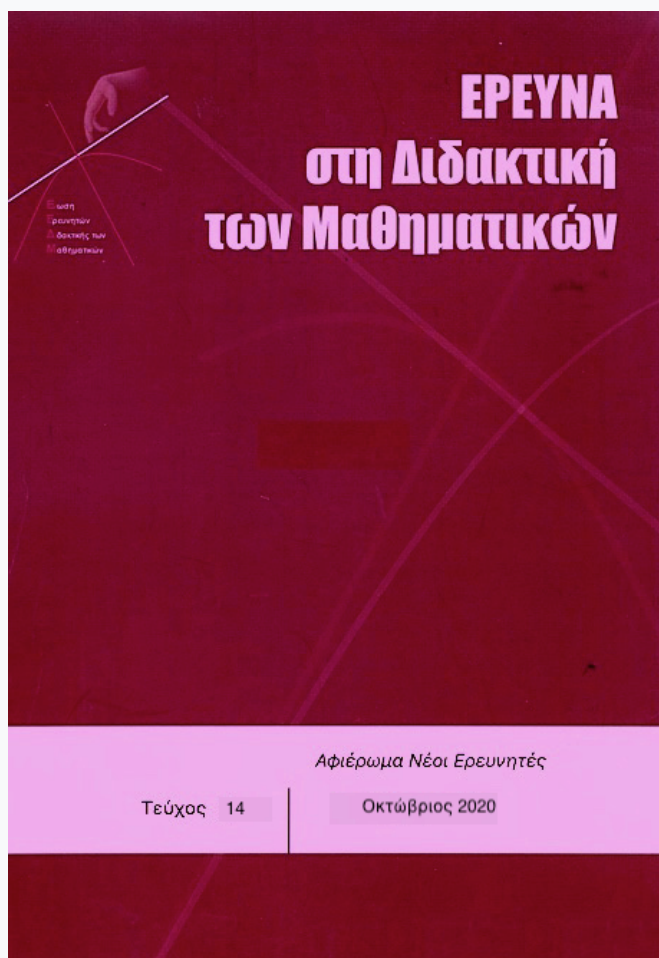


Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 14 (2020)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΗΓΗΣΗ

Ιωάννα Καϊάφα (Ioanna Kaiafa)

doi: [10.12681/enedim.20918](https://doi.org/10.12681/enedim.20918)

Copyright © 2020, Ιωάννα Καϊάφα



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Βιβλιογραφική αναφορά:

Καϊάφα (Ioanna Kaiafa) I. (2020). ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΗΓΗΣΗ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (14), 35–59. <https://doi.org/10.12681/enedim.20918>

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΗΓΗΣΗ

Ιωάννα Καϊάφα και Χαράλαμπος Λεμονίδης

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, j.kaiafa@windowslive.com, xlemon@uowm.gr

Περίληψη: Βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση του ρόλου που μπορεί να διαδραματίσει η χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων σε μαθητές της Τρίτης Δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα, μέσα από την πειραματική διαδικασία που ακολουθήθηκε, επιχειρήθηκε η διερεύνηση της επίδρασης που μπορεί να ασκήσει η αφήγηση στην επίδοση των μαθητών της Γ' Δημοτικού στα κλάσματα και να εξεταστεί ποιοι είναι οι μαθητές που ωφελούνται περισσότερο από τη χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών (μαθητές με υψηλή, μέση ή χαμηλή επίδοση στα Μαθηματικά). Επιπλέον, καταβλήθηκε προσπάθεια να προσδιοριστούν οι μαθηματικές ικανότητες στις οποίες ενδεχομένως επιδρά θετικά η χρήση της αφήγησης. Από τα ευρήματα της έρευνας προέκυψε ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας, που διδάχτηκαν τα κλάσματα με τη χρήση της αφήγησης, σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου στο τελικό τεστ, ενώ οι μαθητές που ωφελήθηκαν περισσότερο ήταν εκείνοι με μέση και, κυρίως, με χαμηλή επίδοση. Οι μαθηματικές ικανότητες στις οποίες επέδρασε θετικά η χρήση της αφήγησης ήταν η σύγκριση κλασμάτων, η εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων, η δημιουργία και ο χειρισμός των αναπαραστάσεων, καθώς και η επίλυση προβλήματος.

Λέξεις κλειδιά: αφήγηση, διδασκαλία και μάθηση των κλασμάτων, μαθητές με διαφορετικά επίπεδα επίδοσης

Abstract: The main purpose of this study was to investigate the role that the use of storytelling can play in teaching and learning fractions to third grade students. More specifically, through the experimental process followed, we attempted to investigate the potential impact of the use of storytelling on Third Grade Primary Students' achievement in fractions and to identify which students benefit most from this teaching approach (high, medium or low achievement students). Finally, we attempted to determine the specific types of mathematical skills that storytelling may have a positive impact on. The results from this study indicated that the use of storytelling had a positive impact on students' performance in fractions, as the experimental group students, who were taught fractions through storytelling, performed better than the control group students. The students who benefited most from the use of storytelling were those with medium, especially, with low performance. Finally, the use of storytelling had a positive impact on specific mathematical skills, such as comparing fractions, finding equivalent fractions, creating and manipulating representations and problem solving.

Keywords: storytelling, teaching and learning of fractions, students of diverse achievement levels

Θεωρητικό πλαίσιο

Η χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των μαθηματικών

Η αξιοποίηση της αφήγησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών δημιουργεί τις προϋποθέσεις για τη διεξαγωγή συζήτησης μέσα στην τάξη, με θέμα τις μαθηματικές έννοιες (Lewis, Long, & Mackay, 1993; Anderson, Anderson, & Shapiro, 2004; Nesmith and Cooper, 2010; Flevares & Schiff, 2014; van Oers, 2013; Koellner, Wallace, & Swackhamer, 2009) και διαμορφώνει ένα πλαίσιο με νόημα, που επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να εντάξει στη διδασκαλία του μαθηματικές δραστηριότητες οι οποίες είναι ελκυστικές και ενδιαφέρουσες για τους μαθητές. Επιπλέον, μέσα από την αφήγηση μπορεί ο εκπαιδευτικός να θέσει στους μαθητές ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα, αλλά και να υποδείξει τρόπους επίλυσής τους. Η ανάγνωση ενός κειμένου μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία επίλυσης μιας προβληματικής κατάστασης, καθώς και ως μια διαδικασία δόμησης νοήματος. Συνεπώς, ο συνδυασμός αφήγησης και μαθηματικών στη διδασκαλία μπορεί να συμβάλει όχι μόνο στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, αλλά και στην καλλιέργεια του γραμματισμού, στην κατάκτηση της μαθηματικής γλώσσας και στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος (Wiburne & Napolì, 2008). Η χρήση της αφήγησης συμβάλλει στη δημιουργία ενός δυναμικού μαθησιακού περιβάλλοντος που προωθεί την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και ενθαρρύνει τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στο λεξιλόγιο που σχετίζεται με τα μαθηματικά (Bintz & Moore, 2002).

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα αφηγηματικό κείμενο στη διδασκαλία των μαθηματικών, για να παρέχουν στους μαθητές ένα πρότυπο επίλυσης προβλήματος, να δώσουν υπόσταση σε μια μαθηματική έννοια ή να διεγείρουν μια ερευνητική διαδικασία, καθώς το αφηγηματικό πλαίσιο τούς επιτρέπει να συνδέσουν την άτυπη γνώση και τις εμπειρίες των μαθητών με τις τυπικές διαδικασίες επίλυσης προβλήματος (Μητακίδου & Τρέσσου, 2005; Young & Marroquin, 2006; Casey, Erkut, Ceder & Young, 2008). Ειδικά, όταν οι ήρωες της ιστορίας θέτουν οι ίδιοι ένα μαθηματικό πρόβλημα ή εμπλέκονται σε μια προβληματική κατάσταση, τότε διεγείρονται η φαντασία και η δημιουργικότητα των μαθητών και αναπτύσσεται ένα κλίμα ενθουσιασμού μέσα στην τάξη (Casey, 2004).

Τέλος, η χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών μπορεί να διαδραματίσει έναν σημαντικό ρόλο στην εμπλοκή όλων των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία και κυρίως εκείνων των μαθητών που αντιμετωπίζουν δυσκολίες μάθησης ή παρουσιάζουν προβλήματα συμπεριφοράς (Courtade, Lingo, Karp, & Whitney, 2013).

