

---

## Research in Mathematics Education

---

No 12 (2019)

---

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

---

### THE INQUIRY-BASED APPROACH IN MATHEMATICS EDUCATION: CONNECTIONS, VARIATIONS, INNOVATIONS

*Χρυσάνθη Σκουμπούρδη (Chrisanthi Skoumpourdi),  
Γεωργία Βαϊτσίδη (Georgia Vaitsidi)*

doi: [10.12681/enedim.21142](https://doi.org/10.12681/enedim.21142)

---

Copyright © 2019, Χρυσάνθη Σκουμπούρδη (Chrisanthi Skoumpourdi),  
Γεωργία Βαϊτσίδη (Georgia Vaitsidi)



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

#### To cite this article:

Σκουμπούρδη (Chrisanthi Skoumpourdi) Χ., & Βαϊτσίδη (Georgia Vaitsidi) Γ. (2019). THE INQUIRY-BASED APPROACH IN MATHEMATICS EDUCATION: CONNECTIONS, VARIATIONS, INNOVATIONS. *Research in Mathematics Education*, (12), 8–22. <https://doi.org/10.12681/enedim.21142>

---

## Η ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ<sup>1</sup> ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ, ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΕΙΣ, ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, [kara@aegean.gr](mailto:kara@aegean.gr)

Γεωργία Βαϊτσίδα, [psed16001@rhodes.aegean.gr](mailto:psed16001@rhodes.aegean.gr)

**Περίληψη:** Με αφορμή τη διεθνή τάση για υιοθέτηση της διερευνητικής προσέγγισης από τη μαθηματική εκπαίδευση, η παρούσα εργασία σκοπό έχει την αναζήτηση χαρακτηριστικών τα οποία οριοθετούν τη διερευνητική προσέγγιση και την καθιστούν καινοτόμα. Επιπλέον, σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι ο εντοπισμός διαστάσεων της διερευνητικής προσέγγισης, μέσω ποιοτικής ανάλυσης περιεχομένου, στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου, προκειμένου να διαπιστωθεί ο βαθμός υιοθέτησής της από αυτά. Από τη μελέτη, προέκυψε ότι η οριοθέτηση της διερευνητικής προσέγγισης έχει επηρεαστεί από θεωρίες που υποστηρίζουν τη μάθηση μέσω κατανόησης, καθώς και ότι η διερευνητική προσέγγιση εμπεριέχει καινοτόμα χαρακτηριστικά με σημαντικότερο το ότι η γνώση οικοδομείται συνεργατικά με διαδικασία παρόμοια με εκείνη που ακολουθείται από έναν ερευνητή και στην οποία καλλιεργούνται και αναπτύσσονται επιστημονικές δεξιότητες. Επιπλέον, φάνηκε ότι η διερευνητική προσέγγιση δεν υιοθετείται από τα Προγράμματα Σπουδών, παρόλο που η μεθοδολογία που προτείνουν, καθώς και οι στόχοι που θέτουν αναφέρονται στις αρχές του εποικοδομητισμού, οι οποίες χαρακτηρίζουν μεν και τη διερευνητική προσέγγιση, αλλά δεν αφορούν στα χαρακτηριστικά εκείνα που την οριοθετούν και την καθιστούν καινοτόμα.

**Λέξεις-κλειδιά:** Διερευνητική Προσέγγιση, Μαθηματική Εκπαίδευση, Προγράμματα Σπουδών Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου, Θεωρίες Μάθησης, Μοντέλα Διερευνητικής Προσέγγισης, Ποιοτική Ανάλυση Περιεχομένου

**Abstract:** Taking into consideration the new trend, in mathematics education, to adopt an inquiry-based approach, in this paper we aim to investigate its characteristics in order to define it. Furthermore, we aim to identify inquiry-based approach's dimensions, if any, through qualitative content analysis, in the primary school mathematics curriculum, in order to determine the degree of its adoption. The study found, that inquiry-based approach's definition is influenced by theories that support learning through understanding. It was also found that, it involves innovative features, with the most important that knowledge is constructed cooperatively in a process like that followed by a researcher and in which scientific skills are cultivated and developed. Moreover, it was found that the inquiry-based approach was not adopted by the primary school mathematics curriculum.

**Keywords:** *Inquiry-Based Approach, Mathematics Education, Primary School Mathematics Curriculum, Learning Theories, Inquiry-Based Models, Qualitative Content Analysis*

## **Εισαγωγή**

Στο πέρασμα των χρόνων οι διάφορες παιδαγωγικές προσεγγίσεις προσπαθούν να δώσουν απάντηση στο ερώτημα του τι μπορούμε να κάνουμε ώστε οι μαθητές<sup>ii</sup> να κατανοούν καλύτερα τα μαθηματικά που διδάσκονται. Έτσι, προτείνονται καινοτόμες μέθοδοι οι οποίες έχουν την τάση να αποθαρρύνουν τη χρήση πρακτικών που βασίζονται στη μετάδοση της γνώσης και να ενθαρρύνουν πρακτικές που βασίζονται στην οικοδόμηση της γνώσης μέσω αλληλεπίδρασης και συνεργασίας. Επιπλέον, η επιδίωξη της εκπαίδευσης διεθνώς δεν εστιάζει μόνο στην απόκτηση γνώσεων για συγκεκριμένα γνωστικά αντικείμενα, αλλά επιδιώκει ταυτόχρονα την εξασφάλιση των προϋποθέσεων για την ανάπτυξη ποικίλων ικανοτήτων και δεξιοτήτων οι οποίες θεωρούνται απαραίτητες για την κριτική και δημιουργική συμμετοχή των μαθητών ως μελλοντικών πολιτών στην κοινωνία (Engeln, Euler, & Maass, 2013). Μία προσέγγιση με αυτήν τη φιλοσοφία, η οποία υιοθετείται διεθνώς είναι η προσέγγιση της διερεύνησης.

Αποτελέσματα από την εφαρμογή της προσέγγισης της διερεύνησης σε προγράμματα (Artigue & Baptist, 2012, Maas & Artigue, 2013; PRIMAS, 2012) και σε έρευνες (Friesen & Scott, 2013; Hmelo-Silver, Duncan, & Chinn, 2007; Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2015; Towers, 2010) καταδεικνύουν ότι όταν η διδασκαλία και η μάθηση βασίζονται στη διερεύνηση επέρχονται σημαντικά οφέλη, όχι μόνο στην οικοδόμηση της γνώσης, αλλά και στην καλλιέργεια ποικίλων ικανοτήτων και δεξιοτήτων όπως μεταξύ άλλων της συνεργασίας, της επικοινωνίας και της επιχειρηματολογίας. Παράλληλα, βέβαια, επισημαίνουν δυσκολίες στην υιοθέτηση της προσέγγισης της διερεύνησης από τη μαθηματική εκπαίδευση λόγω ποικίλων παραγόντων, όπως οι ιδιαιτερότητες και οι απαιτήσεις της προσέγγισης, η μικρή σημασία που έχει δοθεί, έως τώρα, στην προσέγγιση και άρα τα περιορισμένα ερευνητικά αποτελέσματα, καθώς και ο ασαφής ορισμός της.

