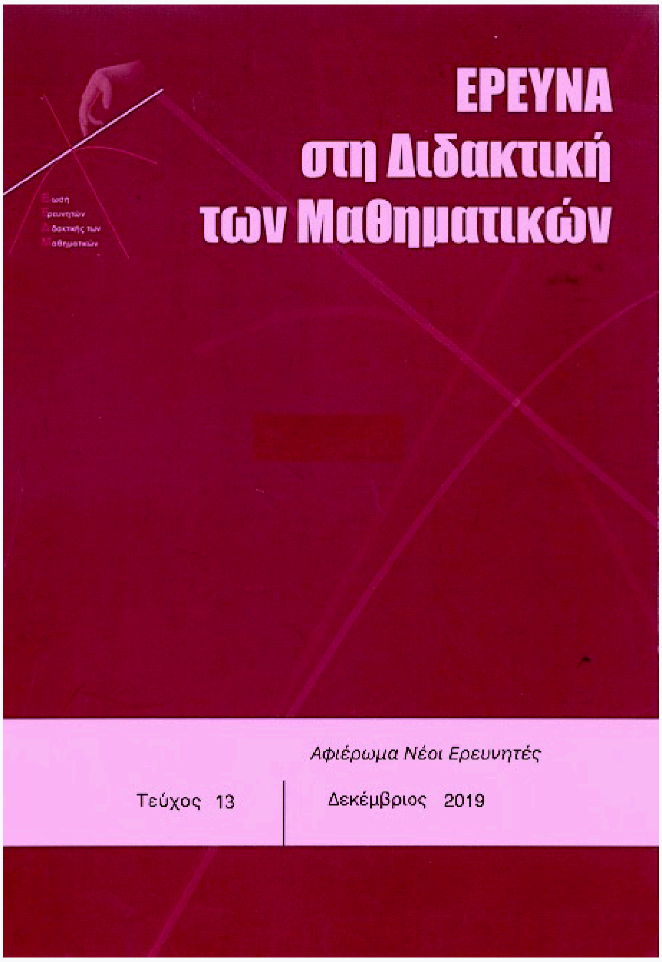
Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 13 (2019)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

Ιωάννα Λεμονή (Ioanna Lemoni), Κωνσταντίνος Χρήστου (Konstantinos Christou)

doi: 10.12681/enedim.21965

Βιβλιογραφική αναφορά:

Λεμονή (Ioanna Lemoni) I., & Χρήστου (Konstantinos Christou) K. (2019). ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (13), 25–45. https://doi.org/10.12681/enedim.21965 http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/index

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

Ιωάννα Λεμονή
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών»
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
ms0730@eled.uowm.gr

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
kchristou@uowm.gr

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα μελετά τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε νοερούς υπολογισμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης με ακεραίους. Πιο συγκεκριμένα, μελετήθηκαν οι στρατηγικές με τις οποίες οι μαθητές προσεγγίζουν τον υπολογισμό, οι στρατηγικές μετασχηματισμού των αριθμών που χρησιμοποιούν και η ευελιξία τους με αυτές. Ζητήθηκε από είκοσι επτά μαθητές της Β' και Γ' Γυμνασίου να υπολογίσουν νοερά και να περιγράψουν τη σκέψη τους σε δώδεκα υπολογισμούς, όπως ο -86+42. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η πλειοψηφία των μαθητών μετέτρεψε τον υπολογισμό μεταξύ ακεραίων σε έναν ισοδύναμο με φυσικούς αριθμούς κι έπειτα χρησιμοποίησε μετασχηματισμούς ήδη γνωστούς από τις πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών. Ενδιαφέρον παρουσίασαν οι απαντήσεις τεσσάρων μαθητών που δεν έκαναν την παραπάνω μετατροπή, από τις οποίες προέκυψαν πέντε νέες στρατηγικές για την νοερή πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων.

Λέξεις Κλειδιά: νοεροί υπολογισμοί, νοερές στρατηγικές, ακέραιοι, στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης, ευελιξία

Abstract

The current study investigates students' mental calculation strategies for addition and subtraction with integers. Specifically, it focuses on the strategies the students use to approach the tasks, their number-transformation strategies and their flexibility with these strategies. Twenty seven 8th and 9th graders were asked to solve mentally and explain their thought process for twelve tasks, such as -86+42. As it was expected, the majority of students initially transformed the calculation involving negative numbers into an equivalent calculation with natural numbers, and then they applied number-transformation mental strategies that were already available for natural numbers. In addition, interestingly enough, four students didn't transform the problem of integers into a problem with natural numbers. Five new strategies for mental addition between integers with different sign came up from their responses.

Key words: mental calculation, mental calculation strategies, integers, addition and subtraction strategies, flexibility

Εισαγωγή

Όλοι οι άνθρωποι στην καθημερινότητά τους έρχονται αντιμέτωποι με διάφορους μαθηματικούς υπολογισμούς τους οποίους πραγματοποιούν είτε με τη βοήθεια κάποιου τεχνολογικού μέσου, είτε εκτελώντας τους γραπτούς αλγόριθμους, είτε υπολογίζοντας νοερά (Λεμονίδης, 2013). Εξαιτίας της τεχνολογίας η ανάγκη για εκτέλεση κουραστικών υπολογισμών με χαρτί και μολύβι έχει σχεδόν εξαφανιστεί (Van de Walle, 2007), ενώ απομακρύνεται όλο και περισσότερο η ανάγκη για νοερούς υπολογισμούς (Jansen, Schmitz, & Van der Maas, 2016). Ωστόσο, κατά τη χρήση των διάφορων τεχνολογικών συσκευών, οι νοεροί υπολογισμοί παραμένουν χρήσιμοι, για παράδειγμα στην εκτίμηση του αποτελέσματος (Jansen, Schmitz, & Van der Maas, 2016).

Οι νοεροί υπολογισμοί δεν είναι ωφέλιμα εργαλεία μόνο για την καθημερινή ζωή. Φαίνεται πως ο νοερός υπολογισμός επηρεάζει και σχετίζεται με την εννοιολογική κατανόηση (Varol & Farran, 2007) και με αρκετά συστατικά της αίσθησης του αριθμού (Berch, 2005; Λεμονίδης, 2013), όπως είναι η χρήση των διάφορων αναπαραστάσεων του αριθμού (Ansari, 2012), η γνώση αριθμητικών δεδομένων, η δομή του αριθμού και οι ιδιότητές του (Λεμονίδης, 2013). Επίσης, η νοερή εργασία συμβάλει στην κατανόηση των γραπτών μεθόδων και αλγορίθμων από τους μαθητές (Lemonidis, 2016) και την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων τους, αλλά και την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων και ικανοτήτων όπως η επίλυση προβλημάτων (Lemonidis, 2016).

Αρκετές είναι οι έρευνες που μελετούν τις νοερές στρατηγικές στις πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών και επικεντρώνονται είτε στην οργάνωση και την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών (Hartnett, 2007), είτε στην ευελιξία των μαθητών με τις στρατηγικές και τους παράγοντες που την επηρεάζουν (Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000; Verschaffel et.al., 2009). Επιπλέον, η μελέτη σχετικά με τις νοερές στρατηγικές δεν περιορίζεται μόνο στο σύνολο των φυσικών αριθμών, αλλά και στην περίπτωση των ρητών (Caney & Watson, 2003; Callingham & Watson, 2004; Lemonidis & Kaiafa, 2014).

Από μία μαθηματική σκοπιά, η μελέτη των νοερών στρατηγικών στο σύνολο των ρητών θα μπορούσε να εστιάσει στα κλάσματα, τους δεκαδικούς και τους ακέραιους. Ωστόσο, ενώ πλήθος ερευνών εστιάζει στην περίπτωση των κλασμάτων και των δεκαδικών, στη βιβλιογραφία εντοπίστηκε μία μόνο μελέτη που εξετάζει και την περίπτωση των ακεραίων, αυτή του Rezat (2011). Ακόμη, πάρα το πλήθος των μελετών που εστιάζει στην κατανόηση και την υπολογιστική ευχέρεια των μαθητών με τους ακέραιους (Whitacre et. al., 2012; Young & Booth, 2015; Bofferding, 2010), καμία δε βρέθηκε να διερευνά το θέμα των νοερών υπολογισμών με αυτούς. Το γεγονός αυτό παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον, καθώς οι ακέραιοι είναι μία από τις πρώτες νέες και βασικότερες μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται στους μαθητές κατά την εισαγωγή τους στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, και οι νοεροί υπολογισμοί βρίσκονται αρκετά υψηλά στα πρότυπα που έχουν τεθεί στα Προγράμματα Σπουδών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης διεθνώς (Rezat, 2011).

