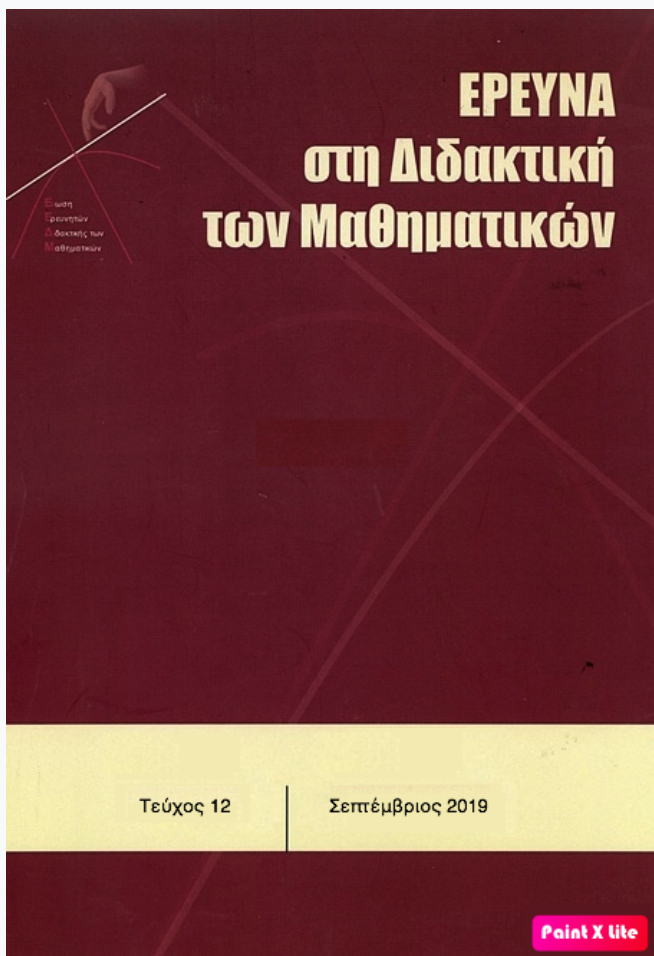


## Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 12 (2019)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



### ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΟ ΑΥΘΟΡΜΗΤΟ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ' ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Μαρία Τσιούλη (Tsiouli Maria), Μαρία Παπανδρέου  
(Maria Papandreou)

doi: [10.12681/enedim.21171](https://doi.org/10.12681/enedim.21171)

Copyright © 2019, Μαρία Τσιούλη (Tsiouli Maria), Μαρία Παπανδρέου  
(Maria Papandreou)



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Τσιούλη (Tsiouli Maria) M., & Παπανδρέου (Maria Papandreou) M. (2019). ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΟ ΑΥΘΟΡΜΗΤΟ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ' ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (12), 42–62. <https://doi.org/10.12681/enedim.21171>

---

## ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΟ ΑΥΘΟΡΜΗΤΟ ‘ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ’ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Τσιούλη Μαρία και Παπανδρέου Μαρία

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

[awa.maria@yahoo.co.uk](mailto:awa.maria@yahoo.co.uk), [mpapan@nured.auth.gr](mailto:mpapan@nured.auth.gr)

*Περίληψη:* Η έρευνα έχει δείξει ότι το παιχνίδι αποτελεί ένα προνομιακό περιβάλλον για να μελετήσουμε το εύρος της καθημερινής μαθηματικής γνώσης των παιδιών, καθώς σε αυτό το πλαίσιο φέρνουν και επεξεργάζονται ποικίλες εμπειρίες, γνώσεις και δεξιότητες που αποκτούν συμμετέχοντας σε ποικίλες καθημερινές δραστηριότητες μαζί με άλλους. Επιπλέον, σχετικά πρόσφατα παρατηρείται και ένα αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον για την άμεση αξιοποίηση αυτής της οικογενειακής και πολιτισμικής εμπειρίας και γνώσης για περαιτέρω μαθηματική μάθηση με την ‘μαθηματοποίηση’ των στοιχείων του παιχνιδιού. Για τη εφαρμογή αυτής της παιδαγωγικής προοπτικής φαίνεται να έχει σημασία ένα ιδιαίτερο είδος αυθόρμητης ενασχόλησης των παιδιών με μαθηματικές ιδέες που ορισμένοι το ονομάζουν ‘μαθηματικό παιχνίδι’, ζήτημα που όμως δεν έχει μελετηθεί συστηματικά. Το παρόν άρθρο εστιάζει στην εμφάνιση και τα χαρακτηριστικά περιστατικών ‘μαθηματικού παιχνιδιού’, που εντοπίστηκαν σε μια πρόσφατη έρευνα που επεδίωξε τη διερεύνηση των χαρακτηριστικών της καθημερινής μαθηματικής σκέψης και γνώσης των παιδιών ενός δημοσίου νηπιαγωγείου, όπως αυτή εκδηλώθηκε για ενάμιση μήνα κατά το ελεύθερο παιχνίδι τους. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα παιδιά αυτής της τάξης αρκετά συχνά εκδήλωναν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για διάφορα μαθηματικά αντικείμενα. ‘Παίζοντας’ με αυτά και αλληλοεπιδρώντας με τους φίλους τους επεξεργάζονταν και επέκτειναν τις μαθηματικές τους γνώσεις, ενώ η εκδήλωση αυτών των περιστατικών φάνηκε να συνδέεται με συγκεκριμένες δραστηριότητες παιχνιδιού οι οποίες περιλάμβαναν κυρίως θέματα από την καθημερινή ζωή. Τα αποτελέσματα αυτά συζητούνται στη βάση των προεκτάσεων που απορρέουν για την καθημερινή πρακτική στην τάξη του νηπιαγωγείου, αλλά και για περαιτέρω έρευνα.

*Λέξεις κλειδιά:* καθημερινή μαθηματική γνώση, μαθηματικό παιχνίδι, προσχολική εκπαίδευση, μαθηματοποίηση

*Abstract:* Research has shown that play is a favorable context for investigating the range of children’s informal mathematical knowledge, as into their play activities they bring and use different kinds of experience and knowledge which they appropriate by participating in various everyday activities. A growing interest is also observed recently for further mathematical learning based on children’s family and cultural knowledge through mathematizing elements of their play. For the implementation of this pedagogical perspective, a specific kind of children’s engagement with mathematical ideas, the ‘mathematical play’, is of particular interest, issue that has not been systematically researched. The present paper focuses on the features of mathematical play incidents identified during a recent research in a kindergarten, which sought to investigate children’s everyday mathematical knowledge as it was

*expressed during six weeks in their free choice activities. Based on these findings we demonstrate the children's intense interest on various mathematical topics. 'Playing' with mathematical ideas and interacting with their peers the children elaborated and extended their mathematical knowledge, while the emergence of these incidents seems to be related to specific play activities based on various topics of their everyday life. Findings are discussed, and implications are proposed for everyday practice in early childhood classrooms and further research on this issue.*

*Keywords: everyday mathematical knowledge, mathematical play, early childhood education, mathematizing*

## **Εισαγωγή**

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον των ερευνητών που ασχολούνται με την μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών, το οποίο συνδέει το παιχνίδι και τα Μαθηματικά. Εκτός από το δομημένο μαθηματικό παιχνίδι που ξεκινάει από συγκεκριμένους στόχους που θέτει ο εκπαιδευτικός (Skoumpourdi, 2016; Τζεκάκη, 2010), σχετικά πρόσφατα έχουν αρχίσει να μελετώνται πιο συστηματικά οι δυνατότητες που προσφέρει το ελεύθερο παιχνίδι των παιδιών για μαθηματική μάθηση με νόημα που βρίσκεται κοντά στις πολιτισμικές και οικογενειακές εμπειρίες και γνώσεις τους (Edo, Planas, & Badillo, 2009; Worthington & van Oers 2016). Η τάση αυτή εκτός από την αναγνώριση του πλούσιου και διαφοροποιημένου ρεπερτορίου άτυπων γνώσεων του κάθε παιδιού, περιλαμβάνει και την θεώρηση ότι τα μικρά παιδιά είναι ενεργοί, ικανοί και υπεύθυνοι πολίτες (Dockett & Goff, 2013) που μαθαίνουν συμμετέχοντας σε ποικίλες αλληλεπιδράσεις με άλλους σε πλαίσια και δραστηριότητες που έχουν σημασία και νόημα για τα ίδια (Rogoff, 2008). Λαμβάνοντας υπόψη ότι το παιχνίδι είναι ένα πλαίσιο με νόημα για τα παιδιά, μέσα στο οποίο φέρνουν και επεξεργάζονται την πλούσια πολιτισμική τους εμπειρία και γνώση, η έρευνα στο πεδίο αυτό έχει διαμορφώσει μια νέα μορφή παιδαγωγικής του παιχνιδιού (Brogström, 2017; Fleer, 2010), ενώ ευρήματα που αφορούν τα μαθηματικά δείχνουν ότι είναι εφικτή η νοηματοδότηση και ανάπτυξη της μαθηματικής μάθησης μέσα από την αξιοποίηση δράσεων που αναπτύσσονται κατά το ελεύθερο παιχνίδι τους (Edo et al., 2009; Worthington & van Oers, 2016). Ωστόσο, μέχρι τώρα δεν έχει διερευνηθεί συστηματικά ποιες περιστάσεις αυθόρμητου παιχνιδιού μπορούν να αποτελέσουν σημαντικές μαθησιακές ευκαιρίες ως βάση για περεταίρω μάθηση με νόημα για τα παιδιά.

Με βάση αυτόν τον προσανατολισμό και αξιοποιώντας μέρος των ευρημάτων μιας μελέτης περίπτωσης που διερεύνησε τις καθημερινές μαθηματικές γνώσεις των παιδιών μιας τάξης νηπιαγωγείου, έτσι όπως εκδηλώνονται αυθόρμητα στο ελεύθερο παιχνίδι τους (Papandreou & Tsiouli, υπό κρίση), το παρόν άρθρο εστιάζει στα χαρακτηριστικά των περιστατικών παιχνιδιού με μαθηματικό περιεχόμενο που εντοπίστηκαν κατά την έρευνα, με απώτερο στόχο την ανάδειξη των προοπτικών που παρουσιάζονται για μαθηματική μάθηση με νόημα για τα παιδιά αξιοποιώντας την άτυπη μαθηματική γνώση τους στο πλαίσιο του παιχνιδιού στο οποίο αυτή εμφανίζεται.