Συμμετέχοντας στον διάλογο της επιστημονικής κοινότητας για την υιοθέτηση της διερευνητικής προσέγγισης από τη μαθηματική εκπαίδευση, στη συγκεκριμένη εργασία αναζητούνται χαρακτηριστικά τα οποία οριοθετούν τη διερευνητική προσέγγιση και την καθιστούν καινοτόμα. Επιπλέον, εντοπίζονται διαστάσεις της διερευνητικής προσέγγισης στα Προγράμματα Σπουδών του Δημοτικού Σχολείου, προκειμένου να διαπιστωθεί ο βαθμός υιοθέτησής της από αυτά. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα παρακάτω:

1. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά που οριοθετούν τη διερευνητική προσέγγιση και την καθιστούν καινοτόμα;
2. Ποιες διαστάσεις της διερευνητικής προσέγγισης εντοπίζονται στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου;

## **Διερευνητική προσέγγιση**

Στη διερευνητική προσέγγιση, η οποία ξεκίνησε από τις φυσικές επιστήμες, οι μαθητές

καλούνται να εργαστούν με μεθόδους παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούν οι επιστήμονες για την αναζήτηση της επιστημονικής γνώσης (Artigue, Dilo, Harlen, & Lena, 2012). Όμως, η μη ύπαρξη σαφούς ορισμού της προσέγγισης της διερεύνησης οδηγεί συχνά τους ερευνητές σε σύγχυσή της με άλλες προσεγγίσεις (Hmelo-Silver, et al., 2007) και τελικά σε λανθασμένη ερμηνεία της αποτελεσματικότητάς της (Kirschner, Sweller, & Clark, 2006).

Η διερευνητική προσέγγιση θεωρείται ένα πολύπλοκο και πολύπλευρο κατασκευάσμα λόγω του ότι τα χαρακτηριστικά της διαμορφώνονται από την επιρροή άλλων θεωρητικών προσεγγίσεων και παιδαγωγικών πρακτικών της μαθηματικής εκπαίδευσης (Newman, Abell, Hubbard, McDonald, Otaala & Martini, 2004; Towers, 2010), οι οποίες υποστηρίζουν τη μάθηση μέσω κατανόησης, όπως είναι η 'επίλυση προβλήματος', η 'θεωρία των διδακτικών καταστάσεων', η 'ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση', η 'προσέγγιση της μοντελοποίησης', η 'ανθρωπολογική προσέγγιση της διδακτικής' (Artigue, et al., 2012), καθώς και άλλες προσεγγίσεις που βασίζονται στην κοινωνική διάσταση του κονστρουκτιβισμού.

Η έμφαση της διερευνητικής προσέγγισης και της 'επίλυσης προβλήματος' του Polya στη χρήση μη-συνηθισμένων προβλημάτων είναι ο συνδετικός κρίκος των δύο αυτών προσεγγίσεων. Η 'επίλυση προβλήματος' δίνει έμφαση στη διδασκαλία και τη μάθηση τού πώς λύνεται ένα πρόβλημα, αναπτύσσοντας ικανότητες επίλυσης προβλημάτων, των οποίων η λύση δεν είναι γνωστή (άμεσα αντιληπτή), μέσω συγκεκριμένων σταδίων, αλλά και μέσω μεταγνωστικών και ευρετικών δεξιοτήτων. Από την άλλη, στη διερευνητική προσέγγιση η έμφαση δίνεται στη διδασκαλία και τη μάθηση μέσω λύσης προβλήματος. Οι μαθητές δεν λύνουν προβλήματα απλά ακολουθώντας συγκεκριμένα στάδια, αλλά εστιάζουν στην ανάπτυξη νοητικών δεξιοτήτων λύσης προβλήματος. Αναλαμβάνουν ουσιαστικές αρμοδιότητες, διαμορφώνουν τις δικές τους στρατηγικές, ανακαλύπτουν, εικάζουν, πειραματίζονται, αξιολογούν και ενθαρρύνονται να γενικεύσουν συμπεράσματα που έχουν ανακαλύψει, μετά από δική τους διερεύνηση. Τα ανοιχτά προβλήματα αποτελούν τον βασικό στόχο της διδασκαλίας στην προσέγγιση της 'επίλυσης προβλήματος', ενώ στη διερευνητική προσέγγιση τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται ευνοούν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης και δοκιμάζουν τον βαθμό προσαρμοστικότητάς των μαθητών, δίνοντας έμφαση στην αιτιολόγηση και την επικοινωνία (Artigue & Blomhøj, 2013). Μία ακόμη διαφορά των δύο αυτών προσεγγίσεων είναι ο τρόπος με τον οποίο συμμετέχει ο εκπαιδευτικός. Στη διερευνητική προσέγγιση, ο εκπαιδευτικός διευκολύνει τη μαθησιακή διαδικασία εμπυχώνοντας και καθοδηγώντας τους μαθητές, παρέχοντάς τους το απαραίτητο εκπαιδευτικό υλικό. Στην 'προσέγγιση της επίλυσης προβλήματος' ο εκπαιδευτικός είναι μεν βοηθός στη μαθησιακή διαδικασία, εμπυχώνοντας και καθοδηγώντας τον μαθητή, ωστόσο δεν παρέχει πληροφορίες για την επίλυση του προβλήματος, καθώς αυτό θεωρείται καθαρά ευθύνη του μαθητή (Savery, 2006) (Πίνακας 1).

Το κοινό σημείο της 'θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων' και της διερευνητικής προσέγγισης είναι το εμπόδιο, το οποίο οδηγεί σταδιακά στην έρευνα και τη μελέτη εναλλακτικών λύσεων. Συγκεκριμένα στη 'θεωρία των διδακτικών καταστάσεων' του Brousseau (2002), δίνεται έμφαση στην ύπαρξη των εμποδίων, τα οποία πρέπει ρητά να διατυπωθούν μέσω των κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων. Και στις δύο προσεγγίσεις η

μάθηση λαμβάνει χώρα μέσα σε ένα σύστημα αλληλεπίδρασης μεταξύ του μαθητή ή μιας ομάδας μαθητών, του εκπαιδευτικού και της μαθηματικής γνώσης. Ωστόσο, μία βασική διαφορά των δύο προσεγγίσεων αφορά στον ρόλο του μαθητή. Συγκεκριμένα, ο μαθητής στη 'θεωρία των διδακτικών καταστάσεων' αναλαμβάνει την ευθύνη εντοπισμού των προβλημάτων και της επίλυσής τους, κάτι που δεν συμβαίνει σε τόσο μεγάλο βαθμό στη διερευνητική προσέγγιση, καθώς ο εκπαιδευτικός έχει εντοπίσει εκ των προτέρων τα εμπόδια που θα προκύψουν και έχει προετοιμάσει την πορεία καθοδήγησής τους (Πίνακας 1).

