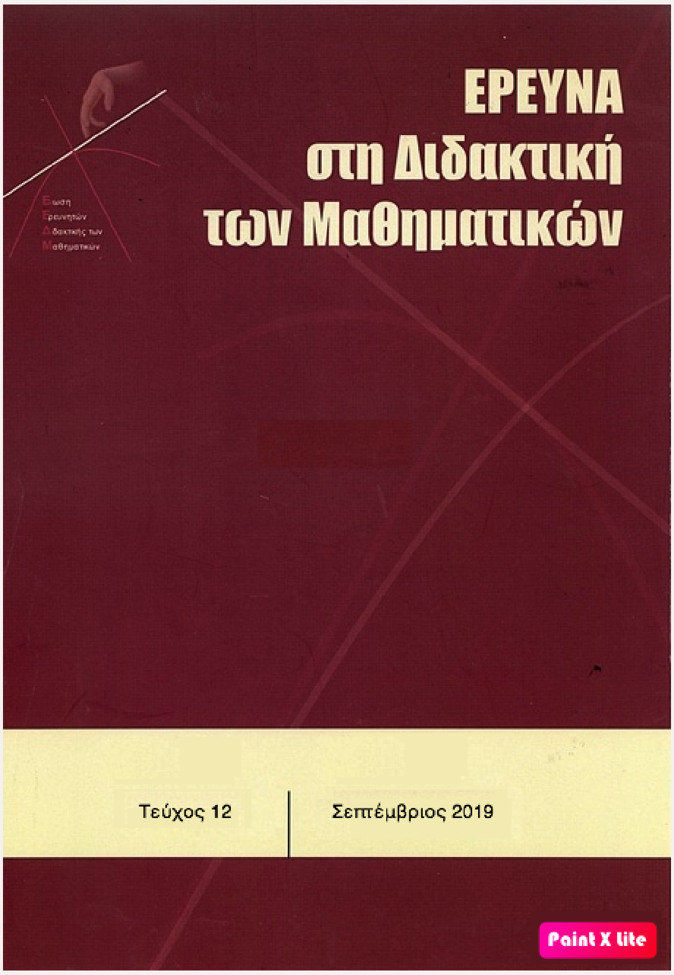
Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Τομ. 0, 2019



Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΥΝΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΤΡΟΠΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΝΟΕΡΩΝ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

Παπαδόπουλος (Ioannis Papadopoulos) Ιωάννης — Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Ελευθεριάδης (Ioannis Eleftheriadis) Ιωάννης — Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

https://doi.org/10.12681/enedim.21143

http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/index

Η επίδραση του πλαισίου σύνταξης των αριθμητικών παραστάσεων στον τρόπο υπολογισμού τους: Η περίπτωση των νοερών παρενθέσεων

Ιωάννης Παπαδόπουλος και Ιωάννης Ελευθεριάδης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ypapadop@eled.auth.gr ioannice@eled.auth.gr

Περίληψη: Στην εργασία αυτή ερευνάται το πώς επιδρά η γραπτή μορφή μίας αριθμητικής παράστασης στον τρόπο υπολογισμού της κυρίως όταν απαιτείται η χρήση παρενθέσεων. Συγκεκριμένα, ζητήθηκε από μαθητές της Ε' και Στ' Δημοτικού να υπολογίσουν μια σειρά από κλασματικές παραστάσεις. Τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι η κλασματική μορφή των παραστάσεων φαίνεται να επηρεάζει τον τρόπο υπολογισμού τους από τους μαθητές επιβάλλοντας ουσιαστικά τον τρόπο ανάλυσης που θα πρέπει να ακολουθηθεί. Η επίδραση αυτή είναι εμφανής στους μαθητές και των δύο τάξεων. Κύριο χαρακτηριστικό του πως εκφράζεται η επίδραση αυτή είναι η τάση των μαθητών να αφήνουν κατά μέρος τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων και τη χρήση των παρενθέσεων που είναι πιθανόν και να γνωρίζουν. Οι μαθητέ,ς αν και φαινομενικά ακολουθούν μια μαθηματική διαδικασία που είναι προβληματική, κάνουν χρήση αυτών που στην έρευνα αποκαλούνται 'νοερές' παρενθέσεις προκειμένου να διατηρήσουν τη δομή της αρχικής παράστασης και να φτάσουν στο σωστό αποτέλεσμα.

Λέξεις κλειδιά: *Παρένθεση, δομή, προτεραιότητα πράξεων.*

Abstract: In this paper the influence of the written format of an arithmetic expression on its calculation (given that this calculation requires the use of brackets) is examined. In particular, grade 5 and grade 6 students were asked to calculate a series of fractional expressions. The findings indicate that the fractional form of the expressions has an impact on the way the students calculate them by imposing a certain way of analyzing these expressions. This impact is obvious in the work of the whole sample. The main feature of this impact is expressed through the student's inclination to ignore occasionally both the precedence rules and the use of brackets. However, this is id not indicative of a lack of an understanding of these rules and their use. The students seemingly follow an inaccurate mathematical process but in the meanwhile they make use of what we call 'mental' brackets aiming to preserve the structure of the initial fractional expression and reach the correct answer.

Keywords: *Brackets, structure, precedence rules.*

Εισαγωγή

Η έρευνα έχει δείξει ότι η κατανόηση και χρήση της παρένθεσης στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων από μέρους των μαθητών συνοδεύεται από μια σειρά παρερμηνειών και δυσκολιών (Hewitt, 2005; Kieran, 1979; Linchevski & Herscovics, 1994; Wu, 2007). Οι μαθητές δείχνουν να μην κατανοούν τις λειτουργίες της παρένθεσης, αναπτύσσοντας πολλές φορές υποκειμενικές-αυθαίρετες στρατηγικές υπολογισμού σε παραστάσεις όπου εμπλέκεται η χρήση τους (Gallardo, 1995; Gunnarsson & Karlsson, 2015; Linchevski & Livneh, 1999). Επιπλέον, καθίσταται φανερό ότι οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται με μια ελλιπή κατανόηση της δομής των δοσμένων αριθμητικών παραστάσεων από μέρους των μαθητών. Στην εργασία αυτή εξετάζεται η πιθανή σχέση ανάμεσα στη μορφή της αριθμητικής παράστασης, η οποία υποδεικνύει με τον τρόπο αυτό και τη δομή της (κλασματική παράσταση), όπως και στον τρόπο υπολογισμού της. Ο υπολογισμός αυτός κάποιες φορές απαιτεί την χρήση των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων καθώς και τη χρήση παρενθέσεων. Σε αυτό το πλαίσιο, τα ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρείται να απαντηθούν είναι:

- Κατά πόσο η γραπτή μορφή μίας κλασματικής παράστασης επιδρά στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές υπολογίζουν την παράσταση αυτή;
- Κατά πόσο συνδέεται ο τρόπος αυτός με την κατανόηση της δομής των παραστάσεων αυτών;
- Ποιος ο ρόλος και η χρήση των παρενθέσεων στην περίπτωση αυτή;

Θεωρητικό πλαίσιο

Η παρένθεση σε μία μαθηματική παράσταση λειτουργεί για τους περισσότερους μαθητές ως «ένδειξη» αναφορικά με την προτεραιότητα των πράξεων, όπου η τυπική σειρά εκτέλεσης των υπολογισμών παραβιάζεται δίνοντας προτεραιότητα σε αυτούς που βρίσκονται στο εσωτερικό των παρενθέσεων. Η παρένθεση όμως, πέρα από «συστατικό» προτεραιότητας των πράξεων, αποτελεί βασικό δομικό στοιχείο των μαθηματικών παραστάσεων, το οποίο επηρεάζει και διαμορφώνει τις σχέσεις μεταξύ των μερών μίας μαθηματικής δομής (Linchevski & Livneh, 1999). Στην αριθμητική παράσταση $5 - 3 - 1$ η παρένθεση μπορεί να τοποθετηθεί σε δύο σημεία μετατρέποντας την παράσταση σε $(5 - 3) - 1$ ή $5 - (3 - 1)$. Στην πρώτη περίπτωση η παρένθεση δεν παραβιάζει το αποτέλεσμα της αρχικής παράστασης με βάση την προτεραιότητα των πράξεων. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση η παρένθεση παραβιάζει την προβλεπόμενη σειρά εκτέλεσης των πράξεων (αφού σε περίπτωση πράξεων που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο προτεραιότητας υπολογίζουμε από αριστερά προς τα δεξιά) με συνέπεια ο υπολογισμός να καταλήγει σε διαφορετικό αποτέλεσμα. Βέβαια, η παρένθεση μπορεί να αναδιαμορφώσει τις σχέσεις της αρχικής παράστασης $(5 - 3 - 1)$ διατηρώντας ωστόσο ανεπηρέαστο το τελικό αποτέλεσμα στην περίπτωση που αυτή μετατραπεί στη μορφή $5 - (3 + 1)$. Με τον τρόπο αυτό η παρένθεση λειτουργεί ως πολλαπλασιαστικός τελεστής, ενσωματώνοντας ένα γινόμενο μεταξύ του -1 και του περιεχομένου της παρένθεσης $(3+1)$ και αποτελώντας ουσιαστικά μία ισοδύναμη μορφή της παράστασης $5 - 1 \cdot (3 + 1)$ (Gallardo, 1995; Welder, 2012).