## Θεωρητικό υπόβαθρο

### Παιχνίδι και μαθηματική μάθηση

Το παιχνίδι είναι κύριο χαρακτηριστικό της παιδικής ηλικίας και η σημασία του εντοπίζεται στην έντονη επίδραση του στην ανάπτυξη των παιδιών. Όπως υποστηρίζει ο Vygotsky (1978), κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού τα παιδιά μετατρέπουν αντικείμενα και φόρμες συμπεριφοράς που είναι κοινωνικές κατασκευές και τις αντλούν από το κοινωνικοπολιτισμικό περιβάλλον που ζουν και αναπτύσσονται. Με τη δυναμική της φαντασίας και την αναγνώριση των κανόνων που υπονοούνται και χαρακτηρίζουν τις καθημερινές δραστηριότητες, τα παιδιά καθώς τις αναπαράγουν και τις επεξεργάζονται κατορθώνουν ένα στοιχειώδες επίπεδο αφηρημένης σκέψης (Vygotsky, 1978). Αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό, η δυνατότητα δηλαδή για αφηρημένη σκέψη, μετατρέπει το παιχνίδι σε μια δραστηριότητα καθοριστικής σημασίας για τη μάθηση στην προσχολική ηλικία (Brögstrom, 2017).

Ο van Oers (1996) σχηματοποιεί δύο βασικές προσεγγίσεις που περιγράφουν τη σχέση της διδασκαλίας των μαθηματικών και του παιχνιδιού στην προσχολική εκπαίδευση. Η πρώτη περιλαμβάνει τα 'παιγνιώδη μαθηματικά', όπου τα παιδιά μέσα από δομημένα παιχνίδια-δραστηριότητες προσεγγίζουν ποικίλα μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. έννοιες, πράξεις ή διεργασίες), με σημείο εκκίνησης ένα συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο που θέτει ο εκπαιδευτικός. Αυτή η προσέγγιση είναι περισσότερο διαδεδομένη στη προσχολική μαθηματική εκπαίδευση, καθώς εξασφαλίζει ένα ασφαλές πλαίσιο δράσης για τον εκπαιδευτικό.

Η δεύτερη προσέγγιση, η οποία έχει αρχίσει να προβάλλεται τα τελευταία χρόνια στο πλαίσιο μιας νέας παιδαγωγικής του παιχνιδιού, περιλαμβάνει τη «μαθηματικοποίηση στοιχείων του παιχνιδιού» (van Oers, 1996, σ. 74). Η μαθηματικοποίηση, η οποία περιγράφεται ως διαδικασία αναγνώρισης μαθηματικών αντικειμένων στο περιεχόμενο της καθημερινότητας (Björklund, Magnusson, & Palmér, 2018), και κυρίως ως «δραστηριότητα οργάνωσης και μελέτης οποιουδήποτε είδους πραγματικότητας με μαθηματικά μέσα» (Jurri & Drijvers, 2016, σ. 2483), εξετάζεται σε αυτή την προσέγγιση μέσα στο αυθόρμητο παιχνίδι των παιδιών. Εδώ το παιχνίδι -σημαντικό μέρος της καθημερινότητάς των παιδιών- είναι η κυρίαρχη δραστηριότητα και η εκπαιδευτικός παρατηρώντας και συμμετέχοντας διακριτικά, διευκολύνει τα παιδιά να αναγνωρίσουν μαθηματικές έννοιες που εμπεριέχονται στις δράσεις τους ή/και να εισάγει νέες με ρητό τρόπο που μπορούν να συμβάλλουν στην εξέλιξη του παιχνιδιού τους· να λειτουργήσουν δηλαδή, ως μέσα για την ανάπτυξη σχεδίων δράσης και τη διαχείριση προβλημάτων που προκύπτουν στο παιχνίδι. Ωστόσο, για να προωθήσει μια τέτοια διαδικασία, η εκπαιδευτικός χρειάζεται αρχικά να κατανοήσει τον τρόπο που σκέφτονται τα παιδιά φέρνοντας στην επιφάνεια προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες τους και εντοπίζοντας καθημερινές έννοιες με μαθηματικό περιεχόμενο που χρησιμοποιούν αυθόρμητα, δηλαδή, νοήματα που δομούν διαισθητικά με πρακτικό τρόπο. Όπως εξηγεί ο Vygotsky (1978), οι καθημερινές έννοιες είναι ευθέως συνδεδεμένες με καθημερινές δραστηριότητες και η δράση του παιδιού καθοδηγείται από το συγκεκριμένο πλαίσιο και όχι

από την συνειδητοποίηση της έννοιας, όμως ταυτόχρονα αποτελούν και τη βάση για το σχηματισμό των επιστημονικών εννοιών. Για τη συγκρότηση τους, το παιδί χρειάζεται να βιώσει καταστάσεις μέσα από τις οποίες να οδηγηθεί σε γενικεύσεις, να είναι σε θέση δηλαδή να αναγνωρίζει ότι διαφορετικές καθημερινές εμπειρίες συνδέονται με την ίδια έννοια (Kozulin, 1998). Συνεπώς, οι καθημερινές μαθηματικές ιδέες και εμπειρίες που αποκτούν τα παιδιά συμμετέχοντας σε διάφορες δραστηριότητες του περιβάλλοντος τους είναι απαραίτητες για το σχηματισμό των μαθηματικών εννοιών, ενώ αυτές καθώς αναπτύσσονται προοδευτικά αποτελούν τη βάση ώστε τα παιδιά να προσεγγίσουν και να εξετάσουν νέες καθημερινές εμπειρίες με μαθηματικό περιεχόμενο. Η εκπαιδευτικός, λοιπόν που επιδιώκει την εννοιολογική μάθηση, όταν αναγνωρίζει τη χρήση καθημερινών εννοιών με μαθηματικά στοιχεία από τα παιδιά προσπαθεί να παρέμβει με δράσεις που καλλιεργούν το στοχασμό πάνω στις μαθηματικές ιδέες, χωρίς όμως να διαταράσσει το παιχνίδι τους (Κωνσταντινίδου & Παπανδρέου, 2018; van Oers, 2013). Η διαμεσολάβηση αυτή, που έχει στόχο τη σύνδεση της καθημερινής γνώσης με την επιστημονική, συγκροτεί αυτό που η Fleer (2010) ονομάζει 'εννοιολογικό παιχνίδι' και «η μάθηση προκύπτει μέσα από την κοινωνική αλληλεπίδραση και επικοινωνία σε μια διαδικασία όπου στο παιδί δίνεται χώρος ώστε να μπορεί να λειτουργήσει ως ενεργός δημιουργός της γνώσης» (Παπανδρέου, 2017, σ. 33). Έτσι για την περίπτωση των μαθηματικών εξασφαλίζεται η νοηματοδότηση της μαθηματικής γνώσης μέσα από τη διαδικασία μαθηματοποίησης στοιχείων του παιχνιδιού, το οποίο υπό την οπτική αυτή μοιάζει κατάλληλο πλαίσιο για μαθηματική μάθηση στις μικρές ηλικίες.

Είναι σαφές ότι για την εφαρμογή αυτής της προσέγγισης ο ρόλος της εκπαιδευτικού είναι καθοριστικής σημασίας, ο οποίος όμως είναι σύνθετος και απαιτητικός. Μια θεμελιώδης προϋπόθεση ωστόσο φαίνεται ότι είναι η ικανότητά της να παρατηρεί, να αναγνωρίζει τα άτυπα μαθηματικά των παιδιών στο πλαίσιο του παιχνιδιού τους (Dockett & Goff, 2013) και να ερμηνεύει τις ανάγκες τους ώστε να μπορεί στη συνέχεια να ανταποκριθεί και να συμβάλλει στη μαθηματική μάθησή τους (Trawick-Smith, Swaminathan, & Liu, 2015).

### ***Η άτυπη μαθηματική μάθηση στο παιχνίδι των παιδιών***

Η διερεύνηση της αυθόρμητης εκδήλωσης των άτυπων μαθηματικών γνώσεων των παιδιών κατά το ελεύθερο παιχνίδι τους αποτελεί μια ερευνητική περιοχή, που ενώ έχει αρχίσει να μελετάται από τη δεκαετία του '90, δεν έχει επεκταθεί ιδιαίτερα και ειδικά στο χώρο του νηπιαγωγείου. Ωστόσο μέχρι τώρα τα σχετικά ευρήματα δείχνουν ότι τα παιδιά εκφράζουν μεγάλη ποικιλία μαθηματικών ιδεών καθώς παίζουν (Cook, 1996; Ginsburg, Lin, Ness, & Seo, 2003; Lee, 2012; Munn & Schaffer, 1993; Riojas-Cortez, 2001; Worthington & van Oers, 2016). Οι περισσότερες έρευνες δείχνουν ότι οι αριθμοί εμφανίζονται πολύ πιο συχνά στο παιχνίδι τους (Cook, 1996; Lee, 2012; Ginsburg et al., 2003; Worthington & Van Oers, 2016), μέσα από διαδικασίες αρίθμησης (κανονικά και αντίστροφα) και χρήση αριθμητικών λέξεων για τον προσδιορισμό ποσότητας αντικειμένων. Έννοιες χώρου (π.χ. σκαρφάλωμα, μετακίνηση κουτιών, ισορροπία σε γέφυρα), γεωμετρίας (π.χ. αναγνώριση σχημάτων και ιδιότητες, και διερεύνηση συμμετρικών σχέσεων), άλγεβρας (π.χ. δημιουργία μοτίβων) και μέτρησης (π.χ. μήκους, απόστασης, ταχύτητας, προσανατολισμού, εμβαδού, βάρους, θερμοκρασίας) εμφανίζονται επίσης σε αρκετές έρευνες (Ginsburg et al., 2003; Lee, 2012; Worthington & van

Oers, 2016), ενώ πρόσφατες μελέτες αναφέρονται και σε δράσεις συλλογής, διαχείρισης και αναπαράστασης δεδομένων (Papandreou, υπό κρίση; Worthington & van Oers, 2016).