Λαμβάνοντας υπόψη τις εξελίξεις στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών και τις σύγχρονες τάσεις των Προγραμμάτων Σπουδών σε διεθνές επίπεδο, η εισαγωγή των ακεραίων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά στην Ελλάδα το ακαδημαϊκό έτος 2018-2019 στο καινούριο βιβλίο μαθηματικών της Ε' Δημοτικού (Βρυώνης, Δουκάκης, Καρακώστα, Μπαραλής, & Στραύρου, 2016). Με αφορμή την ένταξη των ακεραίων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και συνυπολογίζοντας τους παραπάνω προβληματισμούς, η εργασία αυτή επιχειρεί μια πρώτη διερεύνηση των στρατηγικών νοερού υπολογισμού των μαθητών στην πρόσθεση και την αφαίρεση μεταξύ ακεραίων, σε δείγμα Ελλήνων συμμετεχόντων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Πράξεις στο σύνολο των ακεραίων

Στο σχολικό βιβλίο της Α' Γυμνασίου, σχετικά με την πρόσθεση και την αφαίρεση μεταξύ ακεραίων, τις δύο δηλαδή πράξεις στις οποίες επικεντρώνεται η παρούσα έρευνα, αναφέρονται τα εξής:

- Για την πρόσθεση δύο ομόσημων ακέραιων προστίθενται οι απόλυτες τιμές τους και το άθροισμα έχει το κοινό τους πρόσημο, για παράδειγμα: (-3)+(-6)=-(3+6)=-9. Στην περίπτωση που οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, αφαιρούνται οι απόλυτες τιμές τους και στη διαφορά τους μπαίνει το πρόσημο του ακεραίου με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα, (+3)+(-8)=-(8-3)=-5 (Βανδουλάκης κ.α., 2007).
- Για την αφαίρεση δύο ακέραιων αριθμών προστίθεται στον πρώτο ο αντίθετος του δεύτερου, δηλαδή γίνεται η μετατροπή: α-β= α+(-β), για παράδειγμα: (-7)-(+6)=(-7)+(-6), (-7)-(-6)=(-7)+(+6). Γρήγορα, δηλαδή, η αφαίρεση μεταξύ δύο ακεραίων μετατρέπεται σε πρόσθεση θετικών και αρνητικών ακεραίων (Βανδουλάκης κ.α., 2007).

Χρειάζεται, λοιπόν, να διευκρινιστεί ότι στο εξής έχει νόημα να αναφερόμαστε μόνο σε πρόσθεση μεταξύ ομόσημων και ετερόσημων ακεραίων, όπου η πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης αντίστοιχα θα χρειαστεί να πραγματοποιηθεί μεταξύ των απόλυτων τιμών των δύο ακεραίων και θα είναι πρόσθεση ή αφαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών.

Στρατηγικές νοερών υπολογισμών με φυσικούς και ακέραιους αριθμούς και ευελιξία

Στη μοναδική έρευνα που εντοπίστηκε στη διεθνή βιβλιογραφία να μελετά τις στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης των μαθητών σε νοερούς υπολογισμούς με ακεραίους (Rezat, 2011) διακρίνονται δύο κατηγορίες στρατηγικών: οι *στρατηγικές προσέγγισης* και οι *στρατηγικές μετασχηματισμού* (Threlfall, 2009). Ως στρατηγική προσέγγισης ορίζεται «η γενική μορφή της μαθηματικής γνώσης που χρησιμοποιείται για το πρόβλημα» (Threlfall, 2009, σελ. 541), ενώ ως στρατηγική μετασχηματισμού ορίζεται «ο λεπτομερής τρόπος με τον οποίο οι αριθμοί μετασχηματίστηκαν για να φθάσουμε σε μια λύση» (Threlfall, 2009, σελ. 542).

Στην περίπτωση των ακεραίων, στρατηγικές προσέγγισης θεωρούνται τα διάφορα νοητικά μοντέλα που χρησιμοποιούν οι μαθητές στις πράξεις μεταξύ ακεραίων, όπως αυτό της αριθμογραμμής, το μοντέλο ισοζυγίου τράπεζας-λογαριασμού, το μοντέλο κλίμακας θερμοκρασίας ή το υψόμετρο (Rezat, 2011). Στην έρευνά του ο Rezat (2011) αναφέρει άλλη μία στρατηγική προσέγγισης, αυτή της *μετατροπής*. Κατά τη μετατροπή, ο αρχικός υπολογισμός μετατρέπεται σε έναν ισοδύναμο στο σύνολο των φυσικών αριθμών, σύμφωνα με τους κανόνες που διέπουν τους ακεραίους. Για παράδειγμα, η πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων -28 +11 θα μετατραπεί νοερά σε -(28 -11) και οι μαθητές θα πραγματοποιήσουν, πάλι νοερά, την αφαίρεση φυσικών που βρίσκεται στην παρένθεση, με βάση τις στρατηγικές μετασχηματισμού αφαίρεσης φυσικών αριθμών. Μάλιστα, τα αποτελέσματα της έρευνάς του έδειξαν πως η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποίησε αυτή τη στρατηγική της μετατροπής για να εκτελέσει τους υπολογισμούς μεταξύ ακεραίων (Rezat 2011).

Φαίνεται, λοιπόν, πως οι μαθητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν ως στρατηγική προσέγγισης την εφαρμογή του κανόνα του σχολικού βιβλίου (ή αλλιώς την μετατροπή) και στη συνέχεια μία νοερή στρατηγική μετασχηματισμού που είναι ήδη γνωστή από το σύνολο των φυσικών αριθμών για την πρόσθεση ή την αφαίρεση των φυσικών αριθμών που προκύπτει. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι στρατηγικές[i] μετασχηματισμού νοερού υπολογισμού που οι μαθητές φαίνεται να χρησιμοποιούν στην πρόσθεση και την αφαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών, με συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής τους σε συγκεκριμένους υπολογισμούς.

- Δύο είναι οι κύριες στρατηγικές για νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις που φαίνεται να χρησιμοποιούν οι μαθητές, η *Στρατηγική Διαχωρισμού* και η *Στρατηγική Συσσώρευσης*, οι οποίες εμφανίζουν μια σειρά από υποκατηγορίες με βάση τον Beishuizen (1985; 1993):

  Στρατηγική Διαχωρισμού από Αριστερά προς τα Δεξιά σε Δεκάδες-Μονάδες (Split Method), 1010: οι δύο όροι της πράξης χωρίζονται σε δεκάδες και μονάδες οι οποίες προστίθενται ή αφαιρούνται ξεχωριστά μεταξύ τους, πρώτα οι δεκάδες και μετά οι μονάδες. Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 40+20=60, 6+3=9, 60+9=69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 40-20=20, 6-3=3, 20+3=23.

  Στρατηγική Διαχωρισμού από Δεξιά προς τα Αριστερά σε Μονάδες-Δεκάδες (Split method, units-first), u-1010: οι δύο όροι της πράξης χωρίζονται σε δεκάδες και μονάδες οι οποίες προστίθενται ή αφαιρούνται ξεχωριστά μεταξύ τους, πρώτα οι μονάδες και μετά οι δεκάδες. Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 6+3=9, 40+20=60, 9+60=69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 6-3=3, 40-20=20, 3+20=23.

  Στρατηγική Συσσώρευσης με Δεκάδες-Μονάδες (Jump method), N10: ένας όρος της πράξης παραμένει σταθερός και σε αυτόν προστίθενται ή αφαιρούνται διαδοχικά οι δεκάδες και μετά οι μονάδες του δεύτερου όρου. Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 46+20=66, 66+3=69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 46-20=26, 26-3=23.

  Στρατηγική Συσσώρευσης με Μονάδες-Δεκάδες (Jump method, units-first), u-N10: ένας όρος της πράξης παραμένει σταθερός και σε αυτόν προστίθενται ή αφαιρούνται διαδοχικά οι μονάδες και μετά οι δεκάδες του δεύτερου όρου. Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 46+3=49, 49+20=69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 46-3=43, 43-20=23.

- Στη βιβλιογραφία αναφέρεται επίσης μια *Μικτή Στρατηγική* που έχει χαρακτηριστεί και ως ενδιάμεση στρατηγική των 1010 και N10 (Beishuizen et al., 1993; 1997; Thompson, 2000):

  Μικτή στρατηγική Διαχωρισμού και Συσσώρευσης (Split-Jump method), 10S: συνδυάζει τα πρώτα στάδια της στρατηγικής του διαχωρισμού με τα μεταγενέστερα στάδια της στρατηγικής της συσσώρευσης. Οι δεκάδες των δύο όρων της πράξης προστίθενται ή αφαιρούνται ξεχωριστά και στο αποτέλεσμα προστίθενται ή αφαιρούνται διαδοχικά οι μονάδες των δύο όρων. Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 40+20=60, 60+6=66, 66+3=69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 40-20=20, 20+6=26, 26-3=23.

