

---

# Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

---

No 15 (2021)

---

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

---

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ: ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

*Σωτήριος Κατσομήτρος (Sotirios Katsomitros),  
Γεώργιος Ψυχάρης (Giorgios Psycharis)*

doi: [10.12681/enedim.20943](https://doi.org/10.12681/enedim.20943)

---

Copyright © 2021, Σωτήριος Κατσομήτρος, Γεώργιος Ψυχάρης



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

### To cite this article:

Κατσομήτρος (Sotirios Katsomitros) Σ., & Ψυχάρης (Giorgios Psycharis) Γ. (2021). ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ: ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (15), 60–80. <https://doi.org/10.12681/enedim.20943>

---

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ: ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Κατσομήτρος Σωτήριος και Ψυχάρης Γιώργος

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

[sotkatso@gmail.com](mailto:sotkatso@gmail.com), [gpsych@math.uoa.gr](mailto:gpsych@math.uoa.gr)

*Περίληψη:* Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται έρευνα που στοχεύει στη μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (της Ελένης) μέσα από το θεωρητικό πλαίσιο της Θεωρίας Διδακτικής Τεκμηρίωσης. Η έρευνα έλαβε χώρα εντός του ερευνητικού προγράμματος PREMaTT, το οποίο εστίαζε στον συνεργατικό σχεδιασμό πόρων μιας ομάδας εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την εισαγωγή της άλγεβρας στη διδασκαλία μέσα από τον κύκλο συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης-σχεδιασμός-εφαρμογή-αναστοχασμός. Παράλληλα, μελετήθηκαν οι συζητήσεις που έλαβαν χώρα στο πλαίσιο των συναντήσεων της ομάδας ώστε να εντοπιστούν τα κύρια ζητήματα που αναδύθηκαν και να εξεταστεί η πιθανή επιρροή τους στον διδακτικό σχεδιασμό και την πρακτική της Ελένης αλλά και ενδείξεις επαγγελματικής μάθησης. Η ανάλυση ανέδειξε ότι τα κύρια ζητήματα των συναντήσεων αυτών, όπως για παράδειγμα η έννοια της μεταβλητής και ο τρόπος εισαγωγής της στη διδασκαλία, επηρέασαν τη διαδικασία διδακτικής τεκμηρίωσης της Ελένης εντός και εκτός τάξης φέρνοντας στην επιφάνεια την πολυπλοκότητα της διδακτικής αξιοποίησης της ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία της άλγεβρας. Στα αποτελέσματα καταγράφονται επίσης ενδείξεις επαγγελματικής μάθησης της εκπαιδευτικού αναφορικά με την εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

*Λέξεις κλειδιά:* Πρώιμη άλγεβρα, θεωρία διδακτικής τεκμηρίωσης, ψηφιακοί πόροι, λειτουργικές σταθερές, επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών, eXpresser

*Abstract:* In this paper we study the didactical design and practice of a primary school teacher (i.e. Eleni) through the use of the Documentational Approach to Didactics. The study took place in the context of the PREMaTT project focusing on the collaborative design of resources of a group of primary and secondary teachers for the teaching of algebra in their classrooms through the process of design-implementation-reflection. At the same time, the discussions of the professional development meetings of the group were analysed in order to identify possible influences on Eleni's design and practice as well as indications of her professional learning. The analysis revealed that the main issues emerging in these meetings, such as the notion of variable and its introduction in classroom teaching, influenced Eleni's documentational work inside and outside the classroom and brought to the fore the complexity of issues involved in the teaching and learning of algebra

*through the use of digital technologies. The results also revealed indications of Eleni's professional learning in relation to the teaching and learning of algebra in the primary education.*

*Keywords: Early algebra, Documentational Approach to Didactics, digital resources, operational invariants, teacher professional development, eXpresser*

## **Εισαγωγή**

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της εφαρμογής του ερευνητικού προγράμματος PREMaTT<sup>1</sup> στην Ελλάδα. Στόχος του ήταν η επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μέσα από τον συνεργατικό σχεδιασμό πόρων για την εισαγωγή της άλγεβρας στην αντίστοιχη βαθμίδα τους. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, εστίασαμε στον διδακτικό σχεδιασμό και την πρακτική μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (της Ελένης) μέσα από την συμμετοχή της στον κύκλο συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης-σχεδιασμός-εφαρμογή-αναστοχασμός.

Την τελευταία εικοσαετία πολλοί ερευνητές στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών μελετούν την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, εστιάζοντας στους μαθητές ηλικίας 6 έως 12 ετών. Αρκετές έρευνες (Blanton & Karut, 2005; Irwin & Britt, 2005; Warren & Cooper, 2008) εστιάζουν στην φύση της αλγεβρικής σκέψης και στους τρόπους με τους οποίους αυτή αναπτύσσεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και στις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οριοθετώντας με αυτό τον τρόπο το ερευνητικό πεδίο της πρώιμης άλγεβρας (Early Algebra). Οι Kieran, Pang, Schifter και Ng (2016) μελετώντας σχετικές έρευνες των τελευταίων δεκαετιών, κατέληξαν πως πυρήνας της πρώιμης αλγεβρικής δραστηριότητας (early algebraic activity) θεωρούνται οι μαθηματικές σχέσεις, τα μοτίβα και οι αριθμητικές δομές, με διαδικασίες όπως η παρατήρηση, η εικασία, η γενίκευση, η αναπαράσταση και η δικαιολόγηση, με θεμελιώδη ρόλο για την ανάπτυξή της να κατέχει η φυσική γλώσσα. Ιδιαίτερη βαρύτητα έχει δοθεί και στον τρόπο που η μαθηματική γενίκευση αναδύεται μέσα από τα αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα (Radford, 2011). Παράλληλα, οι Blanton και Karut (2004) υποστηρίζουν ότι η συναρτησιακή σκέψη (functional thinking), που επικεντρώνεται στη σχέση δύο ή περισσότερων διαφορετικών ποσοτήτων, αποτελεί ένα κατάλληλο «όχημα» για να εισαχθούν οι μαθητές στον αλγεβρικό συλλογισμό. Μάλιστα, πρόσφατες έρευνες διερευνούν την ικανότητα των μαθητών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού να γενικεύσουν σχέσεις μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων εστιάζοντας στη σχέση μεταξύ μεταβλητών (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Blanton et al., 2015). Επομένως, παρότι η μελέτη της μάθησης και της διδασκαλίας του αλγεβρικού συλλογισμού αποτελεί αντικείμενο έρευνας στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, πλέον ερευνάται συστηματικά και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Στην ελληνική πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ο όρος άλγεβρα δεν αναφέρεται στο κυρίαρχο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ). Επίσημη αναφορά σε αλγεβρικές έννοιες πραγματοποιείται για πρώτη φορά μόνο στην Στ' Δημοτικού στη θεματική ενότητα των εξισώσεων, όπου η μεταβλητή εμφανίζεται υπό τη μορφή ενός συγκεκριμένου άγνωστου αριθμού ( $x$ ). Ωστόσο, με βάση ορισμένες

δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων γίνονται υπόρρητες αναφορές και νύξεις σε επίπεδο προ-αλγεβρικού περιεχομένου σε μικρότερες τάξεις, ακόμα και στο νηπιαγωγείο (Σκουρμπουδή, 2014). Αντίθετα, στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά (ΑΠΣ, 2011), το οποίο έχει εφαρμοστεί πιλοτικά σε ορισμένα δημοτικά σχολεία και θεωρείται επικουρικό ως προς το ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, η άλγεβρα αποτελεί διακριτή θεματική περιοχή που συγκροτείται από τρεις βασικές μαθηματικές ενότητες: τις ισότητες και ανισότητες, τις αλγεβρικές παραστάσεις και τα μοτίβα/κανονικότητες και συναρτήσεις.

Το ζήτημα της άλγεβρας και της εισαγωγής της στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εξακολουθεί να παραμένει ανοιχτό, με την έρευνα να στρέφεται στον διδακτικό σχεδιασμό των εκπαιδευτικών και στην αξιοποίηση κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών εργαλείων στην διδασκαλία. Η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα ανάμεσα στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση προκαλεί το ερευνητικό ενδιαφέρον, με δεδομένο ότι οι εκπαιδευτικοί της μίας βαθμίδας δεν γνωρίζουν σε βάθος το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας της άλλης (Prendergast et al., 2019). Παράλληλα, οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης θεωρούν ότι το ζήτημα της άλγεβρας αφορά εννοιολογικά κυρίως την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ενώ οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας δεν γνωρίζουν αν και πώς η διδασκαλία στην πρωτοβάθμια μπορεί να αξιοποιηθεί στην εισαγωγή της άλγεβρας στο γυμνάσιο. Προς αυτό το γεγονός συνηγορεί και η απουσία σχετικής επιμόρφωσης εκπαιδευτικών για το ζήτημα της εισαγωγής της άλγεβρας στην διδασκαλία των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η παρούσα έρευνα επιδιώκει να εμπλουτίσει την υπάρχουσα βιβλιογραφία στη συγκεκριμένη ερευνητική περιοχή της διδακτικής των μαθηματικών. Η μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης εντός μιας ομάδας εκπαιδευτικών που εστιάζεται στην εισαγωγή της άλγεβρας, στην οποία συμμετέχουν και εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αποτελεί τη συνεισφορά της παρούσας έρευνας.

### ***Πόροι και επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών***

Στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια γύρω από την έννοια του πόρου (resource) και την αλληλεπίδραση των εκπαιδευτικών με πόρους. Η Adler (2000) διεύρυνε την οπτική για τους πόρους - υλικούς και μη - που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός στην πρακτική του και τους ταξινόμησε σε τρεις κατηγορίες: στους ανθρώπινους, στους υλικούς και στους κοινωνικό-πολιτισμικούς. Με ανάλογη οπτική οι Gueudet και Trouche (2009) επισημαίνουν τον κεντρικό ρόλο που έχουν οι πόροι στον διδακτικό σχεδιασμό, στη διδασκαλία και γενικότερα στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών.