Τα κλάσματα και η διδασκαλία τους

Τα κλάσματα και γενικότερα οι ρητοί αριθμοί συγκαταλέγονται μεταξύ των πιο σύνθετων και συγχρόνως των πιο σημαντικών μαθηματικών εννοιών με τις οποίες έρχεται σε επαφή ο μαθητής της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Ni, 2001), καθώς αποτελούν τα θεμέλια για τη μάθηση της άλγεβρας (Fennell, Faulkner, Ma, Schmid, Stotsky, Wu et al., 2008). Πληθώρα ερευνητικών δεδομένων συνηγορεί στη διαπίστωση ότι τόσο οι μαθητές όσο και οι ενήλικες αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση

και τον χειρισμό των ρητών αριθμών (Aksu, 1997; Kerslake, 1986; Lemonidis & Kaiafa, 2014; Lortie – Forgues, Tian & Siegler, 2015; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Τα κλάσματα διαδραματίζουν έναν κεντρικό ρόλο στη μάθηση των μαθηματικών τόσο σε θεωρητικό επίπεδο, όσο και σε επίπεδο διδακτικής πρακτικής. Σε θεωρητικό επίπεδο, επειδή προϋποθέτουν μια βαθύτερη κατανόηση των αριθμών, σε σύγκριση με εκείνη που αποκτούν οι μαθητές μέσα από την εμπειρία τους με τους φυσικούς αριθμούς (Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Siegler, Fazio, Bailey, & Zhou, 2013) και σε επίπεδο διδακτικής πρακτικής επειδή: α) η κατανόηση των κλασμάτων αποτελεί προϋπόθεση για την ενασχόληση των μαθητών με μαθηματικά ανωτέρου επιπέδου, β) ο βαθμός κατανόησης των κλασμάτων στο δημοτικό σχολείο αποτελεί ισχυρό προγνωστικό δείκτη για την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά στις ανώτερες βαθμίδες της εκπαίδευσης (Siegler et al., 2012; Balley et al., 2012) και γ) πολλοί μαθητές, αλλά και ενήλικες, αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες με τη μάθηση των κλασμάτων (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Παρά το γεγονός ότι γίνεται πολύς λόγος για τη χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των μαθηματικών, εντούτοις, οι έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στον χώρο αυτό δεν είναι πολλές, ενώ επιπλέον, οι περισσότερες από αυτές αφορούν στον χώρο της προσχολικής εκπαίδευσης (Perger, 2011). Οι Flevares και Schiff, (2014) υπογραμμίζουν την ανάγκη για τη διεξαγωγή καλά οργανωμένων ερευνών στον τομέα αυτό, με σαφή στοχοθεσία και μεθοδολογία. Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας επιχειρείται η διερεύνηση του ρόλου που μπορεί να διαδραματίσει η αφήγηση στη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων, σε μαθητές της Γ' Δημοτικού. Για τη διδασκαλία των κλασμάτων, στο πλαίσιο της έρευνας, χρησιμοποιήθηκαν στοχοεπικεντρωμένες διδακτικές ιστορίες που γράφτηκαν σύμφωνα με τους στόχους ενός νέου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών (Λεμονίδης, 2016).

Η πρωτοτυπία, λοιπόν, της έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι επιχειρεί να εξετάσει με τρόπο συστηματικό την επίδραση της αφήγησης, μέσα από τη χρήση στοχοεπικεντρωμένων διδακτικών ιστοριών, στη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων και να διερευνήσει ποιες είναι οι επιμέρους γνωστικές ικανότητες των μαθητών που ενδεχομένως βελτιώνονται μέσα από τη χρήση της αφήγησης.

Μέθοδος

Ερευνητικά ερωτήματα

1. Η αφήγηση, ως διδακτικό εργαλείο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, μπορεί να επιδράσει στην επίδοση των μαθητών της Γ' Δημοτικού στα κλάσματα;
2. Ποιοι μαθητές ωφελούνται περισσότερο από τη χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών (μαθητές με υψηλή, μέση ή χαμηλή επίδοση στα Μαθηματικά);
3. Ποιες είναι οι μαθηματικές ικανότητες στις οποίες ενδεχομένως επιδρά θετικά η χρήση της αφήγησης;

Περιγραφή του δείγματος

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 76 μαθητές της Τρίτης Τάξης του Δημοτικού, οι οποίοι φοιτούσαν κατά το σχολικό έτος 2015 -2016 σε δύο Δημοτικά σχολεία της Φλώρινας. Από τους μαθητές αυτούς, οι 38 αποτέλεσαν την πειραματική ομάδα και οι 38 την ομάδα ελέγχου.

Διάρκεια της παρέμβασης

Η παρέμβαση είχε διάρκεια 16 διδακτικές ώρες, ενώ τηρήθηκε το ωρολόγιο πρόγραμμα των τάξεων που έλαβαν μέρος στην έρευνα, δηλαδή 4 ώρες μαθηματικά την εβδομάδα.

Μέσα συλλογής δεδομένων

Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν:

Τεστ αρχικής αξιολόγησης. Το τεστ αυτό περιλάμβανε 9 δραστηριότητες που αφορούσαν στην ύλη των Μαθηματικών της Β' Δημοτικού και ήταν σύμφωνες με τους στόχους του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος. Ο σκοπός αυτού του τεστ ήταν διττός, αφενός να διαπιστωθεί αν η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου ήταν ισοδύναμες και αφετέρου να χωριστεί το δείγμα της κάθε ομάδας σε τρεις υποομάδες (ομάδα υψηλής, μέσης και χαμηλής επίδοσης) με κριτήριο την επίδοσή τους στο τεστ.

Ημερολόγιο εκπαιδευτικού. Η εκπαιδευτικός τηρούσε σε κάθε μάθημα δομημένο ημερολόγιο το οποίο περιλάμβανε τρεις άξονες (διδακτική διαδικασία, μαθητής και γενική αποτίμηση της διδασκαλίας), ενώ κάθε άξονας χωρίστηκε σε επιμέρους υποάξονες. Πιο συγκεκριμένα, το ημερολόγιο είχε την εξής δομή (πίνακας 1):

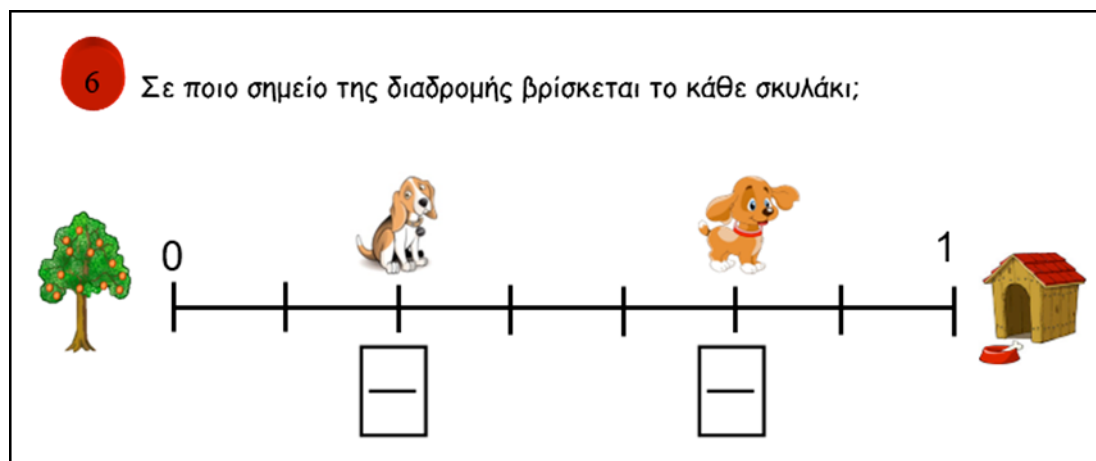
I. Η Διδακτική διαδικασία
1. Βαθμός επίτευξης του βασικού διδακτικού στόχου της ενότητας
2. Αποτελεσματικά σημεία της διδασκαλίας
3. Λιγότερο αποτελεσματικά σημεία της διδασκαλίας
II. Οι μαθητές
4. Στοιχεία της διδασκαλίας που άρεσαν στους μαθητές
5. Δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές
6. Η στάση των μαθητών στην αρχή της διδασκαλίας
7. Η στάση των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας
III. Συνολική αποτίμηση της διδασκαλίας
8. Το κλίμα της τάξης
9. Συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών
10. Δημιουργία ευκαιριών για την ανάπτυξη μαθηματικής συζήτησης μέσα στην τάξη

Πίνακας 1: Η δομή του ημερολογίου εκπαιδευτικού

Απομαγνητοφωνήσεις των διδασκαλιών. Προκειμένου να αντληθούν επιπλέον ποιοτικά στοιχεία για τις διδασκαλίες που διεξήχθησαν, όλες οι διδασκαλίες μαγνητοσκοπήθηκαν και στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν.

Τεστ τελικής αξιολόγησης. Το τεστ αυτό περιλάμβανε 10 δραστηριότητες και προβλήματα που αφορούσαν την ύλη των κλασμάτων που διδάχθηκαν οι μαθητές και μετρούσαν τον βαθμό επίτευξης των στόχων της διδασκαλίας, όπως αυτοί τέθηκαν πριν την παρέμβαση.

Ενδεικτικά, παρατίθενται δύο δραστηριότητες του τεστ τελικής αξιολόγησης.



Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν και να εκφράσουν με κλάσμα τη το σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται το κάθε σκυλάκι.

7 Ο Γιάννης και η Ιωάννα αγόρασαν από μια ίδια σοκολάτα. Ο Γιάννης έφαγε τα $\frac{2}{5}$ της σοκολάτας του, ενώ η Ιωάννα έφαγε τα $\frac{2}{3}$ της δικής της σοκολάτας. Ποιο από τα παιδιά έφαγε περισσότερη σοκολάτα; (Φτιάχνω ένα σχήμα μέσα στο πλαίσιο)

Απάντηση: Περισσότερη σοκολάτα έφαγε _____

Οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, στο πλαίσιο του οποίου πρέπει να συγκρίνουν δύο κλάσματα με κοινό αριθμητή. Οι μαθητές, εκτός από την απάντηση, πρέπει να σχεδιάσουν και ένα σχήμα που να αναπαριστά τη λύση του προβλήματος.

Υλικά της παρέμβασης

Κατά την εκπαιδευτική παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα υλικά:

Βιβλίο Μαθητή και Τετράδιο Εργασιών. Όλοι οι μαθητές που συμμετείχαν στην πειραματική διαδικασία (πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου) έλαβαν σε έντυπη μορφή (έγχρωμη εκτύπωση) και βιβλιοδετημένο ένα βιβλίο 32 σελίδων με όλη την ύλη.

Βιβλίο με οδηγίες προς τον εκπαιδευτικό.

Οι αφηγήσεις εικονογραφημένες, σε μορφή Power Point (πειραματική ομάδα).

Υλικά για τις εισαγωγικές βιωματικές δραστηριότητες (ομάδα ελέγχου).