- Επίσης, έχουν καταγραφεί κάποιες *Ολιστικές Στρατηγικές (Holistic Strategies)* (Cooper et al., 1996), όπως:

  Στρατηγική Αντιστάθμισης (Compensation method), N10C: ένας όρος της πράξης στρογγυλοποιείται στο πλησιέστερο πολλαπλάσιο του δέκα και το αποτέλεσμα επιδιορθώνεται ή αντισταθμίζεται στο τέλος. Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 50+23=73, 73-4=69 ή 46+20=66, 66+3=69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 46-20=26, 26-3=23.

  Στρατηγική Εξισορρόπησης (Leveling method), ΕΞ: κατασκευάζεται μια ισοδύναμη ισότητα με την αρχική. Ουσιαστικά γίνονται μετασχηματισμοί και στους δύο όρους της πράξης, πριν γίνει ο υπολογισμός, για να δημιουργηθεί μια ισοδύναμη αριθμητική έκφραση που είναι ευκολότερο να επιλυθεί. Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 49+20=69 ή 40+29=69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 43-20=23.

- Τέλος, στη βιβλιογραφία αναφέρονται άλλες τρεις στρατηγικές: το *Πέρασμα από το 10* (Beishuizen, Van Putten, & Van Mulken 1997), η στρατηγική της *Αρίθμησης* και της *Νοητικής Εικόνας του Γραπτού Αλγόριθμου με Μολύβι και Χαρτί* (Λεμονίδης, 2013):

  Πέρασμα από το 10 (Adding- On method), A10: σε αυτή τη στρατηγική, ένας όρος της πράξης παραμένει σταθερός και σε αυτόν προστίθενται ή αφαιρούνται διαδοχικά μέρη του δεύτερου διασπασμένου όρου. Η ιδιαιτερότητα είναι ότι προστίθεται ή αφαιρείται στον πρώτο όρο ένας τέτοιος αριθμός από τον δεύτερο, ώστε να φτάσει στην πλησιέστερη δεκάδα (Λεμονίδης, 2013). Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 46+4=50, 50+10=60, 60+9=69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 46-6=40, 40-10=30, 30-7=23.

  Στρατηγική της Αρίθμησης (Counting method), ΑΡ: οι μαθητές μετρούν βήμα-βήμα με βάση την ακολουθία των αριθμών. Ξεκινούν από τον πρώτο όρο και ανεβαίνουν (πρόσθεση) ή κατεβαίνουν (αφαίρεση) τόσα βήματα όσα δείχνει ο δεύτερος όρος της πράξης. Μπορεί να ανεβαίνουν και να κατεβαίνουν ένα-ένα (Αρίθμηση με μονάδες) ή ανά δέκα (Αρίθμηση με δεκάδες). Παράδειγμα πρόσθεσης, 46+23: 46, 47, 48, …., 67, 68, 69 ή 46, 56, 66, 67,68, 69. Παράδειγμα αφαίρεσης, 46-23: 46,45,44, …., 25, 24, 23 ή 46, 36, 26, 25, 24, 23.

Νοητική Εικόνα του Γραπτού Αλγόριθμου (Mental representation of the written algorithm), ΓΑ: οι μαθητές φαντάζονται πως πραγματοποιούν κάθετα τη γραπτή πράξη.

Στη βιβλιογραφία σχετικά με τις νοερές στρατηγικές μετασχηματισμού στους φυσικούς, εντοπίστηκε και μία ακόμα εξαιρετικά ενδιαφέρουσα στρατηγική, ο λεγόμενος *δημιουργικός ελιγμός του Kye*, (Cochran, Barson, & Davis, 1970). O Kye, ένας μαθητής της τρίτης τάξης του αντίστοιχου Δημοτικού, κατά τη λύση μίας αφαίρεσης φυσικών με κρατούμενο, συγκεκριμένα της πράξης 64-28, χρησιμοποίησε τη στρατηγική μετασχηματισμού 1010, προσθέτοντας 40 (από την αφαίρεση 60-20) και «αρνητικό 4» (από την αφαίρεση 4-8), δίνοντας τελικά την απάντηση 36 (Cochran, Barson, & Davis, 1970, σελ. 211). Αντίστοιχη χρήση της στρατηγικής 1010 σε αφαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών με κρατούμενο αναφέρεται και από άλλους ερευνητές (Thompson & Smith, 1999; Madell, 1985; Thompson, 2000).

Για έναν ενήλικα που γνωρίζει τους αρνητικούς αριθμούς εύκολα μπορεί να εξηγηθεί μαθηματικά αυτός ο συλλογισμός (Thompson, 2000). Το γεγονός, όμως, ότι χρησιμοποιήθηκε από έναν μαθητή που δεν γνώριζε τους αρνητικούς αριθμούς, έκανε την συγκεκριμένη στρατηγική να προσελκύσει το ενδιαφέρον των ερευνητών και να προκαλέσει ποικιλία συζητήσεων (Treffers, 1991; Aiken Jr, 1973; Davis, 1984; Duffin & Simpson, 1995; Christiansen, Howson, & Otte, 2012).

Καθώς η παρούσα μελέτη εστιάζει στις στρατηγικές νοερών υπολογισμών με ακέραιους, κι από τη στιγμή που οι συμμετέχοντες γνωρίζουν τους αρνητικούς αριθμούς, μια τέτοια στρατηγική ή κάποια παρόμοια με αυτή ανήκουν στο σύνολο των στρατηγικών που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές σε μία πρόσθεση μεταξύ ακεραίων.

Επίσης, η παρούσα έρευνα μελετά την ευελιξία των μαθητών με τη χρήση των διαφόρων στρατηγικών. Η ευελιξία των μαθητών, αφορά την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν και να εναλλάσσουν τις διάφορες στρατηγικές μετασχηματισμού που διαθέτουν. Στην παρούσα εργασία η ευελιξία προσεγγίζεται ως η μελέτη του ρεπερτορίου των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές, δηλαδή, το πλήθος των διαφορετικών στρατηγικών μετασχηματισμού που χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς (βλ. Λεμονίδης & Λυγούρα, 2008).

Η παρούσα έρευνα

Στόχος της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει τις στρατηγικές νοερού υπολογισμού που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην πρόσθεση μεταξύ ομόσημων και ετερόσημων διψήφιων ακεραίων και την ευελιξία τους με αυτές.

Με βάση την έρευνα του Rezat (2011), στην παρούσα μελέτη αναμενόταν ότι οι μαθητές θα έχουν την τάση να χρησιμοποιούν τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης, δηλαδή ότι θα μετατρέψουν τον υπολογισμό που περιέχει ακεραίους σε έναν ισοδύναμο με φυσικούς αριθμούς και στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουν μια οποιαδήποτε νοερή στρατηγική μετασχηματισμού από το σύνολο των φυσικών αριθμών για την πρόσθεση ή την αφαίρεση που θα προκύψει, ώστε να υπολογίσουν το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα.

Ερευνητικά Ερωτήματα

1. Είναι η μετατροπή η κύρια στρατηγική προσέγγισης που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη νοερή πρόσθεση μεταξύ ομόσημων και ετερόσημων διψήφιων ακεραίων;
2. Ποιες είναι οι στρατηγικές μετασχηματισμού που χρησιμοποιούν οι μαθητές, όταν πραγματοποιούν πρόσθεση μεταξύ ομόσημων και ετερόσημων ακεραίων;
3. Το είδος της πράξης (πρόσθεση ή αφαίρεση) μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακεραίων επηρεάζει τους μαθητές στην επιλογή στρατηγικής μετασχηματισμού;
4. Η σειρά των όρων (θετικός και αρνητικός) και η ύπαρξη κρατούμενου επηρεάζει τους μαθητές στην επιλογή στρατηγικής μετασχηματισμού στην πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων;
5. Είναι οι μαθητές ευέλικτοι με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν στους νοερούς υπολογισμούς τους;

Μεθοδολογία Έρευνας

Συμμετέχοντες

Στην Ελλάδα, μέχρι και το ακαδημαϊκό έτος 2017-2018, το σύνολο των ακεραίων και οι πράξεις μεταξύ τους εμφανίζονται για πρώτη φορά στη διδασκαλία στο τέλος της Α' Γυμνασίου. Για το λόγο αυτό, η έρευνα απευθύνεται σε μαθητές της Β' και Γ' Γυμνασίου, που έχουν εξοικειωθεί περισσότερο με τις πράξεις των ακεραίων.