Διαπιστώνεται λοιπόν, πως ο ρόλος-λειτουργία της παρένθεσης ποικίλει κατά περίπτωση και δεν περιορίζεται στο τυπικό πλαίσιο των κανόνων της προτεραιότητας των πράξεων (Gallardo, 1995; Gunnarsson & Karlsson 2015; Gunnarsson, Harnell, & Sönnerhed, 2012; Gunnarsson, Sönnerhed, & Harnell, 2016; Hoch & Dreyfus, 2004; Marchini & Papadopoulos, 2011, Welder, 2012) παρουσιάζοντας εννοιολογικά (δομικό στοιχείο-διαμορφωτής σχέσεων) και διαδικαστικά-αλγοριθμικά στοιχεία (μέρος κανόνων προτεραιότητας). Ο ρόλος αυτός έχει αποτελέσει το επίκεντρο ερευνητικών προσπαθειών καθώς φαίνεται να συνδέεται με την αίσθηση του συμβόλου (symbol sense) και της δομής (structure sense), τα οποία με τη σειρά τους σχετίζονται με τη μαθηματική ευχέρεια και επιτυχία (Arcavi, 1994, 2005; Hoch & Dreyfus, 2004, 2010; Linchevski & Livneh, 1999; Marchini & Papadopoulos, 2011).

Παρόλα αυτά, οι μαθητές φαίνεται να μην έρχονται σε επαφή και με τις δυο αυτές όψεις της λειτουργίας της παρένθεσης (Okazaki, 2006) κάτι που πιθανόν αποτελεί απόρροια του τρόπου παρουσίασης και διδασκαλίας της στο πλαίσιο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, όπου γίνεται αποκλειστική αναφορά της παρένθεσης στο πλαίσιο των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων (Wu, 2007). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να διαθέτουν μία περιορισμένη κατανόηση της παρένθεσης και κατά συνέπεια να εμφανίζουν παρερμηνείες και λάθη σε περιπτώσεις υπολογισμών παραστάσεων όπου εμπλέκεται η χρήση τους. Οι μαθητές δείχνουν να δυσκολεύονται να αντιληφθούν το δομικό ρόλο της παρένθεσης σε μία παράσταση, γεγονός που σχετίζεται με τη γενικότερη ελλιπή αίσθηση της έννοιας της δομής που διαθέτουν (Booth, 1988; Hewitt, 2005; Linchevski, 1995; Linchevski & Herscovics, 1996; Linchevski & Livneh, 1999). Έτσι, σε περιπτώσεις ισοδύναμων παραστάσεων με διαφορετική μορφή όπως είναι οι 926 – 167 – 167 και 926 – (167 + 167) οι μαθητές βλέπουν δύο διαφορετικές παραστάσεις με διαφορετικά αποτελέσματα από τη στιγμή που σε αυτές εμφανίζονται διαφορετικά σύμβολα και κατ' επέκταση διαφορετικές πράξεις, αγνοώντας πλήρως τον ρόλο των παρενθέσεων (Linchevski & Herscovics, 1994; Linchevski & Livneh, 1999). Συχνά, επίσης, μαθητές και των δυο βαθμίδων της εκπαίδευσης αγνοούν τις παρενθέσεις κατά τη διάρκεια υπολογισμού μαθηματικών παραστάσεων (Blando Kelly, Schneider & Sleeman, 1989; Liebenberg, Sasman & Olivier, 1999; Payne & Squibb, 1990). Τέλος, ορισμένες φορές η ελλιπής αίσθηση της δομής από μέρους των μαθητών μπορεί να τους οδηγήσει στο να υπολογίσουν την παράσταση 926 – 167 + 167 λανθασμένα ως 926 – (167 + 167). Οι Linchevski και Livneh (1999) αναφέρουν ότι στην περίπτωση αυτή οι μαθητές θέτουν 'νοερές παρενθέσεις γύρω από το 167+167 (ως φανερή επίδραση αυτού που οι ίδιες αποκαλούν διαχωριστική επίδραση του συμβόλου της αφαίρεσης). Αυτή είναι και η μοναδική ίσως φορά που στη βιβλιογραφία συναντάμε τον όρο «νοερές» παρενθέσεις και μάλιστα με ένα μάλλον αρνητικό περιεχόμενο.

Γενικά, οι δυσκολίες που έχουν οι μαθητές με τη χρήση των παρενθέσεων αντανακλάται στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουν τις ανάλογες αριθμητικές παραστάσεις. Έτσι, για παράδειγμα, αρκετοί μαθητές ερμηνεύουν τον κανόνα για την προτεραιότητα της παρένθεσης στην εκτέλεση των πράξεων με όρους θέσης, σχετικά δηλαδή με το πού θα τοποθετηθεί η παρένθεση σε μια αριθμητική παράσταση και όχι σε σχέση με το ποιες πράξεις θα εκτελεστούν πρώτες (Kieran, 1979). Όποτε συναντούν μία αριθμητική παράσταση με παρενθέσεις, αυτό που κάνουν είναι να «μεταφέρουν» την παρένθεση στα αριστερά της παράστασης προκειμένου να υπολογιστούν πρώτες. Για παράδειγμα στην παράσταση 2 – (3 – 2) οι μαθητές, αντί να υπολογίσουν αρχικά το εσωτερικό της παρένθεσης, μεταφέρουν την παρένθεση στο αριστερό μέρος της παράστασης μετατρέποντάς την σε (3 – 2) – 2 και έπειτα προχωρούν στους υπολογισμούς (Kieran, 1979). Άλλοι μαθητές, βλέπουν τις παρενθέσεις ως μια περιοχή που το περιεχόμενό της δεν ακολουθεί τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων αλλά υπόκειται σε μια λογική υπολογισμού από αριστερά-προς-δεξιά. Σε σχετική έρευνα των Banerjee και Subramaniam (2005) το 17% των μαθητών που συμμετείχαν υπολόγισαν σωστά την παράσταση $3 \cdot 6 + 3 \cdot 5$ αλλά όχι την $3 \cdot (6 + 3 \cdot 5)$ στην οποία για το εσωτερικό της παρένθεσης ακολούθησαν την προσέγγιση από αριστερά-προς-δεξιά, κάτι που δεν έκαναν για την αρχική παράσταση.

Οι παραπάνω παρανοήσεις που εμφανίζονται συστηματικά στις σχετικές δραστηριότητες των μαθητών επιδιώχθηκε στην παρούσα έρευνα να διερευνηθούν, με επιπλέον την ειδική διάσταση της σύνδεσης της μορφής των κλασματικών παραστάσεων με τα σχετικά λάθη.

Περιγραφή ερευνητικής διαδικασίας

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 226 μαθητές της Ε’ και Στ’ δημοτικού (114 και 112 αντίστοιχα) από πέντε διαφορετικά σχολεία της Θεσσαλονίκης και των Γιαννιτσών (η συγκεκριμένη έρευνα αποτελεί μέρος ευρύτερης έρευνας). Σύμφωνα με το ισχύον ΔΕΠΣ οι μαθητές έχουν μία πρώτη (πολύ σύντομη) επαφή με τις παρενθέσεις στην Γ’ Δημοτικού (επιμεριστική ιδιότητα), ωστόσο η τυπική εισαγωγή των παρενθέσεων στη διδασκαλία λαμβάνει χώρα στην Στ’ Δημοτικού στο πλαίσιο των κανόνων της προτεραιότητας των πράξεων και είναι αυτή που ουσιαστικά συμβάλλει στην περιορισμένη κατανόηση της λειτουργικότητάς τους (Kieran, 1979). Η επιλογή μαθητών από δύο διαφορετικές τάξεις έγινε προκειμένου να εξεταστούν πιθανές διαφοροποιήσεις στις στρατηγικές υπολογισμού των παραστάσεων μεταξύ των μαθητών που έχουν και αυτών που δεν έχουν διδαχθεί την προτεραιότητα των πράξεων και τον ρόλο των παρενθέσεων σε αυτήν.