Την τελευταία δεκαετία το ερευνητικό ενδιαφέρον έχει στραφεί στη μελέτη των αλληλεπιδράσεων εκπαιδευτικού και πόρων όταν η διδασκαλία βασίζεται στη χρήση ψηφιακών εργαλείων (Kynigos, Bardini, Barzel & Maschietto, 2007). Στα πεδία μελέτης περιλαμβάνονται η εκπαίδευση μελλοντικών εκπαιδευτικών (Assis et al, 2018), η εκπαίδευση επιμορφωτών (Psycharis & Kalogeria, 2018), η ανάπτυξη νέων θεωρητικών πλαισίων για τη δημιουργία και χρήση των (ψηφιακών) εργαλείων στη διδασκαλία (Gueudet

& Trouche, 2009) αλλά και η διδακτική πρακτική, η επιμόρφωση και η επαγγελματική ανάπτυξη των εν ενεργεία εκπαιδευτικών (Gueudet & Trouche, 2011).

Μέσα από τα προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών, που επικεντρώνονται στην αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού-πόρων, έχει αναδυθεί η αναγκαιότητα της συνεργασίας των εκπαιδευτικών με άλλους εκπαιδευτικούς ίδιας ή διαφορετικής ειδικότητας (Gueudet & Trouche, 2011). Οι Gueudet, Pepin και Trouche (2013) μελέτησαν τη συλλογική διάσταση της εργασίας των εκπαιδευτικών στην καθημερινή τους πρακτική και εντόπισαν ότι η συγκεκριμένη διάσταση είναι πάντοτε παρούσα στο έργο των εκπαιδευτικών. Τέλος, οι ίδιοι ερευνητές (Gueudet & Trouche, 2009) νοσηματοδοτούν ευρύτερα την έννοια της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού ως την αλλαγή στην πρακτική του που συνδέεται στενά με τις επαγγελματικές του γνώσεις και πεποιθήσεις.

Στην παρούσα έρευνα εστιάζουμε στην εξέλιξη του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ελένης) που βασίστηκε στη χρήση ψηφιακών εργαλείων μέσα από τη συμμετοχή της σε μία ομάδα επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η συγκεκριμένη ομάδα εκπαιδευτικών θεωρούμε ότι αποτελεί μία κοινότητα πρακτικής (community of practice, Wenger, 1999) με τη μάθηση εντός αυτής να χαρακτηρίζεται από την κοινή περιοχή ενδιαφέροντος (εστίαση στην εισαγωγή της άλγεβρας στη διδασκαλία), τη συμμετοχή στην κοινότητα (τα μέλη της συζητούν σχετικά με τον διδακτικό σχεδιασμό και τις εμπειρίες τους από την εφαρμογή) και σε συνεργατικές πρακτικές (ενεργός συμμετοχή σε κοινές δράσεις όπως π.χ. ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων). Με δεδομένο ότι η αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι περιορισμένη, μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε τα χαρακτηριστικά του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής της Ελένης, αλλά και να εντοπίσουμε πιθανές επιρροές από την συμμετοχή της στη συγκεκριμένη ομάδα.

## **Θεωρητικό Πλαίσιο**

Στο πλαίσιο της «Θεωρίας Διδακτικής Τεκμηρίωσης» (ΘΔΤ) (Documentational approach to didactics)<sup>2</sup> οι Trouch, Gueudet και Pepin (2018) αποδίδουν μια διερευνημένη σημασία στους πόρους που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί για τον διδακτικό τους σχεδιασμό. Συγκεκριμένα, οι πόροι δεν θεωρούνται απομονωμένοι, αλλά ενσωματωμένοι σε ένα «σύνολο πόρων» (set of resources) που μπορεί να περιλαμβάνει ένα σχολικό εγχειρίδιο, ένα λογισμικό, ένα φύλλο εργασίας, μια συνομιλία με ένα συνάδελφο, έναν διάλογο με έναν μαθητή κ.λπ. (Gueudet & Trouche, 2011). Θεωρούμε ότι η δραστηριότητα του εκπαιδευτικού εκτός τάξης (αναζήτηση πόρων, επιλογή και σχεδιασμός μαθηματικών έργων/δραστηριοτήτων, λήψη αποφάσεων, επιλογή διαθέσιμων τεχνουργημάτων, οργάνωση διδακτικού χρόνου) συνδέεται στενά με την αντίστοιχη δραστηριότητα εντός τάξης, διότι ο σχεδιασμός, η εφαρμογή και ο επανασχεδιασμός των πόρων αποτελούν αλληλένδετες διαδικασίες (Gueudet & Trouche, 2009). Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να σχεδιάσει τη διδασκαλία του για μια συγκεκριμένη κατηγορία καταστάσεων, π.χ. διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων με εξισώσεις,

βασίζεται σε ένα σύνολο υπαρχόντων πόρων. Οι Gueudet και Trouche (2011) περιγράφουν τη διαδικασία δημιουργίας διδακτικής τεκμηρίωσης (documentational genesis) μέσω της οποίας ένα σύνολο πόρων για συγκεκριμένες καταστάσεις μετασχηματίζεται σε τεκμήριο διδασκαλίας (document). Ένα τεκμήριο διδασκαλίας εμπεριέχει στοιχεία πρακτικής και γνώσης, καθώς μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση (α) του πόρου, (β) του ορατού τρόπου χρήσης (usages) του, δηλαδή στο πώς ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί έναν πόρο, και (γ) των λειτουργικών σταθερών<sup>3</sup> (operational invariants), οι οποίες αποτελούν μέρος της μη ευθέως εκφραζόμενης γνώσης (μη 'ορατής' γνώσης) του εκπαιδευτικού που έχουν δομηθεί σε διαφορετικά πλαίσια χρήσης του πόρου και επηρεάζουν τις επιλογές του. Δηλαδή, οι λειτουργικές σταθερές αποτελούν τους παράγοντες επιρροής των αποφάσεων που διέπουν τον διδακτικό σχεδιασμό ενός εκπαιδευτικού. Έτσι, οι λειτουργικές σταθερές μπορούν να συναχθούν από τους τρόπους χρήσης των πόρων και μπορεί να θεωρηθούν ως πιθανές ερμηνείες (το 'γιατί') της χρήσης τους από τον εκπαιδευτικό (Gueudet & Trouche, 2011). Συμπερασματικά, σύμφωνα με τους Gueudet και Trouche (2009, σελ. 209) ισχύει ότι:

«Τεκμήριο διδασκαλίας = Πόροι + Τρόποι Χρήσης + Λειτουργικές Σταθερές»

Ένα τεκμήριο διδασκαλίας σ' ένα επόμενο στάδιο σχεδιασμού ή μέσα από τη χρήση του μπορεί να αποτελέσει πόρο για τη δημιουργία ενός νέου τεκμηρίου διδασκαλίας. Η σχέση μεταξύ πόρων και τεκμηρίων διδασκαλίας είναι διαλεκτική καθώς η διαδικασία δημιουργίας διδακτικής τεκμηρίωσης είναι συνεχής μέσα στο χρόνο και μπορεί να αποτελέσει δείκτη της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού (Gueudet & Trouche, 2009). Η συγκεκριμένη δυναμική διαδικασία επιτρέπει την καταγραφή των αποφάσεων του εκπαιδευτικού σε επίπεδο σχεδιασμού μέσα στον χρόνο αλλά και των παραγόντων που επηρέασαν την λήψη τους. Κατά συνέπεια, η μελέτη της δημιουργίας τεκμηρίων διδασκαλίας μπορεί να αποτελέσει πεδίο καταγραφής της πιθανής επιρροής μιας αλληλουχίας παραγόντων στον διδακτικό σχεδιασμό - όπως η προσωπική επιστημολογική θεώρηση του εκπαιδευτικού<sup>4</sup> (δηλαδή, το προσωπικό του σύστημα πεποιθήσεων σχετικά με τη γνώση και τη μάθηση, Hofer, 2008), η εμπειρία εφαρμογής ενός τεκμηρίου διδασκαλίας στην τάξη, ή η συμμετοχή του σε ένα πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης - και να αναδείξει στοιχεία επαγγελματικής μάθησης του εκπαιδευτικού. Οι θεμελιωτές της ΘΔΤ θεωρούν ότι τα στοιχεία επαγγελματικής μάθησης που προκύπτουν κατά την εξέλιξη της διαδικασίας αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της διδακτικής τεκμηρίωσης του εκπαιδευτικού (Trouche et al., 2018).

Στην παρούσα έρευνα εστίασαμε στη διαδικασία δημιουργίας διδακτικής τεκμηρίωσης της Ελένης με έμφαση στην αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων εντός του PREMaTT, μέσα από την πορεία της στον κύκλο συναντήσεις επαγγελματικής εκπαίδευσης-σχεδιασμός-εφαρμογή-αναστοχασμός. Ταυτόχρονα, επικεντρωθήκαμε στα κύρια ζητήματα που αναδύθηκαν στις συζητήσεις που έλαβαν χώρα κατά τις δια ζώσης συναντήσεις της ομάδας των εκπαιδευτικών, με σκοπό να εντοπίσουμε το αν και με ποιον τρόπο οι συζητήσεις αυτές, και κατ' επέκταση η συμμετοχή της Ελένης στην ομάδα, αποτέλεσε έναν επιπλέον πόρο που επηρέασε τον διδακτικό σχεδιασμό και την πρακτική της. Χρησιμοποιήσαμε την ΘΔΤ για να αναλύσουμε τα τεκμήρια διδασκαλίας και την εξέλιξη του διδακτικού σχεδιασμού της Ελένης, αλλά και για να

εντοπίσουμε τους λόγους (λειτουργικές σταθερές) που αιτιολογούν τις αποφάσεις της στο επίπεδο του σχεδιασμού και της διδασκαλίας. Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

- 1) Ποια είναι τα κύρια ζητήματα που αναδύθηκαν στο πλαίσιο των συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης της ομάδας των εκπαιδευτικών αναφορικά με την εισαγωγή της άλγεβρας στη διδασκαλία των μαθηματικών;
- 2) Ποια είναι τα τεκμήρια διδασκαλίας που ανέπτυξε η Ελένη, δηλαδή οι πόροι που συνιστούν τον διδακτικό της σχεδιασμό, οι τρόποι χρήσης των πόρων και οι λειτουργικές σταθερές που επηρέασαν τον σχεδιασμό μέσα από την συμμετοχή της στον κύκλο συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης – σχεδιασμός – εφαρμογή - αναστοχασμός;

Παράλληλα με τη μελέτη των παραπάνω ερωτημάτων, ένας δευτερεύων ερευνητικός μας στόχος αφορούσε και την αναζήτηση ενδείξεων επαγγελματικής μάθησης της Ελένης που αναδύονται κατά την εξέλιξη της διδακτικής της τεκμηρίωσης.