Μια άλλη κατηγορία ευρημάτων που έχει εξίσου ενδιαφέρον αφορά τις δραστηριότητες ελεύθερου παιχνιδιού μέσα στις οποίες τα παιδιά εκφράζουν μαθηματική σκέψη και γνώση. Πράγματι, η ενασχόληση τους με μαθηματικές έννοιες και δράσεις αποτυπώθηκε στο κοινωνικοδραματικό παιχνίδι τους και στη σημειωτική δραστηριότητα που αναπτύσσουν στα πλαίσια των σεναρίων που παίζουν (Worthington & van Oers, 2016), ενώ οι κατασκευαστικές δραστηριότητες και κυρίως το οικοδομικό υλικό φάνηκε να μεσολαβεί ιδιαίτερος στην εκδήλωση και ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης (Ginsburg et al., 2003), εξασφαλίζοντας ευκαιρίες για χρήση γεωμετρικών όρων, επεξεργασία εννοιών συμμετρίας και χώρου και προσέγγιση ιδιοτήτων των σχημάτων (Ferrara, Hirsh-Pasek, Newcombe, Golinkoff, & Lam, 2011; Gejard & Melander, 2018; Ramani, Zippert, Schweitzer, & Pan, 2014). Πολλές ευκαιρίες για επεξεργασία εννοιών από την περιοχή της αριθμητικής, αλλά και της γεωμετρίας διαπιστώθηκε και κατά τη διάρκεια παιχνιδιών με κανόνες (π.χ. επιτραπέζια παιχνίδια) μεταξύ αδερφών στο οικογενειακό περιβάλλον (Howe et al., 2016). Σε άλλη έρευνα, οι Sumpter και Hedefalk (2015), εστιάζοντας στο παιχνίδι στον εξωτερικό χώρο (π.χ. προαύλιο σχολείου), ανέδειξαν την εμφάνιση περιστατικών όπου τα παιδιά εμπλέκονταν σε μαθηματικούς συλλογισμούς και συλλογική επίλυση προβλημάτων, ενώ η Lee (2012) εντόπισε στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων με μαθηματικό περιεχόμενο ακόμα και σε δράσεις μικρότερων παιδιών (3 ετών).

Οι τρόποι με τους οποίους τα παιδιά εκδηλώνουν τις μαθηματικές τους γνώσεις αποτελεί ένα άλλο εύρημα ιδιαίτερης σημασίας. Όπως φαίνεται εκφράζουν μαθηματικές ιδέες όχι μόνο με τον προφορικό λόγο και τις συζητήσεις που αναπτύσσουν μεταξύ τους, αλλά και με κινήσεις και χειρονομίες που κάνουν, με τον τρόπο που χρησιμοποιούν διάφορα υλικά και αντικείμενα κατά το παιχνίδι τους (Gejard & Melander, 2018; Ginsburg et al., 2003; Lee, 2012), καθώς και μέσα από τα σχέδια και τις σημειώσεις τους που περιέχουν μαθηματικά στοιχεία (Worthington & van Oers, 2016).

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι τα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών δείχνουν ότι το παιχνίδι των παιδιών αποκαλύπτει ένα μεγάλο εύρος μαθηματικής γνώσης που εμφανίζεται σε διάφορες περιστάσεις ελεύθερου παιχνιδιού. Εκτός από το είδος και τη συχνότητα της μαθηματικής γνώσης και τις δραστηριότητες παιχνιδιού όπου αυτή εκδηλώνεται, ενδιαφέρον έχουν στις διάφορες μελέτες και τα περιστατικά που παρουσιάζονται ή αναλύονται ως παραδείγματα και αντιστοιχούν σε μεμονωμένες μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες. Η μελέτη όλων αυτών των ευρημάτων φέρνει στο προσκήνιο όμως κι ένα άλλο ζήτημα που δεν φαίνεται να έχει μελετηθεί συστηματικά σε καμία από αυτές τις έρευνες και αφορά τον τρόπο ενασχόλησης των μικρών παιδιών με μαθηματικές ιδέες κατά το παιχνίδι τους, ο οποίος δείχνει να ποικίλει. Για παράδειγμα, άλλοτε αφορά τη σύντομη αναφορά μιας αριθμητικής λέξης (π.χ. *η αναφορά ενός παιδιού στην ηλικία του, ή η γραφή ενός αριθμού*, στο Ginsburg et al., 2003) και άλλοτε περιλαμβάνει μια ολόκληρη συζήτηση ή δράση στο κοινωνικοδραματικό παιχνίδι (π.χ. *το μαγαζί που δημιουργεί ένα παιδί που πουλάει παγωτά και την ενασχόληση του με τις τιμές*, στο Worthington & van Oers, 2016) ή στο οικοδομικό

υλικό (π.χ. η εκτενής ενασχόληση των παιδιών με χωρικά φαινόμενα όπως το ύψος και η ευθεία, στο Gejard & Melander, 2018) που εστιάζει σε ένα η περισσότερα μαθηματικά αντικείμενα. Τα παραδείγματα της δεύτερης περίπτωσης, όπου παρατηρείται αυξημένη ενασχόληση των παιδιών με το μαθηματικό περιεχόμενο, φαίνεται να εντάσσονται σε αυτό που οι Sarama και Clements (2009) ονομάζουν 'μαθηματικό παιχνίδι' και το προσδιορίζουν ως μια αυθόρμητη ενασχόληση των παιδιών με τις ίδιες τις μαθηματικές ιδέες. Μπορεί να εστιάζει στην επίλυση ενός προβλήματος, με όχημα τις τρέχουσες γνώσεις τους, ενώ επιτρέπει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών γνώσεων που έχουν, τις ενισχύει μέσω των δεσμών που αναπτύσσονται και βοηθά στη μελλοντική μαθηματική δραστηριότητα και γνώση (Holton, Ahmed, Williams, & Hill, 2001). Αυτές οι περιστάσεις μαθηματικού παιχνιδιού, οι οποίες φαίνεται να εμπεριέχουν πρωτοβουλίες μαθηματοποίησης από τα ίδια τα παιδιά, αποτελούν ενδείξεις με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αξίζει να μελετηθούν σε μεγαλύτερο βάθος ως προς το είδος, την ποιότητα και την έκταση της μαθηματικής επεξεργασίας που κάνουν αυθόρμητα κατά το ελεύθερο παιχνίδι τους.

### **Στόχος της έρευνας**

Αναγνωρίζοντας τις προοπτικές που εμφανίζονται για μαθηματική μάθηση στην προσχολική ηλικία μέσω της παιδαγωγικής του παιχνιδιού (π.χ. Edo et al., 2009; Perry & Dockett, 2008; van Oers, 2010) και με βάση τα προηγούμενα ευρήματα για την εκδήλωση της άτυπης μαθηματικής γνώσης των παιδιών στο παιχνίδι τους, η παρούσα μελέτη επεδίωξε να συμβάλει στο πεδίο αυτό, διερευνώντας τα χαρακτηριστικά αυτής της γνώσης και τους τρόπους που εκδηλώνεται στο χώρο του νηπιαγωγείου. Ωστόσο στο παρόν άρθρο, εστιάζουμε αποκλειστικά στην εμφάνιση και τα χαρακτηριστικά περιστατικών 'μαθηματικού παιχνιδιού' στην ώρα των ελεύθερων δραστηριοτήτων.

### **Μέθοδος**

Εφόσον η έρευνα προσανατολίστηκε στην άμεση συλλογή πληροφοριών με σκοπό τη διερεύνηση των καθημερινών μαθηματικών εμπειριών και γνώσεων των παιδιών όπως εκφράζονται κατά τη διάρκεια του ελεύθερου παιχνιδιού μέσα στην τάξη του νηπιαγωγείου, και επειδή η συζήτηση με τα παιδιά είναι αναγκαία σε αρκετές περιπτώσεις για την καλύτερη κατανόηση των ιδεών που εκφράζουν και των δράσεων που υλοποιούν, η μέθοδος της συμμετοχικής παρατήρησης κρίθηκε ως η πιο κατάλληλη (Creswell, 2012). Η συλλογή των δεδομένων υλοποιήθηκε μέσω της παρατήρησης περιστατικών παιχνιδιού, με ηχογράφηση των συζητήσεων, φωτογράφιση κατασκευών και στιγμιότυπων από το παιχνίδι τους, παράλληλη τήρηση σημειώσεων πεδίου, αλλά και συμπλήρωση ερωτηματολογίων από τους γονείς. Η μεταγραφή των ηχογραφήσεων, οι σημειώσεις πεδίου που περιλαμβάνουν το πλαίσιο του παιχνιδιού, κινήσεις, χειρονομίες και χειρισμό υλικών και αντικειμένων και τα οπτικά τεκμήρια όπως φωτογραφίες που περιγράφουν την εξέλιξη περιστατικών παιχνιδιού, και σχέδια που παρήγαγαν τα παιδιά στο διάστημα της παρατήρησης, αποτέλεσαν τα κύρια δεδομένα της έρευνας. Όλα αυτά συμπληρώθηκαν από πληροφορίες που εξασφαλίστηκαν από τους γονείς για τα ενδιαφέροντα και παιχνίδια των παιδιών ή άλλες δράσεις τους μαθηματικού περιεχομένου. Μέσω των πληροφοριών από τα ερωτηματολόγια, η τάξη

εξοπλίστηκε με νέα υλικά (π.χ. ψεύτικα ιατρικά εργαλεία, εργαλεία μαγειρικής/ζαχαροπλαστικής, γυαλιά κολύμβησης) που σχετίζονταν με δράσεις και εμπειρίες των παιδιών στο οικογενειακό και κοινωνικό τους περιβάλλον (π.χ. εξωσχολικές δραστηριότητες, εμπειρίες από το επάγγελμα των γονιών). Στόχος μας ήταν να διευκολύνουμε την έκφραση προηγούμενων μαθηματικών γνώσεων των παιδιών, καθώς τα πολιτισμικά εργαλεία ασκούν αναπτυξιακή και εκπαιδευτική επιρροή (Kozulin, 1998; Lave, 1988), και θα μπορούσαν να αποτελέσουν αφορμές για ανάκληση προσωπικών εμπειριών.

### **Συμμετέχοντες/ουσες και ερευνητική διαδικασία**

Στην έρευνα συμμετείχαν 13 παιδιά (6 κορίτσια και 7 αγόρια) ηλικίας 4 έως 6 ετών από το 2<sup>ο</sup> 2/Θ Ολοήμερο Πειραματικό Νηπιαγωγείο του Νομού Θεσσαλονίκης, ενταγμένο στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Μετά την έγκριση του επιστημονικού εποπτικού συμβουλίου του σχολείου (ΕΠ.Ε.Σ') για τη διεξαγωγή της έρευνας στη συγκεκριμένη τάξη και τη συγκατάθεση της νηπιαγωγού, ενημερώθηκαν οι γονείς των παιδιών για το περιεχόμενο της έρευνας και εξασφαλίστηκε εγγράφως η συγκατάθεση τους, ενώ η νηπιαγωγός, αφού συζήτησε με τα παιδιά σχετικά με την έρευνα και την παρουσία της ερευνήτριας στην τάξη, τα ενθάρρυνε να εκφράσουν σχεδιάζοντας την άποψή τους για την έρευνα (δηλ., για την παραμονή της ερευνήτριας στην τάξη, την παρατήρηση κατά το παιχνίδι τους και τις σχετικές συζητήσεις με την ερευνήτρια) και αν τελικά επιθυμούν να συμμετέχουν. Όλοι οι γονείς και τα παιδιά έδωσαν την συγκατάθεσή τους. Η ερευνήτρια παρέμεινε στο νηπιαγωγείο συνολικά 44 μέρες. Οι πρώτες 10 μέρες αφιερώθηκαν στην προσαρμογή της ερευνήτριας και των παιδιών (γνωριμία με τα παιδιά, τους γονείς τους και το χώρο της τάξης) και τη δοκιμαστική συλλογή δεδομένων.