Στους μαθητές δόθηκε μία συλλογή από 3 και 6 ομάδες δραστηριοτήτων (τεστ) για την Ε’ και Στ’ δημοτικού αντίστοιχα, στο πλαίσιο μίας ευρύτερης έρευνας. Ο διαφορετικός αριθμός δραστηριοτήτων εξηγείται από το γεγονός ότι οι μαθητές της Στ’ είχαν ήδη διδαχθεί τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων και έτσι εξετάζονταν επιπλέον θέματα που σχετίζονταν με την κατανόηση και αξιολόγηση του ρόλου της παρένθεσης. Η συλλογή των δραστηριοτήτων διαμορφώθηκε σε συνεργασία με μία αντίστοιχη ερευνητική ομάδα από το Jönköping University της Σουηδίας όπου πραγματοποιήθηκε η ίδια έρευνα. Η αρχική μορφή του τεστ ελέγχθηκε μέσω μίας πιλοτικής έρευνας που πραγματοποιήθηκε σε 26 μαθητές της Στ’ δημοτικού, προκειμένου να διαμορφωθεί η τελική του εκδοχή.

Στην παρούσα έρευνα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πρώτης ομάδας δραστηριοτήτων του τεστ, η οποία ήταν κοινή για τις δύο τάξεις που συμμετείχαν στην έρευνα. Η συγκεκριμένη ομάδα δραστηριοτήτων αποτελούνταν από πέντε κλασματικές παραστάσεις όπου οι μαθητές καλούνταν αρχικά να μετατρέψουν την κάθε κλασματική παράσταση στην ισοδύναμή της σε οριζόντια διάταξη (πχ. όπως δόθηκε και στην εκφώνηση της άσκησης το $\frac{8}{4}$ να γραφεί οριζόντια 8 : 4) και στη συνέχεια προχωρήσουν στους απαραίτητους υπολογισμούς. Η μετατροπή σε οριζόντια γραφή των παραστάσεων αυτών απαιτεί τη χρήση παρενθέσεων προκειμένου να διατηρηθεί η αρχική δομή της κλασματικής παράστασης και δίνει στοιχεία για την ανάγνωση της παράστασης από τους μαθητές. Έτσι για παράδειγμα, στη δραστηριότητα 3, οι μαθητές πρέπει να μεταφέρουν το κλάσμα στη μορφή (8 + 12) : (3 + 2) προκειμένου να φτάσουν στο σωστό υπολογισμό 20 : 5 = 4. Οι προτεινόμενες μορφές επιδιώκουν να καλύψουν τις πιο χαρακτηριστικές κλασματικές μορφές με άθροισμα κλάσματος και αριθμού, κλασματική μορφή με άθροισμα στον παρανομαστή, και αθροίσματα και στα δύο μέλη του κλάσματος, κλάσμα στον παρονομαστή και παράσταση στον αριθμητή (Εικόνα 1, περισσότερα στοιχεία για την επιλογή των κλασματικών παραστάσεων παρουσιάζονται στη συνέχεια στα αποτελέσματα).

Το ερευνητικό ενδιαφέρον στις δραστηριότητες αυτές επικεντρώνεται στη διερεύνηση και σύγκριση των υπολογιστικών στρατηγικών των μαθητών με έμφαση στην ενδεχόμενη επίδραση του πλαισίου εκφοράς της παράστασης (κλασματική μορφή) στις στρατηγικές αυτές.

Σε ό,τι αφορά τον ερευνητικό σχεδιασμό που ακολουθήθηκε στην έρευνα, αυτός εντάσσεται στο πλαίσιο του συγχρονικού σχεδιασμού (cross-sectional research) (Bryman, 2015). Η διαδικασία υλοποίησης (χρόνος, οδηγίες-επισημάνσεις) ήταν πανομοιότυπη για όλα τα τμήματα των τάξεων που συμμετείχαν στην έρευνα. Τα φύλλα εργασίας (τεστ) με τις απαντήσεις των μαθητών αποτέλεσαν τα δεδομένα της έρευνας τα οποία επεξεργάστηκαν στη βάση της ποιοτικής ανάλυσης περιεχομένου (Mayring, 2014). Η ανάλυση αυτή έγινε σε δυο επίπεδα. Σε ένα πρώτο επίπεδο οι απαντήσεις των μαθητών ταξινομήθηκαν ως προς την ορθότητα της απάντησης. Έπειτα, ταξινομήθηκαν σε ένα δεύτερο επίπεδο με βάση την πορεία υπολογισμού που ακολουθήθηκε. Τέλος, καταμετρήθηκαν οι συχνότητες της κάθε κατηγορίας για την κάθε τάξη προκειμένου να επιχειρηθεί μια σύγκριση μεταξύ των μαθητών της Ε' και Στ' δημοτικού.

Ομάδα 1

Γνωρίζετε ότι το $\frac{8}{4}$ μπορεί να γραφεί σε μια γραμμή ως 8:4. Γράψτε τα παρακάτω σε μία σειρά και στη συνέχεια κάντε τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα: $\frac{8}{4} = 8 : 4 = 2$

1) $\frac{12}{4} + 2$ = ________________ = ________

2) $\frac{12}{4+2}$ = ________________ = ________

3) $\frac{8+12}{3+2}$ = ________________ = ________

4) $\frac{20}{\frac{4}{2}}$ = ________________ = ________

5) $\frac{12+2\cdot 3}{3}$ = ________________ = ________

Εικόνα 1: 1η ομάδα δραστηριοτήτων του τεστ.

Αποτελέσματα έρευνας

Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται ανά δραστηριότητα και για τις δυο τάξεις ταυτόχρονα.

Δραστηριότητα 1η

Η πρώτη δραστηριότητα ($\frac{12}{4}+2$) είναι και η μοναδική για την οποία η χρήση της παρένθεσης δεν είναι απαραίτητη κατά την οριζόντια γραφή της. Είναι αρκετό για το λύτη να ακολουθήσει τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων: πρώτα η διαίρεση και μετά η πρόσθεση ($\frac{12}{4}+2 = 12:4+2 = 3+2 = 5$). Βέβαια, στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί κανείς να φτάσει στο σωστό αποτέλεσμα ακόμη και αν βασίσει τον υπολογισμό του στην εσφαλμένη προσέγγιση από αριστερά-προς-δεξιά. Γι' αυτό και η δεύτερη δραστηριότητα σχεδιάστηκε έτσι ώστε όταν γραφεί οριζόντια να έχει ακριβώς την ίδια εμφάνιση με την πρώτη ($12:4+2$), μόνο που τώρα απαιτείται η χρήση παρενθέσεων και ο υπολογισμός από αριστερά-προς-δεξιά δεν βοηθάει.

Στην πρώτη δραστηριότητα οι περισσότεροι μαθητές και των δύο τάξεων έφτασαν στο σωστό τελικό αποτέλεσμα (Πίνακας 1). Από αυτούς, η πλειοψηφία έφτασε στο αποτέλεσμα ακολουθώντας την οδηγία για την μεταφορά της κλασματικής παράστασης σε οριζόντια γραφή. Λίγοι έκαναν χρήση ομώνυμων κλασμάτων, αγνοώντας έτσι τις οδηγίες. Μόνο 3 μαθητές της Στ' δημοτικού χρησιμοποίησαν παρενθέσεις στους υπολογισμούς τους, οι οποίες όμως όπως αναφέρθηκε πιο πάνω δεν ήταν απαραίτητες. Οι λανθασμένες απαντήσεις από την άλλη, σχετίζονταν είτε με υπολογιστικά λάθη, είτε με την ελλιπή κατανόηση των κλασμάτων. Στα φύλλα εργασίας υπήρξαν και περιπτώσεις που η συγκεκριμένη δραστηριότητα είτε απαντήθηκε αλλά δεν ήταν προφανής η λογική που οδήγησε στη συγκεκριμένη λανθασμένη απάντηση, είτε δεν απαντήθηκε καθόλου.

Αποτέλεσμα	Στρατηγική υπολογισμού	Μαθητές	
		Ε'	Στ'
Σωστό	Σωστός υπολογισμός-Οριζόντια διάταξη $\frac{12}{4}+2 = 12:4+2 = 3+2 = 5$	52(45.6%)	60(53.6%)
	Σωστός υπολογισμός-Χρήση παρενθέσεων $\frac{12}{4}+2 = (12:4)+2 = 3+2 = 5$	-	3(2.7%)
	Σωστός υπολογισμός-Ομώνυμα κλάσματα $\frac{12}{4}+\frac{8}{4} = \frac{20}{4} = 5$	6(5.3%)	9(8%)
Λάθος	Υπολογιστικά λάθη π.χ. $\frac{12}{4}+2 = 3+2 = 6$	6(5.3%)	12(10.7%)
	Παρανοήσεις κλασμάτων	28(24.6%)	17(15.2%)

	π.χ. $\frac{12}{4} + 2 = \frac{14}{4}$		
	Απροσδιόριστη απάντηση	11(9.6%)	4(3.5%)
	Καμία απάντηση	11(9.6%)	7(6.3%)

Πίνακας 1: Αποτελέσματα μαθητών στην πρώτη δραστηριότητα της ομάδας δραστηριοτήτων.

