δεν μετέβαλε την απάντησή του, αλλά συνέχιζε να αντικαθιστά τη μεταβλητή με αριθμούς τέτοιους που να επιβεβαιώνουν αυτή τη λανθασμένη του απάντηση. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2 τα ποσοστά των σωστών αρχικών απαντήσεων των μαθητών κυμάνθηκαν για όλες τις τάξεις σε χαμηλά επίπεδα με το μικρότερο να εμφανίζεται στη Γ΄ Γυμνασίου (4%) και το υψηλότερο στην Α΄ Λυκείου (43%).

Πίνακας 2: Συχνότητες και ποσοστά αρχικών/τελικών απαντήσεων των μαθητών ανά τάξη στη σύγκριση των 3ν και 3ν+6

Κατηγορία\Τάξη	**Α΄ Γυμνασίου**		**Β΄ Γυμνασίου**		**Γ΄ Γυμνασίου**		**Α΄ Λυκείου**	
	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές

Λάθος απάντηση	19(86%)	15(68%)	18(90%)	10(50%)	22(96%)	14(61%)	12(57%)	4(19%)
Σωστή απάντηση	3(14%)	7(32%)	2(10%)	10(50%)	1(4%)	9(39%)	9(43%)	17(81%)
Σύνολο/τάξη	22(100%)		20(100%)		23(100%)		21(100%)	

Για να εξεταστεί αν υπάρχει διαφορά στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής από τους μαθητές από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες τάξεις εξετάστηκαν οι απαντήσεις των μαθητών ανά ζεύγη τάξεων. Από τον έλεγχο Chi-Square, με διόρθωση κατά Fisher, που πραγματοποιήθηκε διαπιστώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των αρχικών απαντήσεων των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου με αυτές των μαθητών της Α΄ Λυκείου [$\chi^2(1)=4.56$, $p<.05$], μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου με αυτές των μαθητών της Α΄ Λυκείου [$\chi^2(1)=5.63$, $p<.05$] και μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου με αυτές των μαθητών της Α΄ Λυκείου [$\chi^2(1)=9.27$, $p<.01$]. Μεταξύ των αρχικών απαντήσεων των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Γυμνασίου παρατηρήθηκε σχεδόν οριακή στατιστικά σημαντική διαφορά [$\chi^2(1)=0.53$, $p=0.47<.05$]. Για τις υπόλοιπες τάξεις δεν σημειώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Ελέγχθηκαν επίσης οι τελικές απαντήσεις των μαθητών με έναν έλεγχο Chi-Square με διόρθωση κατά Fisher και ανά ζεύγη τάξεων διαπιστώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τελικών απαντήσεων των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου [$\chi^2(1)=10.52$, $p<.01$], Β΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου [$\chi^2(1)=4.36$, $p<.05$] και Γ΄ Γυμνασίου με Α΄ Λυκείου [$\chi^2(1)=7.94$, $p<=.01$]. Μεταξύ των τελικών απαντήσεων των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Γυμνασίου παρατηρήθηκε σχεδόν οριακή στατιστικά σημαντική διαφορά [$\chi^2(1)=0.51$, $p=0.47<.05$]. Για τα υπόλοιπα ζεύγη τάξεων δεν σημειώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι από προηγούμενη σε επόμενη σχολική τάξη οι μαθητές δεν εμφανίζουν ιδιαίτερη βελτίωση, γεγονός που ίσως να οφείλεται και σε ιδιαιτερότητες του συγκεκριμένου δείγματος. Όταν συγκρίνουμε όμως μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα, όπως για παράδειγμα από τις γυμνασιακές τάξεις στην Α΄ Λυκείου, παρατηρείται στατιστικά σημαντική πρόοδος στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, δείχνοντας έτσι ότι το πέρασμα από το Γυμνάσιο στο Λύκειο να είναι καθοριστικό στην κατανόηση αυτή.

Με σκοπό να εξετασθούν περαιτέρω τα λάθη των μαθητών σε αυτή την ερώτηση, όσες αρχικά λανθασμένες απαντήσεις αιτιολογήθηκαν από τους μαθητές τοποθετήθηκαν σε τρεις κατηγορίες. Η αιτιολόγηση ότι ο πολλαπλασιασμός αυξάνει πάντα μια ποσότητα, δηλαδή ότι η 3ν είναι μεγαλύτερη της ν+6, ήταν επικρατέστερη με ποσοστό 53% επί του συνόλου των αρχικών λανθασμένων απαντήσεων. Ακολουθούσε με 41% η αιτιολόγηση ότι η ν+6 είναι μεγαλύτερη της 3ν γιατί 6>3 και τελευταία με ποσοστό 6% ήταν η αιτιολόγηση ότι η ν+6 είναι μεγαλύτερη της 3ν, γιατί η πρόσθεση αυξάνει πάντα μια ποσότητα.