## **Μεθοδολογία**

### ***Πλαίσιο έρευνας - Συμμετέχοντες***

Το ερευνητικό πρόγραμμα PREMaTT εφαρμόστηκε στην Γαλλία και στην Ελλάδα με την αντίστοιχη σύσταση ομάδων εκπαιδευτικών. Στην Ελλάδα συγκροτήθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ για ένα ακαδημαϊκό έτος μια ομάδα εννέα Ελλήνων εκπαιδευτικών (δύο πρωτοβάθμιας και επτά δευτεροβάθμιας), η οποία θεωρούμε ότι αποτέλεσε μια κοινότητα πρακτικής δεδομένου ότι ενεπλάκησαν σε ένα δίκτυο αλληλεπιδράσεων με κοινούς στόχους και ενδιαφέροντα, με απώτερο σκοπό τη δημιουργία από κοινού πηγών και την ανταλλαγή συναφών εμπειριών (Wegner, 1999).

Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών ήταν κάτοχοι μεταπτυχιακού στην μαθηματική εκπαίδευση, ενώ τρεις εκ των οποίων είναι κάτοχοι αντίστοιχου διδακτορικού. Επίσης, πέντε εκπαιδευτικοί είναι επιμορφωτές εκπαιδευτικών στις ψηφιακές τεχνολογίες. Οι εκπαιδευτικοί συμμετείχαν σε δύο κύκλους σχεδιασμού-εφαρμογής-αναστοχασμού. Πριν και μετά τα μαθήματα στη σχολική τάξη οι εκπαιδευτικοί συμμετείχαν σε συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης της ομάδας που συντόνιζε ένας ακαδημαϊκός ερευνητής στην περιοχή της διδακτικής των μαθηματικών (ο δεύτερος συγγραφέας), ο οποίος είχε και την επιστημονική εποπτεία του προγράμματος στην Ελλάδα. Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων, οι εκπαιδευτικοί αντάλλαξαν ιδέες για ζητήματα διδακτικής της άλγεβρας, παρουσίαζαν και σχολίαζαν τους διδακτικούς τους σχεδιασμούς, συζητούσαν τις διδασκαλίες τους εστιάζοντας σε κρίσιμα επεισόδια και προτείνοντας κατάλληλες τροποποιήσεις. Ο συντονιστής ενθάρρυνε την συνεργασία ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς και παράλληλα τροφοδοτούσε τις δραστηριότητες της ομάδας με ερευνητικά πορίσματα από έρευνες στην περιοχή της μάθησης και της διδασκαλίας της άλγεβρας.

Στην συγκεκριμένη ομάδα συμμετείχε και η Ελένη, η εκπαιδευτικός που μελετάται στην παρούσα έρευνα. Η Ελένη είναι απόφοιτη Παιδαγωγικού τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης

με μεταπτυχιακό δίπλωμα στις «Ψηφιακές Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση» και κατέχει διδακτορικό στη «Διδακτική των Μαθηματικών με έμφαση στην χρήση των νέων τεχνολογιών». Επιπρόσθετα, είναι επιμορφώτρια εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τις Τ.Π.Ε. και έχει εργαστεί σε πολλά ερευνητικά προγράμματα αναφορικά με τις ψηφιακές τεχνολογίες στη μαθηματική εκπαίδευση, με αντίστοιχες ερευνητικές δημοσιεύσεις. Έχει πάνω από είκοσι χρόνια διδακτική εμπειρία και διδάσκει κυρίως στην Ε΄ και τη Στ΄ δημοτικού. Η περίπτωση της Ελένης επιλέξαμε να αναλυθεί διότι η ίδια διαθέτει ένα πολύ καλό μαθηματικό υπόβαθρο και ταυτόχρονα είναι έμπειρη σε ζητήματα που αφορούν την ενσωμάτωση των ψηφιακών τεχνολογιών στη διδακτική πράξη. Παρότι δεν ανήκει στον «μέσο» εκπαιδευτικό πληθυσμό της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, εστίασαμε στην περίπτωση της ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε τα ζητήματα που φέρνει η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας αναφορικά με την εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Εικάζουμε ότι αντίστοιχα και ίσως περισσότερο σύνθετα ζητήματα θα απασχολήσουν εκπαιδευτικούς που δεν έχουν την εμπειρία και τη γνώση της Ελένης.

### **Δεδομένα και μέθοδος ανάλυσης**

Η παρούσα έρευνα εμπεριέχεται στο πεδίο της ποιοτικής έρευνας και αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης (case study) (Yin, 1994). Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι θεμελιωμένης θεωρίας (Grounded approach, Corbin & Strauss, 2008) σε συνδυασμό με τη ΘΔΤ.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση προέκυψαν μέσα από τις έξι συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης (καταγραφή ήχου και εικόνας), πέντε ημιδομημένες συνεντεύξεις της εκπαιδευτικού (από μία στην αρχή και τέλος του προγράμματος και από μία μετά από τις τρεις δίωρες διδασκαλίες της) και από τη συμμετοχική παρατήρηση ενός ερευνητή (πρώτος συγγραφέας) στη σχολική τάξη κατά τη διδασκαλία (καταγραφή εικόνας και ήχου, έξι διδακτικές ώρες).

Σ' όλη την πορεία της έρευνας ακολουθήσαμε τις βασικές μεθοδολογικές αρχές της ΘΔΤ που προτείνουν οι Gueudet, Gueudet και Pepin (2018):

1. Αρχή της εκτεταμένης συλλογής των υλικών πόρων που χρησιμοποιούνται και παράγονται κατά τη διαδικασία της διδακτικής τεκμηρίωσης (π.χ. Φύλλα εργασίας, αρχεία λογισμικού, σημειώσεις, αρχεία παρουσιάσεων).
2. Αρχή της μακράς διάρκειας παρακολούθησης, αρχή της αναστοχαστικής διερεύνησης και αρχή της παρακολούθησης εντός και εκτός τάξης: Η μελέτη του εκπαιδευτικού για μεγάλα χρονικά διαστήματα θεωρείται απαραίτητη για τη συλλογή κατάλληλου υλικού που θα επιτρέψει την ανάλυση της διαδικασίας διδακτικής τεκμηρίωσης και των παραγόντων επιρροής της. Στην παρούσα έρευνα οι εκπαιδευτικοί μελετήθηκαν για διάστημα ενός ακαδημαϊκού έτους εντός και εκτός τάξης. Τα δεδομένα μας συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια του διδακτικού σχεδιασμού, κατά την εφαρμογή του στην τάξη και κατά τη διάρκεια των συναντήσεων της ομάδας επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών. Ο αναστοχασμός των εκπαιδευτικών καταγράφηκε

τόσο κατά τη διάρκεια των συναντήσεων της ομάδας όσο και στο πλαίσιο ατομικών συνεντεύξεων πριν και μετά τις διδασκαλίες.

3. Αρχή του σχεδιασμού κατά τη χρήση: Ο διδακτικός σχεδιασμός του εκπαιδευτικού επηρεάζεται από την εφαρμογή του στην διδασκαλία. Όλοι οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στο PREMaTT σχεδίασαν διδακτικές παρεμβάσεις με ψηφιακά εργαλεία και τις εφάρμοσαν σε πραγματικές σχολικές συνθήκες.
4. Αρχή συλλογικότητας: Ο διδακτικός σχεδιασμός επηρεάζεται από τη συμμετοχή του εκπαιδευτικού σε διάφορες κοινότητες. Στην παρούσα έρευνα και στο πλαίσιο των συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούσαν με τους υπόλοιπους συμμετέχοντες ανταλλάσσοντας ιδέες και εμπειρίες.