Δραστηριότητα 2η

Στη δεύτερη δραστηριότητα ($\frac{12}{4+2}$) η πλειοψηφία των μαθητών κατάφερε και πάλι να φτάσει στο σωστό τελικό αποτέλεσμα (Πίνακας 2). Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή οι περισσότεροι μαθητές που απάντησαν σωστά (όλοι της Ε' δημοτικού και 88 μαθητές από την Στ') χρησιμοποίησαν μία μη ορθή από μαθηματικής άποψης στρατηγική υπολογισμού. Έτσι, αρχικά μετέφεραν την κλασματική παράσταση σε οριζόντια διάταξη χωρίς να χρησιμοποιήσουν τις απαραίτητες παρενθέσεις προκειμένου να υποδηλώσουν την σωστή σειρά εκτέλεσης των πράξεων ($\frac{12}{4+2} = 12 : 4 + 2$). Αυτός ο τρόπος γραφής υποδηλώνει μια άλλη σειρά υπολογισμού των πράξεων (όμοια με αυτήν της πρώτης δραστηριότητας). Όμως οι μαθητές από το σημείο αυτό συνεχίζουν τους υπολογισμούς τους παραβιάζοντας τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων. Έτσι, αντί για τον υπολογισμό 12 : 4 + 2 = 3 + 2 που επιβάλλει η προτεραιότητα των πράξεων, αυτοί γράφουν 12 : 4 + 2 = 12 : 6 =2 (που αριθμητικά είναι η σωστή απάντηση στην αρχική κλασματική παράσταση). Μόλις 5 μαθητές της Στ' δημοτικού αναγνώρισαν την ανάγκη για χρήση παρενθέσεων στη συγκεκριμένη κλασματική παράσταση προκειμένου να φτάσουν στο σωστό αποτέλεσμα. Στην περίπτωση των μαθητών της Ε' δημοτικού εντοπίζεται ακόμη μία μαθηματικά μη ορθή στρατηγική υπολογισμού. Τρεις μαθητές κάνουν λανθασμένη χρήση του συμβόλου της ισότητας προκειμένου να δηλώσουν μια ακολουθία πράξεων. Ταυτόχρονα πριν τη μεταφορά στην οριζόντια γραφή έχουν ήδη προβεί σε μια από τις πράξεις σε κάποιον από τους όρους του κλάσματος (στην περίπτωσή μας, στον παρονομαστή).

Οι λανθασμένες απαντήσεις οργανώθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες (κοινές για τους μαθητές και των δύο τάξεων): Υπολογιστικά λάθη από μέρους των μαθητών, λάθη λόγω ελλιπούς κατανόησης των κλασμάτων, λάθη λόγω εκτέλεσης υπολογισμών από αριστερά προς τα δεξιά, ενώ πάλι υπήρξαν περιπτώσεις όπου οι μαθητές δεν απάντησαν καθόλου ή οι λανθασμένες απαντήσεις τους δεν ήταν δυνατόν να δώσουν πληροφορία για τη στρατηγική που ακολουθήθηκε.

Αποτέλεσμα	Στρατηγική υπολογισμού	Μαθητές	
		Ε'	Στ'
Σωστό	Σωστό αποτέλεσμα-μαθηματικά μη ορθή διαδικασία $\frac{12}{4+2} = 12 : 4 + 2 = 12 : 6 = 2$	73(64.1%)	88(78.5%)

	Σωστός υπολογισμός-Χρήση παρενθέσεων $\frac{12}{4+2} = 12 : (4 + 2) = 12 : 6 = 2$	-	5(4.5%)
	Σωστό αποτέλεσμα- Προβληματική χρήση του = $\frac{12}{4+2} = 4 + 2 = 6 = 12 : 6 = 2$	3(2.6%)	-
	Υπολογιστικά λάθη π.χ. $\frac{12}{4+2} = 12 : 6 = 6$	4(3.5%)	2(1.8%)
Λάθος	Παρανοήσεις κλασμάτων π.χ. $\frac{12}{4+2} = \frac{12}{4} + \frac{12}{2}$	9(7.9%)	1(0.9%)
	Αριστερά προς τα δεξιά υπολογισμός $\frac{12}{4+2} = 12 : 4 + 2 = 3 + 2 = 5$	4(3.5%)	5(4.5%)
	Απροσδιόριστη απάντηση	10(8.8%)	4(3.5%)
	Καμία απάντηση	11(9.6%)	7(6.3%)

Πίνακας 2: Αποτελέσματα μαθητών στη δεύτερη δραστηριότητα της ομάδας δραστηριοτήτων.

Δραστηριότητα 3η

Στη τρίτη δραστηριότητα ($\frac{12+8}{3+2}$) εμφανίζεται και πάλι μεγάλος αριθμός σωστών απαντήσεων (Πίνακας 3). Όμως και στην περίπτωση αυτή η πλειοψηφία των μαθητών έφτασε στο σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα μέσα από μία μη ορθή μαθηματικά στρατηγική υπολογισμού. Έτσι, η κλασματική παράσταση γράφεται χωρίς τη χρήση των παρενθέσεων ($\frac{12+8}{3+2} = 12 + 8 : 3 + 2$) και στη συνέχεια ο υπολογισμός της γίνεται όχι με βάση τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων (12 + 8 : 3 + 2 = 12 + 2,6 + 2) αλλά με έναν τρόπο που δείχνει τους μαθητές να συμπεριφέρονται σαν οι παρενθέσεις να ήταν παρούσες (12 + 8 : 3 + 2 = 20 : 5). Πολύ λίγοι μαθητές (μόλις 7 της Στ' δημοτικού) έκαναν χρήση των παρενθέσεων στην οριζόντια γραφή της παράστασης προκειμένου να εξασφαλίσουν τη δομή της αρχικής κλασματικής παράστασης. Τέλος, σχετικά με τις λανθασμένες και μη κωδικοποιήσιμες απαντήσεις η εικόνα ήταν όμοια με παραπάνω.

Αποτέλεσμα	Στρατηγική υπολογισμού	Μαθητές	
		Ε'	Στ'
Σωστό	Σωστό αποτέλεσμα-μαθηματικά μη ορθή διαδικασία $\frac{12+8}{3+2} = 12 + 8 : 3 + 2 = 20 : 5 = 4$	80(70.2%)	86(76,7%)

	Σωστός υπολογισμός-Χρήση παρενθέσεων $\frac{12+8}{3+2}=(12+8):(3+2)=20:5=4$	-	7(6.3%)
Λάθος	Υπολογιστικά λάθη π.χ. $\frac{12+8}{3+2}=20:5=5$	3(2.6%)	3(2.7%)
	Παρανοήσεις κλασμάτων π.χ. $\frac{12+8}{3+2}=\frac{12}{3}+\frac{8}{2}$	10(8.8%)	5(4.5%)
	Απροσδιόριστη απάντηση	8(7%)	4(3.5%)
	Καμία απάντηση	13(11.4%)	7(6.3%)

Πίνακας 3: Αποτελέσματα μαθητών στην τρίτη δραστηριότητα της ομάδας δραστηριοτήτων.

Δραστηριότητα 4η

Στην τέταρτη δραστηριότητα ($\frac{20}{\frac{4}{2}}$) ο αριθμός των μαθητών που απάντησαν σωστά ήταν μικρότερος και για τις δύο τάξεις (Πίνακας 4). Και εδώ, κυρίαρχη είναι η προσέγγιση που φτάνει στο σωστό αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας μία μη ορθή μαθηματικά στρατηγική υπολογισμού ($\frac{20}{\frac{4}{2}}=20:4:2=20:2=10$). Στην οριζόντια γραφή δεν χρησιμοποιούνται παρενθέσεις και επομένως η παράσταση θα έπρεπε να υπολογιστεί ως $\frac{20}{\frac{4}{2}}=20:4:2=5:2=2{,}5$. Ωστόσο, όπως και πριν οι μαθητές αγνοούν τους κανόνες για την προτεραιότητα και υπολογίζουν $\frac{20}{\frac{4}{2}}=20:4:2=20:2=10$. Δέκα μόνο μαθητές της Στ' δημοτικού έκαναν χρήση των απαραίτητων παρενθέσεων, ενώ ένας μαθητής μετέτρεψε το σύνθετο κλάσμα της δραστηριότητας σε απλό (μια πρακτική που συνηθίζεται στην τάξη). Δεκατέσσερις μαθητές της Ε' τάξης κάνουν λανθασμένη χρήση του συμβόλου της ισότητας (ως ακολουθία πράξεων) και εκτελούν την πράξη στον παρονομαστή πριν την οριζόντια μεταφορά της κλασματικής παράστασης. Λανθασμένες απαντήσεις εξαιτίας υπολογιστικών λαθών ή ελλιπούς κατανόησης των κλασμάτων εντοπίστηκαν μόνο στους μαθητές της Ε' τάξης.