Η σύνδεση της διερευνητικής προσέγγισης με τη 'ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση' εδράζει στην έμφαση που δίνεται στη συσχέτιση των φορμαλιστικών μαθηματικών με την πραγματική ζωή. Η διδασκαλία και στις δύο προσεγγίσεις βασίζεται κυρίως σε καθημερινά προβλήματα και εμπειρικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές και όχι τόσο σε τυπικά μαθηματικά προβλήματα που δεν βρίσκουν εφαρμογή στην καθημερινότητα. Το βασικό χαρακτηριστικό της 'ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης' είναι η σημαντική θέση που δίνεται, κατά τη διαδικασία της μάθησης, στις ρεαλιστικές καταστάσεις. Η κύρια υπόθεσή της είναι ότι με αφορμή τις καταστάσεις αυτές, οι μαθηματικές έννοιες και ιδέες αναδύονται μέσω της προοδευτικής μαθηματοποίησης, κατά την οποία οι άτυπες μοντελοποιήσεις των μαθητών μετατρέπονται σε τυπικές με σκοπό την κατανόηση και την οργάνωση των φαινομένων (Freudenthal, 1983). Ωστόσο, η διερευνητική προσέγγιση δεν αποσκοπεί μόνο στην επίλυση προβλημάτων από την καθημερινή ζωή, αλλά και σε ποικίλα πλαίσια που θα δοθούν στα παιδιά με στόχο την καλλιέργεια διερευνητικών πρακτικών (Artigue, et al., 2012) (Πίνακας 1).

Τα προβλήματα της πραγματικής ζωής, που χρησιμοποιούνται στην 'προσέγγιση της μοντελοποίησης' είναι προβλήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην προσέγγιση της διερεύνησης, καθιερώνοντας τη σύνδεση των μαθηματικών με έξω-μαθηματικά πλαίσια. Στην 'προσέγγιση της μοντελοποίησης', η έμφαση δίνεται στο ότι οι εφαρμογές των μαθηματικών σε καταστάσεις του πραγματικού κόσμου περιλαμβάνουν κάποιας μορφής μαθηματική μοντελοποίηση (Kaiser & Sriraman, 2006). Μέσα από τις δραστηριότητες μοντελοποίησης, ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει το νόημα του πλαισίου μάθησης, καθώς και να αποκτήσει νέες οπτικές της κατάστασης προβληματισμού. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της ανάκλησης καθημερινών εμπειριών και οικοδόμησης πάνω σε αυτές, κάτι που αποτελεί και το κοινό σημείο των δύο προσεγγίσεων (Πίνακας 1).

Στη διερευνητική προσέγγιση ο μαθητής μπαίνει στη θέση του ερευνητή και εικάζει, ερευνά, αξιολογεί, αλλά επηρεάζεται και από τις δικές του, προσωπικές, νοηματοδοτήσεις (Artigue & Blomhøj, 2013). Αυτά αποτελούν χαρακτηριστικά στοιχεία και της 'ανθρωπολογικής προσέγγισης της διδακτικής' (Chevallard, 1990), η οποία δίνει ιδιαίτερη σημασία στο άτομο που λαμβάνει μέρος στη μαθησιακή διαδικασία και στην προσωπική του νοηματοδότηση για τα όσα συμβαίνουν γύρω του. Ό,τι οικοδομεί ένα άτομο είναι αληθές για το ίδιο και όχι απαραίτητα και για οποιονδήποτε άλλον. Αυτό συμβαίνει γιατί οι άνθρωποι δημιουργούν γνώση με βάση τις πεποιθήσεις και τις εμπειρίες τους από την εκάστοτε κατάσταση, οι οποίες ίσως και να διαφέρουν από άτομο σε άτομο (Πίνακας 1).

Στην προσέγγιση του 'κοινωνικού κονστρουκτιβισμού', όπως και στη διερευνητική προσέγγιση, η μάθηση διενεργείται μέσα σε συγκεκριμένα πολιτισμικά πλαίσια (γλώσσα, στερεότυπα, αντιλήψεις), από την αλληλεπίδραση του ατόμου με άλλα άτομα, σε συγκεκριμένες επικοινωνιακές καταστάσεις και μέσω της υλοποίησης κοινών δραστηριοτήτων. Η γνώση είναι μεταβαλλόμενη και οικοδομείται από τον καθένα χωριστά, για αυτόν τον λόγο είναι υποκειμενική. Η μάθηση είναι συνήθως προϊόν της εννοιολογικής αλλαγής που επέρχεται στα παιδιά λόγω της γνωστικής σύγκρουσης στην οποία υποβάλλονται. Μετά από συζήτηση στη τάξη των ατομικών συλλογισμών των παιδιών, τα μαθηματικά νοήματα που παράγονται μέσω της διαπραγμάτευσης θεωρούνται κοινά, αναγνωρίζονται από όλους και τους αποδίδεται το ίδιο νόημα (Cobb, 2007; Roth & Lee, 2007).

Τα παραπάνω σημεία, στα οποία συγκλίνει η προσέγγιση του 'κοινωνικού κονστρουκτιβισμού' με τη διερευνητική προσέγγιση, οδηγούν, συχνά, στην ταύτιση της προσέγγισης της διερεύνησης με άλλες πρακτικές της κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης, όπως τη 'μάθηση μέσω ανακάλυψης' (discovery learning), τη 'μάθηση η οποία βασίζεται σε ένα πρόβλημα' (problem-based learning), αλλά και τη 'μάθηση η οποία βασίζεται σε πρότζεκτ' (project-based learning), μεταξύ άλλων. Όμως, παρόλο που η 'μάθηση μέσω ανακάλυψης' βασίζεται στην εξερεύνηση και στον προβληματισμό και η διδασκαλία παρέχει ένα περιβάλλον ενθάρρυνσης και διευκόλυνσης της εξερεύνησης, όπως δηλαδή και στην προσέγγιση της διερεύνησης, διαφοροποιείται στο ότι είναι ελάχιστα καθοδηγούμενη και είναι μια ατομική δραστηριότητα (Swan, Pead, Doorman, & Mooldijk, 2013; Towers, 2010). Τα στοιχεία που διαφοροποιούν τη διερευνητική προσέγγιση από τη 'μάθηση η οποία βασίζεται σε ένα πρόβλημα', είναι ότι η δεύτερη ξεκίνησε από την ιατρική με σκοπό τη βελτίωση των διαγνωστικών ικανοτήτων των φοιτητών μέσω κακοδιατυπωμένων προβλημάτων. Είναι μία μαθητοκεντρική προσέγγιση και η μάθηση λαμβάνει χώρα σε μικρές ομάδες υπό την καθοδήγηση ενός ειδικού, ο οποίος ενεργεί ως διευκολυντής. Οι φοιτητές ασχολούνται με αυθεντικά προβλήματα χωρίς να έχουν προετοιμαστεί ή μελετήσει κάτι σχετικό γιατί αξιολογείται ο τρόπος που χρησιμοποιούν τις παρεχόμενες πληροφορίες ή τις πληροφορίες που αναζήτησαν, αλλά και ο τρόπος που εφαρμόζουν τις γνώσεις τους για να προβούν σε διάγνωση και να λύσουν το πρόβλημα (Friesen & Scott, 2013). Τέλος, η 'μάθηση βασισμένη σε πρότζεκτ', οργανώνει τη μάθηση γύρω από τη δημιουργία μίας παρουσίασης ή ενός προϊόντος. Οι μαθητές και σε αυτήν την προσέγγιση διαπραγματεύονται πολύπλοκα θέματα βασισμένα σε ερωτήματα και προβληματισμούς, όπως στη διερευνητική προσέγγιση, αλλά δουλεύουν σχετικά αυτόνομα, παρατεταμένες χρονικές περιόδους, καταλήγοντας σε παρουσιάσεις ή ρεαλιστικά προϊόντα, κάτι που δεν συμβαίνει στη διερευνητική προσέγγιση (Friesen & Scott, 2013) (Πίνακας 1).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω στοιχεία προκύπτει ο πίνακας (Πίνακας 1):