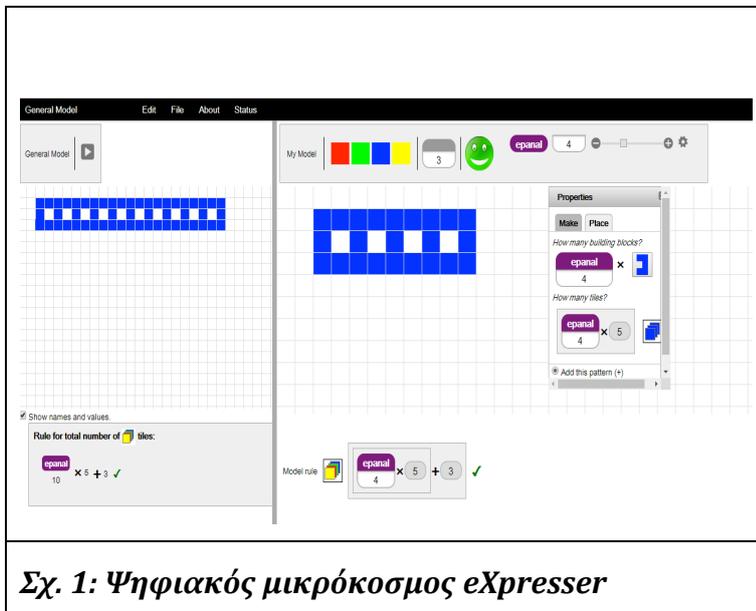
Αναφορικά με τη μέθοδο ανάλυσης, για τη μελέτη του 1<sup>ου</sup> ερευνητικού ερωτήματος αναλύθηκαν τα δεδομένα των συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης με σκοπό τον εντοπισμό κατηγοριών/θεματικών συζητήσεων (Grounded approach, Corbin & Strauss, 2008). Αρχικά, ξεκινήσαμε με ανοιχτή κωδικοποίηση (open coding) των απομαγνητοφωνημένων συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης για την εύρεση εννοιολογικών κατηγοριών συζήτησης. Για κάθε συζήτηση δημιουργήσαμε από έναν κωδικό που αναφέρεται στο περιεχόμενό της (π.χ. κωδικός: ορισμός μεταβλητής στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ δημοτικού). Έπειτα, προχωρήσαμε σε αξονική κωδικοποίηση (axial coding) με στόχο την εύρεση επιμέρους σχέσεων μεταξύ αυτών των κατηγοριών (π.χ. κωδικός: δραστηριότητες άλγεβρικού συλλογισμού στα σχολικά εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης) και συνεχίσαμε με επιλεκτική κωδικοποίηση (selective coding), ώστε να ερμηνεύσουμε τις παραπάνω σχέσεις εντοπίζοντας ευρύτερες κατηγορίες-πυρήνες (π.χ. κωδικός: εισαγωγή της άλγεβρας στα σχολικά εγχειρίδια).

Για τη μελέτη του 2<sup>ου</sup> ερευνητικού ερωτήματος υιοθετήσαμε την ΘΔΤ και εργαστήκαμε απευθείας με τα δεδομένα (Corbin & Strauss, 2008) που ήταν: (α) τα διδακτικά υλικά της Ελένης, (β) αποσπάσματα συνεντεύξεών της (πριν και μετά τη διδακτική εφαρμογή), (γ) συζητήσεις εντός των συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης όπου η Ελένη παρουσίασε τον διδακτικό σχεδιασμό της και τον αναστοχασμό της και (δ) κρίσιμα επεισόδια εντός τάξης, τα οποία αφορούσαν κυρίως την αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία της άλγεβρας. Με σκοπό τη βαθύτερη κατανόηση των διδακτικών αποφάσεων της Ελένης αλλά και τον εντοπισμό του ρόλου των συζητήσεων της ομάδας των εκπαιδευτικών στη λήψη τους, συγκρίναμε και συνθέσαμε (triangulation) τα παραπάνω είδη δεδομένων και τις κατηγορίες που προέκυψαν από την ανάλυση του συνόλου των συζητήσεων που έλαβαν χώρα στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης (1<sup>ο</sup> ερευνητικό ερώτημα). Πρώτα κωδικοποιήσαμε αποσπάσματα λόγου της Ελένης από τις συναντήσεις της ομάδας των εκπαιδευτικών και τις ατομικές συνεντεύξεις, στις οποίες η ίδια περιγράφει τους τρόπους χρήσης και τις λειτουργικές σταθερές των τεκμηρίων διδασκαλίας της στο επίπεδο του διδακτικού σχεδιασμού. Στη συνέχεια διατρέξαμε τις διδασκαλίες της Ελένης και κωδικοποιήσαμε συμβάντα από αφορούν τον τρόπο χρήσης των πόρων στην πράξη και νέες λειτουργικές

σταθερές. Τέλος, συγκρίναμε και συνθέσαμε τις παραπάνω κωδικοποιήσεις με την κωδικοποίηση του συνόλου των συζητήσεων στην ομάδα επαγγελματικής εξέλιξης (1<sup>ο</sup> ερευνητικό ερώτημα) με σκοπό τον εντοπισμό της επιρροής της συμμετοχής της Ελένης στην ομάδα στη διαδικασία της διδακτικής της τεκμηρίωσης.

### Ψηφιακός μικρόκοσμος: eXpresser

Ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser<sup>5</sup> (Noss et al., 2009) ενθαρρύνει την μαθηματική γενίκευση μαθητών 11 έως 14 ετών. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν μοτίβα με τη χρήση έγχρωμων τετραγώνων και να χρησιμοποιήσουν εικονικές μεταβλητές προκειμένου να αναπαράξουν τις κατασκευές τους για διαφορετικό βαθμό επαναλήψεων με απώτερο σκοπό να εκφράσουν σχέσεις γενίκευσης. Το περιβάλλον προσφέρει ανατροφοδότηση για την ορθότητα των σχέσεων αυτών. Με αυτό τον τρόπο επιχειρείται η σύνδεση της εικονικής αναπαράστασης που προσφέρει το ψηφιακό εργαλείο με την αντίστοιχη αλγεβρική/συμβολική αναπαράσταση. Στην πραγματικότητα η εικονική μεταβλητή αποτελεί μια εικονογραφημένη αναπαράσταση της αλγεβρικής μεταβλητής.



Σχ. 1: Ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser

Ο eXpresser έχει ενσωματωμένη μια μορφή άλγεβρας μέσω της οποίας ο μαθητής μπορεί να δημιουργεί και να χειρίζεται σταθερές και μεταβλητές όπως και να συντάσσει εκφράσεις που περιλαμβάνουν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Πιο αναλυτικά, στην κεντρική περιοχή εργασίας (My Model) (Σχ. 1), ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει επαναλαμβανόμενα μοτίβα μέσα από τη σύνθεση χρωματιστών τετραγώνων και

έπειτα να ορίσει την «δομική μονάδα» (building block) του μοτίβου (δηλαδή το επαναλαμβανόμενο στοιχείο του μοτίβου) και να καθορίσει τις «ιδιότητές» του (properties). Με αυτό τον τρόπο αναπαράγεται το δομικό στοιχείο του μοτίβου για έναν συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων. Για να αναπαραχθεί το μοτίβο για διαφορετικούς αριθμούς επαναλήψεων, χρειάζεται να «ξεκλειδωθεί» ο αριθμός των επαναλήψεων στο αντίστοιχο εικονίδιο με την κατάλληλη εντολή (έτσι προκύπτει μια εικονική μεταβλητή). Ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει μια αλγεβρική έκφραση στο ειδικό πλαίσιο (Model Rule) που αποτυπώνει τον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου. Τέλος, αν ο μαθητής αποτύχει να εκφράσει σωστά τον γενικό κανόνα δεν χρωματίζονται τα τετράγωνα του μοτίβου που δημιούργησε. Με αυτό τον τρόπο το ψηφιακό περιβάλλον δίνει ανατροφοδότηση στον μαθητή ότι ο στόχος του δεν επιτεύχθηκε.

## **Αποτελέσματα**

### ***Ζητήματα εισαγωγής της άλγεβρας στο πλαίσιο των συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης πριν τον διδακτικό σχεδιασμό***

Η ανάλυση του περιεχομένου των συναντήσεων επαγγελματικής ανάπτυξης (ΣΕΑ) ανέδειξε δύο ευρύτερες κατηγορίες ζητημάτων που απασχόλησαν τους εκπαιδευτικούς: οι συνδέσεις μεταξύ πρώιμης άλγεβρας και άλγεβρας και ο ρόλος των ψηφιακών και μη εργαλείων στην εισαγωγή της άλγεβρας και στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης.

Αρχικά, την ομάδα των εκπαιδευτικών απασχόλησε η εννοιολογική προσέγγιση του όρου «άλγεβρα», κυρίως μέσω της αναζήτησης πεδίων (π.χ. του αναλυτικού προγράμματος) για την εισαγωγή της. Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκε το επιχείρημα ότι η άλγεβρα δεν εμφανίζεται μόνο κατά την χρήση των μεταβλητών, αλλά μπορεί να εντοπιστεί και σε σχέσεις από την αριθμητική. Με αυτό τον τρόπο αναδείχτηκε η σημασία της γενικευμένης αριθμητικής.

Ακολούθως, η ομάδα των εκπαιδευτικών εστίασε στο ζήτημα της μεταβλητής στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης, καθώς και στον τρόπο που αυτή εισάγεται μέσα από τη διδακτική χρήση των μοτίβων. Με αφετηρία τον παραπάνω προβληματισμό, η Ελένη παρέθεσε πληροφορίες για τον τρόπο εισαγωγής της μεταβλητής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αναγνωρίζοντας ότι «η έννοια της μεταβλητής παρουσιάζεται στους μαθητές, ως ένας συγκεκριμένος πάντα άγνωστος αριθμός ( $x$ ) και όχι γενικά με την έννοια του γενικευμένου αριθμού» (1<sup>η</sup> ΣΕΑ). Αυτή η διαπίστωση προβλημάτισε αρκετούς εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και μάλιστα αρκετοί αναθεώρησαν την άποψή τους για την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, αφού πίστευαν ότι οι μαθητές μετά το πέρας της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης γνωρίζουν και χρησιμοποιούν τη μεταβλητή με την έννοια του γενικευμένου αριθμού.

Παράλληλα, στο πλαίσιο των συναντήσεων αναδύθηκε ο ρόλος των αναπαραστάσεων διαφορετικών λογισμικών για την εισαγωγή της άλγεβρας. Ειδικότερα, γεννήθηκε το ερώτημα ποια λογισμικά μπορεί να θεωρηθούν κατάλληλα και γιατί για την εισαγωγή της άλγεβρας είτε στην πρωτοβάθμια είτε στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στο συγκεκριμένο ζήτημα υπήρξε ποικιλία απόψεων ενώ αναγνωρίστηκε από το σύνολο των εκπαιδευτικών ο κρίσιμος ρόλος που κατέχει ο κατάλληλος διδακτικός σχεδιασμός. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το παρακάτω απόσπασμα από την 2<sup>η</sup> συνάντηση επαγγελματικής ανάπτυξης μεταξύ τριών εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Ε.Δ.):

Ε.Δ.1: Εγώ χρησιμοποιώ το Sketchpad και περιέχει ευθύγραμμα τμήματα, σημεία, κύκλους, τόξα, μετασχηματισμούς, γωνίες, μετρήσεις, που επαναλαμβάνονται συνεχώς. Με αυτά μπορείς να προσεγγίσεις όλα τα μαθηματικά. Να κάνεις και άλγεβρα, συναρτήσεις. Αυτά τα πράγματα τα βλέπουν συνεχώς οι μαθητές [...] Στον eXpresser κάνεις κάποιες εφαρμογές και σταματάς. Μετά πρέπει να αλλάξεις εργαλείο.