### **Συλλογή δεδομένων και ανάλυση**

Στο διάστημα των έξι εβδομάδων παρατηρήθηκαν και ηχογραφήθηκαν συνολικά 122 δραστηριότητες ελεύθερου παιχνιδιού. Με τον όρο ελεύθερο παιχνίδι στην παρούσα έρευνα προσδιορίζονται όλες εκείνες οι δράσεις που τα παιδιά επιλέγουν να κάνουν κατά τη διάρκεια αυτού που στο ελληνικό Νηπιαγωγείο ονομάζεται ώρα ελεύθερων δραστηριοτήτων ή ελεύθερη ώρα [με την παραδοχή ότι οι ενήλικες δεν κατευθύνουν πλήρως το παιχνίδι, εκτός από περιορισμούς που σχεδόν πάντα απορρέουν από το παιδαγωγικό πλαίσιο κάθε τάξης (van Oers, 2013) όπως τα διαθέσιμα υλικά της τάξης, η συνήθης διάρκεια του ελεύθερου παιχνιδιού, αλλά και γενικοί κανόνες κάθε τάξης (π.χ. ο αριθμός των παιδιών που μπορούν να παίξουν σε μια γωνιά)]. Η παρατήρηση ήταν συνεχόμενη και καταγράφονταν συστηματικά τα λεγόμενα, οι δράσεις, κινήσεις και χειρονομίες αλλά και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παιδιών. Παράλληλα με τις σημειώσεις πεδίου της ερευνήτριας, συλλέχτηκαν 22 ώρες ακουστικού υλικού, 223 φωτογραφίες και 58 τεκμήρια γραφικού τύπου (π.χ. σχέδια και σημειώσεις με μαθηματικό περιεχόμενο, όπως καταγραφή αριθμητικών συμβόλων ή συμμετρικά σχέδια). Εξασφαλίστηκε η παρατήρηση κάθε παιδιού τουλάχιστον από δυο φορές, ανεξάρτητα από το είδος παιχνιδιού που επέλεγε και την ομάδα που συμμετείχε, ενώ δεδομένα συλλέχτηκαν από όλες τις γωνιές παιχνιδιού. Η εκκίνηση της παρατήρησης ενός παιδιού για παράδειγμα, στη γωνιά του οικοδομικού υλικού, περιελάβανε αναλυτική



περιγραφή της δράσης του, την εισαγωγή ή την απομάκρυνση άλλων παιδιών κατά τη διάρκεια και τον ρόλο τους, την καταγραφή λεκτικών και μη-λεκτικών ανταλλαγών, και των υλικών που χρησιμοποιούσαν και περιοδική φωτογράφιση από την εξέλιξη της κατασκευής και μέχρι την ολοκλήρωση της δραστηριότητας.

Για αρχή, απομαγνητοφωνήθηκε το ακουστικό υλικό και οι σημειώσεις πεδίου, ενώ οι φωτογραφίες ή/και το γραφικό υλικό συμπλήρωσαν τα δεδομένα για κάθε δραστηριότητα. Εκτός από την αρχική ανάλυση που υλοποιήθηκε με στόχο να εντοπιστούν και να κατηγοριοποιηθούν οι δράσεις και οι αναφορές των παιδιών με μαθηματικό περιεχόμενο, το είδος και το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων παιχνιδιού και η οποία περιγράφεται αναλυτικά αλλού (Papandreou & Tsiouli, υπό κρίση), επιχειρήθηκε μια λεπτομερής μελέτη των δεδομένων επιδιώκοντας να διακρίνουμε την ιδιαίτερη λειτουργία των μαθηματικών αναφορών και δράσεων στο παιχνίδι των παιδιών.

Η ανάλυση αυτή κατέληξε σε δυο βασικές κατηγορίες. Η πρώτη περιλαμβάνει απλές μαθηματικές αναφορές ή δράσεις (π.χ. μαθηματικές λέξεις ή χειρονομίες που δείχνουν αριθμητική ποσότητα) των παιδιών που εξυπηρετούν κυρίως την επικοινωνία μεταξύ τους, την περιγραφή δράσεων και την εξέλιξη των σεναρίων των παιχνιδιών τους. Για παράδειγμα, κατά την απασχόληση του με οικοδομικό υλικό, ο Νικόλας ανέφερε αριθμητικά επίθετα (απόλυτα και τακτικά) για να παρουσιάσει το σπίτι που έφτιαξε («μόνο δύο ορόφους έχει», «αα χάλασε το πρώτο το τσιμέντο»). Στην περίπτωση αυτή, το παιδί δεν ασχολήθηκε με έννοιες των αριθμών, αλλά χρησιμοποίησε τα αριθμητικά επίθετα για να περιγράψει τα χαρακτηριστικά της κατασκευής του. Σε άλλη περίπτωση, προσποιούμενοι τους γιατρούς, ο Απόστολος και η Στέλλα συζητούν για τη συνέχεια του παιχνιδιού τους. Η Στέλλα προτείνει να κλείσουν το ιατρείο και να φύγουν από το χώρο που βρίσκονται, αλλά ο Απόστολος διαφωνεί τονίζοντας κάποια στιγμή ότι «ο παθολόγος, κάνει κάθε μέρα επείγοντα ... δε φεύγει, μέχρι τις δύο η ώρα τα μεσάνυχτα». Στο σημείο αυτό, η αναφορά στην ώρα βοηθάει το παιδί να εμπλουτίσει την πλοκή του παιχνιδιού και να δώσει νόημα στις δράσεις του.

Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει περιστατικά 'Μαθηματικού Παιχνιδιού' (στο εξής πΜΠ), δηλαδή καταστάσεις στις οποίες τα παιδιά επικεντρώνονται στο ίδιο το μαθηματικό περιεχόμενο και πραγματοποιούν συζητήσεις και δράσεις με κάποια διάρκεια σχετικά με αυτό το περιεχόμενο. Για παράδειγμα, η δημιουργία μοτίβου με το οικοδομικό υλικό που ξεκίνησε από ένα παιδί εξελίχθηκε σε πΜΠ καθώς δυο άλλα παιδιά ενδιαφέρθηκαν για την δημιουργία του συμμαθητή τους. Αφού προσπάθησαν αρχικά να καταλάβουν τον κανόνα που πρέπει να ακολουθήσουν, λίγο αργότερα συνέβαλλαν στην επέκταση του μοτίβου εξηγώντας ρητά τη δράση τους. Στη συνέχεια, απομονώθηκαν όλα τα πΜΠ και αναλύθηκαν εκ νέου σύμφωνα με τις κατηγορίες που προέκυψαν από την αρχική ανάλυση του συνόλου των δεδομένων (ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, το είδος και το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων).

## Αποτελέσματα

### Το μαθηματικό περιεχόμενο των πΜΠ

Στις 122 δραστηριότητες ελευθέρου παιχνιδιού που παρατηρήθηκαν, εντοπίστηκαν συνολικά 51 περιστατικά μαθηματικού παιχνιδιού (πΜΠ) τα οποία περιλάμβαναν συχνά πάνω από ένα μαθηματικά αντικείμενα από τις ενότητες «Αριθμοί & πράξεις», «Μετρήσεις», «Χώρος & Γεωμετρία» και «Άλγεβρα».

Μαθηματικές ενότητες	N	%
Αριθμοί & πράξεις	13	19,4%
Μετρήσεις	25	37,3%
Χώρος & Γεωμετρία	20	29,9%
Άλγεβρα	9	13,4%
Σύνολο	67	100%

**Πίνακας 1: Οι μαθηματικές ενότητες που εντοπίστηκαν στα πΜΠ**

Κυρίως καταστάσεις που σχετίζονταν με έννοιες της μέτρησης, του χώρου και της γεωμετρίας τράβηξαν το ενδιαφέρον των παιδιών και τα ώθησαν να εμπλακούν σε εκτενείς μαθηματικές συζητήσεις και δράσεις. Στο μεγαλύτερο ποσοστό των πΜΠ (84,3% ή στα 43 από τα 51) εντοπίστηκαν και μαθηματικές διεργασίες (Πίνακας 2). Συγκεκριμένα, τα παιδιά συζητώντας για μαθηματικές έννοιες, περιέγραψαν, επεξήγησαν και αιτιολόγησαν τη σκέψη τους. Επίσης, αναπαράστησαν μαθηματικές ιδέες με διάφορους τρόπους όπως σχέδιο και οικοδομικό υλικό, ενώ πιο σπάνια ενεπλάκησαν σε διαδικασίες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων που ανέκυπταν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού.

Μαθηματικές διεργασίες	N	%
Αναπαράσταση	41	58,6%
Τεκμηρίωση/συλλογισμός	20	28,6%
Επίλυση προβλήματος	9	12,8%
Σύνολο	70	100%

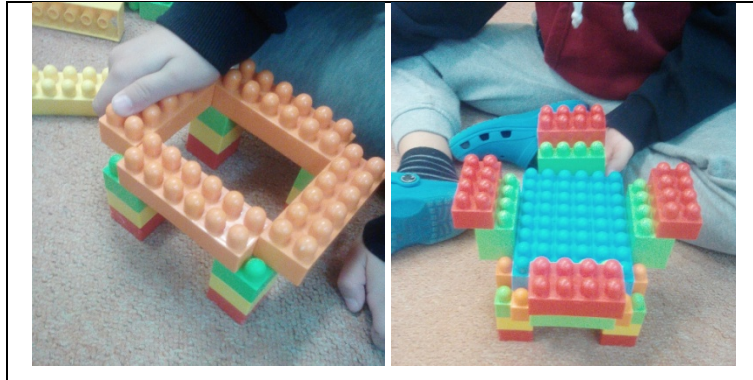
**Πίνακας 2: Οι μαθηματικές διεργασίες που εντοπίστηκαν στα πΜΠ**

Στο πΜΠ που ακολουθεί μπορούμε να δούμε τα παιδιά παίζοντας με το οικοδομικό υλικό να διαπραγματεύονται έννοιες της γεωμετρίας, αναπαριστώντας συμμετρικά σχέδια και ταυτόχρονα εκθέτοντας και τεκμηριώνοντας το συλλογισμό και τις δράσεις τους.