Η ανάπτυξη του υλικού για τη διδασκαλία των κλασμάτων ακολούθησε την τροχιά μάθησης και διδασκαλίας του νέου προγράμματος για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών που προτείνει ο Χαράλαμπος Λεμονίδης (2016). Το εν λόγω πρόγραμμα αποτελεί μια ολοκληρωμένη πρόταση για τη διδασκαλία των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών στο Δημοτικό Σχολείο, από την Πρώτη έως την Πέμπτη Τάξη.

Η διδασκαλία ολοκληρώθηκε σε 8 ενότητες, με το εξής περιεχόμενο:

- Σχηματίζω κλασματικές μονάδες
- Από τις κλασματικές μονάδες στα απλά κλάσματα
- Τοποθετώ κλάσματα στην αριθμογραμμή
- Αναγνωρίζω κλάσματα και τα τοποθετώ στην αριθμογραμμή
- Επαναληπτικό μάθημα
- Ισοδύναμα κλάσματα
- Συγκρίνω κλάσματα
- Επαναληπτικό μάθημα

Το αφηγηματικό μέρος της διδακτικής παρέμβασης, που εφαρμόστηκε στην πειραματική ομάδα, ολοκληρώνεται σε επτά ιστορίες – επεισόδια που αποτελούν μια αφηγηματική ενότητα. Οι έξι από αυτές χαρακτηρίζονται ως διδακτικές ιστορίες, ενώ η έβδομη αποτελεί το τέλος της ιστορίας και δε συνδέεται με κάποιον διδακτικό στόχο. Κάθε διδακτική ιστορία είναι στοχοεπικεντρωμένη, αποσκοπεί, δηλαδή στην εισαγωγή μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας ή διαδικασίας. Η αφήγηση δεν αποτελεί απλά το πλαίσιο για μια μαθηματική έννοια, αλλά η μαθηματική έννοια αποτελεί στοιχείο της δομής της ιστορίας, με τρόπο που επηρεάζει την εξέλιξή της. Οι ιστορίες αυτές γράφτηκαν προκειμένου να στηρίξουν τη διδασκαλία των κλασμάτων, όπως αυτή προτείνεται από το συγκεκριμένο πρόγραμμα σπουδών (Λεμονίδης, 2016) και είναι σύμφωνες με τους διδακτικούς στόχους της κάθε ενότητας.

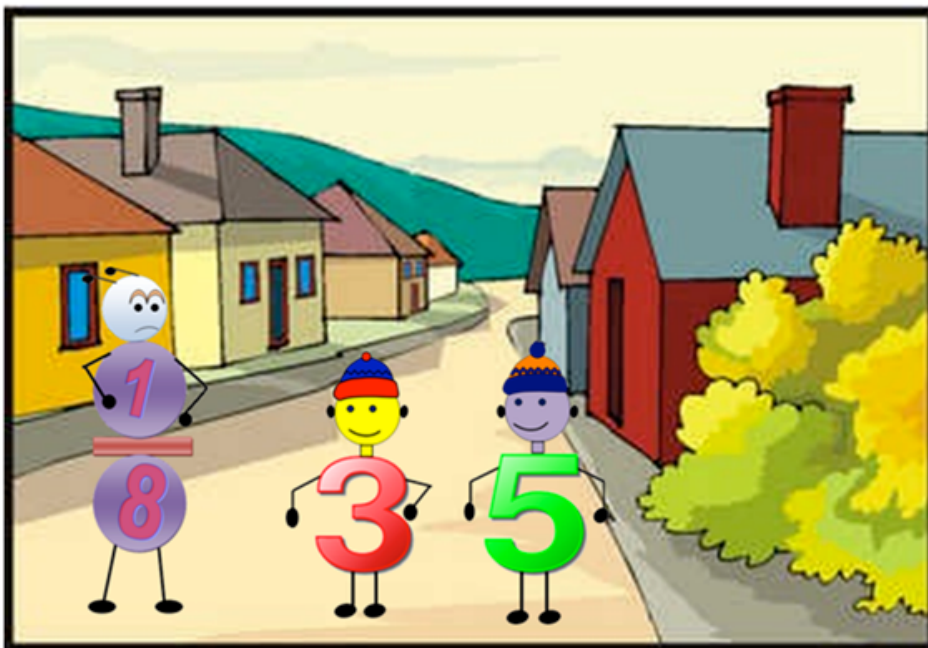
Η αφήγηση έχει τίτλο «Ταξίδι στη Χώρα των Κλασμάτων». Πρωταγωνιστής της ιστορίας είναι μια κλασματική μονάδα ($1/8$), ο Τάκης Κλασματάκης, ο οποίος αντιμετωπίζει δυσκολίες

στο σχολείο, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της αξίας του (μέσα από την αύξηση του παρονομαστή του). Ο Τάκης νιώθει μεγάλη απογοήτευση και αποφασίζει να φύγει από την Πόλη των Κλασματικών Μονάδων και να μην επιστρέψει, αν δεν μεγαλώσει την αξία του. Αρωγοί σ' αυτήν του την προσπάθεια είναι δύο ολόκληροι αριθμοί, το 3 και το 5 που βρίσκονται στη Χώρα των Κλασμάτων γιατί κέρδισαν ένα ταξίδι σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό. Ξεκινά, έτσι, μια συναρπαστική περιπέτεια μέσα από την οποία οι μαθητές παρακολουθούν τις ιδιότητες των κλασμάτων, μέσα από την εξέλιξη της πλοκής της ιστορίας.

Στο σημείο αυτό παρατίθεται μια διδακτική ιστορία. Πρόκειται για ένα απόσπασμα από το δεύτερο επεισόδιο της μαθηματικής ιστορίας. Οι μαθητές στο προηγούμενο επεισόδιο ήρθαν σε επαφή για πρώτη φορά με την έννοια της κλασματικής μονάδας. Στο επεισόδιο αυτό θα εμβαθύνουν τη γνώση τους πάνω σ' αυτήν και στη συνέχεια θα εισαχθούν στην έννοια του απλού κλάσματος με βάση την κλασματική μονάδα.

Το 3 και το 5 συναντούν μια κλασματική μονάδα

«Το επόμενο πρωί το 3 και το 5 έκαναν έναν περίπατο, για να γνωρίσουν την πόλη και να βγάλουν κάποιες αναμνηστικές φωτογραφίες. Εκεί που προχωρούσαν συνάντησαν μια κλασματική μονάδα που φαινόταν πραγματικά πολύ λυπημένη. Προχωρούσε σκυφτή, χωρίς να κοιτά δεξιά και αριστερά.



- Καλημέρα, είπε ευγενικά το 3
- Καλημέρα, απάντησε η κλασματική μονάδα και τους κοίταξε παράξενα. Τι έπαθες; Πού είναι η κλασματική σου γραμμή;

Το 3 και το 5 χαμογέλασαν.

- Δεν είμαστε κλάσμα, του απάντησε το 3. Είμαστε απλά το 3 και το 5. Ολόκληροι αριθμοί. Φίλοι και συμμαθητές. Εσένα πώς σε λένε;
- Με λένε Τάκη, απάντησε και συνέχισε το δρόμο του.

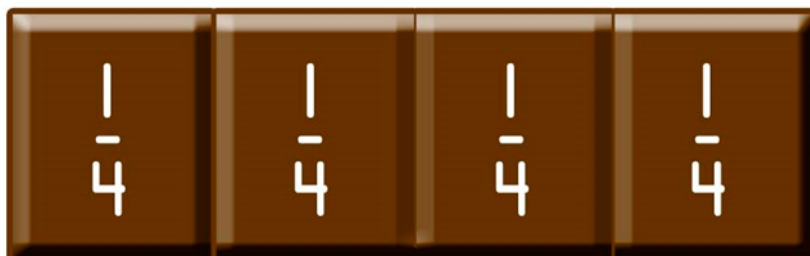
- Μα γιατί είσαι έτσι; Φαίνεσαι τόσο λυπημένος! Μπορούμε να σε βοηθήσουμε; ρώτησε το 5.

Ο Τάκης τούς κοίταξε ίσια στα μάτια. Είχε τόσο μεγάλη ανάγκη να μιλήσει σε κάποιον... Έτσι, άρχισε να τους μιλά για το πρόβλημά του και για τη μεγάλη αγωνία που ένιωθε εκείνη τη στιγμή.

- Πηγαίνω στο σχολείο. Έχω εξετάσεις σήμερα. Και ξέρω πως οι γονείς μου περιμένουν πολλά από μένα. Είμαι, όπως βλέπετε, το $\frac{1}{8}$. Αν τα πάω καλά στις εξετάσεις, οι καθηγητές μου θα αφαιρέσουν μονάδες από τον παρονομαστή μου και η αξία μου θα μεγαλώσει, θα γίνω πιο δυνατός! Αν, όμως, δεν τα πάω καλά, τότε ο παρονομαστής μου θα μεγαλώσει κι άλλο κι εγώ θα γίνω ακόμη πιο μικρός...
- Μα πώς γίνεται αυτό, ρώτησε το 3. Δεν το καταλαβαίνω!
- Είναι απλό, απάντησε το 5 και έβγαλε από την τσέπη του 2 ίδιες σοκολάτες. Χώρισε τη μία σοκολάτα σε 3 ίσα κομμάτια.



- Πόσο είναι το ένα κομμάτι; ρώτησε το 5.
- $\frac{1}{3}$, απάντησε το 3.
- Ωραία, είπε το 5 και έκοψε την άλλη σοκολάτα σε 4 ίσα κομμάτια. Πόσο είναι το 1 κομμάτι;



- $\frac{1}{4}$! Τώρα το κατάλαβα! Όταν κόβω κάτι σε περισσότερα κομμάτια, κάθε κομμάτι είναι πιο μικρό.

Ο Τάκης δεν κάθισε να ακούσει άλλο. Είχε άλλα στο μυαλό του.

- Όλα θα πάνε καλά! Μην ανησυχείς! του είπε το 3 και του έδωσε ένα κομμάτι σοκολάτα. Εμείς θα σε περιμένουμε έξω από το σχολείο μέχρι να τελειώσεις.