Στη μελέτη συμμετείχαν 27 μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που φοιτούν στο Γυμνάσιο, σε σχολεία του νομού Σερρών. Το σύνολο των μαθητών αποτελείται από 10 αγόρια και 17 κορίτσια. Επιπλέον, οι 12 από αυτούς φοιτούν στην Β' Γυμνασίου και οι 15 στη Γ' Γυμνασίου (μέσος όρος ηλικίας 14,5 ετών). Πρόκειται για μία βολική δειγματοληψία και μία εθελοντική συμμετοχή, καθώς οι μαθητές ήταν πρόθυμοι να συμμετάσχουν στην έρευνα.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως στους 30, αρχικά, μαθητές δόθηκε μία δοκιμασία με απλές προσθέσεις μεταξύ μονοψήφιων ακεραίων πριν τη συμμετοχή τους στην έρευνα. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως 3 από αυτούς παρουσιάζουν σοβαρά λάθη στην πρόσθεση των ακεραίων και για το λόγο αυτό αποκλείστηκαν από τη συμμετοχή τους στην έρευνα.

Ερευνητικό εργαλείο

Για την κατασκευή του ερευνητικού εργαλείου μελετήθηκαν όλες οι περιπτώσεις πρόσθεσης μεταξύ ομόσημων (θετικών και αρνητικών) και ετερόσημων ακεραίων. Από αυτές απορρίφθηκαν οι προσθέσεις μεταξύ δύο θετικών ακεραίων (π.χ. +3+4) καθώς αποτελούν προσθέσεις φυσικών αριθμών. Ακόμη, απορρίφθηκαν οι προσθέσεις μεταξύ ενός θετικού με έναν αρνητικό ακέραιο, όπου ο αρνητικός έχει μικρότερη απόλυτη τιμή (π.χ. +5-4), καθώς αποτελούν αφαίρεση φυσικών αριθμών.

Το ερευνητικό εργαλείο που εφαρμόστηκε περιλαμβάνει 12 προσθέσεις μεταξύ διψήφιων ακεραίων, όπως αυτές αναγράφονται στον Πίνακα 1. Συγκεκριμένα, οι πρώτοι 4 υπολογισμοί είναι προσθέσεις μεταξύ δύο αρνητικών ακεραίων, οι επόμενοι 4 είναι προσθέσεις ενός θετικού με έναν αρνητικό ακέραιο και οι επόμενοι 4 είναι προσθέσεις ενός αρνητικού με έναν θετικό ακέραιο (όπου η απόλυτη τιμή του αρνητικού ακεραίου είναι πάντα μεγαλύτερη από αυτή του θετικού). Στους τελευταίους 4 υπολογισμούς η σειρά των όρων (θετικών και αρνητικών ακεραίων) άλλαξε με σκοπό να διερευνηθεί εάν η σειρά μπορεί να επηρεάσει την επιλογή στρατηγικής. Και οι 12 υπολογισμοί περιέχουν περιπτώσεις με ή χωρίς κρατούμενο.

Πίνακας 1: Οι περιπτώσεις πρόσθεσης ακεραίων που μελετήθηκαν

Πρόσθεση ομόσημων: αρνητικός + αρνητικός	Χωρίς κρατούμενο	-36 -43 = -79	Ερ. 1
		-41 -58 = -99	Ερ. 2
	Με κρατούμενο	-48 -37 = -85	Ερ. 3
		-87 -14 = -101	Ερ. 4
Πρόσθεση ετερόσημων: θετικός + αρνητικός	Χωρίς κρατούμενο	43 -85 = -42	Ερ. 5
		62 -78 = -16	Ερ. 6
	Με κρατούμενο	37 -94 = -57	Ερ. 7
		26 -45 = -19	Ερ. 8
Πρόσθεση ετερόσημων: αρνητικός + θετικός	Χωρίς κρατούμενο	-86 +42 = -44	Ερ. 9
		-44 +13 = -31	Ερ. 10
	Με κρατούμενο	-72 +46 = -26	Ερ. 11
		-56 +37 = -19	Ερ. 12

Ερευνητική διαδικασία

Η μελέτη πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής χρονιάς 2017-2018 στο πλαίσιο του διατμηματικού, διαπανεπιστημιακού Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών» των Πανεπιστημίων Δυτικής Μακεδονίας, Μακεδονίας, του Αριστοτελείου και του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου. Η ερευνητική διαδικασία διήρκεσε συνολικά από τον Απρίλιο μέχρι τον Ιούνιο του 2018.

Η ερευνήτρια πραγματοποίησε προσωπικές συνεντεύξεις με τους 27 μαθητές, οι οποίες ηχογραφήθηκαν και διήρκησαν 20’ με 30’. Ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν νοερά κάθε μία από τις πράξεις του ερωτηματολογίου και να σημειώσουν το ακριβές αποτέλεσμα γραπτώς. Για κάθε υπολογισμό, οι μαθητές κλήθηκαν να περιγράψουν προφορικά αναλυτικά τον τρόπο σκέψης τους.

Αποτελέσματα

Η επίδοση των συμμετεχόντων

Πριν παρουσιαστούν οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, οι οποίες αποτελούν και το βασικό στόχο της μελέτης κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια σύντομη παρουσίαση των απαντήσεων των μαθητών με έμφαση στα λάθη που πραγματοποίησαν στους υπολογισμούς τους. Τα λάθη των μαθητών χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες: αυτά που προέκυψαν από λανθασμένη χρήση μίας στρατηγικής μετασχηματισμού και αυτά που προέκυψαν από κάποια απροσεξία.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, όπου παρουσιάζονται οι συχνότητες εμφάνισης κάθε κατηγορίας λάθους, συνολικά σημειώθηκαν 17 λανθασμένες απαντήσεις (5.25%) στο σύνολο των υπολογισμών όλων των μαθητών. Από τις λανθασμένες απαντήσεις μόνο 2 (11.76%) έγιναν στην πρόσθεση και οι υπόλοιπες 15 (88.24%) στην αφαίρεση. Επιπλέον, τα λάθη των μαθητών που προέκυψαν από απροσεξία (απλά αριθμητικά λάθη στις πράξεις, για παράδειγμα 8+7=16) ήταν σχεδόν ισάριθμα με τα λάθη στην εφαρμογή μίας στρατηγικής μετασχηματισμού.

Πίνακας 2: Συχνότητες και ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών

	Λάθη Απροσεξίας	Λάθη στην εφαρμογή μίας στρατηγικής	Σύνολο
Προσθέσεις	2	0	2
	(11.76%)		(11.76%)
Αφαιρέσεις	7	8	15
	(41.18%)	(47.10%)	(88.24%)
Σύνολο	9	8	17
	(52.94%)	(47.10%)	(100.00%)

Μια πιο προσεκτική ανάλυση των απαντήσεων έδειξε ότι τα περισσότερα λάθη εμφανίστηκαν στην πρώτη αφαίρεση του ερωτηματολογίου που περιείχε κρατούμενο, δηλαδή στην Ερ. 7 του ερωτηματολογίου: 37-94=-57. Οι περισσότεροι μαθητές εφάρμοσαν στη συγκεκριμένη αφαίρεση μία στρατηγική μετασχηματισμού με λάθος τρόπο.

Για παράδειγμα, τρεις από τους μαθητές χρησιμοποίησαν λανθασμένα τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010 κάνοντας το λάθος που στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *το μικρό από το μεγάλο* (Beishuizen, 1993; Beishuizen, Van Putten, & Van Mulken, 1997). Οι μαθητές, αφού μετέτρεψαν σε -(94-37), αφαίρεσαν και στις δεκάδες και στις μονάδες την μικρότερη από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή ως εξής: 90-30=60 και 7-4=3, πρόσθεσαν 60+3=63 και απάντησαν -63.

Οι στρατηγικές προσέγγισης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές

Για να ελεγχθεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της μελέτης, δηλαδή εάν η κυρίαρχη στρατηγική προσέγγισης είναι η μετατροπή, οι απαντήσεις των μαθητών χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες με βάση τη χρήση ή μη της στρατηγικής της μετατροπής. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των μαθητών που χρησιμοποίησε ή όχι τη στρατηγική της μετατροπής για κάθε έναν από τους υπολογισμούς του ερωτηματολογίου.