Στο τρίτο ερώτημα «με ποιους αριθμούς θα μπορούσες να αντικαταστήσεις το ν στην παράσταση 3ν» οι απαντήσεις τοποθετήθηκαν σε δυο κατηγορίες: α) *φυσικοί αριθμοί* και β) *μη-φυσικοί αριθμοί*, στην οποία περιλαμβάνονταν οι αρνητικοί ακέραιοι, τα κλάσματα, οι δεκαδικοί και οι άρρητοι αριθμοί. Για την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών χρησιμοποιήθηκε κωδικοποίηση 1 και 2 για τις απαντήσεις που αφορούσαν τους *φυσικούς* και τους *μη-φυσικούς* αριθμούς αντίστοιχα και για τις τάξεις Α΄ Γυμνασίου μέχρι και την Α΄ Λυκείου κωδικοποίηση από 1 έως και 4. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των αρχικών και των τελικών, μετά τις υποβοηθήσεις που δόθηκαν, απαντήσεων των μαθητών ανά τάξη. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το χαμηλότερο ποσοστό αρχικών απαντήσεων με *μη-φυσικούς* αριθμούς εμφανίζεται στην Α΄ Γυμνασίου με 5%. Μετά την υποβοήθηση που δόθηκε και η οποία ήταν: «άλλα είδη αριθμών γνωρίζεις που να μπορεί να πάρει ο ν;», αρκετοί μαθητές μετέβαλαν την αρχική τους απάντηση και αντικατέστησαν το *ν* με *μη-φυσικούς* αριθμούς. Τα υψηλότερα ποσοστά τελικών απαντήσεων με *μη-φυσικούς* αριθμούς εμφανίζονται στη Γ΄ Γυμνασίου (83%) και στην Α΄ Λυκείου(81%). Στην Α΄ Γυμνασίου παρατηρείται ένα υψηλό ποσοστό μαθητών (64%) οι οποίοι, παρά τις υποβοηθήσεις που τους δόθηκαν, δεν μετέβαλαν την απάντησή τους και συνέχιζαν στις τελικές τους απαντήσεις να αποδίδουν στο γράμμα-μεταβλητή τιμές μόνο *φυσικών* αριθμών.

Πίνακας 3: Συχνότητες και ποσοστά αρχικών/τελικών απαντήσεων των μαθητών ανά τάξη στην αντικατάσταση του ν στην αλγεβρική παράσταση 3ν

Κατηγορία\Τάξη	**Α΄ Γυμνασίου**		**Β΄ Γυμνασίου**		**Γ΄ Γυμνασίου**		**Α΄ Λυκείου**	
	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές	Αρχικές	Τελικές
Φυσικοί αριθμοί	21(95%)	14(64%)	15(75%)	9(45%)	21(91%)	4(17%)	14(67%)	4(19%)
Μη-φυσικοί αριθμοί	1(5%)	8(36%)	5(25%)	11(55%)	2(9%)	19(83%)	7(33%)	17(81%)
Σύνολο/τάξη	22(100%)		20(100%)		23(100%)		21(100%)	

Για να εξεταστεί εάν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές αλλαγές στις απαντήσεις των μαθητών ανά τάξη πραγματοποιήθηκε ο στατιστικός έλεγχος Chi-Square, με διόρθωση κατά Fisher, ανά ζεύγη τάξεων. Για τις αρχικές απαντήσεις των μαθητών προέκυψαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου [$\chi^2(1)=5.88$, $p<.05$] και μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου [$\chi^2=4.10$, $p<.05$]. Για τις υπόλοιπες τάξεις δεν σημειώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Ο αντίστοιχος έλεγχος για τις τελικές απαντήσεις των μαθητών έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Γυμνασίου [$\chi^2(1)=10.02$, $p<.01$] και μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου [$\chi^2(1)=8.78$, $p<.01$]. Μεταξύ των τελικών απαντήσεων των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Γυμνασίου παρατηρήθηκε σχεδόν οριακή στατιστικά σημαντική διαφορά [$\chi^2(1)=3.87$, $p=0.049<.05$], ενώ για τις υπόλοιπες τάξεις δεν σημειώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Τα αποτελέσματα αυτά μας δείχνουν ότι δεν εμφανίζονται σημαντικές βελτιώσεις των μαθητών από τη μια τάξη στην επόμενη τάξη. Όταν συγκρίνονται όμως μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα, φαίνεται πως σημειώνεται σημαντική πρόοδος αναφορικά με τη χρήση και των *μη-φυσικών* αριθμών από τους μαθητές. Ειδικότερα κατά το πέρασμα από το Γυμνάσιο στο Λύκειο, στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου, παρατηρείται σημαντική διαφορά από την πλευρά των μαθητών στη χρήση των *μη-φυσικών* αριθμών, ως τιμών που μπορούν να αντικαταστήσουν τις μεταβλητές. Ένα υψηλό ποσοστό μαθητών όμως, κυρίως στις μικρότερες τάξεις των Α΄ και Β΄ Γυμνασίου, παρά τις υποβοηθήσεις που τους δίνονται, παραμένουν στις αρχικές τους απαντήσεις και συνεχίζουν να αποδίδουν στις μεταβλητές τιμές μόνο *φυσικών* αριθμών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ Α΄