Ο Τάκης ανέβηκε αργά τις σκάλες και πέρασε την πόρτα του σχολείου. Το 3 και το 5 τον περίμεναν, όπως του υποσχέθηκαν. Σε δύο ώρες η πόρτα του σχολείου άνοιξε και όλες οι κλασματικές μονάδες άρχισαν να βγαίνουν. Άλλες ήταν χαρούμενες, γιατί μειώθηκε ο παρονομαστής τους και η αξία τους μεγάλωσε και άλλες ήταν λυπημένες, γιατί αυξήθηκε ο παρονομαστής τους και μειώθηκε η αξία τους. Τελευταίος βγήκε ο Τάκης... Ήταν χλωμός και πολύ λυπημένος. Με δυσκολία έσερνε τον νέο του παρονομαστή, ένα καταπράσινο 9!

- Δεν μπορώ να επιστρέψω στο σπίτι, είπε και δάκρυα κύλησαν από τα μάτια του... Νιώθω τόσο μικρός... τόσο ασήμαντος... Άσε που έμαθα πως ο αδερφός μου, από $1/5$ που ήταν έγινε $1/3$! Ντρέπομαι τόσο πολύ! Θα φύγω...
- Μα πού θα πας μόνος σου; ρώτησε το 5...
- Δεν ξέρω... Αυτό που ξέρω είναι ότι δεν θα επιστρέψω, αν δεν ανέβει η αξία μου...
- Δεν μπορούμε να τον αφήσουμε μόνο του σ' αυτήν την κατάσταση, είπε το 5 στο 3, προτείνω να πάμε μαζί του και να τον βοηθήσουμε...
- Συμφωνώ, απάντησε το 3.

Έτσι, η παρέα των τριών φίλων ξεκίνησε για ένα ταξίδι στο άγνωστο... για μια περιπέτεια στη χώρα των κλασμάτων...».

Διαδικασίες

Η διδακτική παρέμβαση υλοποιήθηκε από την ίδια εκπαιδευτικό και στις δύο ομάδες (πειραματική και ελέγχου), προκειμένου ο τρόπος διδασκαλίας και οι πεποιθήσεις της εκπαιδευτικού να μην επηρεάσουν τα ερευνητικά αποτελέσματα, καθώς έχει διαπιστωθεί μέσα από έρευνες ότι οι αντιλήψεις και οι πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού ενδέχεται να επηρεάσουν σε σημαντικό βαθμό τον τρόπο που ο ίδιος επιλέγει και αξιοποιεί ένα αφηγηματικό κείμενο στη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας ή διαδικασίας (Cotti & Schiro, 2004). Η εκπαιδευτικός που υλοποίησε την παρέμβαση παρακολούθησε τους μαθητές των τμήματα της Γ' Δημοτικού που έλαβαν μέρος στην έρευνα, για ένα διάστημα 5 εβδομάδων, πριν την υλοποίηση της παρέμβασης, προκειμένου να εξοικειωθεί μαζί τους και να μελετήσει τη συμπεριφορά τους και τα μαθησιακά τους στυλ, κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

Και στις δύο ομάδες εφαρμόστηκε το ίδιο αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία των κλασμάτων (Λεμονίδης, 2016) και χρησιμοποιήθηκε το ίδιο διδακτικό εγχειρίδιο (βιβλίο μαθητή και τετράδιο εργασιών), το οποίο δημιουργήθηκε από την ερευνήτρια, με βάση τις αρχές και τους στόχους του συγκεκριμένου αναλυτικού προγράμματος.

Κατά την εφαρμογή του προγράμματος στην πειραματική ομάδα, στο εισαγωγικό μέρος της διδασκαλίας, η εκπαιδευτικός διάβαζε στους μαθητές ένα επεισόδιο, μια διδακτική ιστορία, που ήταν δομημένη με βάση τον βασικό διδακτικό στόχο της ενότητας, ενώ παράλληλα προβάλλονταν οι εικόνες που συνόδευαν το κείμενο. Στη συνέχεια, διεξαγόταν μια σύντομη συζήτηση στην τάξη, με αφορμή το περιεχόμενο της αφήγησης και οι μαθητές περνούσαν στην επεξεργασία μιας σειράς δραστηριοτήτων που σχετίζονταν με την ιστορία που άκουσαν και με τους διδακτικούς στόχους της ενότητας. Η ανάγνωση των ιστοριών γινόταν με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές να αλληλοεπιδρούν τόσο με το κείμενο όσο και με την εκπαιδευτικό (Courtade, Lingo, Karp, & Whithy, 2013; Fisher, Flood, Lapp, & Frey, 2004). Οι μαθητές γίνονταν, δηλαδή, ενεργητικοί συμμετέτοχοι στην εκπαιδευτική διαδικασία και όχι παθητικοί ακροατές (National Early Literacy Panel, 2008). Ακολούθως η διδασκαλία περνούσε στο κυρίως μέρος της, δηλαδή στην επεξεργασία των δραστηριοτήτων του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών.

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας της ομάδας ελέγχου, η εισαγωγή στη νέα μαθηματική έννοια γινόταν μέσα από βιωματικές δραστηριότητες που ήταν σύμφωνες με τους στόχους της κάθε διδακτικής ενότητας. Οι μαθητές διερευνούσαν τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών εννοιών, μέσα από την επαφή τους με χειραπτικό εκπαιδευτικό υλικό (λωρίδες κλασμάτων, ομοιώματα αντικειμένων, αριθμογραμμές) και συζητούσαν τις ιδιότητές τους. Στη συνέχεια, η εκπαιδευτικός περνούσε στο κυρίως μέρος της διδασκαλίας, δηλαδή στην επεξεργασία των δραστηριοτήτων του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών.

Συνεπώς, το σημείο διαφοροποίησης των δύο συνθηκών (πειραματικής και ελέγχου) ήταν ο τρόπος εισαγωγής στη νέα έννοια.

Όταν ολοκληρώθηκε η διδακτική παρέμβαση και μετά την έλευση 10 ημερών, χορηγήθηκε στους μαθητές το τεστ τελικής αξιολόγησης.

Προκειμένου να διασφαλιστούν η εγκυρότητα και η αξιοπιστία των πορισμάτων της έρευνας, πραγματοποιήθηκαν δύο είδη τριγωνοποίησης: α) Μεθοδολογική τριγωνοποίηση. Η συλλογή και η επεξεργασία των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσα από την εφαρμογή δύο ερευνητικών μεθόδων, ποιοτικής και ποσοτικής, για τη μελέτη του ίδιου ερευνητικού ζητήματος και β) Τριγωνοποίηση ερευνητών. Στην επεξεργασία και την ερμηνεία των δεδομένων της ποιοτικής έρευνας συμμετείχαν δύο ερευνητές οι οποίοι εργάστηκαν ανεξάρτητα για την εξαγωγή κατηγοριών και στη συνέχεια συζήτησαν τις διαφορές που σημειώθηκαν και κατέληξαν από κοινού στις συγκεκριμένες κατηγορίες.

Αποτελέσματα της έρευνας

Αρχική αξιολόγηση

Από το τεστ αρχικής αξιολόγησης προέκυψε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις μέσες επιδόσεις της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στο τεστ αρχικής αξιολόγησης [$U=691,00$, $p>0,05$]. Πιο συγκεκριμένα, η μέση επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας είναι 6,90 με τυπική απόκλιση 2,157 και η μέση επίδοση των μαθητών της ομάδας ελέγχου 6,95 με τυπική απόκλιση 2,235.

Στη συνέχεια η κάθε ομάδα χωρίστηκε σε τρεις υποομάδες με κριτήριο την επίδοση των μαθητών. Σημειώνεται ότι με τη συγκεκριμένη κατάταξη των μαθητών ήταν σύμφωνες και οι εκτιμήσεις των υπεύθυνων εκπαιδευτικών των τμημάτων που συμμετείχαν στην έρευνα, καθώς ζητήθηκε από τους ίδιους (*a priori*) να κατατάξουν τους μαθητές τους σε τρεις ομάδες με κριτήριο την επίδοσή τους στα μαθηματικά.

Τέλος, πραγματοποιήθηκε σύγκριση των υποομάδων της πειραματικής ομάδας με εκείνες της ομάδας ελέγχου (ανά δύο) προκειμένου να διαπιστωθεί αν είναι ισοδύναμες. Λόγω του μικρού πλήθους των παρατηρήσεων σε κάθε υποομάδα, διενεργήθηκε μη παραμετρικός έλεγχος με τη χρήση του τεστ Mann Whitney. Στον πίνακα 2 που ακολουθεί πραγματοποιείται συγκριτική παρουσίαση των μέσων επιδόσεων των τριών υποομάδων της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου, στις οποίες δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά.

	Πειραματική Ομάδα			Ομάδα Ελέγχου			p
	N	M.O.	T.A	N	M.O.	T.A,	
Υψηλή επίδοση	16	8,95	0,82	18	8,90	0,86	0,986>0,05
Μέση επίδοση	13	6,47	0,70	11	6,33	0,88	0,910>0,05
Χαμηλή επίδοση	9	3,88	0,72	9	3,83	0,76	0,931>0,05

Πίνακας 2: Συγκριτική παρουσίαση των μέσων επιδόσεων των τριών υποομάδων της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου

Τελική αξιολόγηση

Από τον παραμετρικό έλεγχο που εφαρμόστηκε, προέκυψε ότι οι μέσες επιδόσεις της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στο τεστ τελικής αξιολόγησης παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική διαφορά [$t=2,517$, $df = 74$, $p=0,017<0,05$]. Πιο συγκεκριμένα, η μέση επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας είναι 7,89 με τυπική απόκλιση 1,328 και η μέση επίδοση των μαθητών της ομάδας ελέγχου 6,96 με τυπική απόκλιση 1,842.