Πίνακας 3: Συχνότητες και ποσοστά χρήσης της στρατηγική της μετατροπής ανά ερώτηση ερωτηματολογίου

		Χρήση της στρατηγικής της μετατροπής	Μη χρήση της στρατηγικής της μετατροπής
1.	-36 - 43 = -79	27 (100%)	0 (0%)
2.	-41 -58 = -99	27 (100%)	0 (0%)
3.	-48 -37 = -85	27 (100%)	0 (0%)
4.	-87 -14 = -101	27 (100%)	0 (0%)
5.	43 -85 = -42	27 (100%)	0 (0%)
6.	62 -78 = -16	27 (100%)	0 (0%)
7.	37 -94 = -57	25 (92.59%)	2 (7.41%)
8.	26 -45 = -19	24 (88.89%)	3 (11.11%)
9.	-86 +42 = -44	26 (96.30%)	1 (3.70%)
10.	-44 +13 = -31	25 (92.59%)	2 (7.41%)
11.	-72 +46 = -26	23 (85.19%)	4 (14.81%)
12.	-56 +37 = -19	23 (85.19%)	4 (14.81%)

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3, η μεγάλη πλειονότητα των συμμετεχόντων (23, 85.19%) χρησιμοποίησε την μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης σε όλους τους υπολογισμούς του ερωτηματολογίου. Επιπλέον, μέχρι και την Ερ. 6 του ερωτηματολογίου (μία πράξη πριν την Ερ. 7, όπου εμφανίζεται η πρώτη αφαίρεση με κρατούμενο) η στρατηγική της μετατροπής χρησιμοποιήθηκε από όλους τους μαθητές (27, 100%).

Πιο συγκεκριμένα, οι παραπάνω μαθητές αποφάσισαν εξ' αρχής το πρόσημο του αποτελέσματος και την πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση) μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακεραίων και μετέτρεψαν και τις 12 προσθέσεις ακεραίων του ερωτηματολογίου σε προσθέσεις ή αφαιρέσεις μεταξύ φυσικών αριθμών. Στη συνέχεια, όλοι οι παραπάνω μαθητές χρησιμοποίησαν μία από τις στρατηγικές μετασχηματισμού για την πρόσθεση και την αφαίρεση διψήφιων φυσικών αριθμών που προέκυψε για να δώσουν το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα.

Ωστόσο, από την πρώτη αφαίρεση του ερωτηματολογίου με κρατούμενο (Ερ. 7) και έπειτα, όπου και παρατηρήθηκε μία πτώση στις επιδόσεις των μαθητών, τέσσερις μαθητές αντιμετώπισαν ορισμένους υπολογισμούς με διαφορετικό τρόπο. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν ακολούθησαν τις στρατηγικές των άλλων μαθητών, αλλά πρότειναν πέντε διαφορετικές από τις παραπάνω στρατηγικές για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων. Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι στρατηγικές των μαθητών αυτών για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων προσαρμοσμένες στην Ερ.7 του ερωτηματολογίου.

Πίνακας 4: Οι πέντε νέες στρατηγικές για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων προσαρμοσμένες στην ερ. 7 του ερωτηματολογίου: 37-94=-57.

Διαχωρισμός σε Δεκάδες-Μονάδες (1010) με μετατροπή και ελιγμό (Kye)	Διαχωρισμός σε Δεκάδες-Μονάδες (1010) με μετατροπή στις δεκάδες	Διαχωρισμός σε Δεκάδες-Μονάδες (1010) χωρίς μετατροπή	Συσσώρευση σε Μονάδες-Δεκάδες (u-N10) με Νοερή αριθμογραμμή	Συσσώρευση σε Δεκάδες-Μονάδες (N10) με Νοερή αριθμογραμμή
-(94-37)				
90-30=60	-(90-30)=-60	30-90=-60	-94+7=-87	-94+30=-64
4-7=-3	7-4=3	7-4=3	-87+30=-57	-64+7=-57
60-3=57	-60+3=-57	-60+3=-57		
-57				

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4, οι τέσσερις μαθητές είτε εφάρμοσαν τη μετατροπή και στη συνέχεια τον ελιγμό του Kye, είτε χρησιμοποίησε τη μετατροπή με διαφορετικό τρόπο (π.χ. μετατροπή μόνο στις δεκάδες και όχι στις μονάδες), είτε δεν τη χρησιμοποίησε καθόλου. Επιπλέον, δύο μαθητές, όχι μόνο δεν χρησιμοποίησαν τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης, αλλά απ' ότι φάνηκε από τις απάντησες τους χρησιμοποίησαν το μοντέλο της νοερής αριθμογραμμής για να προσεγγίσουν τον υπολογισμό.

Από τους παραπάνω τέσσερις μαθητές προέκυψαν πέντε νέες στρατηγικές για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων, οι οποίες θα μπορούσαν να ονομαστούν ως εξής:

- *Στρατηγική Διαχωρισμού από Αριστερά προς τα Δεξιά σε Δεκάδες-Μονάδες (1010), χωρίς Μετατροπή.*

- *Στρατηγική Διαχωρισμού από Αριστερά προς τα Δεξιά σε Δεκάδες-Μονάδες (1010),* με *Μετατροπή μόνο στις δεκάδες.*
- *Στρατηγική Διαχωρισμού από Αριστερά προς τα Δεξιά σε Δεκάδες-Μονάδες (1010) με τον ελιγμό του Kye, με Μετατροπή.*
- *Στρατηγική Συσσώρευσης με Μονάδες-Δεκάδες (u-N10), με Αριθμογραμμή.*
- *Στρατηγική Συσσώρευσης με Δεκάδες-Μονάδες (N10), με Αριθμογραμμή.*

Για παράδειγμα, στην ερ.7 του ερωτηματολογίου (37-94=-57), σύμφωνα με τη *Στρατηγική Διαχωρισμού με Δεκάδες-Μονάδες χωρίς Μετατροπή*, οι μαθητές προσθέτουν το -60 από την πρόσθεση των δεκάδων (30-90) με το +3 από την πρόσθεση των μονάδων (7-4), δίνοντας ως τελική απάντηση τον αριθμό -57. Στην ίδια ερώτηση, με βάση τη *Στρατηγική Συσσώρευσης με Μονάδες-Δεκάδες με Αριθμογραμμή*, οι μαθητές κρατούν σταθερό τον αρνητικό όρο της πρόσθεσης, δηλαδή το -94, και με τη βοήθεια του μοντέλου της νοερής αριθμογραμμής προσθέτουν τις μονάδες (+7) και τις δεκάδες (+30) του θετικού όρου, απαντώντας τελικά -57.

Οι συγκεκριμένοι τέσσερις μαθητές πραγματοποίησαν τουλάχιστον έναν λανθασμένο υπολογισμό ακριβώς πριν χρησιμοποιήσουν μία από τις παραπάνω στρατηγικές. Οι λανθασμένοι υπολογισμοί και των τεσσάρων μαθητών δεν ήταν λάθη απροσεξίας, αλλά οφείλονταν σε λανθασμένη χρήση της αρχικής στρατηγικής τους. Έτσι, οι στρατηγικές του Πίνακα 4 προέκυψαν στην προσπάθεια των τεσσάρων μαθητών να προσαρμόσουν τη στρατηγική που χρησιμοποιούσαν αρχικά (1010 ή N10 με μετατροπή) στην πρόσθεση μεταξύ ετερόσημων ακεραίων ώστε τελικά να προκύψει το σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα.

Οι στρατηγικές μετασχηματισμού που χρησιμοποίησαν οι μαθητές

Όπως φαίνεται και στην προηγούμενη ενότητα, ακόμη και οι μαθητές που δεν χρησιμοποίησαν τη μετατροπή (ως στρατηγική προσέγγισης), χρησιμοποίησαν μία από τις στρατηγικές μετασχηματισμού πρόσθεσης και αφαίρεσης που γνωρίζουν ήδη από την πρόσθεση και την αφαίρεση φυσικών αριθμών για να πραγματοποιήσουν τους υπολογισμούς. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι στρατηγικές μετασχηματισμού που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, ανά κατηγορία υπολογισμών. Πιο συγκεκριμένα, οι 12 υπολογισμοί χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες:

- Προσθέσεις (Ερ.1-Ερ.4 του ερωτηματολογίου): είναι οι προσθέσεις μεταξύ δύο αρνητικών αριθμών, όπου οι μαθητές χρησιμοποίησαν στρατηγικές πρόσθεσης.
  π.χ. -48 -37 = -85
- Αφαιρέσεις 1^{ου} τύπου (Ερ.5-Ερ.8): είναι οι προσθέσεις ενός θετικού με έναν αρνητικό αριθμό, όπου οι μαθητές χρησιμοποίησαν στρατηγικές αφαίρεσης.
  π.χ. 62 -78 = -16
- Αφαιρέσεις 2^{ου} τύπου (Ερ.9-Ερ.12): είναι οι προσθέσεις ενός αρνητικού με έναν θετικό αριθμό, όπου οι μαθητές χρησιμοποίησαν, επίσης, στρατηγικές αφαίρεσης.
  π.χ. -72 +46 = -26

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5, οι μαθητές χρησιμοποίησαν κατά κύριο λόγο τη Στρατηγική Διαχωρισμού (1010 και u-1010) στο 33.95% των προσθέσεων και των αφαιρέσεων και το Νοερό Γραπτό Αλγόριθμο (ΓΑ) στο 33.33%, ενώ χαμηλότερο ήταν το ποσοστό χρήσης της Στρατηγικής Συσσώρευσης (N10 και u-N10), η οποία χρησιμοποιήθηκε στο 18.21% των υπολογισμών. Χαμηλότερα ποσοστά χρήσης εμφανίστηκαν στη στρατηγική Πέρασμα από το 10 (A10), στις ολιστικές στρατηγικές (N10C και ΕΞ) στη Μικτή στρατηγική Διαχωρισμού και Συσσώρευσης (10S), ενώ η Στρατηγική Αρίθμησης δε χρησιμοποιήθηκε καθόλου από τους μαθητές.