Στη μελέτη Α΄ διερευνήθηκε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές τα γράμματα ως μεταβλητές. Δόθηκαν στους μαθητές τρεις αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν από μία μεταβλητή και μέσα από τη διαδικασία των ατομικών συνεντεύξεων τους τέθηκαν τρία ερωτήματα. Τα αποτελέσματα στο πρώτο ερώτημα έδειξαν ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές μπορούσαν να αποδώσουν περισσότερους από έναν αριθμούς στο γράμμα-μεταβλητή στην παράσταση 2β+3. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν συμβατό με τα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών (Asquith και συνεργάτες, 2007) και έδειχνε ότι οι μαθητές κατανοούν την έννοια της μεταβλητής με έναν πιο εκλεπτυσμένο μαθηματικά τρόπο από αυτόν της κατανόησής της ως *ετικέτα-επιγραφή* ή ως *συγκεκριμένο αριθμό*, όπως είχαν δείξει παλαιότερες μελέτες (Rosnick, 1981, Kieran & Chalouh 1993). Οι απαντήσεις των μαθητών στο δεύτερο ερώτημα, για το αν μια από τις δυο αλγεβρικές παραστάσεις 3ν και ν+6 είναι μεγαλύτερη, έδειξαν ότι ναι μεν κατανοούν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούν περισσότερους του ενός αριθμούς, οι αριθμοί αυτοί όμως είναι κατά προτεραιότητα *φυσικοί* αριθμοί και όχι «οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί» όπως έχουν διδαχθεί. Στο τρίτο ερώτημα, στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν τιμές στο γράμμα-μεταβλητή στην αλγεβρική παράσταση 3ν, τα αποτελέσματα των απαντήσεών τους έδειξαν ότι υπάρχει έντονη η *προκατάληψη του φυσικού αριθμού*, ιδιαίτερα στις τάξεις Α΄ και Β΄ Γυμνασίου, όπου οι μαθητές κατά πλειοψηφία αντικαθιστούσαν τις μεταβλητές με *φυσικούς* αριθμούς. Στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου αρκετοί μαθητές στις τελικές τους απαντήσεις και παρά τις υποβοηθήσεις που τους δόθηκαν, συνέχιζαν να αποδίδουν τιμές μόνον *φυσικών* αριθμών στη μεταβλητή. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με τα αποτελέσματα των ερευνών του Christou και των συνεργατών του (2005, 2007, 2012), τα οποία έχουν δείξει ότι η τάση των μαθητών να αντικαθιστούν τις μεταβλητές κυρίως με *φυσικούς* αριθμούς είναι ισχυρή και αλλάζει δύσκολα ακόμη και σε μαθητές Α΄ Λυκείου. Τα υψηλά ποσοστά των αρχικών απαντήσεων των μαθητών με *φυσικούς* αριθμούς και η άρνησή τους να μεταβάλλουν τις απαντήσεις τους αυτές ακόμη και μετά από τις υποβοηθήσεις δείχνει ότι πολλοί από τους μαθητές εμφανίζουν την *προκατάληψη του φυσικού* αριθμού, η οποία πολύ δύσκολα μπορεί να αλλάξει.

Παρατηρήθηκε επίσης, από τις ανά ζεύγη τάξεων συγκρίσεις των απαντήσεων των μαθητών κυρίως στο δεύτερο και τρίτο ερώτημα, ότι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου ανταποκρίθηκαν αρκετά καλύτερα στη σύγκριση των αλγεβρικών παραστάσεων και στην αντικατάσταση των μεταβλητών με φυσικούς αριθμούς, γεγονός που δείχνει ότι υπάρχει μια βελτίωση όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, μετά τη διδασκαλία τριών ετών των συγκεκριμένων βιβλίων. Το γεγονός αυτό δείχνει μια πιο εκλεπτυσμένη κατανόηση και χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών αλλά και μια άμβλυνση του φαινομένου της *προκατάληψης του φυσικού αριθμού* στους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων. Το φαινόμενο της *προκατάληψης του φυσικού αριθμού* είναι πολύπλευρο και η διερεύνηση των αιτιών του είναι ένα πολύπλοκο ζήτημα που βρίσκεται πέρα από τη δυνατότητα αλλά και τους στόχους της παρούσας μελέτης.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που θα μπορούσε να εξεταστεί είναι, αν οι τρόποι με τους οποίους κατανοούν οι μαθητές τις μεταβλητές επηρεάζονται και από τον τρόπο με τον οποίο τις διδάσκονται μέσα στα σχολικά βιβλία. Η μελέτη των σχολικών βιβλίων, όσον αφορά τους τρόπους με τους οποίους εμφανίζονται οι μεταβλητές σε αυτά, πιθανά να μπορούσε να διαφωτίσει περαιτέρω τις δυσκολίες και τα λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν χειρίζονται τα γράμματα ως σύμβολα αριθμών στην άλγεβρα. Με σκοπό να εξεταστούν τα σχολικά βιβλία σχεδιάστηκε η μελέτη Β΄ που διερευνά με ποιες μορφές εμφανίζονται τα γράμματα-μεταβλητές μέσα σε αυτά.

ΜΕΛΕΤΗ Β΄

Στόχοι και Υποθέσεις

Στη μελέτη Β΄ εξετάσθηκε με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονταν σ' αυτά ήταν *φυσικοί* ή *μη-φυσικοί* αριθμοί. Για το σχεδιασμό της μελέτης Β΄ τέθηκαν ορισμένα ερωτήματα, όπως το πώς θα μπορούσε να αναλυθεί το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων, σε ποιο πλαίσιο και με ποιες κατευθυντήριες γραμμές (Nicholls, 2003). Ακολουθήθηκαν επίσης οι άξονες που έθεσε ο Pingel (2010) και οι οποίοι αναλυτικά έχουν αναφερθεί στο θεωρητικό πλαίσιο. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τον πρώτο άξονα που αφορούσε την επιλογή του δείγματος, αυτό ήταν απολύτως καθορισμένο καθώς τα σχολικά βιβλία που εξετάστηκαν είναι τα μοναδικά προσφερόμενα προς διδασκαλία στα Ελληνικά δημόσια σχολεία. Όσον αφορά το δεύτερο άξονα, την επιλογή δηλαδή των μεθόδων και των τεχνικών για την ποσοτική και ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων, ο σχεδιασμός της έρευνας βασίστηκε στις προϋπάρχουσες έρευνες των Dogbey και Kersaint (2012) και του McNeil και των συνεργατών του (2006). Οι πρώτοι είχαν μελετήσει τα σχολικά βιβλία των ΗΠΑ ως προς τον τρόπο εμφάνισης των μεταβλητών και οι δεύτεροι ως προς το σύμβολο της ισότητας μέσα σ' αυτά. Έτσι πραγματοποιήθηκε τόσο η ποσοτική καταγραφή των δεδομένων όσο και η ποιοτική τους χρησιμοποιώντας ως μέθοδο την ανάλυση περιεχομένου του Krippendorf (2004). Αναφορικά με τον τρίτο άξονα, την επιλογή δηλαδή των κριτηρίων με τα οποία θα γινόταν η συλλογή των δεδομένων από τα βιβλία, αυτά βασίστηκαν κυρίως στα κριτήρια που χρησιμοποίησαν οι Dogbey και Kersaint (2012) στην έρευνά τους. Ο τέταρτος άξονας που αφορούσε κοινωνικοοικονομικούς παράγοντες δεν απασχόλησε την παρούσα έρευνα.