Ε.Δ.2: Το κάθε λογισμικό σου δίνει κάτι συγκεκριμένο...

Ε.Δ.3: Δεν μπορεί το κάθε λογισμικό να είναι για όλα. Δεν αντιλέγω ότι με το Sketchpad μπορείς να δουλέψεις πολλά πεδία, αλλά μπορείς να χρησιμοποιήσεις και ένα διαφορετικό λογισμικό που θα σου δημιουργήσει διαφορετικές εικόνες, όπως για παράδειγμα ο eXpresser.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω απόσπασμα, ένα από τα κύρια επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν είναι ότι υπάρχει εξειδίκευση στα λογισμικά και δεν μπορεί κάθε λογισμικό να θεωρηθεί κατάλληλο για την διδασκαλία οποιασδήποτε μαθηματικής έννοιας. Η Ελένη μέσα σε αυτό το πλαίσιο επισήμανε ότι *«κάθε λογισμικό θέλει την εξοικείωσή του, ώστε να συνηθίζεις σε μια συγκεκριμένη λογική και να μπορείς να διακρίνεις μέσα από τις εφαρμογές ποια στοιχεία χρησιμοποιείς, για ποιες έννοιες και γιατί»* (2<sup>η</sup> συνέντευξη).

Ιδιαίτερα για τον σχεδιασμό κατάλληλων δραστηριοτήτων για την εισαγωγή της άλγεβρας, συζητήθηκε ο ρόλος των χειραπτικών υλικών αλλά και του ψηφιακού μικρόκοσμου eXpresser. Ειδικά για τον eXpresser, οι εκπαιδευτικού διερωτήθηκαν με ποιον τρόπο οι μαθητές νοηματοδοτούν και συμβολίζουν τη μεταβλητή στο συγκεκριμένο περιβάλλον. Με άλλα λόγια, αν οι μαθητές νοηματοδοτούν τη μεταβλητή περισσότερο ως ένα εικονίδιο ή αν παράγουν ένα νέο σύμβολο (έστω  $x$ ) στη θέση του άγνωστου ή γενικευμένου αριθμού. Με αφορμή το συγκεκριμένο προβληματισμό, η Ελένη εστιάστηκε σε ορισμένες λειτουργίες του eXpresser και αποφάσισε να σχεδιάσει δραστηριότητες που βασίζονται κατά αποκλειστικότητα στη χρήση του. Συγκεκριμένα, ανέφερε:

Ε.Δ.1: Ο eXpresser είναι αρκετά επικεντρωμένος στα μοτίβα και θεωρώ ότι για αυτό τον λόγο έχει πολλά πλεονεκτήματα. Οι ψηφιακές αναπαραστάσεις του λογισμικού νομίζω ότι συμβάλλουν στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής από τους μαθητές (2<sup>η</sup> συνέντευξη).

Αξίζει να επισημανθεί ο ιδιαίτερος τρόπος με τον οποίο η έρευνα εισήχθη στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης. Άρθρα και αναφορές ερευνητικών πορισμάτων μέσα στις συναντήσεις αυτές δόθηκαν από τον συντονιστή ως πόροι με κύριο στόχο τον προβληματισμό και την επαγγελματική μάθηση των εκπαιδευτικών. Δηλαδή, στη ροή των συναντήσεων η έρευνα ερχόταν άλλοτε με έμμεσο τρόπο (π.χ. αναφορά σε πορίσματα ερευνών για ζητήματα είτε εισαγωγής της άλγεβρας είτε του ψηφιακού μικρόκοσμου eXpresser) και άλλοτε με άμεσο τρόπο (π.χ. πρόσβαση σε σχετικές έρευνες για μελέτη για όσους εκπαιδευτικούς το επιθυμούσαν).

Συνοψίζοντας, τα ζητήματα που αναδύθηκαν ευρύτερα από τις συζητήσεις της ομάδας των εκπαιδευτικών αφορούσαν την εννοιολογική προσέγγιση του όρου άλγεβρα, κυρίως μέσω της αναγνώρισης πεδίων εισαγωγής της, όπως για παράδειγμα με βάση τα σχολικά εγχειρίδια. Ιδιαίτερα, οι εκπαιδευτικοί εστίασαν στο θέμα της μεταβλητής στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης και στον τρόπο που αυτή εισάγεται μέσα από τη διδακτική αξιοποίηση των μοτίβων. Παράλληλα, τους εκπαιδευτικούς απασχόλησε ο ρόλος των αναπαραστάσεων και των λειτουργιών διαφορετικών λογισμικών που μπορούν να αξιοποιηθούν για την εισαγωγή στην άλγεβρα, αλλά και το αν και με ποιο τρόπο οι μαθητές νοηματοδοτούν τη μεταβλητή μέσα από τη χρήση του eXpresser. Τέλος, στην ομάδα παρουσιάστηκε ο μικρόκοσμος eXpresser και ορισμένοι ενδεικτικοί διδακτικοί σχεδιασμοί που βασίστηκαν σ' αυτόν.

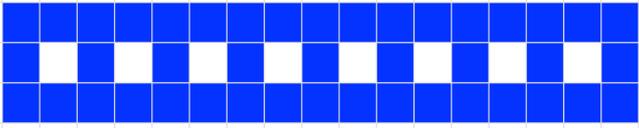
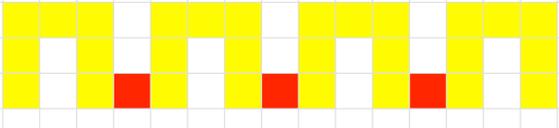
### Διαδικασία Δημιουργίας Διδακτικής Τεκμηρίωσης εντός και εκτός τάξης

Η Ελένη δίδαξε σ' ένα τμήμα της Στ' δημοτικού με 15 μαθητές τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Στην καθημερινή της πρακτική εκτός από το σχολικό εγχειρίδιο χρησιμοποιούσε και έναν διαδραστικό πίνακα, αξιοποιώντας δομήματα από το Ψηφιακό Σχολείο (<https://dschool.edu.gr/>). Για την εισαγωγή στην άλγεβρα, στο παρελθόν, εφάρμοζε τις οδηγίες του Αναλυτικού Προγράμματος και ακολουθούσε τις επιταγές του σχολικού εγχειριδίου. Στο συγκεκριμένο τμήμα της Στ' δημοτικού πριν την παρέμβαση είχε ολοκληρώσει το κεφάλαιο των εξισώσεων και των μοτίβων (αριθμητικά, γεωμετρικά, σύνθετα). Παρότι η Ελένη γνώριζε το eXpresser κατά το παρελθόν, αφορμή για την εκμάθηση των βασικών λειτουργιών του με σκοπό την αξιοποίησή του στη διδασκαλία αποτέλεσε η συμμετοχή της στο PREMaTT.

Η εκπαιδευτικός κατά τη διαδικασία της δημιουργίας διδακτικής τεκμηρίωσης σχεδίασε τρία φύλλα εργασίας (ΦΕ), καθένα εκ των οποίων περιείχε από μια δραστηριότητα (Σχ. 2) και πραγματοποίησε τρεις δίωρες διδακτικές παρεμβάσεις στο εργαστήριο υπολογιστών. Συνοπτικά, οι διδακτικοί στόχοι των δραστηριοτήτων, σύμφωνα με την Ελένη, ήταν οι μαθητές: να αναγνωρίσουν το μοτίβο, να κατανοήσουν και να ορίσουν τον «δομικό λίθο», να εντοπίσουν και να εκφράσουν τον γενικό κανόνα λεκτικά και μέσω της χρήσης του expresser (γενικός κανόνας), και να αποτυπώσουν τον γενικό κανόνα με τη χρήση μεταβλητής.

Η Ελένη χαρακτήρισε τις δραστηριότητες που σχεδίασε ως διερευνητικές και προκλητικές, εφόσον στην συνέντευξη πριν από την εφαρμογή των ΦΕ στην τάξη της υποστήριξε ότι «για την εισαγωγή οποιασδήποτε μαθηματικής έννοιας απαιτούνται διερευνητικές δραστηριότητες» καθώς και ότι «ο διδακτικός σχεδιασμός ως μέρος του PREMaTT οφείλει να είναι προκλητικός». Έτσι, μέσα από αυτή τη σχεδιαστική επιλογή της αποκαλύπτονται λειτουργικές σταθερές που σχετίζονται με την προσωπική επιστημολογική της θεώρηση σχετικά με τις δραστηριότητες που θεωρούνται κατάλληλες για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πιο αναλυτικά, τα ΦΕ περιελάμβαναν πέντε κατηγορίες ζητούμενων: την κατασκευή του μοτίβου με τη διαδικασία του «σύρε και άσε» (επιλογή χρωματιστών τετραγώνων και τοποθέτηση τους στην επιφάνεια σχεδίασης του eXpresser), τον εντοπισμό του μοτίβου (ερωτήσεις πρόβλεψης και εφαρμογής, π.χ. *μπορείς να βρεις το μοτίβο που επαναλαμβάνεται;*), την κατασκευή μοτίβου για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων, την κατασκευή μοτίβου με χρήση μεταβλητής στον eXpresser (ορισμός «δομικού λίθου» και «ιδιοτήτων») και την έκφραση του γενικού κανόνα (αρχικά προφορικά, έπειτα με τη χρήση του λογισμικού και τέλος με τη χρήση αλφαριθμητικών στοιχείων).