Πίνακας 5: Οι συχνότητες και τα ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής ανά κατηγορία άσκησης

	u-1010, 1010	u-N10, N10	A10	10S	N10C, ΕΞ	ΓΑ	Σύνολο
Προσθέσεις	63 (58.33%)	4 (3.70%)	2 (1.85%)	1 (0.93%)	4 (3.70%)	34 (31.48%)	108 (100%)
Αφαιρέσεις 1ου τύπου	27 (25.00%)	23 (21.30%)	10 (9.26%)	4 (3.70%)	7 (6.48%)	37 (34.26%)	108 (100%)
Αφαιρέσεις 2ου τύπου	20 (18.52%)	32 (29.63%)	11 (10.19%)	4 (3.70%)	4 (3.70%)	37 (34.26%)	108 (100%)
Σύνολο	110 (33.95%)	59 (18.21%)	23 (7.10%)	9 (2.78%)	15 (4.63%)	108 (33.33%)	324 (100%)

Η Στρατηγική Διαχωρισμού (1010 και u-1010) χρησιμοποιήθηκε στο 58.33% των προσθέσεων του ερωτηματολογίου, ενώ στη συνέχεια μόνο στο 25.% των αφαιρέσεων 1^{ου} τύπου και στο 18.52% των αφαιρέσεων 2^{ου} τύπου. Αντίθετα, η Στρατηγική Συσσώρευσης (u-N10 και N10) που χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα στις προσθέσεις (3.70%), χρησιμοποιήθηκε στο 21.30% των αφαιρέσεων 1^{ου} τύπου και στο 29.63% αυτών του 2^{ου} τύπου. Επιπλέον, η στρατηγική του Νοερού Γραπτού Αλγόριθμου (ΓΑ) διατήρησε το ποσοστό της χρήσης της από 31.48% στις προσθέσεις στο 34.26% στις αφαιρέσεις. Τέλος, το Πέρασμα από το 10 (A10) χρησιμοποιήθηκε σε αρκετά σημαντικό ποσοστό (περίπου στο 10%) και στους δύο τύπους αφαιρέσεων.

Δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη χρήση της Στρατηγικής Διαχωρισμού, της Στρατηγικής Συσσώρευσης, της στρατηγικής Πέρασμα από το 10 και της στρατηγικής του Νοερού Γραπτού Αλγόριθμου ανάμεσα στα δύο είδη αφαιρέσεων $x^2(3)$= 2.52, p=.4720. Επομένως, αναφορικά με το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, φαίνεται πως η σειρά των όρων (θετικός και αρνητικός όρος) στην αφαίρεση δεν επηρέασε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές επέλεξαν τη στρατηγική τους.

Όσον αφορά τις Στρατηγικές Διαχωρισμού (u-1010, 1010) και Συσσώρευσης (u-N10, N10) παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στη χρήση τους ανάμεσα στις Προσθέσεις και τις Αφαιρέσεις 1ου είδους $x^2(1)= 25.85$, $p<.001$, και ανάμεσα στις Προσθέσεις και τις Αφαιρέσεις 2ου είδους x^2 $(1)=42.84$, $p<.001$. Σχετικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, παραπάνω φαίνεται πως το είδος της πράξης (πρόσθεση ή αφαίρεση) επηρέασε τους μαθητές στην επιλογή τους ανάμεσα στις δύο στρατηγικές.

Επιπλέον, αναφορικά με την ύπαρξη κρατουμένου στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, για τις Στρατηγικές Διαχωρισμού (u-1010, 1010) και Συσσώρευσης (u-N10, N10) παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στη χρήση τους ανάμεσα στις αφαιρέσεις με κρατούμενο και σε αυτές χωρίς κρατούμενο $x^2(1)= 13.48$, $p=.001$. Φαίνεται έτσι πως οι μαθητές χρησιμοποιούν τη Στρατηγική Συσσώρευσης στις αφαιρέσεις με κρατούμενο περισσότερο από τη Στρατηγική Διαχωρισμού.

Ευελιξία στη χρήση στρατηγικών

Όσον άφορα το πέμπτο ερευνητικό ερώτημα, η ευελιξία των μαθητών μελετήθηκε με βάση το ρεπερτόριο των στρατηγικών τους, δηλαδή με βάση τον αριθμό των διαφορετικών στρατηγικών μετασχηματισμού που χρησιμοποίησαν κατά τη διάρκεια του ερωτηματολογίου. Για τη διάκριση αυτή, οι δύο στρατηγικές διαχωρισμού 1010 και u-1010 θεωρήθηκαν δύο διαφορετικές στρατηγικές μετασχηματισμού. Το ίδιο και οι στρατηγικές συσσώρευσης N10 και u-N10, αλλά και οι δύο ολιστικές στρατηγικές N10C και ΕΞ. Μαθητές που χρησιμοποιούν έως δύο διαφορετικές στρατηγικές μετασχηματισμού χαρακτηρίζονται «μη ευέλικτοι», ενώ αυτοί που χρησιμοποιούν τρεις ή περισσότερες διαφορετικές στρατηγικές χαρακτηρίζονται ως «ευέλικτοι».

Με βάση το πλήθος των διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές χωρίστηκαν σε *ευέλικτους* και *μη ευέλικτους*. Ως μη ευέλικτοι χαρακτηρίστηκαν 15 μαθητές (55.56%) που χρησιμοποίησαν μία ή δύο στρατηγικές σε όλο το ερωτηματολόγιο. Ως ευέλικτοι χαρακτηρίστηκαν 12 μαθητές (44.44%) που χρησιμοποίησαν τρεις ή περισσότερες στρατηγικές σε όλο το ερωτηματολόγιο. Στον Πίνακα 6 καταγράφονται στοιχεία για τους μαθητές και το πλήθος των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν.

Πίνακας 6: Το πλήθος των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές

Πλήθος διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν	Πλήθος μαθητών (%)
1 στρατηγική	7 (25.93%)
2 στρατηγικές	8 (29.63%)

3 στρατηγικές	6 (22.22%)
4 στρατηγικές	5 (18.52%)
5 στρατηγικές	1 (3.70%)
Σύνολο	27 (100.00%)

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 6, η ομάδα των μη ευέλικτων μαθητών αποτελείται από επτά μαθητές (25.93%) που χρησιμοποίησαν μόνο μία στρατηγική σε όλες τις πράξεις του ερωτηματολογίου και από άλλους οκτώ μαθητές (29.63%) που χρησιμοποίησαν δύο στρατηγικές για όλες τις πράξεις του ερωτηματολογίου. Οι πρώτοι επτά μαθητές χρησιμοποίησαν είτε τη Στρατηγική Διαχωρισμού 1010 είτε τη στρατηγική του Νοερού Γραπτού Αλγόριθμου ΓΑ για όλους τους υπολογισμούς του ερωτηματολογίου. Οι υπόλοιποι οκτώ μαθητές κάποια στιγμή άλλαξαν την αρχική στρατηγική που χρησιμοποιούσαν στους προηγούμενους υπολογισμούς τους. Πιο συγκεκριμένα, ένας από αυτούς άλλαξε την αρχική του στρατηγική στην τελευταία πρόσθεση (Ερ.4). Δύο άλλοι μαθητές άλλαξαν την αρχική τους στρατηγική στην πρώτη αφαίρεση (Ερ.5), δηλαδή χρησιμοποίησαν μία στρατηγική για τις προσθέσεις και μία άλλη για τις αφαιρέσεις. Ένας μαθητής άλλαξε την αρχική του στρατηγική στη δεύτερη αφαίρεση του ερωτηματολογίου (Ερ.6), δηλαδή πραγματοποίησε τις μισές πράξεις του ερωτηματολογίου με μία στρατηγική και τις άλλες μισές με μία άλλη. Τρείς μαθητές άλλαξαν την αρχική τους στρατηγική στην πρώτη αφαίρεση με κρατούμενο (Ερ.7). Τέλος, ένας μαθητής άλλαξε στρατηγική στη δεύτερη αφαίρεση με κρατούμενο (Ερ.8).