Η μελέτη Β΄ βασίστηκε σε έρευνα των Dogbey και Kersaint (2012) που εξέτασε τη χρήση των μεταβλητών σε δώδεκα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α. για έξι σχολικές βαθμίδες. Οι ερευνητές κατέταξαν τα αποτελέσματά τους σε επτά κατηγορίες εμφάνισης των μεταβλητών και ανίχνευσαν ως επικρατέστερες τις κατηγορίες *ετικέτα-επιγραφή* και *συγκεκριμένο αριθμό* ενώ έπονταν η κατηγορία του *γενικευμένου αριθμού,* αποτελέσματα που αναμένονταν και στην παρούσα μελέτη Β΄. Όσον αφορά το είδος των αριθμητικών τιμών που αποδίδονταν στις μεταβλητές, δεν υπήρχε αντίστοιχη έρευνα στη διεθνή βιβλιογραφία ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματά της με τα αποτελέσματα της παρούσης μελέτης Β΄.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ Β΄

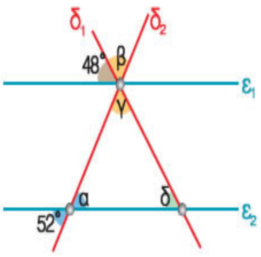
Πλαίσιο-Υλικά

Εξετάστηκαν τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου του Οργανισμού Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, τα οποία είναι τα αποκλειστικά διδασκόμενα στα Ελληνικά δημόσια σχολεία από το 2008. Η μελέτη Β΄ επέλεξε να μελετήσει τα βιβλία του Γυμνασίου γιατί αυτά είναι που εισάγουν τους μαθητές στη χρήση της μεταβλητής στα Μαθηματικά. Το βιβλίο της Α΄ Λυκείου δεν μελετήθηκε καθώς δεν ανήκει στην παραπάνω ομάδα βιβλίων τα οποία συγγράφηκαν και εκδόθηκαν σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ του 2003.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονταν στους ορισμούς, στις ασκήσεις, στα παραδείγματα, στις απαντήσεις των ασκήσεων, τοποθετήθηκαν σε πέντε κατηγορίες: α) *ετικέτα-επιγραφή*, αν η μεταβλητή απεικόνιζε μια έννοια αλγεβρική ή γεωμετρική η οποία μπορούσε να έχει αριθμητική αναφορά, για παράδειγμα οι μεταβλητές που αναπαριστούν γωνίες (Εικόνα 1α), β) *σταθερά*, αν η μεταβλητή περιέγραφε μια σταθερή ποσότητα συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής, όπως για παράδειγμα η σταθερά π (Εικόνα 1β), γ) *συγκεκριμένος αριθμός*, αν η μεταβλητή περιέγραφε τις μοναδικές μια ή το πολύ δυο γνωστές ή άγνωστες τιμές που μπορούσε να λάβει η μεταβλητή, όπως για παράδειγμα ο άγνωστος y σε μια εξίσωση (Εικόνα 1γ), δ) *γενικευμένος αριθμός*, αν η μεταβλητή μπορούσε να λάβει είτε παραπάνω από δυο γνωστές ή άγνωστες τιμές, είτε εξέφραζε μοτίβα ή αλληλουχίες συνόλων αριθμών που παρείχαν μια αληθή διαπίστωση, όπως για παράδειγμα στις ταυτότητες (Εικόνα 1δ) και ε) *συν-μεταβαλλόμενες ποσότητες,* αν οι μεταβλητές εξέφραζαν μια σχέση συν-μεταβολής ή μια συναρτησιακή σχέση δυο μεγεθών, όπως για παράδειγμα στα γραμμικά συστήματα (Εικόνα 1ε). Σε περιπτώσεις που μεταβλητές εμφανίζονταν με διπλή ή ακόμη και τριπλή σημασία καταχωρούνταν σε δυο ή και σε τρεις κατηγορίες αντίστοιχα.

Εικόνα 1: Κατηγορίες εμφάνισης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία

-α-	-β-	-γ-
	$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$.	$\frac{y-1}{3} - \frac{2y+7}{6} = y + \frac{1-3y}{2}$
-δ-		-ε-

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$		σχεδιάζουμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - 3y = 6$ και $\varepsilon_2 : 4x - 6y = -24$,

Έγινε επίσης ένας έλεγχος αξιοπιστίας της κωδικοποίησης της έρευνας με βάση τα χαρακτηριστικά κάθε κατηγορίας που είχαν προκαθοριστεί. Ζητήθηκε από έναν ανεξάρτητο κωδικοποιητή να διεξάγει έναν έλεγχο κωδικοποίησης και στα τρία σχολικά βιβλία σε ποσοστό 22% για κάθε βιβλίο. Η συμφωνία ανήλθε στο 91% για όλες τις κατηγορίες μορφών εμφάνισης των μεταβλητών και οι διαφωνίες που προέκυψαν συζητήθηκαν επαναπροσδιορίζοντας με τον τρόπο αυτό τα κριτήρια.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ Β΄