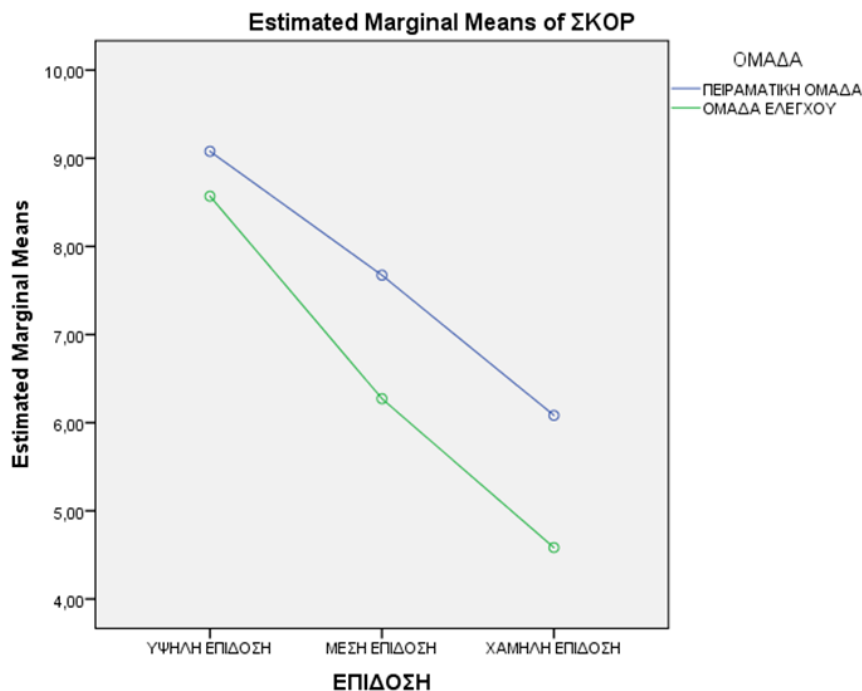
Από τη σύγκριση των υποομάδων της πειραματικής ομάδας με εκείνες της ομάδας ελέγχου (ανά δύο), διαπιστώθηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις επιδόσεις των υποομάδων υψηλής επίδοσης, ενώ αντίθετα οι μαθητές με μέση και χαμηλή επίδοση της πειραματικής ομάδας σημείωσαν σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στο τεστ τελικής αξιολόγησης, σε σύγκριση με τις αντίστοιχες υποομάδες της πειραματικής ομάδας (πίνακας 2).

	Πειραματική Ομάδα			Ομάδα Ελέγχου			p
	N	M.O.	T.A	N	M.O.	T.A,	
Υψηλή επίδοση	16	9,08	0,62	18	8,57	0,92	0,096>0,05
Μέση επίδοση	13	7,67	0,13	11	6,27	0,69	0,00<0,05
Χαμηλή επίδοση	9	6,08	0,73	9	4,58	0,67	0,002<0,05

Πίνακας 3: Συγκριτική παρουσίαση των μέσων επιδόσεων των τριών υποομάδων της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου

Από τα αποτελέσματα της διπαραγοντικής ανάλυσης προκύπτει στατιστικώς σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (ομάδα*υποομάδα επίδοσης) [$F=4,036$, $p=0,022<0,05$]. Η διαφορά αυτή αντιστακώνει το γεγονός ότι η επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας είναι καλύτερες από εκείνες της ομάδας ελέγχου, ενώ επιπλέον η επίδοσή τους επηρεάζεται και από το αν οι μαθητές ανήκουν στην ομάδα υψηλής, μέσης ή χαμηλής επίδοσης.

Επίσης, στατιστικώς σημαντικές είναι και οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα «ομάδα» [$F=44,89$, $p=0,00<0,05$] και του παράγοντα «υποομάδα επίδοσης» [$F=147,08$, $p=0,00<0,05$].



Γράφημα 1: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (ομάδα και υποομάδα επίδοσης)

Επίδοση των μαθητών στους επιμέρους γνωστικούς τομείς

Προκειμένου να διαπιστωθεί σε ποια επιμέρους γνωστικά πεδία σημειώθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου, οι δραστηριότητες του πρωτοκόλλου τελικής αξιολόγησης χωρίστηκαν σε έξι επιμέρους τομείς.

Οι επιμέρους γνωστικοί τομείς που προέκυψαν είναι οι εξής: Ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος όλου, χρήση της αριθμογραμμής, σύγκριση κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων, δημιουργία και χειρισμός αναπαραστάσεων και επίλυση προβλήματος.

Από τη σύγκριση των επιδόσεων των δύο ομάδων στους επιμέρους γνωστικούς τομείς διαπιστώθηκε ότι οι επιδόσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου δεν παρουσιάζουν διαφορά στις δραστηριότητες που αφορούν στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος όλου και στη χρήση της αριθμογραμμής, ενώ διαφέρουν στατιστικά, υπέρ της πειραματικής ομάδας, στις δραστηριότητες που αφορούν την ισοδυναμία και τη

σύγκριση κλασμάτων, τη δημιουργία αναπαραστάσεων και την επίλυση προβλήματος. Τα

		M.O	T.A	U	p
Ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος όλου	Πειραματική ομάδα	1,87	0,30	683,50	0,574
	Ομάδα ελέγχου	1,83	0,33		
Χρήση της αριθμογραμμής	Πειραματική ομάδα	1,63	0,47	676,50	0,607
	Ομάδα ελέγχου	1,57	0,51		
Σύγκριση κλασμάτων	Πειραματική ομάδα	1,84	0,44	465,00	0,007
	Ομάδα ελέγχου	1,50	0,54		
Ισοδυναμία κλασμάτων	Πειραματική ομάδα	0,39	0,21	551,00	0,029
	Ομάδα ελέγχου	0,28	0,25		
Αναπαραστάσεις	Πειραματική ομάδα	2,16	0,67	528,50	0,040
	Ομάδα ελέγχου	1,79	0,79		
Επίλυση προβλήματος	Πειραματική ομάδα	1,47	0,40	515,50	0,025
	Ομάδα ελέγχου	1,19	0,55		

αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα (πίνακας 4) που ακολουθεί.

Πίνακας 4: Επιδόσεις της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στους επιμέρους γνωστικούς τομείς

Αποτελέσματα της ανάλυσης του ημερολογίου εκπαιδευτικού

Οι καταγραφές των ημερολογίων αναλύθηκαν με τη μέθοδο της θεματικής ποιοτικής ανάλυσης. Πρόκειται για μια μέθοδο εντοπισμού, περιγραφής, αναφοράς και «θεματοποίησης» νοηματικών μοτίβων που επαναλαμβάνονται και τα οποία προκύπτουν από τα ερευνητικά δεδομένα (Braun & Clark, 2006; Holloway & Tondres, 2003; Roulston, 2001). Κατά την έκθεση των δεδομένων που προέκυψαν από την επεξεργασία των καταγραφών, όπου κρίθηκε αναγκαίο, προστέθηκαν αυτούσια αποσπάσματα τόσο από τα ημερολόγια, όσο και από τις απομαγνητοφωνήσεις των διδασκαλιών.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση του ημερολογίου, αναφορικά με τον άξονα «Συνολική αποτίμηση της διδασκαλίας».

Κλίμα της τάξης
Θετικό κλίμα
Απουσία προβλημάτων συμπεριφοράς
Συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών

Συνολική αποτίμηση της διδασκαλίας	Ταύτιση των μαθητών με τον βασικό ήρωα της ιστορίας
	Ερωτήματα των μαθητών για την εξέλιξη και το τέλος της ιστορίας
	Εικασίες των μαθητών για την εξέλιξη και το τέλος της ιστορίας
	Δημιουργία διδακτικών καταστάσεων
	Ερωτήματα των μαθητών για την εξέλιξη της ιστορίας που συνδέονταν με τα μαθηματικά
	Δημιουργία καταστάσεων γνωστικής σύγκρουσης

Πίνακας 5: Συγκεντρωτικός πίνακας ανάλυσης του άξονα «Συνολική αποτίμηση της διδασκαλίας»

Θετικό κλίμα στην τάξη και απουσία προβλημάτων συμπεριφοράς

Το κλίμα της τάξης, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολύ θετικό, ενώ δεν σημειώθηκαν προβλήματα συμπεριφοράς. Κατά τη διάρκεια της αφήγησης, η προσοχή των μαθητών ήταν στραμμένη στην εξέλιξη της ιστορίας και η καλή τους διάθεση διατηρούνταν και κατά τα επόμενα στάδια της διδασκαλίας.

«Στην τάξη επικρατούσε ένα κλίμα συνεργασίας, ενώ δε σημειώθηκαν προβλήματα συμπεριφοράς. Το γεγονός αυτό βοήθησε πολύ στη διεξαγωγή της διδασκαλίας» (απόσπασμα από το ημερολόγιο της 5ης ενότητας).

Ταύτιση των μαθητών με τους ήρωες της ιστορίας

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης που διεξαγόταν μετά την αφήγηση, οι μαθητές εξέφραζαν τη γνώμη τους και διατύπωναν εικασίες τόσο για την εξέλιξη της ιστορίας και τον τρόπο που αυτή θα ολοκληρωνόταν, όσο και για τις προθέσεις και τα συναισθήματα των πρωταγωνιστών της. Ιδιαίτερα οι μαθητές με χαμηλή επίδοση φάνηκε να ταυτίζονται περισσότερο με τον βασικό ήρωα της ιστορίας και να νοιάζονται για τη μοίρα του.

«Ο Κ. (μαθητής με χαμηλή επίδοση) ρωτούσε συνέχεια αν ο Τάκης θα τα καταφέρει στο τέλος» (απόσπασμα από το ημερολόγιο της 2ης ενότητας).