Οι παραπάνω δεκαπέντε μαθητές χαρακτηρίστηκαν μη-ευέλικτοι στους νοερούς υπολογισμούς τους και υπερτερούν αριθμητικά από τους υπόλοιπους μαθητές που χρησιμοποίησαν τουλάχιστον τρεις διαφορετικές στρατηγικές και χαρακτηρίστηκαν ευέλικτοι.

Συμπεράσματα-Συζήτηση

Η παρούσα έρευνα μελέτησε τις νοερές στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης που χρησιμοποιούν 27 μαθητές Β' και Γ' Γυμνασίου στην πρόσθεση μεταξύ ομόσημων και ετερόσημων διψήφιων ακεραίων και την ευελιξία τους με αυτές. Πιο συγκεκριμένα, μελετήθηκαν οι στρατηγικές προσέγγισης που χρησιμοποιούν οι μαθητές (δηλαδή, ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές θα πάρουν αποφάσεις για το πρόσημο του αποτελέσματος και την πράξη που θα πραγματοποιήσουν μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακεραίων), οι στρατηγικές μετασχηματισμού που χρησιμοποιούν οι μαθητές (δηλαδή, ο λεπτομερής τρόπος με τον οποίο οι αριθμοί μετασχηματίζονται για να προκύψει μια λύση) και η ευελιξία των μαθητών στις στρατηγικές μετασχηματισμού.

Οι επιδόσεις των μαθητών ήταν αρκετά ικανοποιητικές, καθώς πραγματοποιήθηκε μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό λανθασμένων υπολογισμών, των οποίων η πλειοψηφία οφείλονταν σε κόπωση ή απλή απροσεξία των μαθητών. Επομένως, φάνηκε ότι οι μαθητές της παρούσας έρευνας κατάφεραν να υπολογίσουν νοερά πρόσθεση και αφαίρεση ομόσημων και ετερόσημων ακεραίων.

Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε ένα πολύ μικρό ποσοστό λαθών στην εφαρμογή της στρατηγικής 1010 και N10C. Πρόκειται για λάθη που είναι συστηματικά σφάλματα, τα οποία προκύπτουν από τη συνεπή εφαρμογή μιας μεθόδου, αλλά με λανθασμένο τρόπο. Αυτό δείχνει μία δυσκολία των μαθητών με την πράξη της αφαίρεσης μεταξύ των φυσικών αριθμών όσο και με την ίδια τη νοερή στρατηγική διαχωρισμού και το φαινόμενο αυτό αξίζει μία βαθύτερη διερεύνηση συγκριτικά με τα λάθη απροσεξίας που οφείλονται σε κόπωση ή απλή έλλειψη προσοχής.

Τα αποτελέσματα δείχνουν πως η πλειοψηφία των μαθητών, όπως ήταν αναμενόμενο, μετέτρεψε τον υπολογισμό που περιείχε θετικούς και αρνητικούς ακεραίους σε έναν ισοδύναμο υπολογισμό που περιείχε φυσικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας κανόνες που διέπουν την πρόσθεση ακεραίων. Στη συνέχεια, οι μαθητές χρησιμοποίησαν νοερές στρατηγικές μετασχηματισμού πρόσθεσης και αφαίρεσης που ήταν διαθέσιμες από τις νοερές πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών. Δηλαδή, η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποίησε τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης και στη συνέχεια μία από τις νοερές στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης διψήφιων φυσικών ως στρατηγικές μετασχηματισμού.

Τα αποτελέσματα έρχονται σε συμφωνία και με τη μοναδική έρευνα που βρέθηκε στη βιβλιογραφία να μελετά τις νοερές στρατηγικές πρόσθεσης μεταξύ ακεραίων (Rezat, 2011). Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές χρησιμοποιούν τη στρατηγική της μετατροπής στην πρόσθεση μεταξύ ακεραίων, η οποία είναι ουσιαστικά η εφαρμογή του κανόνα που τους διδάχθηκε με βάση το σχολικό βιβλίο: $-α+β=-(α-β)$ ή $-α-β=-(α+β)$, ο οποίος βασίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα: $α(β+γ)=αβ+αγ$. Επιπλέον, υποστηρίζεται πως η μετατροπή είναι η πιο κοινή στρατηγική, την οποία οι μαθητές συνήθως χρησιμοποιούν χωρίς απαραίτητα να την καταλαβαίνουν (Rezat, 2011).

Ωστόσο, στην παρούσα έρευνα, εμφανίστηκαν και πέντε νέες στρατηγικές για την πρόσθεση μεταξύ ετερόσημων ακεραίων, οι οποίες προέκυψαν από τις απαντήσεις κάποιων μαθητών που δεν ακολούθησαν την κυρίαρχη τάση, δηλαδή δε χρησιμοποίησαν τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης. Τέσσερις συνολικά μαθητές, από τους είκοσι επτά, είτε χρησιμοποίησαν τη μετατροπή με διαφορετικό τρόπο, είτε δεν τη χρησιμοποίησαν καθόλου σε ορισμένες πράξεις, πραγματοποιώντας δημιουργικούς ελιγμούς και χρησιμοποιώντας νέες στρατηγικές οι οποίες δεν τους έχουν διδαχθεί επίσημα.

Οι στρατηγικές αυτές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι δεν έχουν εντοπιστεί ή καταγραφεί στην αντίστοιχη βιβλιογραφία (Rezat, 2011), επομένως θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν νέες στρατηγικές για την νοερή πρόσθεση μεταξύ ετερόσημων ακεραίων. Επιπλέον, όπως και στην περίπτωση του ελιγμού του Kye, οι πέντε νέες στρατηγικές αναδεικνύουν ένα υψηλό επίπεδο κατανόησης, δημιουργικότητας και ευελιξίας των τεσσάρων αυτών μαθητών. Ωστόσο, χρειάζεται περισσότερη έρευνα σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών ώστε να ελεγχθεί αν οι συγκεκριμένες στρατηγικές χρησιμοποιούνται και από άλλους μαθητές.

Όσον άφορα τις στρατηγικές μετασχηματισμού που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στην πρόσθεση και την αφαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών για να πραγματοποιήσουν τους υπολογισμούς τους και να βρουν το αριθμητικό αποτέλεσμα, αυτές ήταν στρατηγικές που έχουν επισημανθεί στη βιβλιογραφία του πεδίου. Πιο συγκεκριμένα εμφανίστηκε κατά κύριο λόγο η Στρατηγική Διαχωρισμού (1010 και u-1010), ο Νοερός Γραπτός Αλγόριθμος (ΓΑ) και η Στρατηγική Συσσώρευσης (N10 και u-N10). Η Στρατηγική του Διαχωρισμού (1010) είναι μία από τις πιο κοινές στρατηγικές τόσο στην Ελλάδα όσο και σε άλλες χώρες (Λεμονίδης, 2013) και πολλοί ερευνητές αναφέρονται σε αυτή και στη Στρατηγική Συσσώρευσης (1010 και N10) ως τις δύο κυρίαρχες στρατηγικές για τη νοερή πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών μέχρι το 100 (Cobb, 1995, Cooper, Heirdsfield, & Irons, 1996, Fuson, 1992).

Οι μαθητές φαίνεται να επηρεάστηκαν από το είδος της πράξης (πρόσθεση ή αφαίρεση) στην επιλογή ανάμεσα στη στρατηγική Διαχωρισμού και σε αυτή της Συσσώρευσης. Συγκεκριμένα, στις προσθέσεις χρησιμοποίησαν περισσότερο τη Στρατηγική του Διαχωρισμού, ενώ στις αφαιρέσεις -ιδιαίτερα αυτές με κρατούμενο- τη Στρατηγική της Συσσώρευσης. Γενικότερα συστήνεται στους μαθητές να χρησιμοποιούν το Διαχωρισμό στις προσθέσεις, καθώς στις αφαιρέσεις, ιδιαίτερα σε αυτές με κρατούμενο, είναι πιο δύσκολη διαδικασία (Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000). Αυτό εμφανίστηκε και παρούσα μελέτη, καθώς τα περισσότερα λάθη πραγματοποιήθηκαν στην εφαρμογή του Διαχωρισμού στις αφαιρέσεις.

Επιπλέον, οι μαθητές δεν φαίνεται να επηρεάστηκαν από τη διαφορετική σειρά του θετικού και του αρνητικού όρου στην επιλογή της στρατηγικής στα δύο είδη των αφαιρέσεων του ερωτηματολογίου. Επηρεάστηκαν, όμως, από την ύπαρξη κρατούμενου στην αφαίρεση όπου προτιμήθηκε η Συσσώρευση από τον Διαχωρισμό. Άλλωστε, η N10 θεωρείται πιο ασφαλής στρατηγική για αφαιρέσεις με κρατούμενο (Macintyre & Forrester, 2003).