Αποτέλεσμα	Στρατηγική υπολογισμού	Μαθητές	
		Ε'	Στ'
Σωστό	Σωστό αποτέλεσμα-μαθηματικά μη ορθή διαδικασία $\frac{20}{\frac{4}{2}}=20:4:2=20:2=10$	45(39.4%)	69(61.7%)
	Σωστός υπολογισμός-Χρήση παρενθέσεων $\frac{20}{\frac{4}{2}}=20:(4:2)=20:2=10$	-	10(8.9%)

	Σωστός υπολογισμός-μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό $\frac{20}{\frac{4}{2}} = 20 \cdot \frac{2}{4} = \frac{40}{4} = 10$	-	1(0.9%)
	Σωστό αποτέλεσμα- Αναντιστοιχία κλάσματος με οριζόντια διάταξη $\frac{20}{\frac{4}{2}} = 4 : 2 : 20 = 20 : 2$	14(12.3%)	-
	Υπολογιστικά λάθη π.χ.$\frac{20}{\frac{4}{2}} = 20 : 0{,}2$	3(2.6%)	-
Λάθος	Παρανοήσεις κλασμάτων π.χ. $\frac{20}{\frac{4}{2}} = 20 : 8$	4(3.5%)	-
	Αριστερά προς τα δεξιά υπολογισμός $\frac{20}{\frac{4}{2}} = 20 : 4 : 2 = 5 : 2 = 2{,}5$	5(4.4%)	2(1.8%)
	Απροσδιόριστη απάντηση	18(15.8%)	8(7.1%)
	Καμία απάντηση	25(22%)	22(19.6%)

Πίνακας 4: Απαντήσεις μαθητών στην τέταρτη δραστηριότητα της ομάδας δραστηριοτήτων.

Δραστηριότητα 5η

Η πέμπτη και τελευταία δραστηριότητα ($\frac{12+2\cdot 3}{3}$) διαφοροποιείται από τις προηγούμενες γιατί απαιτεί όχι πια μια αντίληψη της έννοιας της δομής που πρέπει να διατηρηθεί, αλλά και καλή γνώση των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων που είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό της επιμέρους παράστασης στον αριθμητή. Ο αριθμός των μαθητών που κατάφερε να φτάσει στη σωστή αριθμητική απάντηση ήταν και αυτός μικρότερος συγκριτικά με τις τρεις πρώτες δραστηριότητες (Πίνακας 5). Όπως και προηγουμένως, έτσι και εδώ η πλειοψηφία των μαθητών που έφτασε στο σωστό αποτέλεσμα χρησιμοποίησε μη ορθή ως προς τα μαθηματικά στρατηγική υπολογισμού. Οι μαθητές μετέφεραν οριζόντια την κλασματική παράσταση χωρίς τη χρήση παρενθέσεων και υπολόγισαν (παραβιάζοντας την προτεραιότητα των πράξεων) με τρόπο που αφήνει να εννοηθεί ότι οι παρενθέσεις ήταν παρούσες ($\frac{12+2\cdot 3}{3} = 12 + 2 \cdot 3 : 3 = 12 + 6 : 3 = 18 : 3 = 6$). Μόνο 6 μαθητές της Στ’ δημοτικού χρησιμοποίησαν παρενθέσεις, τηρώντας στη συνέχεια τους κανόνες της προτεραιότητας των πράξεων. Και πάλι η εικόνα για τις λανθασμένες, μη κωδικοποιήσιμες και κενές απαντήσεις ήταν παρόμοια με τις προηγούμενες δραστηριότητες.

Αποτέλεσμα	Στρατηγική υπολογισμού	Μαθητές	
		Ε’	Στ’

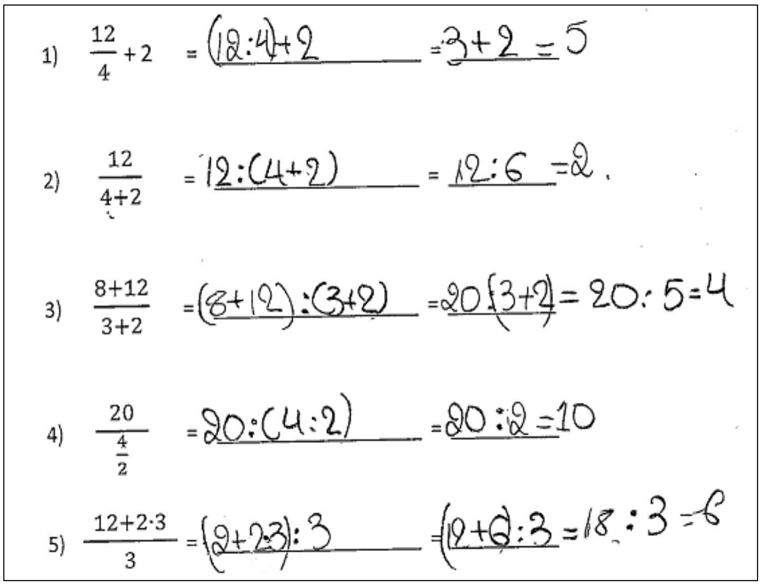
Σωστό	Σωστό αποτέλεσμα-μαθηματικά μη ορθή διαδικασία $\frac{12+2\cdot3}{3} = 12 + 2\cdot3 : 3 = 12 + 6 : 3 = 18 : 3 = 6$	54(47.4%)	68(60.7%)
	Σωστός υπολογισμός-Χρήση παρενθέσεων $\frac{12+2\cdot3}{3} = (12 + 2\cdot3) : 3 = 18 : 3 = 6$	-	6(5.4%)
Λάθος	Υπολογιστικά λάθη π.χ. $\frac{12+2\cdot3}{3} = 12 + 2\cdot3 + 3 = 12 + 6 = 18$	5(4.4%)	5(4.5%)
	Παρανοήσεις κλασμάτων π.χ. $\frac{12+2\cdot3}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2\cdot3}{1}$	5(4.4%)	1(0.9%)
	Αριστερά προς τα δεξιά υπολογισμός $\frac{12+2\cdot3}{3} = 12 + 2\cdot3 : 3 = 14\cdot3 : 3 = 42 : 3 = 14$	24(21%)	18(16%)
	Απροσδιόριστη απάντηση	9(7.9%)	3(2.7%)
	Καμία απάντηση	17(14.9%)	11(9.8%)

Πίνακας 5: Απαντήσεις μαθητών στην πέμπτη δραστηριότητα της ομάδας δραστηριοτήτων.

Συζήτηση

Η πλειοψηφία των μαθητών της Στ' δημοτικού (κατά μ.ό. το 73,52%) μπόρεσε να φτάσει στο σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα, με το αντίστοιχο ποσοστό για την Ε' δημοτικού να είναι σαφώς μικρότερο (κατά μ.ό. το 57,36%). Για τις άλλες δυο περιπτώσεις (Λανθασμένες απαντήσεις και αναπάντητες) τα ποσοστά για την Στ' δημοτικού ήταν κατά μέσο όρο 16,78% και 9,7% αντίστοιχα. Τα ποσοστά αυτά για την Ε' δημοτικού υπολογίζονται σε 29,1% και 13,54% αντίστοιχα.