<b>Προσεγγίσεις από τις οποίες προέρχεται η Διερευνητική Προσέγγιση και τα βασικά χαρακτηριστικά τους</b>	<b>Συνδέσεις (✓) και διαφοροποιήσεις (X) από τη</b>
---	---

	Διερευνητική Προσέγγιση
<b>Θεωρία μετάδοσης της γνώσης:</b> καλλιέργεια γνωστικών ικανοτήτων μετάδοση της γνώσης	√
	X
<b>Επίλυση προβλήματος:</b> χρήση μη συνηθισμένων προβλημάτων διδασκαλία λύσης προβλήματος	√
	X
<b>Θεωρία διδακτικών καταστάσεων:</b> διδασκαλία μέσω εμποδίων τα εμπόδια εντοπίζονται από τους μαθητές	√
	X
<b>Ρεαλιστικά Μαθηματική Εκπαίδευση:</b> σύνδεση με πραγματική ζωή	√*
<b>Μοντελοποίηση:</b> μοντελοποίηση καταστάσεων πραγματικής ζωής	√*
<b>Ανθρωπολογική:</b> προσωπική νοηματοδότηση στην οικοδ. της γνώσης	√*
<b>Κοινωνική διάσταση κονστρουκτιβισμού:</b> συζήτηση συλλογισμών για κοινά νοήματα	√
<b>Μάθηση μέσω:</b>	
-ανακάλυψης: ατομική δραστηριότητα ελάχιστα καθοδηγούμενη	X
-προβλήματος: διαπραγμάτευση περιστατικών για διάγνωση	X
-πρότζεκτ: διαπραγμάτευση θεμάτων για μεγάλα διαστήματα	X
*Η προσέγγιση της διερεύνησης έχει επιπλέον χαρακτηριστικά	

**Πίνακας 1: Συνδέσεις με (√) και διαφοροποιήσεις (X) της προσέγγισης της διερεύνησης από τις προσεγγίσεις από τις οποίες προέρχεται**

Τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα (Πίνακας 1) αποσαφηνίζουν τα χαρακτηριστικά της διερευνητικής προσέγγισης σε σχέση με τις άλλες προσεγγίσεις, από τις οποίες προέρχεται, μέσα από την ανάδειξη των κύριων συνδέσεων και διαφοροποιήσεων της από αυτές. Επιπλέον, η προσέγγιση της διερεύνησης χαρακτηρίζεται και από άλλα στοιχεία τα οποία ορίζουν τα καινοτόμα χαρακτηριστικά της.

Η διερευνητική προσέγγιση αποτελεί μία σύγχρονη διδακτική πρακτική, η οποία συμβάλλει στην καλλιέργεια και στην ανάπτυξη επιστημονικών δεξιοτήτων, όπως της συνειδητής διαδικασίας διάγνωσης και κριτικής θεώρησης προβλημάτων, της διάκρισης εναλλακτικών λύσεων, του σχεδιασμού έρευνας, της διερεύνησης υποθέσεων, της αναζήτησης πληροφοριών, της κατασκευής μοντέλων και της διατύπωσης συνεκτικών επιχειρημάτων (Linn, Davis, & Bell, 2013). Η προσέγγιση αυτή ορίζεται μέσω των χαρακτηριστικών της ως μια δυναμική διαδικασία η οποία οδηγεί σε γνώση και κατανόηση του κόσμου μέσα από ερωτήσεις, προβληματισμούς και προκλήσεις.

Η παροχή στους μαθητές μαθησιακών ευκαιριών που βασίζονται στη διερεύνηση βοηθούν στην απόκτηση επιστημονικής γνώσης μέσω διαδικασιών επίλυσης προβλήματος (NRC, 2006), στην ενίσχυση των ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος και αιτιολόγησης, στην οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών, αλλά και στην κατανόηση των διαδικασιών (NCTM, 2000). Η οικοδόμηση της γνώσης πραγματοποιείται σε συνεργατικό περιβάλλον και περιλαμβάνει την εξερεύνηση και μοντελοποίηση πολύπλοκων προβληματισμών, τη διατύπωση ερωτημάτων, εικασιών και αιτιολογημένων υποθέσεων, τη συλλογή, καταγραφή, ανάλυση και ερμηνεία δεδομένων, την αμφισβήτηση αντιλήψεων και την επίτευξη κοινών νοηματοδοτήσεων, ενώ παράλληλα ενθαρρύνει τη χρήση αποδείξεων, λογικής και φαντασίας (Maab & Artigue, 2013; Newman et al., 2004).

Στην προσέγγιση της διερεύνησης τα μέλη της εκπαιδευτικής κοινότητας υιοθετούν μη παραδοσιακούς ρόλους. Στο κέντρο της μαθησιακής διαδικασίας βρίσκονται οι μαθητές, οι οποίοι εντοπίζουν, μελετούν και επιλύουν έναν προβληματισμό έχοντας υποστηρικτή τον εκπαιδευτικό (Artigue & Blomhøj, 2013). Είναι μια διαπροσωπική δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές φτάνουν στην κατανόηση μέσω συζήτησης και η διδασκαλία είναι ένας μη γραμμικός διάλογος, μεταξύ μαθητών και με τον εκπαιδευτικό, στον οποίο διερευνώνται τα νοήματα και οι συνδέσεις τους. Δεν στοχεύει μόνο στη σωστή απάντηση, αλλά αναζητάει συλλογισμούς σε προβληματισμούς και ερωτήματα, μέσω της (διε)ρευνητικής διαδικασίας.

Η κύρια έμφαση της προσέγγισης είναι η εργασία των μαθητών σε ομάδες. Οι μαθητές μαθαίνουν τόσο το περιεχόμενο όσο και τις πρακτικές και τις συλλογιστικές δεξιότητες του γνωστικού αντικειμένου μέσω της συνεργατικής συμμετοχής τους σε διερευνήσεις (Hmelo-Silver, et al., 2007). Οι μαθητές, σε συνεργασία, καταλήγουν σε έναν κοινό συλλογισμό, ο οποίος αναδιαμορφώνεται από την αλληλεπίδραση με τις άλλες ομάδες και από τον εκπαιδευτικό.