**πΜΠ1.** Το συμμετρικό δεντρόσπιτο στο οικοδομικό υλικό

Ο Αλέξανδρος, ο Απόστολος, ο Χρήστος, και η Στέλλα παίζουν στην περιοχή οικοδομικού υλικού με πλαστικά τουβλάκια. Ο Απόστολος ανακοινώνει πως θα φτιάξει «ένα δεντρόσπιτο». Καθώς περνάει η ώρα η κατασκευή του Απόστολου παρουσιάζει συμμετρία ως

προς τα χρησιμοποιούμενα υλικά και ως προς το χρώμα και η ερευνήτρια αποφασίζει να τον ρωτήσει με ποιο τρόπο σκέφτηκε να κατασκευάσει το δεντρόσπιτο του.



**Εικόνα 1: Η εξέλιξη της κατασκευής του συμμετρικού δεντρόσπιτου του Απόστολου**

Ερευνήτρια: Πως σκέφτηκες να κάνεις τη μια μεριά και την άλλη; Τι πρέπει να...  
(δεν ολοκληρώνει την ερώτηση)

Απόστολος: Απλά... είναι συμμετρικό

Ερευνήτρια: Δηλαδή τι εννοείς είναι συμμετρικό;

Απόστολος: Εδώ πέρα είναι κόκκινο κίτρινο πράσινο, κόκκινο κίτρινο πράσινο, κόκκινο κίτρινο πράσινο.. εδώ πέρα είναι πορτοκ, εδώ πέρα είναι πράσινο πράσινο πράσινο, και δω πέρα έχει μπλε μπλε μπλε, μπλε μπλε μπλε, και είναι δύο πράσινα δύο πράσινα, ένα κόκκινο κι ένα κόκκινο... όλα που έχει στη μια μεριά, έχει και στις υπόλοιπες

Ερευνήτρια: Απόστολε, ποιος σου είπε ότι λέγεται συμμετρικό αυτό;

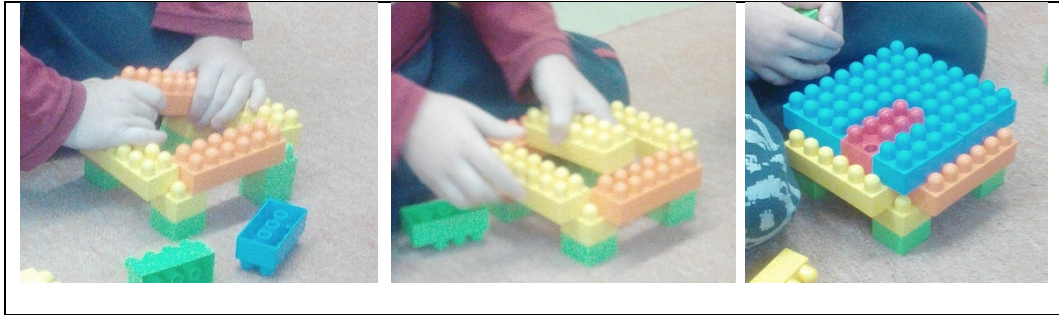
Απόστολος: Ε... όλοι, όλοι το ξέρουνε.. εκτός απ τον Χρήστο (ο οποίος επίσης κατασκευάζει δεντρόσπιτο)... ο Χρήστος δε μπορεί να φτιάξει δεντρόσπιτο

Στέλλα: Ε ρε στο δεντρόσπιτο δε βάζει κόκκινο αυτός (αναφερόμενη στον Χρήστο)

Ερευνήτρια: Γιατί δεν έκανε καλά το δεντρόσπιτο λέτε;

Τα παιδιά για λίγο μένουν σιωπηλά και δεν μιλούν, ο Απόστολος μοιάζει πιο σκεπτικός και μετά από λίγο παίρνει το λόγο.

Απόστολος: Γιατί... πρώτον, έχει δύο πράσινα, ένα κίτρινο, ένα κίτρινο κι ένα πράσινο, ένα κίτρινο κι ένα κόκκινο, ένα πράσινο κι ένα πράσινο (δείχνοντας στην κατασκευή του Χρήστου τα συμμετρικά σημεία που είναι διαφορετικά ως προς το χρώμα)



**Εικόνα 2: Η εξέλιξη της κατασκευής του δεντρόσπιτου του Χρήστου**

Όσο μιλάει και δείχνει ο Απόστολος, η Στέλλα φαίνεται να παρατηρεί με πολύ μεγάλη προσοχή τις κινήσεις και τα αντίστοιχα λόγια του και μετά από μια παύση του Απόστολου συνεχίζει εκείνη τον συλλογισμό του.

Στέλλα: Ένα πράσινο κι ένα πράσινο, ένα πράσινο κι ένα κόκκινο (δείχνοντας και αυτή την κατασκευή του Χρήστου, ενώ ο Απόστολος στη συνέχεια επιβεβαιώνει)

Απόστολος: Αυτό έχει κάνει, γι αυτό δεν είναι συμμετρικό, εμένα όμως είναι πολύ συμμετρικό.

Στο περιστατικό αυτό, ο Απόστολος δημιουργεί μία συμμετρική κατασκευή. Κατασκευάζει το δεντρόσπιτο του ακολουθώντας τον ίδιο χρωματικό συνδυασμό και επιλέγοντας το ίδιο μέγεθος από τουβλάκια για κάθε πλευρά, είναι σε θέση να το περιγράψει («εδώ πέρα είναι κόκκινο κίτρινο πράσινο, κόκκινο κίτρινο πράσινο...») με τρόπο που δείχνει ότι ξέρει πολύ καλά τι κάνει, και δίνει με άνεση όνομα στο αποτέλεσμα της κατασκευής του («απλά.. είναι συμμετρικό») μαζί με έναν δικό του ορισμό που εξηγεί τη μαθηματική γνώση του («όλα που έχει στη μια μεριά, έχει και στις υπόλοιπες»). Η συζήτηση όμως για τη συμμετρία δε σταματάει εκεί, καθώς ακολουθεί μια νέα τεκμηρίωση για την μη-συμμετρία ως προς το χρώμα μιας άλλης κατασκευής (το δεντρόσπιτο του Χρήστου), και η οποία συν-κατασκευάζεται από δυο παιδιά με αφορμή την ερώτηση της ερευνήτριας, «γιατί δεν έκανε καλά το δεντρόσπιτο λέτε;». Καθώς ο Απόστολος αρχίζει να εντοπίζει και να περιγράφει τις διαφορές ανάμεσα στις δύο κατασκευές, η Στέλλα, που βρίσκεται κοντά του τον παρακολουθεί με μεγάλη προσοχή. Τότε φάνηκε να καταλαβαίνει αυτό που ο Απόστολος είχε αναφέρει νωρίτερα ως 'συμμετρικό', και έτσι λίγο μετά, παρεμβαίνει και συμπληρώνει τον συλλογισμό του. Είναι πολύ πιθανόν, η Στέλλα σε εκείνη τη φάση, να συνειδητοποίησε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της συμμετρικής κατασκευής του Απόστολου και τις διαφορές της από την κατασκευή του Χρήστου. Σε αυτό λοιπόν το περιστατικό, τα παιδιά όχι μόνο προσπαθούν για κάμποση ώρα να επιτύχουν τη συμμετρικότητα της κατασκευής και ως προς το χρώμα, αλλά καθ' όλη τη διάρκεια του περιστατικού δικαιολογούν και τεκμηριώνουν τις απόψεις και τις δράσεις τους χρησιμοποιώντας και επεκτείνοντας κάποιες πρώτες μαθηματικές ιδέες για τη συμμετρία με συνειδητό τρόπο.

### **Είδη και περιεχόμενα δραστηριοτήτων όπου εμφανίζονται τα πΜΠ**

Τα πΜΠ (N=51) εκφράστηκαν σε διάφορα είδη δραστηριοτήτων από αυτά που εξελίχθηκαν και καταγράφηκαν (N=122) στην συγκεκριμένη τάξη κατά την ώρα του ελεύθερου παιχνιδιού. Η εκδήλωση τους φαίνεται να ευνοήθηκε σε σημαντικό βαθμό από τις σχεδιαστικές δραστηριότητες, τα παιχνίδια με αντικείμενα, από τις κατασκευές με οικοδομικό υλικό και το κοινωνικο-δραματικό παιχνίδι (Πίνακας 3). Το ίδιο και ίσως πιο σημαντικό ρόλο όμως φαίνεται να παίζουν και τα παιχνίδια με κανόνες, καθώς από τις πέντε τέτοιες δραστηριότητες που καταγράφηκαν οι τέσσερις είχαν χαρακτηριστικά μαθηματικού παιχνιδιού.

Είδος δραστηριότητας παιχνιδιού	N	πΜΠ
Συζητήσεις (π.χ. ταξίδι με την οικογένεια)	34	2
Ζωγραφική-σχεδιαστική/σημειωτική δραστηριότητα (π.χ. αριθμοί)	23	13
Κατασκευές με οικοδομικό υλικό (π.χ. κάστρο, καράβι)	16	10
Παιχνίδι με διάφορα αντικείμενα (π.χ. φωτογραφική μηχανή, πλαστελίνη, μπάλα, εργαλεία μέτρησης)	26	12
Κοινωνικο-δραματικό παιχνίδι (π.χ. σενάριο 'νοσοκομείο')	15	9
Παιχνίδια με κανόνες (επιτραπέζια παιχνίδια, παραδοσιακά παιχνίδια, puzzle)	5	4
Ανάγνωση παραμυθιών, comics και βιβλίων γνώσεων	3	1
Σύνολο	122	51

**Πίνακας 3: Είδη δραστηριοτήτων κατά το ελεύθερο παιχνίδι και κατανομή των πΜΠ σε κάθε κατηγορία**

Το είδος της δραστηριότητας παιχνιδιού φαίνεται να παίζει κάποιο ρόλο στην εμφάνιση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών. Για παράδειγμα, στα πΜΠ που εντοπίστηκαν σε σχεδιαστικές δραστηριότητες καταγράφηκε ενασχόληση των παιδιών κυρίως με έννοιες των αριθμών, του χώρου και της γεωμετρίας, ενώ η ενασχόληση με έννοιες των μετρήσεων

πραγματοποιήθηκε κυρίως κατά τη διάρκεια παιχνιδιού με διάφορα αντικείμενα. Όσον αφορά τα πΜΠ κατά τα οποία τα παιδιά πραγματεύτηκαν έννοιες της άλγεβρας και κυρίως μοτίβα, τα περισσότερα εκδηλώθηκαν σε κατασκευές με οικοδομικό υλικό. Σχετικά με τις διεργασίες, η ικανότητα των παιδιών στην αναπαράσταση παρατηρήθηκε κυρίως στα πΜΠ σχεδιαστικών δραστηριοτήτων, ενώ η επίλυση προβλήματος κατά τη διάρκεια παιχνιδιού με οικοδομικό υλικό. Η ικανότητα συλλογισμού εκφράστηκε πιο έντονα κατά την ενασχόληση με αντικείμενα και οικοδομικό υλικό.