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά εμφάνισης των μεταβλητών ανά σχολικό βιβλίο κάθε τάξης. Επικρατέστερη κατηγορία σε όλες τις τάξεις είναι η κατηγορία του *γενικευμένου αριθμού* με ποσοστό 34%, ενώ έπεται η κατηγορία *ετικέτα-επιγραφή* με 23% και ακολουθούν οι κατηγορίες *συγκεκριμένος αριθμός* (20%), *συν-μεταβαλλόμενες ποσότητες* (20%) και τελευταία η κατηγορία *σταθερά* (3%). Η κατηγορία *ετικέτα-επιγραφή*, ενώ αρχικά παρουσιάζει αύξηση στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου κυρίως λόγω της αυξημένης ύλης της Γεωμετρίας, στη συνέχεια μειώνεται στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου. Η κατηγορία *σταθερά,* που αφορά κατά κύριο λόγο τη σταθερά *π*, απουσιάζει από το βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου και εμφανίζεται ενισχυμένη στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου λόγω επίσης της αυξημένης ύλης της Γεωμετρίας. Θετική εμφανίζεται και η αύξηση της κατηγορίας *συν-μεταβαλλόμενες ποσότητες* στα βιβλία των Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου δείχνοντας την εναρμόνιση της ύλης με τους στόχους του ΔΕΠΠΣ (2003).

Πίνακας 4: Συχνότητες και ποσοστά εμφάνισης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία/τάξη

Κατηγορία\Τάξη	**Α΄ Γυμνασίου**	**Β΄ Γυμνασίου**	**Γ΄ Γυμνασίου**	**Σύνολο**
Ετικέτα-επιγραφή	71(24%)	180(33%)	145(17%)	396(23%)
Σταθερά	--	49(8%)	18(2%)	67(4%)
Συγκεκριμένος αριθμός	79(27%)	83(15%)	179(21%)	341(20%)
Γενικευμένος αριθμός	116(39%)	75(14%)	379(44%)	570(33%)
Συν-μεταβαλλόμενες ποσότητες	31(10%)	163(30%)	138(16%)	332(20%)
Σύνολο/τάξη	297(100%)	550(100%)	859(100%)	1706(100%)

Για να διερευνηθεί αν οι διαφορές ανά τάξη είναι στατιστικά σημαντικές έγινε ένας έλεγχος Chi-Square. Ο στατιστικός έλεγχος έδειξε στατιστικά σημαντική διαφορά στις συχνότητες εμφάνισης των κατηγοριών των μεταβλητών μεταξύ των βιβλίων της Α΄ Γυμνασίου και της Β΄ Γυμνασίου [$\chi^2(4)=129.34$, $p<.001$] και της Β΄ Γυμνασίου με της Γ΄ Γυμνασίου [$\chi^2(4)=209.54$, $p<.001$]. Οι διαφορές αυτές θα μπορούσε να οφείλονται στο γεγονός ότι είναι αυξημένη η κατηγορία *ετικέτα-επιγραφή* και *συν-μεταβαλλόμενες ποσότητες* στο βιβλίο των Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου, πιθανά λόγω της αυξημένης ύλης της Γεωμετρίας σε αυτό και της χρήσης πολλών τύπων που συνδέουν τα μεγέθη αυτά μεταξύ τους, αλλά και της απουσίας από το βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου της κατηγορίας σταθερά. Η σύγκριση για τις τάξεις Α΄ Γυμνασίου και Γ΄ Γυμνασίου έδωσε οριακή στατιστικά σημαντική διαφορά [$\chi^2(4)=18.93$, $p=.001$].

Στη συνέχεια εξετάστηκαν τα σχολικά βιβλία ως προς το είδος των αριθμητικών τιμών που αποδίδονταν στα γράμματα-μεταβλητές. Δημιουργήθηκαν δυο κατηγορίες: α) *φυσικοί αριθμοί,* αν οι μεταβλητές αντικαθίστανται μόνον από φυσικούς αριθμούς και β*) μη-φυσικοί αριθμοί, α*ν οι μεταβλητές αντικαθίστανται από ρητούς, δεκαδικούς, αρνητικούς ή άρρητους αριθμούς. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5 έδειξαν επικρατέστερη την κατηγορία των *μη-φυσικών* αριθμών με ποσοστό 32% στην Α΄ Γυμνασίου, αυξανόμενο μέχρι 58% στη Γ΄ Γυμνασίου.

Πίνακας 5: Συχνότητες και ποσοστά εμφάνισης φυσικών και μη-φυσικών αριθμών στα σχολικά βιβλία ανά τάξη

Κατηγορία\Τάξη	**Α΄ Γυμνασίου**	**Β΄ Γυμνασίου**	**Γ΄ Γυμνασίου**	**Σύνολο**
Φυσικοί αριθμοί	116(68%)	164(44%)	123(42%)	403(48%)
Μη-Φυσικοί αριθμοί	55(32%)	211(56%)	173(58%)	439(52%)
Σύνολο/τάξη	171(100%)	375(100%)	296(100%)	84(100%)