Είναι μια καθοδηγούμενη μορφή διδασκαλίας στην οποία ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει, ενθαρρύνει, παροτρύνει, καθοδηγεί και διευκολύνει τη διαδικασία της διερεύνησης (Artigue & Blomhøj, 2013; Makar, Bakker & Ben-Zvi, 2015). Συνδέει τις μαθηματικές απόψεις και τους συλλογισμούς των μαθητών με την επίσημη μαθηματική γνώση. Θέτει, ορισμένες φορές, τον προβληματισμό, ο οποίος προέρχεται από θέματα της επιστήμης και της ζωής και έχει καθορισμένη απάντηση και παρέχει το εκπαιδευτικό υλικό που είναι απαραίτητο. Μέσα από περαιτέρω ερωτήσεις διευκολύνει τους μαθητές, οι οποίοι έχουν τον κεντρικό ρόλο της μαθησιακής διαδικασίας και είναι οργανωμένοι σε ομάδες, να ανακαλύψουν απαντήσεις και να οικοδομήσουν τη νέα γνώση.

Σημαντικό ρόλο στη δημιουργία περιβάλλοντος διερεύνησης, εκτός από τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές, παίζουν και οι μαθησιακές δραστηριότητες. Δραστηριότητες οι οποίες περιλαμβάνουν μη συνηθισμένα προβλήματα, ευνοούν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης, θέτουν προβληματισμούς προς επίλυση και δύνανται να παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες εμπλοκής τόσο στο μαθηματικό περιεχόμενο όσο και σε επιστημονικές πρακτικές (Artigue, et al., 2012).

Συνοψίζοντας τα καινοτόμα στοιχεία της διερευνητικής προσέγγισης προκύπτει ο παρακάτω

πίνακας (Πίνακας 2):

<b>Διερευνητική προσέγγιση</b>	<b>Χαρακτηριστικά/καινοτόμα στοιχεία</b>
<b>Διδασκαλία</b>	Διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος, σε συνεργατικό περιβάλλον, με (δι)ερεύνηση για την ανάπτυξη επιστημονικών δεξιοτήτων (αλληλεπίδραση, συνεργασία, επικοινωνία, αιτιολόγηση, ανάλυση πειραματικών δεδομένων κ.λπ.). Προετοιμασία για τον πολίτη του μέλλοντος.
<b>Εκπαιδευτικός</b>	Υποστηρίζει, ενθαρρύνει, παροτρύνει, καθοδηγεί και διευκολύνει τη διαδικασία της διερεύνησης, παρέχοντας συχνά και το απαραίτητο εκπαιδευτικό υλικό. Συνδέει απόψεις και συλλογισμούς με την επίσημη μαθηματική γνώση, για την επίτευξη κοινών νοηματοδοτήσεων.
<b>Μαθητές (κεντρικό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία)</b>	Εξερευνούν, μελετούν και επιλύουν συνεργατικά καταστάσεις προβληματισμού. Διατυπώνουν ερωτήματα και εικασίες, διερευνούν, επικοινωνούν και παρουσιάζουν αιτιολογημένες υποθέσεις και επιχειρήματα.
<b>Δραστηριότητες</b>	Μη συνηθισμένα (ανοιχτά/πολύπλοκα) προβλήματα, τα οποία δημιουργούν καταστάσεις προβληματισμού και ευνοούν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης.

**Πίνακας 2: Χαρακτηριστικά/καινοτόμα στοιχεία της διερευνητικής προσέγγισης**

Λόγω του ότι δεν υπάρχει ένας ορισμός για τη διερευνητική προσέγγιση, αλλά ορίζεται μέσα από τα χαρακτηριστικά της, πολλά από τα οποία μάλιστα αποτελούν χαρακτηριστικά και άλλων θεωριών και παιδαγωγικών πρακτικών και άρα δεν γίνεται άμεσα εμφανής η καινοτομία της, πολλοί ερευνητές μοντελοποιούν τις φάσεις της, προσπαθώντας να την οριοθετήσουν και να προτείνουν τρόπους εφαρμογής της στην πράξη. Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποια από αυτά τα μοντέλα<sup>iii</sup> υλοποίησης της διερευνητικής προσέγγισης που προτείνονται από ερευνητές, όχι απαραίτητα μόνο από τη διδακτική των Μαθηματικών.

Ο Ματσαγγούρας (2000) προτείνει ένα ευέλικτο μοντέλο για την υλοποίηση της διερευνητικής μεθόδου, του οποίου τα οκτώ βήματα μπορούν να τροποποιηθούν, συγχωνευθούν ή παραλειφθούν: 1. Προετοιμασία ψυχολογική και γνωσιολογική. 2. Διατύπωση υποθέσεων. 3. Συλλογή και οργάνωση δεδομένων. 4. Αναλυτική επεξεργασία δεδομένων. 5. Υπέρβαση δεδομένων. 6. Εφαρμογές. 7. Ανακεφαλαίωση. 8. Μαθησιακή και μεταγνωστική αξιολόγηση.

Ο Blomhøj και οι συνεργάτες του (2003) προτείνει μια μοντελοποίηση η οποία περιλαμβάνει έξι υπο-διαδικασίες: 1. Σχηματισμός του προβλήματος. 2. Συστηματοποίηση. 3. Μαθηματικοποίηση. 4. Μαθηματική ανάλυση. 5. Ερμηνεία/αξιολόγηση. 6. Επαλήθευση.

Η Harlen (2012) περιγράφοντας τη διερευνητική προσέγγιση ως την οικοδόμηση της κατανόησης με επιστημονικό τρόπο, μέσω συλλογής στοιχείων και ελέγχου των πιθανών

ερμηνειών και ιδεών που προκύπτουν από αυτά τα στοιχεία, προτείνει ένα κυκλικό μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει τα εξής στάδια: 1. Νέα εμπειρία/ερώτηση. 2. Πιθανή εξήγηση (από προϋπάρχουσα ιδέα ή από εναλλακτικές ιδέες). 3. Πρόβλεψη. 4. Σχεδιασμός και έρευνα. 5. Ερμηνεία δεδομένων. 6. Συμπέρασμα.

Ο μαθησιακός κύκλος που προτείνει ο Kolb (2014) περιλαμβάνει 4 διαδοχικές φάσεις: 1. τη συγκεκριμένη εμπειρία, στην οποία διαπραγματευόμαστε μία νέα εμπειρία/κατάσταση ή μια νέα ερμηνεία μιας προϋπάρχουσας εμπειρίας/κατάστασης, 2. την αναστοχαστική παρατήρηση της νέας εμπειρίας/κατάστασης, κατά την οποία δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις ασυνέπειες που τυχόν υπάρχουν μεταξύ εμπειρίας και κατανόησης, 3. την αφαίρεση, δηλαδή την νέα ιδέα ή την τροποποίηση μιας υπάρχουσας η οποία προέκυψε από αναστοχασμό και 4. τον πειραματισμό, κατά τον οποίο οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδέες τους στην πραγματική τους ζωή, για να δουν τι θα συμβεί.