Όσον αφορά το ιδιαίτερο περιεχόμενο των πΜΠ, τρία ήταν τα βασικά θέματα που αναδευθήκαν, και αφορούσαν α. *Θέματα καθημερινής ζωής* (82,3%) όπως σενάρια ή συζητήσεις (π.χ. κοινωνικο-δραματικό παιχνίδι με θέμα το σχολείο), ενασχόληση με υλικά-εργαλεία ή τεχνικές (επεξήγηση του τρόπου σχεδίασης κατά τη διάρκεια της ζωγραφικής, συζητήσεις για την ακριβή θέση παιχνιδιών στον χώρο, διερεύνηση ογκομετρικού δοχείου) και διαφωνίες ή πειράγματα, β. *Θέματα μαζικής κουλτούρας* (7,8%) (π.χ. κατασκευή του Τιτανικού με οικοδομικό υλικό) και γ. *Φανταστικά σενάρια* (13,7%) (π.χ. κατασκευή φορέματος πριγκίπισσας με οικοδομικό υλικό).

Το πΜΠ που ακολουθεί εκδηλώθηκε κατά τη διάρκεια κοινωνικο-δραματικού παιχνιδιού με θέμα ένα σενάριο καθημερινής ζωής, επίσκεψη σε ιατρείο. Με αφορμή όμως τη χρήση ψεύτικων χαρτονομισμάτων για την αμοιβή του γιατρού, στη συνέχεια εξελίχθηκε σε σημειωτική δραστηριότητα κατά την οποία τα παιδιά εστίασαν στην αναπαράσταση αριθμητικών συμβόλων που σχετίζονταν με την αξία των χαρτονομισμάτων, αλλά και με προηγούμενες εμπειρίες τους από τη καθημερινότητα τους (δηλαδή, οικείους αριθμούς τηλεφώνου και αναπαραστάσεις πράξεων).

**πΜΠ2.** *Διαφορετικές χρήσεις των αριθμών και γραφή αριθμητικών συμβόλων (στο κοινωνικο-δραματικό παιχνίδι και επέκταση στη σχεδιαστική δραστηριότητα)*

Η Κρυσταλλία, η Κατερίνα και η Σοφία βρίσκονται στο χώρο της παρεούλας και παίζουν κοινωνικο-δραματικό παιχνίδι με θέμα το ιατρείο. Στο παιχνίδι χρησιμοποιούν ψεύτικα χαρτονομίσματα και κέρματα για την 'πληρωμή' του γιατρού.

Κατερίνα: Πεντακόσια ευρώ θα ήθελες

Σοφία: Δε θα ήθελα πεντακόσια ευρώ

Κατερίνα: Πενήντα (δίνοντας στη Σοφία ένα χαρτονόμισμα)

Ερευνήτρια: Πενήντα είναι αυτά;

Κατερίνα: Ναι ... πλάκα σου έκανα, είναι χίλια

Ερευνήτρια: Τα μέτρησες;

Κατερίνα: Ναι

Ερευνήτρια: Για μέτρα τα να δω

Κατερίνα: Δύο μηδέν μηδέν

Η Μαρίλια παρακολουθώντας τη συζήτηση ρωτάει την ερευνήτρια σχετικά με τον τρόπο γραφής του αριθμού '100'. Η συζήτηση προκαλεί το ενδιαφέρον και του Απόστολου που βρίσκεται εκεί κοντά.

Μαρίλια: Κυρία πόσο είναι το εκατό;

Ερευνήτρια: Τι εννοείς πόσο είναι το εκατό;

Μαρίλια: Εννοώ τι αριθμούς έχει;

Ερευνήτρια: Πως γράφεται (εννοείς);

Σοφία: Εγώ ξέρω (και αρχίζει να σημειώνει σε ένα φύλλο χαρτί)

Απόστολος: Κυρία το τηλέφωνο μου, να πω τα σταθερά;, να πω τα σταθερά του σπιτιού μου;

Μαρίλια: Τι αριθμούς έχει και να το ... (απευθυνόμενη στην ερευνήτρια)

Απόστολος: Δύο ένα τρία μηδέν τριάντα δύο εξήντα ένα εξήντα εννιά, δύο τρία ένα μηδέν, τρία δύο εννιά τέσσερα τέσσερα τρία... τα σταθερά του σπιτιού μου

Ε: Δύο σταθερά έχετε;

Απόστολος: Ναι, επειδή έχουμε τετραώροφο

Μαρίλια: Όχι το εκατό... να μη το γράψεις (τη λέξη 'εκατό' εννοεί μιλώντας στη Σοφία), να κάνεις τους αριθμούς... μηδέν μηδέν (διαβάζει αυτά που γράφει η Σοφία)

Σοφία: Εντάξει.. να το... να σου γράψω το χίλια; (το γράφει, Εικόνα 3)

Η Κατερίνα παρακολουθώντας τη Σοφία και τη Μαρίλια που γράφουν το 100 και το 1000, εκφράζει την επιθυμία της να συμμετέχει και εκείνη με τη γραφή μιας αριθμητικής πράξης ( $5 \cdot 10$ ) που φαίνεται να φέρνει από οικογενειακές εμπειρίες (Εικόνα 3).

Κατερίνα: Έι περίμενε να της κάνω λίγο κάτι.. θα της κάνω λίγο κάτι.. περίμενε θα κάνω κάτι, να κάνω κάτι, να κάνω κάτι στην κυρία.... πεν... (λέει καθώς αρχίζει να σημειώνει)... πέντε.. κι άλλα πέντε.. συν δέκα... συν δέκα μας κάνει το πέντε πέντε!

Ο Απόστολος γράφει το τηλέφωνο του σπιτιού του (Εικόνα 3) και μετά από λίγο και η Σοφία κάνει το ίδιο.

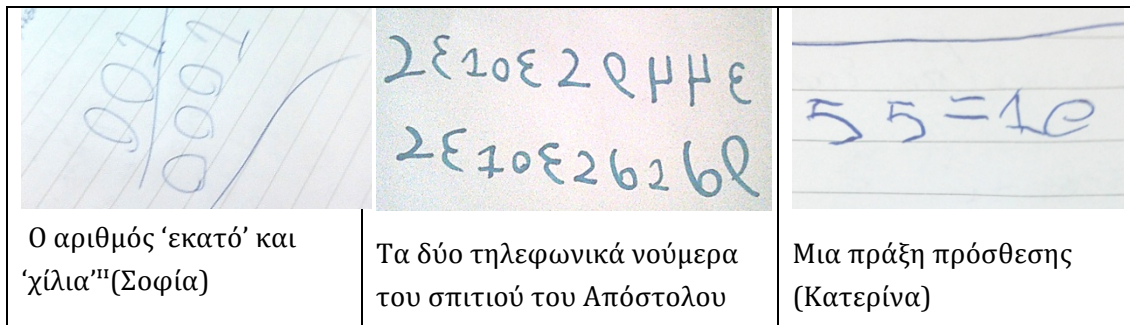
Κατερίνα: Είκοσι... είκοσι

Απόστολος: Το νούμερο του σπιτιού μου (και δίνει το χαρτί στην ερευνήτρια)

Ερευνήτρια: Για να δω.. για έλα εξήγησε μου

Απόστολος: Το πρώτο, δύο, τρία, ένα, μηδέν, τριάντα δύο, ενενήντα ένα, εξήντα εννιά, όχι, δύο τρία ένα μηδέν -δεν ακούγεται τι λέει- είναι το πρώτο

σταθερό, το δεύτερο είναι δύο, τρία, ένα, μηδέν, τριάντα δύο, εξήντα ένα, εξήντα εννιά



**Εικόνα 3: Οι μαθηματικές σημειώσεις των παιδιών στο πΜΠ2**

Στο περιστατικό αυτό, με αφορμή μια καθημερινή κατάσταση, την διαπραγμάτευση μιας αμοιβής για ιατρικές υπηρεσίες με τη χρήση ψεύτικων χαρτονομισμάτων («πεντακόσια ευρώ θα ήθελες», «δε θα ήθελα πεντακόσια ευρώ», «πενήντα»), αναδύεται ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον που ξεφεύγει από το σενάριο του παιχνιδιού και εστιάζει στη γραφή συγκεκριμένων αριθμών. Επικεντρώνοντας αρχικά η Μαρίλια την προσοχή της στο αριθμητικό σύμβολο '100' και την αναπαράστασή του («κυρία πόσο είναι το εκατό», «εννοώ τι αριθμούς έχει;») φαίνεται να παρακινεί και τη Σοφία, η οποία ανταποκρίνεται και αρχίζει να τη βοηθά («εγώ ξέρω», «να σου γράψω το χίλια;»), ενώ η Μαρίλια της δίνει οδηγίες («να μη το γράψεις, να κάνεις τους αριθμούς»). Ο ενθουσιασμός και η δράση των δύο κοριτσιών στο μεταξύ προκαλούν τη συμμετοχή και άλλων παιδιών, τα οποία εκφράζουν δικές τους αριθμητικές γνώσεις· ο Απόστολος απαγγέλλοντας πρώτα και καταγράφοντας στη συνέχεια τους αριθμούς τηλεφώνου του σπιτιού του και η Κατερίνα καταγράφοντας μια πράξη πρόσθεσης ('5 5=10'), την οποία προσπαθεί ταυτόχρονα και να απαγγείλει. Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι με σημείο εκκίνησης το κοινωνικο-δραματικό παιχνίδι πάνω σε ένα σενάριο της καθημερινής ζωής και με την απλή χρήση αριθμητικών ποσοτήτων (μέσω των χρημάτων) που αρχικά απλώς εξυπηρετούν το παιχνίδι των παιδιών, το περιστατικό εξελίσσεται σε μαθηματικό παιχνίδι με παρατεταμένη αλληλεπίδραση μεταξύ των παιδιών, όπου ενώ κάποια παιδιά εκδηλώνουν προϋπάρχουσες δεξιότητες (Απόστολος, Σοφία και Κατερίνα) η Μαρίλια αναζητά να μάθει κάτι καινούργιο.