Για να διερευνηθεί αν οι διαφορές στις κατηγορίες εμφάνισης των μεταβλητών ανά τάξη είναι στατιστικά σημαντικές έγινε ένας έλεγχος Chi-Square, με διόρθωση κατά Fischer. Ο στατιστικός έλεγχος έδειξε στατιστικά σημαντική διαφορά στις συχνότητες εμφάνισης *φυσικών* και *μη-φυσικών* αριθμών μεταξύ των βιβλίων της Α΄ Γυμνασίου και της Β΄ Γυμνασίου [$\chi^2(1)=27.31$, $p<.001$] και μεταξύ της Α΄ Γυμνασίου και Γ΄ Γυμνασίου [$\chi^2(1)=29.96$, $p<.001$], καθώς στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου οι *φυσικοί* αριθμοί εμφανίζονται με το μεγαλύτερο ποσοστό (68%) σε σχέση με τα βιβλία των άλλων τάξεων. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι με μικρές διαφορές και με περίπου ίδια συχνότητα εμφανίζονται οι *φυσικοί* και οι *μη-φυσικοί* αριθμοί στα βιβλία του Γυμνασίου.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ Β΄

Τα αποτελέσματα της μελέτης Β΄ εμφάνισαν ως επικρατέστερη κατηγορία εμφάνισης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία την κατηγορία του *γενικευμένου αριθμού*. Το εύρημα αυτό είχε διαφορές από τα ευρήματα της μελέτης των Dogbey και Kersaint (2012) που στην αντίστοιχη έρευνά τους για τα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α. και για τις αντίστοιχες σχολικές βαθμίδες διαπίστωσαν ως επικρατέστερες κατηγορίες τις κατηγορίες *ετικέτα-επιγραφή* και *συγκεκριμένος αριθμός.* Έτσι φάνηκε πως τα σχολικά βιβλία που διδάσκονται στα Ελληνικά σχολεία χρησιμοποιούν τις μεταβλητές με έναν πιο εκλεπτυσμένο τρόπο απ' ότι τα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α. Στη συνέχεια διαπιστώθηκε ότι οι τιμές που αποδίδονταν στα γράμματα-μεταβλητές μέσα στα σχολικά βιβλία ήταν τιμές κατά πλειοψηφία *φυσικών* αριθμών στα βιβλία της Α΄ Γυμνασίου, ενώ με το ίδιο περίπου ποσοστό *μη-φυσικών* και *φυσικών* αριθμών στα βιβλία των άλλων τάξεων.

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα εστίασε στην έννοια της μεταβλητής στα σχολικά μαθηματικά και παρουσίασε τα αποτελέσματα δυο μελετών. Στη μελέτη Α΄ διερευνήθηκε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές του Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών στις αλγεβρικές παραστάσεις και τι τιμές θεωρούν ότι αυτές μπορούν να πάρουν. Αναμένονταν σύμφωνα με τις προϋπάρχουσες έρευνες, ότι οι μαθητές θα κατανοούσαν τις μεταβλητές ως *γενικευμένους αριθμούς* (Asquith et al, 2007) και ότι θα εμφάνιζαν έντονη την τάση να αντικαθιστούν τα γράμματα-μεταβλητές κυρίως με *φυσικούς* αριθμούς (Christou et al, 2005, 2007, 2012).

Τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων με τους μαθητές των Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου έδειξαν ότι κυρίαρχη κατηγορία κατανόησης και χρήσης των γραμμάτων ήταν αυτή του *γενικευμένου αριθμού,* αποτέλεσμα συμβατό με αυτά που εμφανίζονται στη σχετική βιβλιογραφία (Asquith et al., 2007). Παρατηρήθηκε επίσης ότι οι μαθητές κατά πλειοψηφία κατανοούσαν τις μεταβλητές ως σύμβολα *φυσικών* αριθμών καθώς απαντούσαν λανθασμένα στη σύγκριση των αλγεβρικών παραστάσεων και καθώς απέδιδαν, σε δοσμένη αλγεβρική παράσταση, τιμές κυρίως *φυσικών* αριθμών στις μεταβλητές. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν σύμφωνο με τα αποτελέσματα των ερευνών του Christou και των συνεργατών του (2005, 2007, 2012) τα οποία είχαν δείξει ότι η τάση των μαθητών να αντικαθιστούν τις μεταβλητές κυρίως με *φυσικούς* αριθμούς είναι ισχυρή και αλλάζει δύσκολα. Το φαινόμενο οφείλεται στην *προκατάληψη του φυσικού αριθμού,* που χαρακτηρίζει την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση και εμπειρία τους για τους *φυσικούς* αριθμούς για την κατανόηση και χρήση των ρητών αριθμών (Ni & Zhou, 2005).

Παρατηρήθηκε ακόμη, ότι η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως *γενικευμένου αριθμού* από τους μαθητές δε σηματοδοτεί το γεγονός ότι οι μαθητές την κατανοούν ως έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, αλλά όπως έδειξαν τα αποτελέσματα της μελέτης Α΄, την κατανοούν μάλλον ως έναν οποιονδήποτε *φυσικό* αριθμό. Επίσης, σύμφωνα με τις συγκριτικές ανά τάξη στατιστικές αναλύσεις που έγιναν, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές παρουσιάζουν μια βελτίωση από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες τάξεις στην κατανόηση και χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών, αλλά και στη χρήση των αριθμών που επιλέγουν για να αντικαταστήσουν τις μεταβλητές όταν αυτό χρειαστεί.