Το πλαίσιο διερευνητικής μάθησης του Pedaste και των συνεργατών του (2015) περιλαμβάνει γενικές και επιμέρους φάσεις οι οποίες συσχετίζονται μεταξύ τους. Στις γενικές φάσεις αναφέρεται ο προσανατολισμός, η εννοιολόγηση, η διερεύνηση, το συμπέρασμα και η συζήτηση και στις επιμέρους φάσεις αναφέρονται οι ερωτήσεις, οι υποθέσεις, η εξερεύνηση, ο πειραματισμός, η ερμηνεία των δεδομένων, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός.

Το πλαίσιο για τον σχεδιασμό και τη διαχείριση διερευνητικών δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία των μαθηματικών (FIBA), το οποίο προτείνεται από τη Σκουμπουρδή (Skoumpourdi, 2017), περιλαμβάνει επτά στάδια: 1. Θέμα/Προβληματισμός. 2. Εξερεύνηση. 3. Παρουσίαση. 4. Σύνθεση/Σύνδεση. 5. Γενίκευση/Μαθηματικοποίηση. 6. Μετάφραση. 7. Επέκταση.

Τα παραπάνω ενδεικτικά μοντέλα περιγραφής των φάσεων της διερευνητικής προσέγγισης διαφοροποιούνται μεν, ανάλογα με το επιστημονικό, ερευνητικό και παιδαγωγικό υπόβαθρο του κάθε ερευνητή, αλλά όλα αναφέρουν, στις διαδοχικές και αλληλοσυνδεόμενες τους φάσεις, την ατομική, την ομαδική, αλλά και τη συλλογική εργασία, μέσα από καταστάσεις προβληματισμού στις οποίες προκαλείται η διερεύνηση, η αιτιολόγηση και η επιχειρηματολογία των συλλογισμών και των πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων.

### **Στοιχεία της Διερευνητικής Προσέγγισης στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου**

Για να χρησιμοποιηθεί μια νέα, καινοτόμα προσέγγιση στη διδακτική πράξη, θα πρέπει αρχικά να υιοθετηθεί από το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών, το οποίο για την Ελλάδα είναι το Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ., καθώς και το συμπληρωματικό προς το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών, Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (Ν.Π.Σ.). Προκειμένου λοιπόν να εντοπιστούν διαστάσεις της διερευνητικής προσέγγισης στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου και να διαπιστωθεί ο βαθμός υιοθέτησής της από αυτά, πραγματοποιήθηκε ποιοτική ανάλυση του περιεχομένου τους (Mayring, 2004). Συγκεκριμένα τα χαρακτηριστικά

της διερευνητικής μάθησης, που την οριοθετούν και την καθιστούν καινοτόμα, αποτέλεσαν τους άξονες με βάση τους οποίους έγινε η ανάλυση των κειμένων των Προγραμμάτων Σπουδών.

Από τη μελέτη και ανάλυση του ισχύοντος Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ.), φαίνεται ότι η γνώση προσεγγίζεται διαθεματικά και ολιστικά, δημιουργώντας το υπόβαθρο για την επικοινωνιακή και την αναλυτική-διερευνητική μάθηση (σελ. 6). Στο πρόγραμμα αυτό διατηρούνται τα διακριτά μαθήματα, ενώ ταυτόχρονα η γνώση συσχετίζεται σε δύο άξονες διαθεματικότητας τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο. Οι δεξιότητες που αναφέρονται ως διαθεματικές ή οριζόντιες και προτείνεται να προωθηθούν μέσω όλων των γνωστικών αντικειμένων είναι μεταξύ άλλων η δεξιότητα/ικανότητα της επικοινωνίας, της αποτελεσματικής χρήσης των αριθμών και των μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή, της χρήσης ποικίλων πηγών και εργαλείων πληροφόρησης και επικοινωνίας, της συνεργασίας με άλλα άτομα σε ομαδικές εργασίες, της κριτικής επεξεργασίας πληροφοριών, της επίλυσης προβλημάτων, της διαχείρισης πόρων, της δημιουργικής επινόησης, της αξιοποίησης γνώσεων και της υιοθέτησης αξιών κατάλληλων για τη διαμόρφωση προσωπικής άποψης στη λήψη αποφάσεων (σελ. 6).

Οι στρατηγικές διδασκαλίας που προτείνονται είναι η διερεύνηση και ανακάλυψη, οι επισκέψεις στο φυσικό και ανθρωπογενές περιβάλλον, οι επιδείξεις με τη χρήση κατάλληλου εποπτικού υλικού, η συζήτηση-διάλογος εκπαιδευτικού-μαθητών ή σε ομάδες, η άμεση μορφή διδασκαλίας-αφήγηση και οι ομαδοσυνεργατικές μορφές διδασκαλίας για την εκπόνηση σχεδίων εργασίας (projects) (σελ. 10). Η διερεύνηση και ανακάλυψη, αναφέρεται ως η ενεργητική προσέγγιση της γνώσης και προϋποθέτει την ενεργοποίηση του μαθητή, ώστε μέσα από συλλογισμό και χειρισμό πολύπλοκων καταστάσεων να διερευνά και να φτάνει στη γνώση, αναπτύσσοντας την κριτική του σκέψη. Για να προκύψει η ανακάλυψη, το Πρόγραμμα προτείνει πρακτικές παρατήρησης, σύγκρισης, μετρήσεων, ταξινόμησης, διερεύνησης, προβλέψεων, εύρεσης χρονικών σχέσεων, σύγκρισης γεγονότων, επίλυσης προβλημάτων, διατύπωσης επαγωγικών ή παραγωγικών συλλογισμών, καταιγισμού ιδεών, κ.λπ. (σελ.10).

Για την επίτευξη των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης αναφέρεται ότι «μέσω επεξεργασίας κατάλληλων δραστηριοτήτων, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν κατ' αναλογία, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών λύσεων, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα εκτιμώντας την ισχύ της ως εργαλείο επικοινωνίας» (σελ. 303). Ως κατάλληλη μαθηματική δραστηριότητα ορίζεται η δραστηριότητα η οποία: 1. είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και δεν επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα, 2. αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια, 3. ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό, 4. δεν επιτρέπει άμεση προσέγγιση σε μια και μοναδική λύση, 5. εμπλέκει προβληματισμό πλούσιο σε έννοιες, αλλά όχι δύσκολο, ο οποίος να μπορεί να γίνει, όπου αυτό είναι δυνατό, σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (π. χ. αριθμητικό - γραφικό) μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις (σελ. 303).

Επιπλέον, μαθηματικοί στόχοι οι οποίοι περιγράφονται στους επιμέρους άξονες (Αριθμοί-Πράξεις, Μετρήσεις και Γεωμετρία) και αφορούν στην καλλιέργεια και στην ανάπτυξη επιστημονικών δεξιοτήτων είναι οι ακόλουθοι (σελ. 260, 263, 267, 272): Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής, να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις, να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης, να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα, να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και να διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσότερων λύσεων.