«Η Μ. (μαθήτρια με χαμηλή επίδοση) εξέφρασε την ανησυχία μήπως ο φρουρός ανακαλύψει ότι το 3 και το 5 είναι ολόκληροι αριθμοί και ότι παριστάνουν το κλάσμα $\frac{3}{5}$ » (απόσπασμα από το ημερολόγιο της 3ης ενότητας).

«Ο Ε. (μαθητής με υψηλή επίδοση) εξέφρασε την άποψη ότι όλα θα πάνε καλά στο τέλος, γιατί ο Τάκης έχει καλό χαρακτήρα και καλούς φίλους που τον αγαπάνε» (απόσπασμα από το ημερολόγιο της 5ης ενότητας).

Δημιουργία διδακτικών καταστάσεων με αφορμή την ιστορία

Η αφήγηση γεννούσε ερωτήματα στους μαθητές. Και μέσα από τη συζήτηση που ακολουθούσε, οι μαθητές μιλούσαν όχι πια για την ιστορία που άκουσαν, αλλά για τα μαθηματικά, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Το αφηγηματικό πλαίσιο της ιστορίας έχει ως εξής: Ο Τάκης, ο πρωταγωνιστής της ιστορίας, είναι μία κλασματική μονάδα, το $\frac{1}{8}$. Στις εξετάσεις του σχολείου οι επιδόσεις του δεν ήταν καλές, γι' αυτό οι καθηγητές τού πρόσθεσαν μια μονάδα στον παρονομαστή του, μειώνοντας την αξία του.

Μαθητής 1: Και, κυρία... άμα...

Εκπαιδευτικός: Τι;

Μαθητής 1: Άμα ο Τάκης πήγαινε καλά;

Εκπαιδευτικός: Ναι;

Μαθητής 1: Και ο παρονομαστής του γινόταν 0, τότε;

Εκπαιδευτικός: Τι τέλεια ερώτηση, Α.! Ο παρονομαστής του δεν θα μπορούσε να γίνει 0, θα μπορούσε, όμως να γίνει 1. Τότε ποιο κλάσμα θα ήταν;

Μαθητής 1: ... Ένα πρώτο; (η εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα $\frac{1}{1}$)

Εκπαιδευτικός: Και τι είναι το ένα πρώτο; Πώς μπορώ να το εξηγήσω. Για σκεφτείτε το λίγο. Ποιος μπορεί να βοηθήσει; Χέρια θέλω να βλέπω, δεν φωνάζουμε...

Μαθητής 1: Έχω μία σοκολάτα και δεν την κόβω... την παίρνω όλη.

Εκπαιδευτικός: Τέλεια! Και τι έχω;

Μαθητής 1: Μία ολόκληρη σοκολάτα...

Εκπαιδευτικός: Άρα, ο Τάκης τι θα ήταν;

Μαθητής 1: ΟΛΟΚΛΗΡΟΣ!

Εκπαιδευτικός: Μπράβο! Ο Τάκης θα ήταν, λοιπόν, μονάδα, θα ήταν ολόκληρος αριθμός... Και για να φανταστούμε, τι θα γινόταν αν ο Τάκης τα πήγαινε πολύ χάλια; Αν γινόταν, για παράδειγμα $\frac{1}{100}$; (η εκπαιδευτικός το γράφει στον πίνακα).

Μαθητής 1: Θα γινόταν πολύ μικρός, ψείρα...

Μαθήτρια 2: Κυρία, το ένα εκατοστό το λέμε για...

Εκπαιδευτικός: Ναι;

Μαθήτρια 2: Για το μέτρο, ε;

Εκπαιδευτικός: Πολύ σωστά! Τι είναι το $1/100$, λοιπόν;

Μαθήτρια 2: Χωρίζω το μέτρο σε 100 μέρη... και παίρνω το 1 (δείχνει με τα δυο του δάχτυλα)... πολύ μικρό...

Επιπλέον, ορισμένες φορές, η αφήγηση έφερνε τους μαθητές σε γνωστική σύγκρουση, καθώς προσπαθούσαν να εξηγήσουν έννοιες και διαδικασίες, διαμορφώνοντας και πάλι ένα κλίμα για γόνιμη συζήτηση, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Αφηγηματικό πλαίσιο: Καθώς η είσοδος στο Κλασματοχώρι επιτρεπόταν μόνο στα κλάσματα, το 5 πήρε ένα κλαδί, το 3 ανέβηκε πάνω του και έγιναν το κλάσμα $3/5$, προκειμένου να ξεγελάσουν τον φρουρό.

Μαθητής 1: Κυρία, γιατί δεν ανέβηκε το 5 πάνω στο 3;

Μαθητής 2: Δεν γίνεται ρε, το 5 είναι πιο μεγάλο και πιο βαρύ... Ε, κυρία;

Εκπαιδευτικός: Κι όμως, θα μπορούσε... Αν το 5 κουραζόταν, θα μπορούσαν να αλλάξουν θέση. Για να δούμε, ποιο κλάσμα θα δημιουργούνταν τότε;

Μαθητής 1: Το $5/3$ (η εκπαιδευτικός το γράφει στον πίνακα).

Εκπαιδευτικός: Τι σημαίνει $5/3$, ποιος θα μου πει; Ε.;

Μαθητής 3: Κυρία, δεν γίνεται...

Εκπαιδευτικός: Τι δεν γίνεται;

Μαθητής 3: Δεν μπορεί, κυρία... Τι; Κόβω κάτι σε 3 κομμάτια, μια σοκολάτα... και παίρνω τα 5; Δεν γίνεται...

Εκπαιδευτικός: Για να δούμε τι λένε και οι άλλοι. Γίνεται παιδιά; Για να το σκεφτούμε λίγο... Τι λέτε;

Μαθητής 4: Μάλλον δεν γίνεται...

Εκπαιδευτικός: Για προσέξτε λίγο. Χθες δεν μάθαμε ότι μπορούμε να προσθέσουμε τις κλασματικές μονάδες;

Μαθητής 4: Ναι

Εκπαιδευτικός: Τι είναι λοιπόν το $5/3$; Πώς μπορώ να το σχηματίσω; Ποιος θα μου πει; Ν. θα βοηθήσεις;

Μαθητής 5: $1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$ (η εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα)

Εκπαιδευτικός: Πολύ ωραία! Για να δούμε τώρα. Έχω δύο σοκολάτες και τις κόβω σε 3 ίσα κομμάτια την καθεμιά (η εκπαιδευτικός σχεδιάζει στον

πίνακα). Τι μέρος της σοκολάτας είναι το κάθε κομμάτι. Δεν φωνάζουμε, είπαμε. Ε., μπορείς να μας πεις;

Μαθητής 6: $1/3$

Εκπαιδευτικός: Πολύ ωραία! Για να μετρήσουμε τώρα μέχρι το $5/3$. Όλοι μαζί.

Όλοι οι μαθητές: $1/3$, $2/3$, $3/3$, $4/3$, $5/3$... (Η εκπαιδευτικός, ενώ οι μαθητές απαγγέλλουν, γραμμοσκιάζει τα αντίστοιχα κομμάτια).

Εκπαιδευτικός: Τέλεια! Τι έχουμε λοιπόν; Ποιος θα μου πει; Β.;

Μαθητής 7: Τι;

Εκπαιδευτικός: Για πες μας. Τι έχουμε εδώ. Δες το σχήμα.

Μαθητής 7: Μια ολόκληρη σοκολάτα και δύο κομμάτια.

Εκπαιδευτικός: Μπράβο! Αλλιώς, πώς μπορώ να το πω; Μία ολόκληρη σοκολάτα και...

Μαθητής 8: $2/3$

Εκπαιδευτικός: Πολύ ωραία! Επομένως, θα μπορούσε το 5 να ανέβει πάνω στο 3; Τι λέτε;

Όλοι οι μαθητές: Ναι! Μπορεί!

Εκπαιδευτικός: Ωραία! Σε λίγο θα το δούμε και στην αριθμογραμμή... Ανοίξτε τώρα τα βιβλία σας.

Η ανάγκη, λοιπόν, για την εξήγηση των εννοιών και των διαδικασιών ξεκινούσε από τους ίδιους τους μαθητές, γεγονός που τους ενέπλεκε με τρόπο φυσικό στη μαθησιακή διαδικασία. Στο προηγούμενο παράδειγμα, δόθηκε στην εκπαιδευτικό η ευκαιρία να μιλήσει για τα καταχρηστικά κλάσματα, χωρίς να αναφερθεί στον συγκεκριμένο όρο, μέσα από την επιθυμία των ίδιων των μαθητών να διερευνήσουν τα δεδομένα της ιστορίας που άκουσαν.

Συμπεράσματα - Συζήτηση

Επίδραση της αφήγησης στην επίδοση των μαθητών στα κλάσματα

Ο βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση του ρόλου που μπορεί να διαδραματίσει η χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων σε μαθητές της Τρίτης Δημοτικού. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψε ότι οι επιδόσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας στο τεστ της τελικής αξιολόγησης ήταν υψηλότερες από εκείνες των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα ερευνών που διεξήχθησαν στον διεθνή χώρο, στο πλαίσιο των οποίων διαπιστώθηκε ότι οι επιδόσεις των μαθητών στα Μαθηματικά σημειώνουν βελτίωση, όταν στη διδασκαλία εντάσσονται και αξιοποιούνται αφηγηματικά κείμενα που το περιεχόμενό τους αφορούσε σε μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες (Capraro & Capraro, 2006; Casey et

al., 2008; Mink & Fraser, 2005; Bintz et al., 2011; Jennings et al., 1992; Moyer, 2000; Beard, 2003; Lemonidis & Kaiafa, 2019).

Δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στις επιδόσεις των μαθητών με υψηλή επίδοση ενώ αντίθετα οι μαθητές με μέση και χαμηλή επίδοση της πειραματικής ομάδας σημείωσαν σημαντικά υψηλότερη επίδοση σε σχέση με τους αντίστοιχους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Το γεγονός αυτό οδηγεί στη διαπίστωση ότι οι μαθητές που ωφελούνται περισσότερο από τη χρήση της αφήγησης είναι οι μαθητές με μέση και κυρίως εκείνοι με χαμηλή επίδοση.

Φαίνεται πως η ένταξη αφηγηματικών κειμένων στη διδασκαλία των κλασμάτων συνέβαλε στην ανάπτυξη κινήτρων μάθησης και στην αύξηση του ενδιαφέροντος των μαθητών με χαμηλή επίδοση (Van den Heuvel Panhuizen, Boogaard & Doig, 2009; Mink & Fraser, 2005; Bintz et al., 2011; Jennings et al., 1992; Young, 2001). Οι μαθητές που σημειώνουν χαμηλές επιδόσεις ή έχουν χαμηλά κίνητρα μάθησης είναι πολύ πιθανό να εστιάσουν την προσοχή τους στο γνωστικό αντικείμενο, να μελετήσουν και να εργαστούν συστηματικά, όταν ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί την αφήγηση στη διδασκαλία του (U.S. Department of Education, 1986). Ωστόσο, και οι μαθητές με υψηλές επιδόσεις είναι δυνατόν να ωφεληθούν από αυτήν τη διαδικασία, προσεγγίζοντας με διαφορετικό τρόπο τις μαθηματικές έννοιες και κατανοώντας σε βάθος τους τρόπους με τους οποίους τα μαθηματικά συνδέονται με την καθημερινή ζωή και τον κόσμο της φαντασίας (Price, 2009).

Επίδραση της αφήγησης στην ανάπτυξη των επιμέρους μαθηματικών ικανοτήτων

Οι επιμέρους μαθηματικές ικανότητες στις οποίες υπερείχαν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας, σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου, ήταν η σύγκριση κλασμάτων, η ισοδυναμία κλασμάτων, η δημιουργία αναπαραστάσεων και η επίλυση προβλήματος, ενώ οι επιδόσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου δεν διέφεραν στις δραστηριότητες που αφορούσαν στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος - όλου» και την τοποθέτηση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή.

Η ισοδυναμία και η σύγκριση κλασμάτων αποτελούν διαδικασίες που προϋποθέτουν εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και συνδέονται με την ανάπτυξη της αίσθησης του κλάσματος (Fennell & Krap, 2016; Carvalho & da Ponte, 2013). Φαίνεται πως η αφήγηση συντέινε στη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι αφηγήσεις πρόσφεραν στους μαθητές ένα οικείο και μεστό νοήματος πλαίσιο προκειμένου οι ίδιοι να διερευνήσουν, να χειριστούν και να αποδώσουν νόημα στις μαθηματικές ιδέες με τις οποίες έρχονταν σε επαφή (Griffiths & Clyne, 1991). Η αφήγηση έδωσε υπόσταση στις αφηρημένες έννοιες και διαδικασίες καθιστώντας τις πιο συγκεκριμένες και άμεσες, ενώ συγχρόνως η ένταξη των εννοιών μέσα σε ένα πλαίσιο με νόημα συνέβαλε τόσο στην κατανόησή τους όσο και στη διατήρηση της αποκτηθείσας γνώσης στη μνήμη (Szurmak & Thuna, 2013). Η αφήγηση παρείχε, δηλαδή, στους μαθητές τη δομή ενός συστήματος για να θυμούνται όσα έμαθαν αλλά και να ενσωματώνουν τις νέες πληροφορίες στο ήδη υπάρχον σύστημα γνώσεων (McLellan, 2006). Η αξιοποίηση της αφήγησης στη διδασκαλία των μαθηματικών συνέβαλε στη δημιουργία ενός περιβάλλοντος μάθησης το οποίο ήταν πλούσιο σε ερεθίσματα, γεγονός που συνέβαλε στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών

(Capraro & Capraro, 2006a; Van den Heuvel-Panhuizen, Boogaard & Doig, 2009; Whitin & Whitin, 2001). Οι μαθητές που ενδεχομένως αντιμετώπιζαν δυσκολίες με κάποιες έννοιες αποκόμισαν σημαντικά οφέλη από την εφαρμογή μιας διδακτικής προσέγγισης που ήταν λιγότερο «τρομακτική» και περισσότερο διασκεδαστική (Price, 2009).

Οι επιδόσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας ήταν υψηλότερες και στις διαδικασίες δημιουργίας και χειρισμού των αναπαραστάσεων του κλάσματος. Οι αναπαραστάσεις των μαθητών χαρακτηρίζονταν από μεγαλύτερη σαφήνεια, γεγονός που συνέβαλε στο να σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις στις δραστηριότητες που σχετίζονταν με τη σύγκριση, την ισοδυναμία και την επίλυση προβλήματος. Η σχέση ήταν, μάλλον, αμφίδρομη. Οι μαθητές, δηλαδή, που δημιουργούσαν ορθές και ξεκάθαρες αναπαραστάσεις του κλάσματος, χειρίζονταν με αποτελεσματικό τρόπο και με μεγαλύτερη ευχέρεια τα κλάσματα και τις μεταξύ τους σχέσεις και από την άλλη πλευρά, οι μαθητές που είχαν κατανοήσει επαρκώς την έννοια του κλάσματος και τις σχέσεις μεταξύ των κλασμάτων, ήταν σε θέση να αναπαραστήσουν με σαφήνεια τον συλλογισμό τους μέσα από τη χρήση σχημάτων και εικόνων. Φαίνεται πως οι οπτικές αναπαραστάσεις που αντλούσαν οι μαθητές από τις εικονογραφημένες ιστορίες τούς παρείχαν επιπλέον πληροφορίες για τις μαθηματικές έννοιες και συνέβαλαν στη δημιουργία πιο ζωντανών νοερών αναπαραστάσεων του κλάσματος (Monroe & Livingston, 2002; Berkowitz, 2011; Elia, van den Heuvel-Panhuizen & Georgiou, 2010).

Οι εικόνες που συνόδευαν τις αφηγήσεις λειτούργησαν πολλές φορές ως αναπαραστάσεις για τους μαθητές ή ως σκαλωσιές προκειμένου να προσεγγίσουν οι ίδιοι τις υποκείμενες μαθηματικές ιδέες και έννοιες (Lovitt & Clarke, 1992; Van den Heuvel-Panhuizen, Boogaard, & Doig, 2009). Οι αναπαραστάσεις που ανέπτυξαν οι ίδιοι οι μαθητές με αφορμή το περιεχόμενο της αφήγησης υποστήριξαν τη μαθηματική τους κατανόηση. Οι μαθητές μετασχημάτισαν τις ιδέες που εντόπισαν μέσα στις ιστορίες και στη συνέχεια ανέπτυξαν τις δικές τους, προσωπικές, αναπαραστάσεις. Αυτή η διαδικασία μετασχηματισμού ολοκληρωνόταν στα εξής στάδια: αναστοχασμός πάνω στις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της έννοιας του κλάσματος, διαπραγμάτευση της έννοιας μέσα από τη συζήτηση που πραγματοποιούνταν στην τάξη και, τέλος, αναδόμησή της σε μια νέα μορφή η οποία ήταν δημιούργημα του ίδιου του μαθητή (Whitin & Whitin, 2001).

Η επίλυση προβλήματος, τέλος, υπήρξε ένα πεδίο όπου οι επιδόσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας ήταν υψηλότερες από εκείνες των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλήματος διαπιστώθηκε και από άλλες έρευνες (Casey et al., 2008; Ανέστη και Τρανταφυλλίδης, 2005; Smith, 1996; Jacobs & Rak, 1997; Melser & Leitze, 1999; Young & Marroquin, 2006). Το γεγονός ότι οι μαθηματικές έννοιες ήταν ενταγμένες μέσα σε ένα πλαίσιο που είχε νόημα για τους μαθητές, τους έδωσε την ευκαιρία να δημιουργήσουν πλούσιες αναπαραστάσεις, να διερευνήσουν τα χαρακτηριστικά των εννοιών μέσα σε διαφορετικές περιστάσεις και να παρακολουθήσουν την ανάπτυξή τους ταυτόχρονα με την εξέλιξη της ιστορίας και τη δράση των πρωταγωνιστών.

Μέσα από την αφήγηση συχνά συνδέονται η διαδικασία επίλυσης μαθηματικού προβλήματος και οι διαδικασίες που εμπλέκονται κατά την προσπάθεια του αναγνώστη ή του ακροατή να κατανοήσει τα επεισόδια μιας ιστορίας (Smith, 1996). Καθώς η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών πραγματοποιούνται παράλληλα με την εξέλιξη της ιστορίας, δινόταν στους μαθητές η ευκαιρία να αντιληφθούν πώς «συμπεριφέρεται» το κλάσμα, με ποιους τρόπους μεταβάλλεται η αξία του και να κατανοήσουν τι πρέπει να λάβουν υπόψη τους όταν συγκρίνουν δύο κλάσματα με κοινό αριθμητή ή κοινό παρονομαστή. Στη συνέχεια, μπορούσαν να μεταφέρουν τη γνώση αυτή στην επίλυση προβλημάτων με ανάλογο περιεχόμενο.