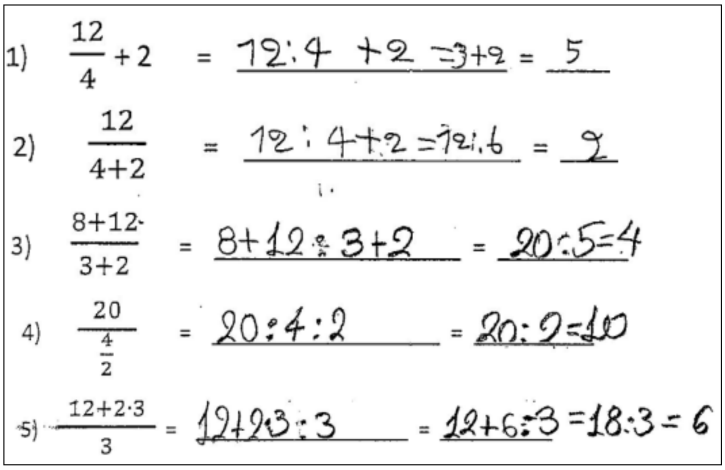
Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών και των δυο τάξεων μπορούν να αποδοθούν σε υπολογιστικά λάθη, στην ελλιπή κατανόηση των κλασμάτων, στην τάση των μαθητών να κάνουν υπολογισμούς από αριστερά προς τα δεξιά καθώς και σε προσεγγίσεις των οποίων η λογική δεν μπόρεσε να προσδιοριστεί. Η ελλιπής κατανόηση των κλασμάτων εντοπίστηκε σε περιπτώσεις όπου, για παράδειγμα, οι μαθητές στην πρόσθεση κλασμάτων πρόσθεταν μεταξύ τους αριθμητές και παρονομαστές ή στην πρόσθεση φυσικού με κλάσμα πρόσθεταν τον φυσικό με τον αριθμητή, όλες τους περιπτώσεις κλασσικών παρανοήσεων που έχει αναδείξει η σχετική βιβλιογραφία (Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Braithwaite, Pyke & Siegler, 2017). Οι υπολογισμοί από αριστερά-προς-δεξιά αποτελούν επίσης εύρημα που σχετίζεται άμεσα με την έρευνα πάνω στις στρατηγικές υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων (Blando et al., 1989; Booth, 1984, 1988; Kieran 1979) και που όταν οι εμπλεκόμενες πράξεις είναι του ιδίου επιπέδου προτεραιότητας (πχ.. πρόσθεση και αφαίρεση ή πολλαπλασιασμός και διαίρεση) τότε η μέθοδος αυτή δίνει σωστά αποτελέσματα. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο όταν οι πράξεις δεν είναι στο ίδιο επίπεδο προτεραιότητας και επομένως τότε πρέπει κανείς να ακολουθήσει τους σχετικούς κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων.



Εικόνα 2: Παραδείγματα σωστών και μαθηματικά ορθών απαντήσεων-χρήση παρενθέσεων.

Ωστόσο, αυτό που κεντρίζει το ενδιαφέρον και σχετίζεται άμεσα με το ερευνητικό μας ερώτημα είναι οι απαντήσεις που καταλήγουν στο σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα. Αναφέρθηκε ήδη ότι ήταν πολύ μικρός ο αριθμός των μαθητών της Στ’ δημοτικού (7,54%) που στην προσπάθεια του να διατηρήσει τη δομή της αρχικής παράστασης έκανε (ως όφειλε) χρήση παρενθέσεων (Εικόνα 2). Προφανώς αυτή είναι μία συμπεριφορά που δεν αναμενόταν από τους μαθητές της Ε’ δημοτικού από τη στιγμή που αυτοί δεν έχουν ακόμη διδαχθεί τη χρήση της παρένθεσης και αυτό εξηγεί το γιατί δεν βρέθηκε καμία τέτοια περίπτωση στις απαντήσεις τους.

Αυτό όμως που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ο υπερβολικά μεγάλος αριθμός απαντήσεων όπου οι μαθητές φτάνουν στο σωστό αποτέλεσμα μέσα από μια διαδικασία που εκ πρώτης όψεως είναι μη ορθή μαθηματικά, αφού στον υπολογισμό τους οι μαθητές παραβιάζουν τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων (Εικόνα 3).

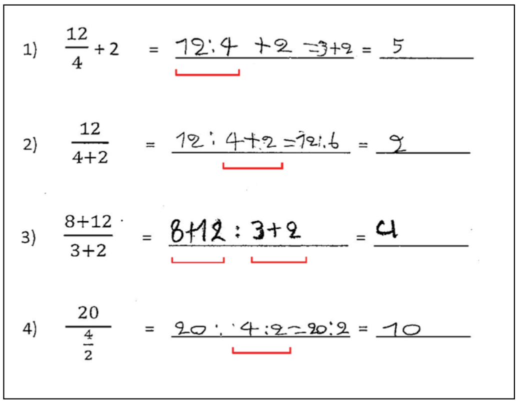


Εικόνα 3: Παραδείγματα σωστών αλλά μαθηματικά μη ορθών απαντήσεων.

Οι μαθητές στην περίπτωση αυτή μετέφεραν όπως φαίνεται το κλάσμα σε οριζόντια μορφή χωρίς τη χρήση παρενθέσεων δημιουργώντας μία αριθμητική παράσταση της οποίας η δομή πια δεν ήταν όμοια με αυτήν της αρχικής κλασματικής. Για παράδειγμα, η οριζόντια αριθμητική παράσταση στην τρίτη δραστηριότητα της Εικόνας 3 ανταποκρίνεται στην $8 + \frac{12}{3} + 2$ και όχι στην αρχική. Έτσι όπως μεταφέρθηκε οριζόντια επιβάλλει με βάση την προτεραιότητα των πράξεων τον εξής υπολογισμό: 8 + 12 : 3 + 2 = 8 + 4 + 2 = 12 + 2 = 14. Ο μαθητής όμως, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3 υπολογίζει την αριθμητική παράσταση ως (8 + 12) : (3 + 2) = 20 : 5 = 4, υπολογισμός που διατηρεί τη δομή του αρχικού κλάσματος. Η συμπεριφορά αυτή επιβεβαιώνεται και στον υπολογισμό των υπόλοιπων κλασματικών παραστάσεων με τα σχετικά ποσοστά μαθητών από τις δυο τάξεις που έκαναν χρήση αυτής της προσέγγισης να είναι 89,72% και 92,4% για την Στ’ και την Ε’ δημοτικού αντίστοιχα. Η διαφορά αυτή ανάμεσα στις δυο τάξεις μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι ένα μέρος των μαθητών της Στ’ δημοτικού έκανε χρήση παρενθέσεων για να διατηρήσει τη δομή κάτι που δεν ήταν δυνατόν να συναντηθεί στις απαντήσεις των μαθητών της Ε’ δημοτικού.

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει μια μικρή επισήμανση. Για τον υπολογισμό των παραπάνω ποσοστών λήφθηκαν υπόψη οι απαντήσεις και στις 5 δραστηριότητες. Μια πρώτη ένσταση λοιπόν που θα μπορούσε κανείς να εγείρει στο σημείο αυτό είναι ότι στην πρώτη δραστηριότητα η απουσία παρενθέσεων δεν επηρεάζει το εξαγόμενο, αφού από μόνη της η προτεραιότητα των πράξεων οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα (αφού η διαίρεση προηγείται του αθροίσματος). Πραγματικά, στην προκειμένη περίπτωση η χρήση των παρενθέσεων για τη μετατροπή της κλασματικής παράστασης σε οριζόντια διάταξη είναι περιττή [$\frac{12}{4} + 2 = (12 : 4) + 2 = 12 : 4 + 2$], μιας και οι κανόνες της προτεραιότητας των πράξεων εναρμονίζονται με τη διατήρηση της δομής της αρχικής κλασματικής παράστασης και ορίζουν τη διαίρεση ως την πράξη που θα πρέπει να εκτελεστεί αρχικά. Ακόμη και στην περίπτωση που κάποιος αγνοεί τους κανόνες αυτούς και απλά ακολουθήσει έναν υπολογισμό από αριστερά-προς-δεξιά, οδηγείται και πάλι στο σωστό αποτέλεσμα. Δεν μπορούμε λοιπόν με βεβαιότητα να πούμε τι από όλα συμβαίνει στην περίπτωση της πρώτης δραστηριότητας. Στην περίπτωσή μας το γεγονός ότι ο τρόπος που εργάστηκαν οι μαθητές αυτοί δείχνει μια συνέπεια που διαπερνά όλες τις απαντήσεις τους σε όλες τις δραστηριότητες οδηγεί στην απόφασή μας να συνυπολογιστεί αριθμητικά. Ακόμη όμως και χωρίς αυτόν τον συνυπολογισμό τα ποσοστά αυτά είναι εφάμιλλα των προηγουμένων (91,3% και 93% για την Στ’ και την Ε’ δημοτικού αντίστοιχα).