Από την άλλη, το Ν.Π.Σ., το οποίο λειτουργεί συμπληρωματικά προς το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών, έχει σχεδιαστεί βασισμένο στη φιλοσοφία ότι «η υποχρεωτική μαθηματική εκπαίδευση στοχεύει στη συγκρότηση σκεπτόμενων πολιτών» (σελ. 6). Προκειμένου να λειτουργήσουν οι μαθητές κριτικά και δημιουργικά προτείνεται να τους προσφέρονται ευκαιρίες να αναπτύξουν κάποιες βασικές ικανότητες και δεξιότητες όπως η ικανότητα αποτελεσματικής χρήσης εργαλείων, η ικανότητα αλληλεπίδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες και η ικανότητα αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας (σελ. 6-7). Επιμέρους ικανότητες και δεξιότητες που προτείνονται για τη συγκρότηση σκεπτόμενων πολιτών είναι η ικανότητα λήψης αποφάσεων και επίλυσης, μη συνηθισμένων προβλημάτων όπως αυτά που συναντάμε στην καθημερινή ζωή. Στις περιπτώσεις αυτές απαιτείται η κατανόηση του προβλήματος, η μετατροπή του σε μαθηματικό πρόβλημα, προκειμένου να αναζητηθούν τα κατάλληλα εργαλεία (σύμβολα, αλγόριθμοι, τεχνολογικά εργαλεία) επίλυσής του (μαθηματικοποίηση ή μοντελοποίηση), καθώς και η καταγραφή και δημοσιοποίησή του, μέσω της επικοινωνίας των σκέψεων και των επιχειρημάτων πάνω στις οποίες στηρίχτηκε ο συλλογισμός επίλυσης (σελ. 6-7). Ως διευκολυντής της επίλυσης προβλημάτων αναφέρεται η συνεργασία, μέσα σε ένα πλαίσιο εμπιστοσύνης και αλληλοκατανόησης (σελ. 7). Οι στόχοι μάθησης των μαθηματικών στο Ν.Π.Σ. περιλαμβάνουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης μέσα από τρεις συνιστώσες: τη δημιουργική σκέψη, την αναστοχαστική σκέψη και την κριτική σκέψη, καθώς και την ανάπτυξη ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών, όπως ο πειραματισμός (η συστηματική καταγραφή δεδομένων, η οργάνωσή τους σε πίνακα, οι δοκιμές με μικρούς αριθμούς, οι εναλλακτικές διατυπώσεις του προβλήματος), η διερεύνηση, καθώς και η διατύπωση και ο έλεγχος υποθέσεων (σελ. 8).

Το Ν.Π.Σ., μέσα από μια γνωστική και κοινωνικοπολιτισμική θέαση των μαθηματικών, επιδιώκει να πετύχει τους στόχους που θέτει μέσω τεσσάρων βασικών διεργασιών (σελ. 10): α) του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας, β) της δημιουργίας συνδέσεων/δεσμών, γ) της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων, με βασικότερο τη φυσική γλώσσα, αλλά και τα σύμβολα, τις διάφορες μορφές αναπαράστασης, τα τεχνουργήματα και τα εργαλεία της τεχνολογίας και δ) της μεταγνωστικής ενημερότητας.

Από τα παραπάνω καταγεγραμμένα στοιχεία, γίνεται φανερό ότι, τόσο το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών, όσο και το συμπληρωματικό προς το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών, Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, βασίζονται στις αρχές του εποικοδομητισμού και αναφέρουν, είτε στη μεθοδολογία που προτείνουν είτε στους (γενικούς και ειδικούς) στόχους που θέτουν, στοιχεία που τον

χαρακτηρίζουν. Συγκεκριμένα και στα δύο Προγράμματα αναφέρεται, μεταξύ άλλων: 1. η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος, σε συνεργατικό περιβάλλον, μέσω έρευνας για την ανάπτυξη επιστημονικών δεξιοτήτων για την προετοιμασία του μελλοντικού πολίτη, 2. η περιγραφή του ρόλου του εκπαιδευτικού ως υποστηρικτή και διευκολυντή της διαδικασίας της διερεύνησης, με στόχο τη σύνδεση απόψεων και συλλογισμών με την επίσημη μαθηματική γνώση, για την επίτευξη κοινών νοηματοδοτήσεων, καθώς και 3. η συμμετοχή του μαθητή στην εκπαιδευτική διαδικασία μέσω εξερεύνησης, μελέτης, διατύπωσης ερωτημάτων και εικασιών, διερεύνησης, επικοινωνίας, επιχειρηματολογίας και επίλυσης προβληματισμών συνεργατικά. Οι παραπάνω αρχές του εποικοδομητισμού αποτελούν διαστάσεις οι οποίες χαρακτηρίζουν και τη διερευνητική προσέγγιση.

### **Εν κατακλείδι**

Στην εργασία αυτή έγινε προσπάθεια να αναζητηθούν χαρακτηριστικά τα οποία οριοθετούν τη διερευνητική προσέγγιση και την καθιστούν καινοτόμα, καθώς και να εντοπιστούν διαστάσεις της διερευνητικής προσέγγισης στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου προκειμένου να διαπιστωθεί ο βαθμός υιοθέτησής της από αυτά.

Από τη συγκριτική μελέτη της διερευνητικής με άλλες προσεγγίσεις προέκυψε ότι η οριοθέτησή της έχει επηρεαστεί από θεωρίες που υποστηρίζουν τη μάθηση μέσω κατανόησης, όπως είναι η 'επίλυση προβλήματος', η 'θεωρία των διδακτικών καταστάσεων', η 'ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση', η 'προσέγγιση της μοντελοποίησης', η 'ανθρωπολογική προσέγγιση της διδακτικής' (Artigue, et al., 2012), καθώς και άλλες προσεγγίσεις που βασίζονται στην κοινωνική διάσταση του κονστρουκτιβισμού, με τις οποίες παρουσιάζει μεν ομοιότητες, αλλά και σημαντικές διαφοροποιήσεις.

Επιπλέον, η διερευνητική προσέγγιση εμπεριέχει καινοτόμα χαρακτηριστικά με σημαντικότερο το ότι η γνώση οικοδομείται με διαδικασία παρόμοια με εκείνη που ακολουθείται από έναν ερευνητή/επιστήμονα και στην οποία καλλιεργούνται και αναπτύσσονται επιστημονικές/διερευνητικές δεξιότητες. Στην προσέγγιση αυτή η διδασκαλία είναι μια δυναμική διαδικασία που οδηγεί σε γνώση και κατανόηση του κόσμου μέσα από ερωτήσεις, προβλήματα και προκλήσεις και πραγματοποιείται μέσω λύσης προβλήματος, από ποικίλα πλαίσια και όχι διδασκαλία τρόπου λύσης προβλήματος. Ενθαρρύνεται η αυτονομία των μαθητών, η συνεργασία και η επιχειρηματολογία η οποία καθοδηγείται, διευκολύνεται και εμπυχώνεται από τους εκπαιδευτικούς.