Στη μελέτη Β΄ εξετάστηκε με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου, όπως επίσης και αν αποδίδονται σ' αυτά τιμές *φυσικών* ή *μη-φυσικών* αριθμών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στα σχολικά βιβλία οι μεταβλητές εμφανίζονταν με τη μορφή του *γενικευμένου αριθμού,* αποτέλεσμα διαφορετικό από αυτό των Dogbey & Kersaint (2012) στην έρευνα των οποίων κυρίαρχες κατηγορίες ήταν αυτές της *ετικέτας-επιγραφής* και του *συγκεκριμένου αριθμού*, δείχνοντας έτσι τα αποτελέσματα της παρούσης έρευνας πιο εκλεπτυσμένα. Επίσης έδειξαν ότι όταν οι μεταβλητές αντικαθίστανται από αριθμούς στα σχολικά βιβλία, τότε τους αποδίδονται τιμές *μη-φυσικών* αριθμών και *φυσικών* αριθμών περίπου με το ίδιο ποσοστό. Αν αναλογιστεί κανείς ότι στην κατηγορία των *μη-φυσικών* αριθμών ανήκουν διάφορα είδη αριθμών όπως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί, που οι μαθητές τα έχουν διδαχθεί ήδη από την Γ΄ Δημοτικού και οι αρνητικοί αριθμοί που τους γνωρίζουν από την Α΄ Γυμνασίου, τότε το ποσοστό αυτό των *μη-φυσικών* αριθμών ίσως να είναι σχετικά χαμηλό και θα μπορούσε να είναι πιο ενισχυμένο. Παρόλα αυτά δεν υπάρχουν ανάλογες μελέτες αναφορικά με το ζήτημα αυτό ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση τους με τα παραπάνω αποτελέσματα. Καθώς η διδακτέα ύλη καθορίζεται σχεδόν αποκλειστικά από τα σχολικά βιβλία, τουλάχιστον όσον αφορά τις σχολικές βαθμίδες που εξετάσθηκαν, τα αποτελέσματα αυτά πιθανά να συσχετίζονται μεταξύ τους, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο κατανοούν οι μαθητές τις μεταβλητές, ως *γενικευμένο αριθμό* και *ως φυσικό αριθμό*, μπορεί να επηρεάζεται και από τον τρόπο που οι μεταβλητές εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία.

Η επιπρόσθετη ερευνητική συνεισφορά της παρούσης έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι για πρώτη φορά εξετάστηκαν ταυτόχρονα, στη μελέτη Α΄, οι τρόποι κατανόησης των μεταβλητών από τους μαθητές και η τάση τους να τους αποδίδουν τιμές μόνο φυσικών αριθμών. Επίσης για πρώτη φορά, στη μελέτη Β΄, μελετήθηκαν τα ελληνικά σχολικά βιβλία ως προς την εμφάνιση των μεταβλητών μέσα σ' αυτά, ενώ προεκτείνοντας αντίστοιχες έρευνες της βιβλιογραφίας (Dogbey & Kersaint, 2012), εξετάστηκαν και οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται στις μεταβλητές. Συγχρόνως στην παρούσα έρευνα για πρώτη φορά συνεξετάστηκαν η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, της μεταβλητής, από τη σκοπιά των μαθητών και ο τρόπος με τον οποίο η έννοια αυτή εισάγεται στα σχολικά βιβλία.

Προεκτείνοντας την παρούσα έρευνα, πιθανά ένας τρόπος βελτίωσης των υπαρχόντων βιβλίων να ήταν η εμφανής, ρητή και αναλυτική διατύπωση της ύπαρξης των διαφορετικών μορφών των μεταβλητών όχι μόνο ως αναφορές αλλά και μέσα σε πραγματικά (real world context) προβλήματα (Dogbey, 2016). Οι αναλυτικές αναφορές και διατυπώσεις θα μπορούσαν να ενισχύσουν την κατανόηση της πολυπλοκότητας της φύσης των μεταβλητών από τους μαθητές έτσι ώστε να μπορούν να τις αναγνωρίζουν με τις πολλές και διαφορετικές μορφές τους, δηλαδή ως *επιγραφή, σταθερά, συν-μεταβαλλόμενες ποσότητες* και όχι μόνον με τη μορφή του *συγκεκριμένου* και του *γενικευμένου αριθμού* (Kieran, 2007) προς αποφυγή λαθών και παρανοήσεων (Booth, 1984; Kieran, 1992; Herscovics & Linchevski, 1994; MacGregor & Stacey, 1997).

Καθώς τα σχολικά βιβλία αποτελούν την πρωταρχική πηγή άντλησης πληροφοριών για τον τρόπο παρουσίασης του διδακτικού υλικού από τους διδάσκοντες στους διδασκόμενους (Remillard, 1999; Schmidt et al, 2001) θα είχε ενδιαφέρον για μελλοντικές έρευνες να εξετασθεί με ποιο τρόπο και κατά πόσο τα σχολικά βιβλία επιδρούν στη γνώση των μαθητών, αλλά και στον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες όπως αυτή της μεταβλητής. Προϋπόθεση βέβαια για τις έρευνες αυτές είναι ότι θα έχουν αναπτυχθεί κατάλληλες μεθοδολογίες που θα καταφέρουν να κάνουν τη σύνδεση αυτή, καθώς το φαινόμενο της μάθησης και της σχέσης της με τη διδασκαλία είναι πολύπλοκο και πολυεπίπεδο. Στο πεδίο αυτό υπάρχουν ελάχιστες έρευνες που να εστιάζουν στοχευμένα και να διερευνούν τις σχέσεις αυτές κάνοντας χρήση των κατάλληλων μεθοδολογικών εργαλείων. Η διερεύνησή των ζητημάτων αυτών θα βοηθήσει στην βελτίωση της παρεχόμενης γνώσης στους μαθητές.