Οι επιδόσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου δεν διέφεραν στις δραστηριότητες που σχετίζονταν με την ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος όλου» και την τοποθέτηση κλασμάτων στη διαβαθμισμένη αριθμογραμμή. Η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» έχει, χωρίς αμφιβολία, σημαντικά πλεονεκτήματα, καθώς είναι πολύ συγκεκριμένη και εύκολα προσεγγίσιμη από τους μαθητές, ειδικά όταν αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά την έννοια του κλάσματος. Ωστόσο, η συγκεκριμένη ερμηνεία συνδέεται με ορισμένους περιορισμούς, καθώς δεν είναι δυνατόν να υποστηρίξει την αναπαράσταση των αρνητικών κλασμάτων, είναι δύσκολο να υποστηρίξει την αναπαράσταση κλασμάτων με μεγάλους όρους (αριθμητή και παρονομαστή), ενώ επιπλέον, δεν ενδείκνυται για την αναπαράσταση των καταχρηστικών κλασμάτων (Mack, 1993; Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Ερευνητικά δεδομένα (Siegler & Ramani, 2009; Rittle-Johnson & Koedinger, 2009) υποστηρίζουν το γεγονός ότι η έμφαση στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρησης μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα στην εννοιολογική κατανόηση του της έννοιας του κλάσματος.

Το γεγονός ότι οι επιδόσεις των δύο ομάδων δεν διέφεραν στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρους - όλου» και στην τοποθέτηση κλασμάτων στη διαβαθμισμένη αριθμογραμμή ίσως σημαίνει ότι οι μαθητές, τουλάχιστον στην Τρίτη Δημοτικού, δυσκολεύονται ακόμη να δουν το κλάσμα ως μέτρηση και αντιμετωπίζουν και τη διαβαθμισμένη αριθμογραμμή με τη λογική του «μέρους – όλου», δηλαδή με τη λογική του «χωρίζω και παίρνω». Βέβαια, η διαπίστωση αυτή αποτελεί μια υπόθεση η οποία χρήζει περαιτέρω έρευνας.

Αναφορές

- Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *Journal of Educational Research*, 90(6), 375-380.
- Anderson, A., Anderson, J. & Shapiro, J. (2004). Mathematical discourse in shared storybook reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(1), 5–33.
- Ανέστη, Δ., & Τριανταφυλλίδης, Τ. (2005). Η διαμόρφωση μιας κοινότητας μάθησης μέσα από τη διδακτική σύνδεση λογοτεχνίας και μαθηματικών. *Πρακτικά 1ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*, Αθήνα, σελ. 259-268.

- Balley, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 447–455.
- Beard, L.A. (2003). *The effects of integrated mathematics and children's literature instruction on mathematics achievement and mathematics anxiety by gender*. Doctoral dissertation. University of Southern Mississippi, Hattiesburg.
- Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323–341.
- Berkowitz, D. (2011). Oral storytelling building community through dialogue, engagement, and problem solving. *Young Children*, 66(2), 36-40.
- Bintz, W.P., Moore, S.D., Wright, P., & Dempsey, L. (2011). Using literature to teach measurement. *The Reading Teacher*, 65(1), 58-70.
- Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101.
- Capraro, R.M., & Capraro, M. M. (2006a). Are You Really Going to Read Us A Story? Learning Geometry Through Children's Mathematics Literature. *Reading Psychology*, 27(1), 21-36.
- Carvalho, R., & da Ponte, J. P. (2013). Student's mental computation strategies with rational numbers represented as fractions. *Paper presented at Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*, Antalya.
- Casey, B. (2004). Mathematics problem-solving adventures: A language-arts-based supplementary series for early childhood that focuses on spatial sense. In D. Clements & J. Samara (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 377–389). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Casey, B., Erkut, S., Ceder, I., & Young, J. M. (2008). Use of a storytelling context to improve girls' and boys' geometry skills in kindergarten. *Journal of Applied Developmental Psychology* 29, 29–48.
- Cohen, L. & Manion, L., Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Cotti, R., & Schiro, M. (2004). Connecting teacher beliefs to the use of children's Literature in the teaching of mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education* 7, 329–356.
- Courtade, G. R., Lingo, A. S., Karp, K. S., and Whitney, T. (2013). Shared story reading. Teaching Mathematics to Students With Moderate and Severe Disabilities. *Teaching Experimental Children*, 45, 34–44.

- Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Georgiou, A. (2010). The Role of Pictures in Picture Books on Children's Cognitive Engagement with Mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, 18(3), 125-147.
- Fennell, F. S., Faulkner, L. R., Ma, L., Schmid, W., Stotsky, S., Wu, H.-H., et al. (2008). *Report of the Task Group on Conceptual Knowledge and Skills*. Washington DC: U.S. Department of Education, The Mathematics Advisory Panel.
- Fennell, F., & Karp, K. (2016). Fraction Sense: Foundational Understandings. *Journal of Learning Disabilities*, 50(6), 648-650.
- Fisher, D., Flood, J., Lapp, D., & Frey, N. (2004). Interactive read-alouds: Is there a common set of implementation practices? *The Reading Teacher*, 58(1), 8-17.
- Flevaris, L. M. & Schiff, J. L. (2014). Learning mathematics in two dimensions: A review and look ahead at teaching and learning early childhood mathematics with children's literature. *Frontiers in Psychology*, 5, 1-12.
- Griffiths, R., & Clyne, M. (1991a). The power of story: Its role in learning mathematics. *Math Teaching*, 135, 42-45.
- Jacobs, A., & Rak, S. (1997). Mathematics and Literature: A winning combination. *Teaching Children Mathematics* 4(3), 156-157.
- Jennings, C.M., Jennings, J.E., Richey, J., & Dixon-Krauss, L.D. (1992). Increasing interest and achievement in mathematics through children's literature. *Early Childhood Research Quarterly*, 7(2), 263-276.
- Holloway, I., & Todres, L. (2003). The status of method: flexibility, consistency and coherence. *Qualitative Research*, 3(3), 345-357.
- Koellner, K., Wallace, F. H., & Swackhamer, L. (2009). Integrating literature to support mathematics learning in middle school. *Middle School Journal*, 41(2), 30-39.
- Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη.
- Lemonidis, Ch. & Kaiafa I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *Menon: Online Journal of Educational Research*, 1st Thematic Issue, 61-74.
- Lemonidis, Ch. & Kaiafa I. (2019). The Effect of Using Storytelling Strategy on Students' Performance in Fractions. *Journal of Education and Learning*, 8(2), 165 - 175.
- Lewis, B. L., Long, R., & Mackay, M. (1993). Fostering communicating in mathematics using children's literature. *Arithmetic Teacher*, 40(8), 470-474.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201-221.

- Lovitt, C., & Clarke, D. (1992). *The Mathematics Curriculum and Teaching Program (MCTP): Professional Development Package Activity Bank* (Vol.2). Carlton, VIC: Curriculum Cooperation.
- Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding. The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 85–105). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- McLellan, H. (2006). Corporate storytelling perspectives. *Journal for Quality and Participation*, 29, 17-20.
- Melser, N. & Leitze, A. (1999). Connecting Language Arts and Mathematical Problem Solving in the Middle Grades. *Middle School Journal*, 31(1), 48-54.
- Μητακίδου, Σ., & Τρέσσου, Ε. (2005). *Διδάσκοντας Γλώσσα και Μαθηματικά με Λογοτεχνία*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.
- Mink, D. V., & Fraser, B. J. (2005). Evaluation of a K–5 mathematics program which integrates children's literature: Classroom environment and attitudes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 3, 59-85.
- Mitchell, E. S. (1986). Multiple triangulation: a methodology for nursing science. *Advances in nursing Science*, 8(3), 18-26.
- Morse, J. M. (1991). Approaches to Qualitative–Quantitative Methodological Triangulation. *Nursing Research*, 40(1), 120-123.
- Monroe, E. E., & Livingston, N. (2002). It figures: Language and mathematics add up through children's literature. *The Dragon Lode*, 20(2), 37-41.
- Moyer, P.S. (2000a). A remainder of one: Exploring partitive division. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 45-54.
- National Early Literacy Panel. (2008). *Developing early literacy: Report of the national early literacy panel*. Washington, DC: National Institute for Literacy. Retrieved from <http://lincs.ed.gov/publications/pdf/NELPReport09.pdf>
- Nesmith, S. & Cooper, S. (2010). Trade books in the mathematics classroom: The impact of many, varied perspectives on determinations of quality. *Journal of Research in Childhood Education*, 24(4), 279–297.
- Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26, 400–417.
- Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
- Perger, P. (2011). Identifying mathematics in children's literature: Year seven student's results. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S. Thornton (Eds.), *Mathematics:*

- Traditions and [new] practices. Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Adelaide: MERGA.
- Price, R. R. (2009). *Using Children's Literature to Teach Mathematics*. NC: Quantile.
- Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons on concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, 79, 483–500.
- Roulston, K. (2001). Data analysis and 'theorizing as ideology'. *Qualitative Research*, 1(3), 279–302.
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., et al (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23, 691–697.
- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17, 13–19.
- Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 545–560.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62, 273–296.
- Smith, J. J. (1996). Counting On Company Row. *Teaching Children Mathematics*, 3(1), 34–38.
- Szurmak, J., & Thuna, M. (2013). Tell Me a Story: The Use of Narrative as a Tool for Instruction. *Indianapolis, IN*, 546–552.
- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453–467.
- Vamakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28, 181–209.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Boogaard, S., & Doig, B. (2009). Picture Books Stimulate the Learning of Mathematics. *Australian Journal of Early childhood*, 34(3), 30–39.
- van Oers, B. (2013). Communicating about number: Fostering young children's mathematical orientation in the world. In L. D. English & J. T. Mulligan (Eds), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 183 – 203). New York: Springer.
- Whitin, P., & Whitin, D. (2001). Using literature to invite mathematical representations. In A.A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (2001 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 228–237). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Wilburne, J. M. & Napoli, M. (2008). Connecting Mathematics and literature: An analysis of pre-service education school teachers' changing beliefs and knowledge. *IUMPST: The Journal*, 2, 1-10.
- Young, J. E. (2001). Why are we reading a book during math time?: How mathematics and literature relate. The Dragon Lode. *IRA Children's Literature and Reading Special Interest Group* 19(2), 13-18.
- Young, E., & Marroquin, C. (2006). Posing problems from children's literature. *Teaching Children Mathematics*, 12, 362-366.