Η πολυπλοκότητα της διερευνητικής προσέγγισης έχει οδηγήσει την ερευνητική κοινότητα να προτείνει ποικίλα μοντέλα υλοποίησής της στη διδακτική πράξη, τα οποία στις φάσεις που περιγράφουν συμπεριλαμβάνουν τα καινοτόμα και ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, αναδεικνύοντας το γεγονός ότι είναι μία σύνθετη και απαιτητική προσέγγιση.

Η καινοτόμα αυτή προσέγγιση, η οποία υιοθετείται από τη Διδακτική των Μαθηματικών διεθνώς, δεν φαίνεται να υιοθετείται από τα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου της Ελλάδας. Η μεθοδολογία που προτείνουν και τα δύο Προγράμματα,

καθώς και οι στόχοι που θέτουν αναφέρονται στις αρχές του εποικοδομητισμού, οι οποίες χαρακτηρίζουν μεν και τη διερευνητική προσέγγιση, αλλά δεν αφορούν στα χαρακτηριστικά εκείνα που την οριοθετούν και την καθιστούν καινοτόμα.

Αν θέλουμε όμως να συμμετέχουμε στον διάλογο της διεθνούς κοινότητας για πιο συνεργατικές-διερευνητικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να αναδιατυπωθεί η μεθοδολογία των Προγραμμάτων Σπουδών με τρόπο ώστε να αναδεικνύονται οι ιδιαιτερότητες (μέσα από τις ομοιότητες και τις διαφοροποιήσεις της από άλλες θεωρίες και παιδαγωγικές πρακτικές) και οι φάσεις της διερευνητικής προσέγγισης, όπως έχουν περιγραφεί στη βιβλιογραφία, ώστε να αποτελέσει ένα λειτουργικό εργαλείο προς χρήση για τους εκπαιδευτικούς.

### Αναφορές

- Artigue, M., & Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education. *The Fibonacci Project*, 11-15. Retrieved from <http://www.fibonacci-project.eu/>.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 797-810.
- Artigue, M., & Dillon, J., & Harlen, W., & Lena, P., (2012). Learning through inquiry. *The Fibonacci Project*. Retrieved from <http://www.fibonacci-project.eu/>.
- Blomhøj, M. & T. Højgaard (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Springer Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1990). On mathematics education and culture: critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics*, 21(1), 3-27.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 3-38). USA: Information Age Publishing.
- Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών & Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών υποχρεωτική Εκπαίδευσης). Ανακτήθηκε από <http://www.pi-schools.gr/programs/depps/>
- Engeln, K., Euler, M., & Maass, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 823-836.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers, New York.

- Friesen, S. & Scott, D. (2013). *Inquiry-based learning: A review of the research literature*. Paper prepared for the Alberta Ministry of Education. Retrieved from <http://galileo.org/focus-on-inquiry-lit-review.pdf>.
- Harlen, W. (2012). Inquiry in science education. In S. Borda Carulla (coord.), *Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school*. Retrieved from <http://www.fibonacci-project.eu>.
- Hmelo-Silver, C., Duncan, R.G., & Chinn, C. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, 42(2), 99-107.
- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 302-310.
- Kirschner, P.A., Sweller, J., & Clark, R.E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75-86.
- Kolb, D. (2014). *Experiential learning: Experience as a Source of learning and Development*. Library of Congress. Retrieved from [https://www.researchgate.net/publication/235701029\\_Experiential\\_Learning\\_Experience\\_As\\_The\\_Source\\_Of\\_Learning\\_And\\_Development](https://www.researchgate.net/publication/235701029_Experiential_Learning_Experience_As_The_Source_Of_Learning_And_Development)
- Linn, M.C., Davis, E.A., & Bell, P. (2013). Inquiry and technology. In M.C. Linn (Ed.) *Internet Environments for Science Education* (pp. 3-28). Routledge.
- Maab, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 779-795.
- Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, 47(7), 1107-1120.
- Ματσαγγούρας, Η. (2000). *Στρατηγικές Διδασκαλίας (Η κριτική σκέψη στην πράξη)*. 4<sup>η</sup> Έκδοση. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.
- Mayring, P. (2004). Qualitative content analysis. In U. Flick, E. von Kardorff & I. Steinke (Eds) *A companion to Qualitative Research*, (pp. 266-269). SAGE Publishers.
- Ν.Π.Σ. (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών). Ανακτήθηκε από <http://ebooks.edu.gr/new/ps.php>
- NRC (National Research Council) (2006). *Learning to think spatially: GIS as a support system in the K-12 Curriculum*. Washington, DC: The National Academies Press.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Commission on Standards for School Mathematics, Reston, VA.
- Newman, W., Abell, S., Hubbard, P., McDonald, J., & Otaala, J., (2004). Dilemmas of teaching inquiry in elementary science methods. *Journal of Science Teaching Education*, 15(4), 257-279.

Pedaste, M., Mäeots, M., Siiman, L.A., De Jong, T., Van Riesen, S.A., Kamp, E.T., Manoli, C.C., Zacharia, Z.C. & Tsourlidaki, E. (2015). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review*, 14, 47-61.

PRIMAS (2012). *Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe*. Retrieved from <http://www.primas-project.eu/>.

Savery, J. R. (2006). Overview of problem-based learning: Definitions and distinctions. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 1(1), 9-20. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.7771/1541-5015.1002>.

[Skoumpourdi, C. \(2017\). A framework for designing inquiry-based activities \(FIBA\) for early childhood mathematics. In T. Dooley, & G. Gueudet, G. \(Eds.\) 10<sup>th</sup> Congress of the European Society for Research in Mathematics Education \(CERME 10\) \(pp. 1901-1908\). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.](#)

Roth, W.M. & Lee, Y.J. (2007). "Vygotsky's neglected legacy": Cultural-historical activity theory. *Review of Educational Research*, 77(2), 186-232.

Swan, M., Pead, D., Doorman, M., & Mooldijk, A. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry-based learning. *ZDM Mathematics Education*, 45(7), 945-957.

Towers, J. (2010). Learning to teach mathematics through inquiry: a focus on the relationship between describing and enacting inquiry-oriented teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(3), 243-263.

---

<sup>i</sup> Με τον όρο 'διερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση' αποδίδεται ο όρος inquiry-based (ή enquiry-based) mathematics education. Ο όρος έχει αποδοθεί και ως 'μαθηματική εκπαίδευση βασισμένη στη διερώτηση' ή 'μαθηματική εκπαίδευση βασισμένη στην έρευνα'.

<sup>ii</sup> Με τον γενικό όρο μαθητής εννοούμε τον μαθητή και τη μαθήτριά. Ανάλογα χρησιμοποιείται και ο όρος εκπαιδευτικός.

<sup>iii</sup> Τα μοντέλα είναι ενδεικτικά και παρατίθενται επιγραμματικά. Η ανάλυση και συσχέτισή τους δεν αποτελεί σκοπό της συγκεκριμένης εργασίας. Επιπλέον, παρουσιάζονται περιγραφικά και όχι με τη μορφή σχεδιαγράμματος λόγω οικονομίας χώρου.