Δραστηριότητα 1	
-----------------	--

Δραστηριότητα 2	
Δραστηριότητα 3	
Σχ. 2: Τα μοτίβα ανά δραστηριότητα στο ΦΕ	

Στο πρώτο ερώτημα όλων των ΦΕ οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν το εκάστοτε εμφανιζόμενο μοτίβο που εμφανίζεται τυπωμένο στο ΦΕ στην επιφάνεια σχεδίασης του eXpresser με τη διαδικασία «σύρε και άσε». Με άλλα λόγια, οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν και να σύρουν (‘ένα-ένα’) τα κατάλληλα χρωματιστά τετράγωνα στην τετραγωνισμένη επιφάνεια του eXpresser ώστε να κατασκευάσουν οι ίδιοι το μοτίβο. Η Ελένη αναφέρεται ως εξής στη συγκεκριμένη επιλογή της:

Ελένη: «Αρχικά επιθυμώ να εμπλέξω τους μαθητές στην αναγνώριση του μοτίβου μέσω του εντοπισμού του δομικού λίθου και της εναλλαγής των χρωμάτων. Για αυτό τον λόγο, τους καλώ να κατασκευάσουν το μοτίβο μέσα από την διαδικασία του «σύρε και άσε». Είναι σημαντικό για αυτούς να αποκτήσουν μια κιναισθητική αίσθηση της δομής (3<sup>η</sup> ΣΕΑ).

Μέσα από τη συγκεκριμένη σχεδιαστική της επιλογή η Ελένη φαίνεται να αξιοποιεί τον eXpresser μ’ έναν δικό της τρόπο. Πριν ακόμα χρησιμοποιήσει τις βασικές λειτουργίες του (π.χ. αναφορικά με τη χρήση μεταβλητών), αξιοποιεί τη σχεδιαστική (‘χειροκίνητη’) δυνατότητα που προσφέρει προκειμένου να δημιουργήσει μία γέφυρα που κατά την ίδια είναι απαραίτητη για να αναγνωρίσουν οι μαθητές τη δομή του μοτίβου και να εμπλακούν περαιτέρω με τη δραστηριότητα. Σε αυτό το σημείο, επομένως, οι λειτουργικές σταθερές που διέπουν τον σχεδιασμό της Ελένης σχετίζονται αφενός με την προσωπική επιστημολογική της θεώρηση σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών και αφετέρου με τη σημασία που αποδίδει στη κιναισθητική εμπλοκή των μαθητών με την κατασκευή ενός μοτίβου για τη νοηματοδότηση μιας μαθηματικής έννοιας και του φορμαλισμού. Οι λειτουργικές σταθερές εδώ απηχούν τόσο την διδακτική εμπειρία της Ελένης όσο και την ερευνητική της εμπειρία αναφορικά με την αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Επιπρόσθετα, η Ελένη φαίνεται να επηρεάστηκε από τις προσφερόμενες αναπαραστάσεις του eXpresser για την περαιτέρω διαμόρφωση όλων των ερωτημάτων των ΦΕ. Για παράδειγμα, οι μαθητές πρώτα κλήθηκαν να ορίζουν την «εικονική μεταβλητή» και έπειτα να αποτυπώνουν τον γενικό κανόνα με βάση τις λειτουργίες του eXpresser. Η εκπαιδευτικός χαρακτηριστικά αναφέρει στην συνέντευξη πριν από την εφαρμογή των ΦΕ της:

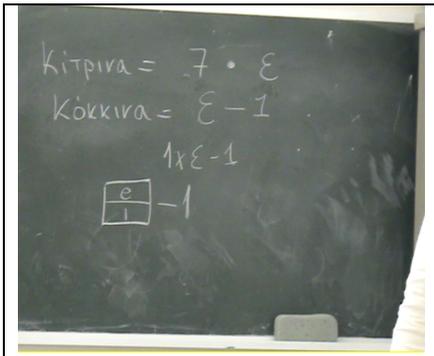
Ελένη: «Βασίστηκα στον eXpresser, γιατί για μένα θα ήταν αρκετό ο γενικός κανόνας να προέκυπτε και λίγο πιο περιγραφικά. Το αν οι μαθητές καταφέρουν να καταλήξουν στον γενικό κανόνα μέσα από τη χρήση της μεταβλητής, θα φανεί στην εφαρμογή των

δραστηριοτήτων στην τάξη. Σίγουρα όμως είναι μια πρώτη εξοικείωση με τη συμβολική γραφή. Το πέρασμα από τον λεκτικό κανόνα στον συμβολικό είναι αρκετά δύσκολο.»

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η Ελένη εστιάζεται στην παρουσίαση/εμφάνιση της μεταβλητής με την μορφή του «γενικευμένου αριθμού», δημιουργώντας την συνθήκη για ένα ομαλό εννοιολογικό πέρασμα των μαθητών από την Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου, όπως αυτό συζητήθηκε και στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης. Ιδιαίτερα, η εκπαιδευτικός επισήμαινε ότι ο διδακτικός της σχεδιασμός *«σχετίζεται με την προσέγγιση της μεταβλητής με τη μορφή του γενικευμένου αριθμού, που στην ουσία δεν διδάσκεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση με αυτό τον τρόπο, αλλά με τη μορφή του αγνώστου χ»* (1<sup>η</sup> ΣΕΑ). Επομένως, παρατηρούμε εδώ ότι η διδακτική τεκμηρίωση της Ελένης χαρακτηρίζεται από λειτουργικές σταθερές που σχετίζονται αφενός με τη διδακτική της εμπειρία και αφετέρου με ζητήματα που αναδύθηκαν στο πλαίσιο των συζητήσεων της ομάδας PREMaTT στην οποία συμμετείχε.

Στις συναντήσεις της ομάδας, επίσης, η Ελένη είχε εκφράσει την άποψη ότι η αναδρομικότητα θα πρέπει να εμφανίζεται στις δραστηριότητες με τα μοτίβα, ώστε οι μαθητές να μπορούν να φανταστούν την εξέλιξη του μοτίβου με έναν αφηρημένο τρόπο βασισμένοι στην επανάληψη. Η ίδια θεωρούσε ότι με αυτό τον τρόπο *«οι μαθητές νοηματοδοτούν την διεξαγωγή του γενικού κανόνα»* (λειτουργική σταθερά που σχετίζεται με την προσωπική επιστημολογική της θεώρηση για τη διδασκαλία της άλγεβρας) (3<sup>η</sup> συνέντευξη). Δραστηριότητες με στοιχεία αναδρομικότητας είχαν παρουσιαστεί και από εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης, στοιχείο που φάνηκε να αξιοποιεί ως πόρο και η Ελένη και στον δικό της διδακτικό σχεδιασμό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτέλεσε η δημιουργία των ερωτημάτων: *«Τι παρατηρείς ότι αλλάζει σε κάθε επανάληψη σε σχέση με την προηγούμενη; Μπορείς να εντοπίσεις ποιο είναι το μοτίβο που επαναλαμβάνεται;»* Από τα συγκεκριμένα ερωτήματα φαίνεται και πάλι να εμφανίζονται λειτουργικές σταθερές που σχετίζονται με τη συμμετοχή της στις συζητήσεις των εκπαιδευτικών αναφορικά με το θέμα της διδασκαλίας της άλγεβρας.

Από όλες τις σχεδιαζόμενες δραστηριότητες η Ελένη θεώρησε τη δραστηριότητα 3 ως την περισσότερο απαιτητική, καθώς σε αυτήν εμφανίζονται στοιχεία συµμεταβολής (ο αριθμός ενώσεων είναι ο αριθμός των αψίδων μείον ένα) (Σχ. 2). Η συγκεκριμένη δραστηριότητα αποτέλεσε πρόκληση για την ίδια, καθώς αναγνώριζε ότι *«οι μαθητές θα πρέπει πρώτα να συσχετίσουν τις συνδέσεις με την αψίδα και ύστερα να καταλήξουν στον γενικό αλγεβρικό τύπο»* (4<sup>η</sup> συνέντευξη). Επί της ουσίας, οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών. Τελικά, οι μαθητές κατά την εφαρμογή της συγκεκριμένης δραστηριότητας στην τάξη φάνηκαν ότι ήταν σε θέση να προσδιορίσουν σχετικά εύκολα τη δομή του μοτίβου και να υπολογίσουν τον αριθμό των αψίδων και των συνδέσεων για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων. Ωστόσο, δυσκολεύτηκαν στην κατασκευή του «δομικού λίθου» και στον ορισμό των «ιδιοτήτων» του σε επίπεδο λογισμικού, γιατί έπρεπε να συνδέσουν δύο εικονίδια με πράξεις για να εκφράσουν συμβολικά την συµμεταβολή μέσω μιας σχέσης.