Βλέποντας συνολικά τη συμπεριφορά των μαθητών στο σύνολο των δραστηριοτήτων φαίνεται πως αν και αυτή είναι φαινομενικά μη ορθή από μαθηματικής απόψεως, εν τούτοις συνδέεται άμεσα με την καλή κατανόηση της δομής της κλασματικής παράστασης. Για τον σωστό υπολογισμό όλων (εκτός της δραστηριότητας 5) των δραστηριοτήτων της άσκησης απαιτείται η καλή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος η οποία προσδιορίζει τον τρόπο που θα αναλυθεί η οριζόντια αριθμητική παράσταση. Πραγματικά, ο τρόπος της γραπτής σύνταξης (στην περίπτωσή μας η κλασματική μορφή) δηλώνει ξεκάθαρα τον τρόπο ανάλυσης (κάνω πρώτα πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή και στη συνέχεια την τελική διαίρεση, $\frac{\alpha}{\beta}$ = α : β). Έτσι, για να αναφερθούμε και πάλι στο παράδειγμα της Δραστηριότητας 3 της Εικόνας 3, δηλαδή του κλάσματος $\frac{8+12}{3+2}$, αν και εκ πρώτης όψεως οι μαθητές φαίνεται να λειτουργούν λανθασμένα, αφού δεν χρησιμοποιούν παρενθέσεις για να διατηρήσουν τη δομή, εν τούτοις υπολογίζουν την παράσταση με τρόπο που είναι δηλωτικός της παρουσίας παρενθέσεων. Αναφερόμαστε σε αυτές με τον όρο «νοερές παρενθέσεις» (Linchevski & Livneh, 1999) οι οποίες λειτουργούν βοηθητικά ως μια «προσθήκη του νου» (Radford, 2000). Οι μαθητές λοιπόν, λόγω της καλής κατανόησης του κλάσματος υπολογίζουν την παράσταση όπως η ίδια η έννοια του κλάσματος επιβάλλει, «προσθέτω τους όρους σε αριθμητή και παρονομαστή και στη συνέχεια διαιρώ τα εξαγόμενα». Η ίδια λογική διέπει τις απαντήσεις τους και στις υπόλοιπες δραστηριότητες. Σε μερικές περιπτώσεις, η ερμηνεία αυτή φαίνεται να ενισχύεται από τον τρόπο που οι ίδιοι οι μαθητές γράφουν την οριζόντια αριθμητική παράσταση. Μια προσεκτική παρατήρηση της Εικόνας 4 δείχνει μια τέτοια ομαδοποίηση που θα υποδήλωνε η χρήση των παρενθέσεων αν αυτές είχαν χρησιμοποιηθεί.



Εικόνα 4: Ενδείξεις που σχετίζονται με τη χρήση νοερών παρενθέσεων.

Οι μαθητές στην περίπτωση αυτή (αν και λίγοι, μόλις 17 στο σύνολο του δείγματος-10 και 7 μαθητές για την Ε' και Στ' δημοτικού αντίστοιχα) φάνηκε να διαχωρίζουν τους όρους της οριζόντιας αριθμητικής παράστασης αφήνοντας κενά μεταξύ συγκεκριμένων πράξεων τα οποία ομαδοποιούν τους όρους σε συμφωνία με την αρχική δομή του κλάσματος. Αυτό είναι πολύ χαρακτηριστικό για τις πρώτες δυο δραστηριότητες όπου ενώ οι όροι που εμπλέκονται στην οριζόντια παράσταση είναι ακριβώς οι ίδιοι, εν τούτοις οι μαθητές για την μεν πρώτη παράσταση άφησαν ένα εμφανές κενό μεταξύ του 12:4 και της επόμενης πράξης (+) που ομαδοποιεί το 12:4, ενώ για τη δεύτερη το κενό αυτό παρατηρείται μετά την πράξης της διαίρεσης ομαδοποιώντας έτσι το 4+2 (βλ. Εικόνα 4). Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρεί κανείς και στα υπόλοιπα παραδείγματα της Εικόνας 4. Αυτός ο τρόπος γραφής συμφωνεί με βιβλιογραφικά ευρήματα σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές υπολογίζουν μία παράσταση σύμφωνα με τις αποστάσεις που υπάρχουν μεταξύ των όρων και των συμβόλων των πράξεων (αρχική εκτέλεση αυτών που βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους) (Landy & Goldstone, 2007, 2010). Εδώ όμως οι ίδιοι οι μαθητές δημιουργούν τις αποστάσεις αυτές και αυτό κατά την άποψή μας είναι ενδεικτικό αυτής της χρήσης των νοερών παρενθέσεων που ομαδοποιούν τους όρους της παράστασης.

Μια δεύτερη ένσταση που θα μπορούσε να εγείρει κανείς στο σημείο αυτό είναι ότι αφού η καλή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος μπορεί από μόνη της να εξασφαλίσει την επίτευξη του σωστού αποτελέσματος τότε ίσως δεν χρειάζεται η αναφορά στις «νοερές» παρενθέσεις. Το γεγονός όμως είναι ότι αν οι μαθητές απάντησαν σωστά βασιζόμενοι αποκλειστικά στη γνώση τους σχετικά με την έννοια του κλάσματος τότε θα ήταν σε θέση να διαχειριστούν με επιτυχία μόνο τις 4 πρώτες δραστηριότητες και όχι την πέμπτη, αφού για την τελευταία ($\frac{12+2\cdot 3}{3}$) η αναγνώριση του πλαισίου μέσα στο οποίο είναι εκφρασμένη η αρχική παράσταση (έννοια κλάσματος) δεν αρκεί από μόνη της για να οδηγηθούν οι μαθητές στο σωστό αποτέλεσμα. Σε αυτήν την περίπτωση απαιτείται η γνώση και χρήση των κανόνων της προτεραιότητας των πράξεων αφού στον αριθμητή εμπλέκονται πράξεις με διαφορετικό επίπεδο προτεραιότητας. Έτσι, ο πολλαπλασιασμός πρέπει να προηγηθεί της πρόσθεσης ($12 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18$) προκειμένου στη συνέχεια να γίνει η διαίρεση των όρων. Το να έχει ο μαθητής καλή κατανόηση του κλάσματος αλλά απουσία γνώσης των κανόνων προτεραιότητας οδηγεί σε υπολογισμό για τον αριθμητή από αριστερά-προς-δεξιά γεγονός που τελικά δίνει ως εξαγόμενο για τον αριθμητή $12 + 2 \cdot 3 = 14 \cdot 3 = 42$. Παρατηρώντας λοιπόν συνδυαστικά τις απαντήσεις που δόθηκαν στις πρώτες δραστηριότητες και στη δραστηριότητα 5, φαίνεται ότι μάλλον ενισχύεται η ερμηνεία των «νοερών» παρενθέσεων. Τα ευρήματα δείχνουν ότι η πλειοψηφία των μαθητών της Στ' δημοτικού (περίπου το 87,5%) που έκανε χρήση της μαθηματικά μη ορθής προσέγγισης στις πρώτες δραστηριότητες, υπολόγισε σωστά το αποτέλεσμα της δραστηριότητας 5 τηρώντας την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό του αριθμητή. Οι υπόλοιποι (μόνο 8 μαθητές) ακολούθησαν την προσέγγιση αριστερά-προς-δεξιά, ενδεικτικό του γεγονότος ότι οι σωστές απαντήσεις τους ήταν προϊόν αποκλειστικά της καλής κατανόησης τη έννοιας του κλάσματος που τους βοήθησε να υπολογίσουν σωστά τις κλασματικές παραστάσεις. Γι' αυτό και στην περίπτωση που αυτό δεν ήταν αρκετό κατέφυγαν στην λανθασμένη προσέγγιση από αριστερά-προς-δεξιά.

Προφανώς οι ισχυρισμοί για τη χρήση «νοερών» παρενθέσεων δεν μπορούν να γενικευτούν για τους μαθητές της Ε' δημοτικού όπου αυτό που φαίνεται να τους καθοδηγεί στην ανάλυση και τον υπολογισμό των παραστάσεων ήταν η κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Δικαιολογείται λοιπόν το γεγονός ότι στην τελευταία δραστηριότητα το ποσοστό των ορθών απαντήσεων για τους μαθητές της Ε' δημοτικού είναι σημαντικά μειωμένο (47,4% έναντι του 60,7% των μαθητών της Στ' δημοτικού). Εν τούτοις όμως και αυτό το ποσοστό είναι ενδιαφέρον και δεν μπορεί να ερμηνευτεί (τουλάχιστον από εμάς) αν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι οι μαθητές της Ε΄ δεν έχουν διδαχτεί την προτεραιότητα των πράξεων.