### Συζήτηση

Στην παρούσα μελέτη προσανατολιστήκαμε στο να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά εκδηλώνουν και χρησιμοποιούν τη μαθηματική γνώση τους κατά τη διάρκεια των ελευθέρων δραστηριοτήτων τους στο νηπιαγωγείο. Η ανάλυση έδειξε δυο διακριτές τάσεις στον τρόπο χρήσης των μαθηματικών στοιχείων από τα παιδιά: α. τα μαθηματικά εξυπηρετούν την εξέλιξη του παιχνιδιού και β. τα μαθηματικά γίνονται το αντικείμενο του παιχνιδιού. Σε συνέπεια λοιπόν με την εστίαση αυτής της εργασίας στην αξία της μαθηματικοποίησης και του μαθηματικού παιχνιδιού για τη μαθηματική μάθηση στις μικρές ηλικίες (Björklund et al., 2018; Holton et al., 2001; Sarama & Clements, 2009; van Oers, 2013), μελετήσαμε πιο συστηματικά τα 51 περιστατικά της δεύτερης κατηγορίας που εντοπίσαμε κατά την ανάλυση. Όπως διαπιστώθηκε κατά τη διάρκεια αυτών των



περιστατικών, τα παιδιά ενεπλάκησαν αυθόρμητα με διάφορα μαθηματικά αντικείμενα που αφορούσαν έννοιες των αριθμών, της μέτρησης, του χώρου, της γεωμετρίας και της άλγεβρας, αλλά και μαθηματικές διαδικασίες όπως τεκμηρίωση, επίλυση προβλημάτων και αναπαραστάση. Η σοβαρή ενασχόληση τους με μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες κατά τη διάρκεια αυτών των περιστατικών φάνηκε να κυριαρχεί, καθώς έδειξαν να μοιράζονται την μαθηματική γνώση τους, να την επεξεργάζονται ή/και να την επεκτείνουν διατυπώνοντας προβληματισμούς και επιχειρήματα και δημιουργώντας δυσδιάστατες αναπαραστάσεις (μαθηματικές σημειώσεις, βλ. πΜΠ2) αλλά και τρισδιάστατες (με οικοδομικό υλικό βλ. πΜΠ1). Οι συμπεριφορές αυτές έγιναν ορατές στα πΜΠ που παρουσιάστηκαν στο μέρος των αποτελεσμάτων. Είδαμε στο πΜΠ1 την κατασκευή δεντρόσπιτων από οικοδομικό υλικό να ξεφεύγει από μια απλή δράση κατασκευής. Η εμπρόθετη δημιουργία της τρισδιάστατης συμμετρικής μορφής και η ρητή περιγραφή των χαρακτηριστικών της από τον Απόστολο με επιχειρήματα, ενθάρρυνε τη Στέλλα να εμπλακεί παρατηρώντας και σχολιάζοντας αργότερα ρητά και η ίδια τα χαρακτηριστικά της συμμετρίας τεκμηριώνοντας τις απόψεις της, ενώ πυροδότησε το ενδιαφέρον του Χρήστου που προσπάθησε να δημιουργήσει ένα άλλο συμμετρικό δεντρόσπιτο. Έτσι, αυτά τα παιδιά έφεραν στο κέντρο του παιχνιδιού τους την έννοια της συμμετρίας σε τρισδιάστατες μορφές και την επεξεργάστηκαν παίζοντας. Με παρόμοιο τρόπο, στο πΜΠ2, τέσσερα παιδιά, ξεκινώντας από την απλή αναφορά σε τυχαία χρηματικά ποσά χρησιμοποιώντας ψεύτικα χαρτονομίσματα και δραματοποιώντας ένα σενάριο από την καθημερινή ζωή, κατέληξαν παρασύροντας το ένα το άλλο να σημειώνουν διάφορα αριθμητικά σύμβολα, που συνδέονται με εμπειρίες της καθημερινής τους ζωής και να διερευνούν το νόημα τους. Αυτό το εύρημα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς δείχνει ότι τα παιδιά δε χρησιμοποιούν τα μαθηματικά που ξέρουν μόνο για να εξυπηρετήσουν διάφορες ανάγκες τους στο παιχνίδι (π.χ. τη ροή του σεναρίου), αλλά συχνά τα ίδια τα μαθηματικά νοήματα αποτελούν το θέμα του παιχνιδιού τους. Έτσι τα χρησιμοποιούν, τα επεξεργάζονται και συχνά τα επεκτείνουν (Björklund et al., 2018; Bobis & Way, 2018; Gejard & Melander, 2018; Howe et al., 2016). Εξίσου σημαντικές όμως φαίνεται να είναι και οι αλληλεπιδράσεις που αναπτύχθηκαν μεταξύ των παιδιών. Μελετώντας τις αλληλεπιδράσεις τους, μέσα από το πρίσμα της Ζώνης Εγγύτερης Ανάπτυξης (ΖΕΑ) του Vygotsky (1978), παρατηρούμε ότι τα ίδια τα παιδιά δημιούργησαν ζώνες για την επόμενη ανάπτυξη των συμμαθητών τους (Holzman, 2009 στο Hill & Wood, 2019) είτε καθοδηγώντας ρητά τη δράση τους (π.χ. η Σοφία δείχνει στη Μαρίλια πως γράφεται ο αριθμός 'εκατό' στο πΜΠ2) είτε λειτουργώντας ως μοντέλα (π.χ. η κατασκευή του Απόστολου για την κατασκευή του Χρήστου στο πΜΠ1). Ωστόσο, παρόλο που το μαθηματικό παιχνίδι σε αυτές τις περιπτώσεις παρατείνεται, παρέχοντας δυνατότητες για μάθηση, δεν είναι εύκολο πάντα να προβλεφθεί η κατεύθυνση που θα πάρει το παιχνίδι και να αξιολογηθεί αν σημειώνεται τελικά μάθηση (Hill & Wood, 2019). Συνεπώς, από εκπαιδευτική άποψη έχει νόημα να μελετήσουμε μελλοντικά πως αυτές οι πολύτιμες μαθησιακές ευκαιρίες μπορούν να αξιοποιηθούν με κατάλληλες παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τα χαρακτηριστικά των πΜΠ, που εντοπίστηκαν στην παρούσα μελέτη, εξετάσαμε επιπλέον το πλαίσιο στο οποίο εμφανιστήκαν αυτά. Αν και πΜΠ

εντοπίστηκαν σε όλα τα είδη των δραστηριοτήτων που καταγράφηκαν, παρατηρήθηκε ότι εμφανίστηκαν περισσότερο σε παιχνίδια με αντικείμενα (π.χ. συζητώντας για τη διάταξη των αριθμών με αφορμή τη διαδοχική ρίψη ενός ζαριού από δύο παιδιά), κατασκευές με οικοδομικό υλικό (π.χ. κατασκευάζοντας μοτίβα και συμμετρίες), κοινωνικο-δραματικό παιχνίδι (π.χ. συζητώντας για το μέγεθος των στολών) και σε σχεδιαστικές δραστηριότητες (π.χ. συζητώντας για τον τρόπο γραφής αριθμών και σχεδιάζοντας συμμετρικά σχέδια). Εκτός από τα παιχνίδια με αντικείμενα που καταγράφηκαν μόνο στην παρούσα μελέτη, αυτές οι δραστηριότητες έχει διαπιστωθεί και σε προηγούμενες έρευνες ότι ευνοούν την αυθόρμητη έκφραση μαθηματικών ιδεών (Ginsburg et al., 2003; Worthington & van Oers, 2016). Ωστόσο, στην παρούσα μελέτη φάνηκε επιπλέον ότι αυτές οι δραστηριότητες και ιδιαιτέρως οι σχεδιαστικές δράσεις ευνοούν την πιο συστηματική ενασχόληση των παιδιών με μαθηματικά αντικείμενα, καθώς σε αυτές σημειώθηκαν περισσότερα πΜΠ. Αυτό ίσως να οφείλεται στη φύση της συγκεκριμένης δραστηριότητας, αφού το σχέδιο αποτελεί ένα πολιτισμικό εργαλείο (Vygotsky, 1978) και συγκεκριμένα μια από τις γλώσσες που τα παιδιά χρησιμοποιούν για να εκφράσουν τη σκέψη τους και να επικοινωνήσουν (Papandreou, 2014). Παρόλο όμως που τα περισσότερα πΜΠ εντοπίστηκαν σε σχεδιαστικές δράσεις, δεν περιελάμβαναν όλες οι δραστηριότητες αυτής της κατηγορίας μαθηματική επεξεργασία σε βάθος από τα παιδιά. Ενώ δηλαδή το σχέδιο μπορεί να αποτελέσει πλαίσιο για να αναπτυχθούν εκτενείς μαθηματικές δράσεις και αλληλεπιδράσεις, αυτό δεν συμβαίνει πάντα. Αντίθετα, σε δραστηριότητες puzzle ή επιτραπέζιων παιχνιδιών τέτοιες δράσεις και συζητήσεις μοιάζει να είναι αναπόσπαστο κομμάτι, καθώς στα τέσσερα από τα πέντε παιχνίδια με κανόνες που παρατηρήθηκαν εντοπίστηκαν πΜΠ.

Ένα άλλο εύρημα που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι το περιεχόμενο των πΜΠ, το οποίο σε συμφωνία με τη θέση του Vygotsky (1978) φάνηκε να περιλαμβάνει κυρίως πραγματικές παρά φανταστικές καταστάσεις. Πράγματι, στην συντριπτική πλειοψηφία των πΜΠ εντοπίστηκαν θέματα καθημερινής ζωής. Αυτό ίσως να σημαίνει ότι, καθώς τα παιδιά κατακτούν άτυπα μαθηματικές γνώσεις συμμετέχοντας σε διάφορες καθημερινές καταστάσεις με γονείς, φίλους, συμμαθητές αδέρφια ή/και άλλους συγγενείς, μεταφέρουν και επεξεργάζονται πιο εύκολα αυτές τις εμπειρίες αυθόρμητα στο παιχνίδι τους είτε δημιουργώντας παρόμοια σενάρια (π.χ. την αμοιβή του ιατρού μετά από μια ιατρική επίσκεψη, ή την μέτρηση ποσότητας πλαστελίνης στο ογκομετρικό δοχείο), είτε ανακαλώντας και αναπαράγοντας με ρητό τρόπο προηγούμενες εμπειρίες μαθηματικού περιεχομένου (π.χ. τη μάθηση των αριθμών τηλεφώνου της οικογένειας).