Σχ. 3: Η μεταβλητή στη δραστηριότητα 3

Η εκπαιδευτικός, αντιμέτωπη με αυτόν τον περιορισμό στην τάξη, αποφάσισε να προσεγγίσει διδακτικά την συμβολική αποτύπωση του γενικού κανόνα, παρακάμπτοντας προσωρινά το ψηφιακό εργαλείο και χρησιμοποιώντας τον μαυροπίνακα του εργαστηρίου η/υ. Αρχικά, ζήτησε από τους μαθητές να γράψουν τον γενικό κανόνα της δραστηριότητας στον μαυροπίνακα. Στις απαντήσεις τους οι μαθητές αποτύπωσαν τον αριθμό των κίτρινων και των κόκκινων τετραγώνων για αριθμό επαναλήψεων «ε» (Σχ. 3). Στο σημείο αυτό ήρθε στην επιφάνεια η ποικιλία των τρόπων με τους οποίους οι μαθητές νοηματοδότησαν τη μεταβλητή μέσα από την

προηγηθείσα αλληλεπίδρασή τους με τον eXpresser. Συγκεκριμένα, ενώ ορισμένοι μαθητές νοηματοδότησαν τη μεταβλητή ως έναν γενικευμένο αριθμό, κάποιοι άλλοι την αντιμετώπισαν ως «εικονίδιο». Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η απάντηση μιας μαθήτριας (τελευταία σειρά Σχ. 3) που αποτύπωσε τη μεταβλητή με βάση την εικονική αναπαράσταση του eXpresser, αναδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο την καθοριστική επιρροή του ψηφιακού εργαλείου και των προσφερόμενων αναπαραστάσεων για την έκφραση σχέσεων με χρήση αλγεβρικού συμβολισμού. Το εύρημα αυτό φαίνεται να έρχεται ως απάντηση στον προβληματισμό που παρουσιάστηκε στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης σχετικά με τις δυνατότητες των μαθητών να νοηματοδοτήσουν τη μεταβλητή μέσα από τη χρήση του eXpresser. Η Ελένη στο στάδιο του αναστοχασμού σε μια συνάντηση της ομάδας των εκπαιδευτικών ερμήνευσε την παραπάνω δυσκολία των μαθητών (δυσκολία συμβολικής έκφρασης της συμμεταβολής στο περιβάλλον του λογισμικού) ως «περιορισμό του ψηφιακού εργαλείου που σχετίζεται με τον σχεδιασμό της δραστηριότητας», αναγνωρίζοντας ότι «οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις του eXpresser φάνηκαν ότι λειτούργησαν με ένα τρόπο που άλλοτε υποστήριζαν και άλλοτε όχι στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών και το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα» (6<sup>η</sup> ΣΕΑ). Τα παραπάνω αποτελούν λειτουργικές σταθερές της Ελένης που σχετίζονται με τη συμμετοχή της στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης και συγκεκριμένα στο πεδίο των συζητήσεων που αφορούσαν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών μέσα από τις αναπαραστάσεις του λογισμικού.

Η παραπάνω ερμηνεία της εκπαιδευτικού αποτελεί ένδειξη ότι η διαδικασία διδακτικής τεκμηρίωσης της Ελένης συνεχίστηκε και εντός τάξης, αφού η ίδια τροποποίησε τον αρχικό διδακτικό σχεδιασμό της μέσα στην αίθουσα επιλέγοντας ο γενικός κανόνας να προκύψει μέσα από την συζήτηση με όλη την τάξη και χρησιμοποιώντας τον μαυροπίνακα για να παρουσιάσει τις ιδέες των μαθητών και όχι το λογισμικό όπως είχε αρχικά σχεδιάσει. Επομένως, το συγκεκριμένο συμβάν φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο η πρακτική ενημερώνει μέσα στον χρόνο τη διαδικασία δημιουργίας τεκμηρίων διδασκαλίας: η εμπειρία εφαρμογής των ΦΕ στην τάξη αποτελεί πλέον μια νέα λειτουργική σταθερά που αναμένεται να 'καθοδηγήσει' τη δημιουργία νέων τεκμηρίων διδασκαλίας (π.χ. τροποποίηση των ΦΕ) στο μέλλον. Το εύρημα αυτό σηματοδοτεί ένα είδος εξέλιξης του διδακτικού σχεδιασμού της

Ελένης και άρα θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως ένδειξη επαγγελματικής μάθησης της ίδιας. Συνοπτικά, η Ελένη μέσα από την εφαρμογή της δραστηριότητας 3 συνειδητοποίησε την πολυπλοκότητα που έχει αφενός η κατανόηση του αλγεβρικού συμβολισμού από τους μαθητές της και αφετέρου εμβάθυνε τη γνώση της αναφορικά με το πώς μπορεί η ίδια να αξιοποιεί την τεχνολογία για τη διδασκαλία της αλγεβρικής σκέψης.

Αποτιμώντας την πρακτική της στην τελευταία συνάντηση επαγγελματικής ανάπτυξης, η Ελένη εστίασε στη λειτουργία και τους περιορισμούς του eXpresser και επισήμανε ότι στο μέλλον ίσως να χρησιμοποιήσει ταυτόχρονα και ένα δεύτερο λογισμικό που προσφέρει διαφορετικές αναπαραστάσεις και λειτουργίες, όπως για παράδειγμα το GeoGebra. Το συγκεκριμένο εύρημα αποτελεί ακόμα μία ένδειξη του τρόπου που φαίνεται να επηρέασε τον μελλοντικό διδακτικό σχεδιασμό της Ελένης - και άρα και τον επόμενο κύκλο διδακτικής τεκμηρίωσης - τόσο η εμπειρία εφαρμογής όσο και η συμμετοχή στις συναντήσεις της ομάδας επαγγελματικής ανάπτυξης. Υπενθυμίζουμε ότι ο ζήτημα αυτό απασχόλησε τους εκπαιδευτικούς και αποτέλεσε αντικείμενο των μεταξύ τους συζητήσεων. Τέλος, η ίδια ανέφερε στη συνέντευξη που ακολούθησε την 3η διδασκαλία ότι τελικά «οι μαθητές χρειάζονται περισσότερη εξοικείωση με τη λειτουργία του eXpresser». Στην τελευταία της συνέντευξη στο πλαίσιο του PREMaTT κατέληξε στον προβληματισμό ότι η τεχνολογία από μόνη της ίσως δεν είναι αρκετή ούτε πανάκεια για την εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Συνοψίζοντας, ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser αποτέλεσε ένα κεντρικό πόρο στον οποίο βασίστηκε ο διδακτικός σχεδιασμός της Ελένης εντός και εκτός τάξης. Επιπλέον πόρους αποτέλεσαν τα κύρια ζητήματα που προέκυψαν μέσα από τις συναντήσεις της ομάδας των εκπαιδευτικών, όπως για παράδειγμα η έννοια της μεταβλητής και ο τρόπος εισαγωγής της στην διδασκαλία, και η εμπειρία εφαρμογής των ΦΕ εντός σχολικής τάξης, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την εφαρμογή της δραστηριότητας 3 μέσω της οποίας διαφάνηκε η επιρροή του eXpresser στη νοηματοδότηση του αλγεβρικού συμβολισμού από τους μαθητές. Παράλληλα, κατά τη διαδικασία δημιουργίας διδακτικής τεκμηρίωσης, εμφανίστηκαν λειτουργικές σταθερές της Ελένης που αφορούν την προσωπική επιστημολογική της θεώρηση, για παράδειγμα σχετικά με την διδασκαλία και μάθηση της άλγεβρας ή σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ακόμα, εμφανίστηκαν λειτουργικές σταθερές που σχετίζονται με τη συμμετοχή της στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης, όπως για παράδειγμα λειτουργικές σταθερές που αφορούσαν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών μέσα από τον eXpresser. Τέλος, εντοπίσαμε λειτουργικές σταθερές που σχετίζονται με τη διδακτική και ερευνητική εμπειρία της, όπως για παράδειγμα η αναγνώριση ότι η κιναισθητική εμπλοκή των μαθητών στην κατασκευή των μοτίβων διευκολύνει τη μαθηματική κατανόηση.

### **Συζήτηση-Συμπεράσματα**

Σκοπός της έρευνας ήταν η μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, της Ελένης, που συμμετείχε σ' ένα

πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης. Το πρόγραμμα εστίαζε στην επαγγελματική ανάπτυξη μιας ομάδας εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μέσω της αξιοποίησης πόρων για την εισαγωγή της άλγεβρας στη διδασκαλία. Παράλληλα, μελετήθηκαν τα κύρια ζητήματα που αναδύθηκαν στο πλαίσιο των συναντήσεων της ομάδας προκειμένου να εντοπιστούν πιθανές επιρροές στον διδακτικό σχεδιασμό και την πρακτική της Ελένης.

Κύρια θέματα εστίασης της ομάδας των εκπαιδευτικών αποτέλεσαν η εννοιολογική προσέγγιση του όρου άλγεβρα, ο τρόπος εισαγωγής της μεταβλητής στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης και ο ρόλος των αναπαραστάσεων διαφορετικών λογισμικών για την εισαγωγή της άλγεβρας. Προσεγγίστηκε το ζήτημα γεφύρωσης της εισαγωγής της άλγεβρας ανάμεσα στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, κυρίως μέσω του τρόπου εισαγωγής της μεταβλητής στις βαθμίδες αυτές. Φαίνεται ότι η έννοια της μεταβλητής και η εισαγωγή της στη διδασκαλία μπορεί να αποτελέσει ένα σημείο επικοινωνίας μεταξύ των εκπαιδευτικών των δύο βαθμίδων. Τελικά, μέσω των εφαρμογών αναδείχτηκαν εννοιολογικές δυσκολίες των μαθητών αναφορικά με την έννοια της μεταβλητής όπως αυτές έχουν αποτυπωθεί στην υπάρχουσα βιβλιογραφία (Ferrara & Sinclair, 2016; Radford, 2010; Rivera, 2013).

Στο πλαίσιο της δημιουργίας διδακτικής τεκμηρίωσης, η Ελένη σχεδίασε τρία ΦΕ καθένα από τα οποία περιελάμβανε από μια δραστηριότητα. Όλα τα ΦΕ ξεκινούν με την διαδικασία του «σύρε και άσε» (επιλογή και σύρσιμο χρωματιστών τετραγώνων στην επιφάνεια του eXpresser για το σχηματισμό μοτίβων) που αποτελεί αποτέλεσμα της διδακτικής της εμπειρίας και της ερευνητικής της διαδρομής. Στην πορεία του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής της Ελένης, προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε επιρροές από τις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης στις οποίες συμμετείχε. Τέτοιες ήταν: α) η διδακτική αξιοποίηση των μοτίβων για την εισαγωγή της άλγεβρας (Ferrara & Sinclair, 2016; Radford, 2010), β) η ενσωμάτωση στοιχείων συμμεταβολής στα μοτίβα όπως για παράδειγμα στην 3<sup>η</sup> δραστηριότητα (Ferrara & Sinclair, 2016) και γ) η διδακτική αξιοποίηση ψηφιακών περιβαλλόντων όπως ο eXpresser και η επιρροή τους στη μαθηματική κατανόηση των μαθητών.