Υποστηρίζουμε λοιπόν ότι η κλασματική μορφή των αριθμητικών παραστάσεων στην ουσία επιβάλλει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται και υπολογίζουν τις συγκεκριμένες παραστάσεις. Όντως, οι μαθητές καθοδηγούνται από τη μορφή αυτή και γι' αυτό δεν ελέγχουν τη μαθηματική ακρίβεια του υπολογισμού τους. Έτσι, με τη χρήση «νοερών» παρενθέσεων στην ουσία αντιμετωπίζουν τις παραστάσεις όπως θα έπρεπε να αντιμετωπίζονται, αν και ο τρόπος γραφής τους δεν διατηρεί τη δομή της αρχικής παράστασης. Το κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων είναι ήσσονος σημασίας στις πρώτες τέσσερις δραστηριότητες, αφού ο τρόπος σύνταξής τους φαίνεται να πυροδοτεί ένα σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα που όμως δεν ευθυγραμμίζεται με τους σχετικούς κανόνες. Αυτοί όμως οι μαθητές που βασίζονται αποκλειστικά στην κλασματική μορφή της παράστασης αποτυγχάνουν όταν εμπλέκονται πιο σύνθετοι όροι που απαιτούν κατανόηση της προτεραιότητας των πράξεων (όπως συμβαίνει στην περίπτωση της 5ης δραστηριότητας). Τα δεδομένα μας δείχνουν ότι μεγάλο μέρος των μαθητών (της Στ' δημοτικού) που δεν κάνουν χρήση των παρενθέσεων (όπως θα όφειλαν) στις πρώτες τέσσερις δραστηριότητες, είναι σε θέση να στραφούν στους κανόνες για την προτεραιότητα όταν είναι απαραίτητο (πχ 5η δραστηριότητα). Γι' αυτούς τους μαθητές προφανώς ο τρόπος γραφής των οριζόντιων αριθμητικών παραστάσεων καθώς και ο υπολογισμός τους παραβιάζει την προτεραιότητα των πράξεων αλλά πιστεύουμε ότι νοερά τοποθετούν παρενθέσεις στις παραστάσεις που υπολογίζουν. Εικάζουμε ότι κατά κάποιο τρόπο οι μαθητές αυτοί θεωρούν ότι η ενδιάμεση γραφή στην οριζόντια μορφή δεν συμβάλλει στον υπολογισμό και γι' αυτό δεν δίνουν προσοχή στο θέμα της δομής της παράστασης σε σχέση με το αποτέλεσμα του υπολογισμού τους. Όμως, ακόμα και έτσι, είναι σε θέση να στρέφονται στους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων όταν η γνώση που προκαλείται από τη μορφή της (κλασματικής) παράστασης δεν αρκεί για τον υπολογισμό της.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκε (σύμφωνα με τα ερευνητικά ερωτήματα) η επίδραση που έχει η γραπτή μορφή μια αριθμητικής παράστασης (στην έρευνα κλασματικής) στον τρόπο υπολογισμού της από μαθητές της Ε' και Στ' δημοτικού, η κατανόηση των κλασματικών παραστάσεων από τους μαθητές και ο ρόλος και χρήση των παρενθέσεων. Είναι φανερό ότι η χρήση των παρενθέσεων είναι σημαντική τόσο στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων όσο και στην επίδειξη μίας αίσθησης της δομής (Linchevski & Livneh, 1999), χωρίς να σημαίνει απαραίτητα ότι η απουσία των απαραίτητων παρενθέσεων δείχνει έλλειψη κατανόησης της δομής.

Σύμφωνα με τη συζήτηση, τα δεδομένα μας δίνουν αρχικά ενδείξεις ότι οι μαθητές γράφουν μια ρητή παράσταση σε οριζόντια μορφή χωρίς να χρησιμοποιούν παρενθέσεις προκειμένου να διατηρήσουν την δομή της παράστασης. Η γραφή αυτή δίνει στοιχεία για τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν την παράσταση αυτή (Banerjee & Subramaniam, 2005; Linchevski & Livneh, 1999). Η χρήση ή μη παρενθέσεων δεν καθορίζει τον υπολογισμό των παραστάσεων καθώς οι μαθητές κάνουν χρήση 'νοερών' παρενθέσεων στην πραγματοποίηση του (Linchevski & Livneh, 1999; Liebenberg, Sasman & Olivier, 1999; Payne & Squibb, 1990), που θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως απουσία της αίσθησης της δομής. Όμως, υποστηρίζεται ότι ο τρόπος που οι μαθητές υπολογίζουν τις οριζόντιες αριθμητικές παραστάσεις, ακόμη και αν ακολουθούν μια φαινομενικά ανορθόδοξη διαδικασία η οποία παραβιάζει τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων, δείχνει ότι η δομή διατηρείται μέσω της χρήσης των 'νοερών' παρενθέσεων.

Αναφορές (References)

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 42-47.

Bannerjee, R., & Subramaniam, K. (2005). Developing procedure and structure sense of arithmetic expressions. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121-128). Melbourne, Australia: PME.

Blando, J. A., Kelly, A. E., Schneider, B. R., & Sleeman, D. (1989). Analyzing and modeling arithmetic errors. *Journal of Research in Mathematics Education, 20*(3), 301–308. https://doi.org/10.2307/749518

Booth, L. R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford and A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, k-12 (1988 yearbook)* (pp. 20–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Braithwaite, D. W., Pyke, A. A., & Siegler, R. S. (2017). A computational model of fraction arithmetic. *Psychological review, 124*(5), 603. https://doi.org/10.1037/rev0000072

Bryman, A. (2015). *Social research methods*. Oxford university press.

Gallardo, A. (1995). Negative numbers in the teaching of arithmetic. Repercussions in elementary algebra. In M. Owens, M. Reeds & G. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education (North America)* (Vol. 1, pp. 158-163). Ohio: PME.

Gunnarsson, R., & Karlsson, A. (2015). Brackets and the structure sense. In O. Helenius, A. Engström, T. Meaney, P. Nilsson, E. Norén, J. Sayers & M. Österholm (Eds.), *Proceedings of the 9th Swedish Mathematics Education Research Seminar* (pp. 47-55). Umea, Sweden: MADIF.

Gunnarsson, R., Hernell, B., & Sönnerhed, W. W. (2012). Useless brackets in arithmetic expressions with mixed operations. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 275–282). Taipei, Taiwan: PME.

Gunnarsson, R., Sönnerhed, W. W., & Hernell, B. (2016). Does it help to use mathematically superfluous brackets when teaching the rules for the order of operations? *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 91-105. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9667-2

Hewitt, D. (2005). Chinese whispers - algebra style: Grammatical, notational, mathematical and activity tensions. In H. L. Chick and J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129–136). Melbourne, Australia: PME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Hoines and A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's algebraic structure sense. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne and F. Arzarello (Eds*.), Proceedings of the 6th Conference of European Research in Mathematics Education*, (pp. 529-538). Lyon, France: CERME.

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. In D. Tall (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128–133). Warwick, UK: PME.

Landy, D., & Goldstone R. L. (2007). The alignment of ordering and space in arithmetic computation. In D. S. McNamara & J. G. Trafton (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 437–442). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Landy, D., & Goldstone, R. L. (2010). Proximity and precedence in arithmetic. *The Quaterly Journal of Experimental Psychology, 63*(10), 1953–1968. https://doi.org/10.1080/17470211003787619

Liebenberg, R., Sasman, M., & Olivier, A. (1999). From numerical equivalence to algebraic equivalence. *Proceedings of the Fifth Annual Conference of the Association for Mathematics Education in South Africa* (Vol. 2, pp. 173–83). Port Elizabeth: Port Elizabeth Technikon

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra. In J. Matos (Ed.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp. 176-183). Lisbon, Portugal: PME.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 113–120. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90026-8

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations*. Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 39-65. https://doi.org/10.1007/bf00163752

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Marchini, C., & Papadopoulos, I. (2011). Are useless brackets useful tools for teaching? In B. Ubus (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 185-192). Ankara, Turkey: PME.

Mayring, P. (2014). *Qualitative Content Analysis: Theoretical Foundation, Basic Procedures and Software Solution.* Klagenfurt: Beltz.

Okazaki, M. (2006). Semiotic chaining in an expression constructing activity aimed at the transition from arithmetic to algebra. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíkova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 257– 264). Prague, Czech Republic: PME.

Payne, S. J., & Squibb, H. R. (1990). Algebra Mal-Rules and Cognitive Accounts of Error. *Cognitive science, 14*(3), 445-481. https://doi.org/10.1016/0364-0213(90)90019-s

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237 – 268. https://doi.org/10.1023/A:101753082

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology, 62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School Science and Mathematics, 112*(4), 255-264. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00136.x

Wu, H. (2007). "Order of operations" and other oddities in school mathematics. Ανακτήθηκε από https://math.berkeley.edu/~wu/order5.pdf (πρόσβαση στις 13 Ιουλίου, 2017).