## **Συμπεράσματα**

Η συστηματική παρατήρηση όλων των δράσεων (π.χ. συζητήσεις, αλληλεπιδράσεις, χειρισμό υλικών και αντικειμένων, κινήσεις και χειρονομίες) των παιδιών κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, η συλλογή τεκμηρίων (σχέδια, φωτογραφίες) και οι εστιασμένες συζητήσεις μαζί τους παρείχαν πλούσια δεδομένα για τις καθημερινές μαθηματικές τους γνώσεις και τον τρόπο που εκδηλώνονται κατά τη διάρκεια της καθιερωμένης ρουτίνας του νηπιαγωγείου όπου τα ίδια επιλέγουν με τι θα ασχοληθούν. Τα ευρήματα της έρευνας αυτής επιβεβαίωσαν ότι τα μικρά παιδιά εκφράζουν στο παιχνίδι τους ποικίλες μαθηματικές γνώσεις και

δεξιότητες που ήδη κατέχουν (Ginsburg et al., 2003; Lee, 2012; Worthington & van Oers, 2016). Ωστόσο, εστιάζοντας στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά χρησιμοποιούν αυτές τις γνώσεις, η έρευνα αυτή ανέδειξε αφενός το εκτεταμένο 'μαθηματικό παιχνίδι' που αναπτύσσουν κατά τη διάρκεια του ελεύθερου χρόνου κι αφετέρου χαρακτηριστικά αυτής της μορφής παιχνιδιού, όπως το περιεχόμενο (δηλαδή, τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες), αλλά και τις περιστάσεις (είδη δραστηριοτήτων και σενάρια) στις οποίες εκδηλώνεται. Με άλλα λόγια, εντοπίζοντας και αναλύοντας τα πΜΠ, διαπιστώσαμε ότι συχνά τα παιδιά εκφράζουν γνήσιο και ρητό ενδιαφέρον για μαθηματικά αντικείμενα αναλαμβάνοντας πρωτοβουλίες προς την κατεύθυνση της 'μαθηματικοποίησης στοιχείων του παιχνιδιού' (van Oers, 1996). Πρόκειται για περιστάσεις κατά τις οποίες φαίνεται να αναγνωρίζουν αυτά τα αντικείμενα στο περιεχόμενο της δικής τους καθημερινότητας (Björklund et al., 2018; Jurri & Drijvers, 2016), όταν δηλαδή παίζουν και τα χρησιμοποιούν συνειδητά (π.χ. χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους και διαμορφώνοντας εξηγήσεις και ορισμούς). Εστιάζοντας σε αυτά τα αντικείμενα οδηγούνται σε παρατεταμένες αλληλεπιδράσεις με τους συμμαθητές τους. Κάποια παιδιά, που φαίνεται να αισθάνονται σιγουριά και αυτοπεποίθηση για συγκεκριμένες μαθηματικές γνώσεις (π.χ. η περιγραφή του συμμετρικού αντικειμένου και η επίδειξη της γραφής μεγάλων αριθμών), λειτουργούν μάλιστα διαμεσολαβητικά για τους φίλους τους και τους ωθούν στην αναζήτηση νέων μαθηματικών νοημάτων.

Τα ευρήματα αυτά μαζί με τον ρόλο αφενός των διαφορετικών δραστηριοτήτων κι αφετέρου των γεγονότων και καταστάσεων από την καθημερινή ζωή, που φάνηκε ότι πυροδότησαν την ανάδυση και εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών μέσα σε περιστάσεις που είχαν χαρακτηριστικά μαθηματικού παιχνιδιού, μπορούν να συμβάλλουν τόσο στην έρευνα όσο και στην καθημερινή πρακτική του νηπιαγωγείου. Ερευνητές και εκπαιδευτικοί που δίνουν αξία στην αξιοποίηση της άτυπης μαθηματικής γνώσης των παιδιών και στην παιδαγωγική του παιχνιδιού μπορούν να επιχειρήσουν να αναπτύξουν και να δοκιμάσουν στρατηγικές για τον εντοπισμό πΜΠ στις τάξεις τους και κυρίως για την επέκταση αυτών των περιστατικών με στόχο την πιο συστηματική μαθηματικοποίηση των στοιχείων του παιχνιδιού (Björklund et al., 2018; Κωσταντινίδου & Παπανδρέου, 2018). Οι προσεκτικές παρεμβάσεις τους κατά τη διάρκεια πΜΠ, όπως αυτά που εντοπίστηκαν σε αυτή τη μελέτη, μπορούν να πυροδοτήσουν ουσιαστικές μαθηματικές διερευνήσεις σε απόλυτη αρμονία με τους στόχους του παιχνιδιού των παιδιών, αφού το ενδιαφέρον τους θα είναι ούτως ή άλλως εστιασμένο στα μαθηματικά.

Τέλος, είναι σημαντικό να ληφθεί υπόψη ότι καθώς οι περιορισμοί μιας ποιοτικής έρευνας μικρής εμβέλειας όπως η παρούσα δεν επιτρέπουν γενικεύσεις, θα είχε ενδιαφέρον η επέκταση της έρευνας σε μεγαλύτερο δείγμα και σε τάξεις νηπιαγωγείου σε ποικίλα πλαίσια με διαφορετικούς πληθυσμούς.

**Σημείωση I**, ΦΕΚ 118/2011, αρ. 41, Επιστημονικό Εποπτικό Συμβούλιο.

**Σημείωση II**, Στην εικόνα 2 παρόλο που η γραφή είναι αντίστροφη, η Σοφία πολύ προσεκτικά έγραψε πρώτα το ένα και μετά τα μηδενικά και για τους δυο αριθμούς.

## Βιβλιογραφία

- Bjorklund, C., Magnusson, M., & Palmer, H. (2018). Teacher's involvement in children's mathematizing-beyond dichotomization between play and teaching. *European Early Childhood Education Research Journal*, 26(4), 469-480.
- Bobis, J., & Way, J. (2018). Building connections between children's representations and their conceptual development in mathematics. In V. Kinnear, M. Y. Lai & T. Muir (Eds.), *Forging connections in early mathematics teaching and learning* (pp. 55-72). Singapore: Springer.
- Broström, S. (2017). A dynamic learning concept in early years' education: A possible way to prevent schoolification. *International Journal of Early Years Education*, 25(1), 3-15.
- Cook, D. (1996). Mathematical sense making and role-play in the nursery. *Early Child Development and Care*, 121(1), 55-66.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research-planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4<sup>th</sup> ed.). Boston: Pearson.
- Dockett, S., & Goff, W. (2013). Noticing young children's mathematical strengths and agency. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow, Proceedings of the 36<sup>th</sup> annual conference of MERGA* (pp. 771-774). Melbourne, VIC: MERGA.
- Edo, M., Planas, N., & Badillo, E. (2009). Mathematical learning in a context of play. *European Early Childhood Education Journal*, 17(3), 325-341.
- Ferrara, K., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N. S., Golinkoff, R. M., & Lam, W. S. (2011). Block talk: Spatial language during block play. *Mind, Brain, and Education*, 5(3), 143-151.
- Fleer, M. (2010). *Early learning and development: Cultural-historical concepts in play*. New York: Cambridge University Press.
- Gejard, G., & Melander, H. (2018). Mathematizing in preschool: Children's participation in geometrical discourse. *European Early Childhood Education Research Journal*, 26(4), 495-511.
- Ginsburg, H. P., Lin, C., Ness, D., & Seo, K. H. (2003). Young American and Chinese children's everyday mathematical activity. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 235-258.
- Hill, M., & Wood, E. (2019). 'Dead Forever': An ethnographic study of young children's interests, funds of knowledge and working theories in free play. *Learning, Culture and Social Interaction*. <https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2019.02.017>
- Holton, D., Ahmed, A., Williams, H., & Hill, C. (2001). On the importance of mathematical play. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(3), 401-415.
- Howe, N., Adrien, E., Della Porta, S., Peccia, S., Recchia, H., ... & Ross, H. (2016). 'Infinity means it goes on forever': Siblings' informal teaching of Mathematics. *Infant and Child Development*, 25(2), 137-157.
- Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(9), 2481-2502.

- Kozulin, A. (1998). *Psychological tools: A sociocultural approach to education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Κωνσταντινίδου, Ζ., & Παπανδρέου, Μ. (2018). Η μέτρηση μήκους ως πολιτισμική πρακτική στο νηπιαγωγείο με την αξιοποίηση κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 3<sup>ου</sup> πανελληνίου συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή: Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: Διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης*, (σελ. 237-246). Ρόδος. Ανακτήθηκε από <http://ltee.aegean.gr/sekpy/>
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. New York: Cambridge University Press.
- Lee, S. (2012). Toddlers as mathematicians? *Australasian Journal of Early Childhood*, 37(1), 30-37.
- Munn, P., & Schaffer, H. R. (1993). Literacy and numeracy events in social interactive contexts. *International Journal of Early Years Education*, 1(3), 61-80.
- Papandreou, M. (2014). Communicating and thinking through drawing activity in early childhood. *Journal of Research in Childhood Education*, 28(1), 85-100.
- Παπανδρέου, Μ. (2017). Εισαγωγή για την ελληνική έκδοση. Στο C. McLachan, M. Flear & S. Edwards (Eds.), *Αναλυτικά προγράμματα προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας: Σχεδιασμός, αξιολόγηση και εφαρμογή* (σελ. 15-37). Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.
- Papandreou, M. (υπό κρίση). Young children's representational practices in the context of self-initiated data investigations.
- Papandreou, M., & Tsiouli, M. (υπό κρίση). Noticing and understanding children's everyday mathematics during play in early childhood classrooms.
- Perry, B., & Dockett, S. (2008). Young children's access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 75-108). New York: Routledge.
- Ramani, G. B., Zippert, E., Schweitzer, S., & Pan, S. (2014). Preschool children's joint block building during a guided play activity. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 35(4), 326-336.
- Riojas-Cortez, M. (2001). Preschoolers' funds of knowledge displayed through sociodramatic play episodes in a bilingual classroom. *Early Childhood Education Journal*, 29(1), 35-40.
- Rogoff, B. (2008). Observing sociocultural activity on three planes: Participatory appropriation, guided participation, and apprenticeship. In K. Hall, P. Murphy & J. Soler (Eds.), *Pedagogy and practice: culture and identities* (pp. 58-74). London: SAGE.
- Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία-Αλλάζοντας την τάξη των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Building blocks and cognitive building blocks: Playing to know the world mathematically. *American Journal of Play*, 1(3), 313-337.

- Skoumpourdi, C. (2016). Different modes of communicating geometric shapes, through a game, in kindergarten. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(2). Ανακτήθηκε από <http://www.cimt.org.uk/ijmtl/index.php/IJMTL/article/view/16>
- Sumpter, L., & Hedefalk, M. (2015). Preschool children's collective mathematical reasoning during free outdoor play. *Journal of Mathematical Behaviour*, 39, 1-10.
- Trawick-Smith, J., Swaminathan, S., & Liu, X. (2015). The relationship of teacher-child play interactions to mathematics learning in preschool. *Early Child Development and Care*, 186(5), 716-733.
- van Oers, B. (2013). Is it play? Towards a reconceptualisation of role-play from an activity theory perspective. *European Early Childhood Education Research Journal*, 21(2), 185-198.
- van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics*, 74 (1), 23-37.
- Van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating mathematical thinking during young children's play. *European Early Childhood Research Journal*, 4(1), 71-87.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman (Eds.). Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- Worthington, M., & van Oers, B. (2016). Pretend play and the cultural foundations of mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(1), 51-66.