Κατά τη διαδικασία δημιουργίας διδακτικής τεκμηρίωσης της Ελένης εστίασαμε στις λειτουργικές σταθερές και τους πόρους που σχετίζονται με τα τεκμήρια διδασκαλίας της. Η προσωπική επιστημολογική θεώρηση της Ελένης αναφορικά με τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, η συμμετοχή της στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης και η διδακτική της εμπειρία αποτέλεσαν τις κύριες κατηγορίες λειτουργικών σταθερών. Ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser, τα κύρια ζητήματα που προέκυψαν μέσα από τις συναντήσεις της ομάδας των εκπαιδευτικών, όπως για παράδειγμα η έννοια της μεταβλητής και ο τρόπος εισαγωγής της στη διδασκαλία, και η εμπειρία εφαρμογής των ΦΕ εντός σχολικής τάξης αποτέλεσαν τους πόρους στους οποίους βασίστηκε ο διδακτικός σχεδιασμός της Ελένης.

Αναφορικά με τις ενδείξεις επαγγελματικής μάθησης της Ελένης, η εκπαιδευτικός φαίνεται να ευαισθητοποιείται για τη διδασκαλία της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και ιδιαίτερα για τον τρόπο εισαγωγής της μεταβλητής, ήδη από τις αρχικές συναντήσεις της ομάδας επαγγελματικής ανάπτυξης. Στη συνέχεια και στο πλαίσιο της διδασκαλίας της συνειδητοποίησε τους περιορισμούς του λογισμικού eXpresser σχετικά με τη μάθηση της άλγεβρας, εστιαζόμενη στον τρόπο με τον οποίο οι αναπαραστάσεις του περιβάλλοντος διαμεσολαβούν τη μαθηματική κατανόηση των μαθητών και ειδικότερα τη νοηματοδότηση του αλγεβρικού συμβολισμού. Η συγκεκριμένη ένδειξη ανέκυψε μέσα από την εφαρμογή της δραστηριότητας 3 και επιπρόσθετα μας επέτρεψε να εντοπίσουμε πώς η πρακτική ενημερώνει μέσα στο χρόνο τη συνέχιση της δημιουργίας τεκμηρίων διδασκαλίας. Τα ευρήματα αυτά αναδεικνύουν τη συμβολή των κοινοτήτων πρακτικής στην επαγγελματική μάθηση και εξέλιξη των εκπαιδευτικών, ακόμη και αυτών με αυξημένα προσόντα.

Η παρούσα έρευνα συμβάλλει στη συζήτηση σχετικά με το πώς μπορεί να εισαχθεί η διδασκαλία της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μέσα από τη χρήση ενός ειδικά σχεδιασμένου ψηφιακού εργαλείου που προσφέρει δυνατότητες για πειραματισμό με την κατασκευή μοτίβων και την συμβολική έκφραση των σχέσεων γενίκευσης. Μέσα από την εφαρμογή των δραστηριοτήτων ανέκυψαν ζητήματα που αναδεικνύουν την πολυπλοκότητα της αξιοποίησης της ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία της άλγεβρας. Παρατηρήθηκε για παράδειγμα ότι οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις του eXpresser άλλοτε υποστήριζαν και άλλοτε όχι την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών και το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Αυτό το εύρημα έρχεται να προστεθεί στην σχετική βιβλιογραφία που βασίζεται στην διδακτική και ερευνητική αξιοποίηση του eXpresser (Geraniou & Maniakis, 2015; Zoupa & Psycharis, 2019). Εύρημα πρόσθετης ερευνητικής αξίας αποτελεί η διεύρυνση της επαγγελματικής μάθησης της Ελένης αναφορικά με την παιδαγωγική αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία της άλγεβρας. Μέσα από την εμπειρία της με τη χρήση του eXpresser, η Ελένη κατέληξε ότι η τεχνολογία δεν αποτελεί διδακτική πανάκεια, καθώς από μόνη της δεν εγγυάται το ομαλό πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Τέλος, η παρούσα έρευνα συνεισφέρει στη μελέτη της συνεργασίας και της αλληλεπίδρασης εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μέσα από την συμμετοχή τους σ' ένα από κοινού πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης. Περαιτέρω έρευνα είναι αναγκαία και στις δύο βαθμίδες, ιδιαίτερα όταν εκπαιδευτικοί και των δύο βαθμίδων συνεργάζονται σε ομάδες εργασίας.

### **Σημειώσεις**

<sup>1</sup> PREMaTT: Penser les Ressources de l'Enseignement des Mathématiques dans un Temps de Transitions, <http://ife.ens-lyon.fr/ife/recherche/groupe-de-travail/prematt>

<sup>2</sup> Η παρούσα μετάφραση όρων έχει βασιστεί στη μετάφραση του άρθρου των Trouche, Gueudet και Pepin (2018) στα ελληνικά (βλ. Trouche, Gueudet, Pepin, Psycharis & Kynigos, 2020).

<sup>3</sup> Ο όρος λειτουργική σταθερά έλκει την καταγωγή του από τη θεωρία των εννοιολογικών πεδίων του Vergnaud και του τρόπου με τον οποίο αυτή αξιοποιήθηκε στην εργαλειακή θεωρία (instrumental approach). Η ΘΔΤ αναπτύχθηκε 'κατ' αναλογία' με την εργαλειακή θεωρία: η εργαλειακή θεωρία αναφέρεται στον μετασχηματισμό ενός κατασκευάσματος (artifact) σε εργαλείο (instrument), ενώ η ΘΔΤ αναφέρεται στον μετασχηματισμό ενός πόρου (resource) σε τεκμήριο διδασκαλίας (document) στο επαγγελματικό πλαίσιο των εκπαιδευτικών. Στην εργαλειακή θεωρία οι λειτουργικές σταθερές αναφέρονται στην μη ευθέως εκφραζόμενη γνώση του μαθητευόμενου που διαμορφώνεται μέσα από τη χρήση του ενός εργαλείου σε διαφορετικά πλαίσια και για διαφορετικές καταστάσεις.

<sup>4</sup> Ο όρος προσωπική επιστημολογική θεώρηση (personal epistemology, Hofer, 2004) αποτελεί κεντρικό θεωρητικό όρο στην μελέτη της γνώσης και της μάθησης για περισσότερα από 20 χρόνια κυρίως στις ΗΠΑ. Αναφέρεται στο τι συνιστά γνώση και από πού προέρχεται, πώς οι άνθρωποι μαθαίνουν και πώς η γνώση κατασκευάζεται και αξιολογείται.

<sup>5</sup> Ηλεκτρονική έκδοση του μικρόκοσμου eXpresser: <http://web-expresser.appspot.com>

### Ευχαριστίες

Επιθυμούμε να ευχαριστήσουμε θερμά την εκπαιδευτικό της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη συμμετοχή της στην παρούσα έρευνα.

### Αναφορές

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 205-224.
- Assis, C., Gitirana, V., & Trouche, L. (2018). The Metamorphosis of resource systems of prospective teacher: from studying to teaching. In V. Gitirana, T. Miyakawa, M. Rafalska, S. Soury-Lavergne, & L. Trouche (Eds.), *Proceedings of the Re(s)ources 2018 International Conference* (pp. 39-42). Lyon: ENS de Lyon.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. J. Hoynes & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 135-142).
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 412-446.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.
- Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (3<sup>rd</sup> ed.). Sage Publications, Inc. <https://doi.org/10.4135/9781452230153>
- Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 1-19.

- Geraniou, E., & Mavrikis, M. (2015). Building Bridges to Algebra through a Constructionist Learning Environment. *Constructivist Foundations*, 10(3), 321-330.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers?. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2011). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. *ZDM*, 43(3), 399-411.
- Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2013). Collective work with resources: an essential dimension for teacher documentation. *ZDM*, 45(7), 1003-1016.
- Hofer B.K. (2008). Personal Epistemology and Culture. In: M. S. Khine (Eds), *Knowing, Knowledge and Beliefs* (pp. 3-22). Springer, Dordrecht.
- Irwin, K. C., & Britt, M. S. (2005). The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy Project. *Educational Studies in Mathematics*, 58(2), 169-188.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer.
- Kynigos, C., Bardini, C., Barzel, B. & Maschietto, M. (2007). Tools and technologies in mathematical didactics. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Cyprus, (pp. 1332-1338).
- Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalisation. *ZDM*, 41(4), 493-503.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2011). Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση: Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο
- Prendergast, M., O'Meara, N., O'Hara, C., Harbison, L., & Cantley, I. (2019). Bridging the primary to secondary school mathematics divide: Teachers' perspectives. *Issues in Educational Research*, 29(1), 243-260.
- Psycharis, G., & Kalogeria, E. (2018). Studying the process of becoming a teacher educator in technology-enhanced mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(6), 631-660.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-22). Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school*. Psychological and pedagogical considerations. Nueva York: Springer.
- Σκουρμπουδή, Χ. (2014). Μοτίβα στην καθημερινότητα και στο νηπιαγωγείο. *Πρακτικά του 5ου Πανελληνίου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.* Φλώρινα: ΕΝΕΔΙΜ

- Trouche L., Gueudet G., & Pepin B. (2018). Documentational Approach to Didactics. In: S. Lerman. (Eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9\\_100011-1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100011-1)
- Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B., Psycharis, G., & Kynigos, C. (2020). Θεωρία διδακτικής τεκμηρίωσης. DAD-Multilingual project. <https://hal.archives-ouvertes.fr/DAD-MULTILINGUAL/>
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, pp. 113-126. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wenger, E. (1999). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.
- Yin, R. K. (1994). Discovering the future of the case study. Method in evaluation research. *Evaluation practice*, 15(3), 283-290.
- Zoupa, A., & Psycharis, G. (2019). Exploring the role of context in students' meaning making for algebraic generalization. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 3011-3018). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.