Επίσης καθώς τα σχολικά βιβλία αποτελούν τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στους στόχους που τίθενται από τα αναλυτικά προγράμματα και στα ζητούμενα αποτελέσματα (Schmidt, McKnight & Raizen, 1997; Valverde et al, 2002) θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί το πώς εμφανίζεται η έννοια της μεταβλητής στα σχολικά βιβλία ή ακόμη και στα αναλυτικά προγράμματα άλλων χωρών που έχουν ένα υψηλό μαθηματικό επίπεδο, όπως για παράδειγμα της Ιαπωνίας, της Κίνας, της Φινλανδίας. Όποιες διαφορές ή ομοιότητες τυχόν υπάρξουν, συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα δικά μας σχολικά βιβλία και αναλυτικά προγράμματα, θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε χρήσιμα συμπεράσματα και κατάλληλες βελτιώσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning,* 9(3), 249–272.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors.* Windsor: Berkshire: NFER-Nelson.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (p. 130-140). Utrecht University, The Netherlands.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers." *ZDM Mathematics Education*, 47(5), 1-12.

Christou, K. P. (2017). Students' interpretation of variables and the phenomenal sign of algebraic expressions, *MENON: Journal of Educational Research*, 4, 161-175.

Christou, K. P., & Vosviadou St. (2005). *How Students Interpret Literal Symbols in Algebra: A Conceptual Change.* In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.). Proceedings of the XXVII Annual Conference of the Cognitive Science Society, Italy. pp.453-458.

Christou, K. P., Vosviadou St., & Vamvakoussi X. (2007). Students' Interpretations of Literal Symbols in Algebra, *Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 283-297). Elsevier Press.

Christou, K. P., & Vosniadou, St. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(1), 1-27.

Dimitrakopoulou, St., & Christou, K. P. (2014). How students interpret literal symbols and how they appear in the Greek high school mathematics textbooks. In Mathematics in School and Everyday Life - *Proceedings of the 5th National Conference of Greek Association of Researchers in Mathematics Education (ENEDIM)* (pp. 1-10). Florina, Greece, EN.E.DI.M., ISSN: 1792-8494. (in Greek).

Dogbey, J. (2016). Using Variables in School Mathematics: Do School Mathematics Curricula Provide Support for Teachers; *International Journal of Science and Mathematics Education.* 14 (6), 1175-1196, Springer International Publishing AG.

Dogbey J., & Kersaint, Gl., (2012). Treatment of Variables in Popular Middle-Grades Mathematics Textbooks in the USA: Trends from 1957 through 2009, *International Journal for Mathematics T.eaching and Learning*, 2(1)1-30.

Eisner, E. W. (1987). Why the textbook influences curriculum? *Curriculum Review, 26(3),* 11-13.

Farmaki, V., Klaoudatos, N., & Verikios, P. (2015). *Introduction of Algebraic Thinking: Connecting the Concepts of Linear Function and Linear Equation.* https://www.researchgate.net/publication /238724513

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27-37.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics (27),* 59-78.

Johansson, M. (2005). *Mathematics textbooks – the link between the intended and the implemented curriculum?* Lulea: Department of Mathematics, Lulea University of Technology.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390–419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr.(Eds), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.707-762).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In D.T. Owens (Ed), *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics* (p. 179-198). National Council of Teachers of Mathematics.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle-school Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equality and Variable. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik—International Reviews on Mathematical Education,* 37, 1–9.

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis, An introduction to its methodology*, 2nd Edition, Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics:* 11-16 (pp.102-119). London: John Murray.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation:11-15. *Educational studies in mathematics, 33*(1), 1-19.

McKnight, C. C., Crosswhite, F. J., Dossey, J. A., Kifer, E., Swafford, J. O., Travers, K. J., & Cooney, T. J. (1987). *The underachieving curriculum: Assessing U.S. school mathematics from an international perspective*. Champaign, IL: Stipes.

McNeil, N., Grandau, L, Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S., & Krill, D. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition & Instruction*, *24*(3), 367-385.

McNeil, N., & Weinberg, A., (2010). A is for Apple: Mnemonic Symbols Hinder the Interpretation of Algebraic Expressions, *Journal of Educational Psychology,* Vol 102, No3, 625-634.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40(1), 27–52.*

Nicholls J., (2003). *Methods in School Textbook Research, University of Oxford*. [online] [cit. 18.9.2007] http://serc.carleton.edu/textbook/resources.html.

Pingel, F. (2010). *UNESCO Guidebook on Textbook Research and Textbook Revision*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization and Georg Eckert Institute for International Textbook Research. 2nd revised and updated edition. Paris/Braunschweig.

Peacock, A., & Cleghorn, A. (2004). *Missing the meaning*. The Development and Use of Print and Non-Print Text Materials in Diverse School Settings. New York: Palgrave Macmillan.

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry*, *29(3),* 315-342.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. Are you careful about defining your variables? *Mathematics Teacher*, 74(6), 418-420,450.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen, S. A. (1997). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Press.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., & Cogan, L. S., (2001). *Why schools matter: a cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

Schmittau, J. (2005). *The development of algebraic thinking*. ZDM, 37(1),16–22.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice in the world of textbooks*. Dordrecht, The Netherlands.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, St. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28(2),* 181–209.

Van Dooren W., Christou K. P., & Vamvakoussi X. (2010). Greek and Flemish Students' Interpretation of Literal Symbols as Variables, 2010. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.). In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 257-264. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Vosniadou, St., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. In S. Vosniadou (Ed*.) International Handbook of Research on Conceptual Change.* New York, NY: Routledge, 3-34.

ΔΕΠΠΣ, (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών,* ΦΕΚ 303Β/13-03-2003; ΦΕΚ 304Β/13-03-2003.

Ματσαγγούρας, Η. (2006). Διδακτικά εγχειρίδια: Κριτική αξιολόγηση της Γνωσιακής, Διδακτικής και Μαθησιακής Λειτουργίας τους. *Συγκριτική και Διεθνής Εκπαιδευτική Επιθεώρηση,* 7, 60-92.