Με βάση το πλήθος των διαφορετικών στρατηγικών μετασχηματισμού που χρησιμοποίησαν, οι μαθητές της παρούσας έρευνας χαρακτηρίστηκαν στην πλειοψηφία τους ως μη-ευέλικτοι, καθώς η πλειοψηφία τους χρησιμοποίησε το πολύ δύο διαφορετικές στρατηγικές στους υπολογισμούς τους. Ωστόσο, η συνεχής χρήση μίας μόνο στρατηγικής σε όλους τους υπολογισμούς μπορεί κάποιες φορές να αποτελεί πιο ευέλικτο τρόπο από τη συνεχή εναλλαγή στρατηγικών (Λεμονίδης, 2013).

Μια σύγχρονη προσέγγιση στο ζήτημα της ευελιξίας αναφέρει πως πλέον ο προσδιορισμός της ευελιξίας δεν έχει μείνει απλώς στην ικανότητα του κάθε μαθητή να διαθέτει και να εναλλάσσει απλώς πολλές στρατηγικές (Λεμονίδης, 2013), αλλά χρειάζεται να τις διαλέγει συνειδητά και να τις χρησιμοποιεί αποτελεσματικά. Μάλιστα, υποστηρίζεται πως τα χαρακτηριστικά του προβλήματος, η ταχύτητα και η αποτελεσματικότητα του μαθητή και οι μεταβλητές του πλαισίου μπορεί να επηρεάσουν την ευέλικτη επιλογή και εφαρμογή μιας στρατηγικής από τον μαθητή (Shrager & Siegler, 1998; Ellis, 1997; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009; Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000; Threlfall, 2002; 2009). Μια μελλοντική μελέτη θα μπορούσε να προσφέρει αποτελέσματα με βάση μια τέτοια προσέγγιση, καθώς στην παρούσα μελέτη οι παραπάνω παράγοντες δε μελετήθηκαν και δε συσχετίστηκαν με τη στρατηγική συμπεριφορά των μαθητών.

Αν και στην παρούσα μελέτη η ευελιξία μελετήθηκε με βάση το ρεπερτόριο των στρατηγικών των μαθητών, υπήρξαν τέσσερις μαθητές που πρότειναν πέντε νέες στρατηγικές πρόσθεσης ετερόσημων ακεραίων. Οι τέσσερις αυτοί μαθητές χρησιμοποίησαν νέες και δημιουργικές στρατηγικές και ελιγμούς, οι οποίες θυμίζουν δημιουργικές στρατηγικές που έχουν αναφερθεί στο παρελθόν σε έρευνες που μελέτησαν νοερές στρατηγικές στο σύνολο των φυσικών αριθμών (Wilson, 1971; Madell, 1985; Thompson, 2000). Η πρώτη έρευνα στην οποία αναφέρθηκε μία τέτοια στρατηγική είναι αυτή των Cochran, Barson, & Davis (1970), στην οποία ένας μαθητής τρίτης τάξης, ο Kye, στην αφαίρεση 64-28 πρόσθεσε 40 και «*αρνητικό 4*» και απάντησε 36 (Cochran, Barson, & Davis, 1970, σελ. 211).

Το ενδιαφέρον σε περιπτώσεις όπως αυτή του Kye, δεν είναι το γεγονός της πρωτοτυπίας της μεθόδου του για την ιστορία των μαθηματικών, αλλά η δημιουργική πρωτοτυπία της σκέψης των παιδιών σε σχέση με την εμπειρία τους και οι συνθήκες που δημιουργεί ένας εκπαιδευτικός στην τάξη ώστε να ενθαρρύνει παρόμοιους συλλογισμούς (Cochran, Barson, & Davis, 1970). Πράγματι, η σημασία του παραπάνω περιστατικού δεν έγκειται μόνο στην απροσδόκητη μέθοδο του μαθητή, αλλά και στο ενδιαφέρον της δασκάλας να ασχοληθεί στη συνέχεια αποτελεσματικά με αυτή, καθώς και στο γεγονός ότι είχε δημιουργήσει μια τέτοια ατμόσφαιρα στην τάξη, που ήταν δεκτική σε συνεισφορές από τους μαθητές (Christiansen, Howson, & Otte, 2012).

Οι πέντε νέες στρατηγικές που προέκυψαν από τους τέσσερις μαθητές της παρούσας μελέτης δείχνουν, όπως και στην περίπτωση του Kye, πως οι ασυνήθιστες και απροσδόκητες ιδέες των μαθητών δεν είναι απαραίτητα και λάθος, αντίθετα μπορεί να είναι σε υψηλό βαθμό ευφυείς και πολύτιμες (Christiansen, Howson, & Otte, 2012). Μάλιστα, είναι σημαντικό να σημειωθεί πως και οι τέσσερις μαθητές της παρούσας έρευνας πρότειναν μία νέα στρατηγική για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων αμέσως μετά από λανθασμένη χρήση μίας στρατηγικής των φυσικών αριθμών που προσπάθησαν νωρίτερα να εφαρμόσουν στους ακεραίους.

Έπειτα από την έρευνα των Cochran, Barson, & Davis (1970), αρκετοί ερευνητές αναφέρθηκαν στην περίπτωση της μεθόδου του Kye, για να περιγράψουν παρόμοια περιστατικά δημιουργικών μαθητών (Wilson, 1971; Madell, 1985; Thompson, 2000), για να περιγράψουν τις αρνητικές επιπτώσεις της διδασκαλίας του τυπικού γραπτού αλγορίθμου στη μάθηση των μαθηματικών (Treffers, 1991), για να περιγράψουν τη δημιουργικότητα στον τομέα των μαθηματικών (Aiken Jr, 1973; Davis, 1984; Duffin & Simpson, 1995) και για να τονίσουν την ανάγκη να αφουγκραστούμε τις μαθηματικές μεθόδους που σκέφτονται και προτείνουν οι μαθητές (Christiansen, Howson, & Otte, 2012). Πράγματι, τόσο η ερευνητική όσο και η εκπαιδευτική κοινότητα αξίζει να μελετήσουν βαθύτερα και να αξιοποιήσουν μεθόδους και ιδέες μαθητών όπως αυτή του Kye ή των τεσσάρων μαθητών της παρούσας μελέτης.

Στη χώρα μας, κατά το ακαδημαϊκό έτος 2018-2019, οι ακέραιοι και οι αρνητικοί αριθμοί γενικότερα εμφανίζονται για πρώτη φορά στο καινούριο βιβλίο μαθηματικών στην Ε΄ Δημοτικού των Βρυώνης, Δουκάκης, Καρακώστα, Μπαραλή, & Στραύρου (2016), στην έκτη ενότητα του δεύτερου τεύχους (σελ.27). Σε μελλοντική έρευνα θα άξιζε να διερευνηθούν οι στρατηγικές νοερού υπολογισμού στην πρόσθεση μεταξύ ακεραίων που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, οι οποίοι θα έχουν έρθει σε μία πρώτη, περισσότερο διαισθητική επαφή με τους ακέραιους και τις πράξεις μεταξύ τους, χωρίς να τους διδαχθούν οι αυστηροί τυποποιημένοι κανόνες της μετατροπής.

Σημειώσεις

[i] Για κάθε στρατηγική μετασχηματισμού αναφέρεται η ελληνική ονομασία της, στη συνέχεια σε παρένθεση ο αντίστοιχος αγγλικός όρος και τέλος, η κωδικοποιημένη ονομασία της σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία (βλ. Λεμονίδης, 2013). Για τις στρατηγικές που δεν βρέθηκε κάποιος κωδικός στη βιβλιογραφία χρησιμοποιήθηκε η συντομογραφία της ονομασίας στα ελληνικά.

Η Ιωάννα Λεμονή είναι απόφοιτη του ΔΔΠΜΣ «Διδακτική των Μαθηματικών» (2019) και η παρούσα μελέτη εκπονήθηκε στα πλαίσια της διπλωματικής της εργασίας με τίτλο «Στρατηγικές νοερού υπολογισμού σε πρόσθεση και αφαίρεση με ακεραίους» υπό την επίβλεψη του καθ. Κωνσταντίνου Π. Χρήστου

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Aiken Jr, L. R. (1973). Ability and creativity in mathematics. *Review of Educational Research, 43*(4), 405-432.

Ansari, D. (2012). The foundations of numerical and mathematical abilities. A literature review. Global Partnership for Education. GPE. Working paper series on Learning, 4.

Beishuizen, M. (1985). Evaluation of the use of structured materials in the teaching of primary mathematics. *New directions in education and training technology: Aspects of educational technology*, *18*, 246-258.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 294-323.

Beishuizen, M., Van Putten, C. M., & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction*, *7*(1), 87-106.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333–339.

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and instruction*, *10*(3), 221-247.

Bofferding, L. (2010, October). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. In *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North*

American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 6, pp. 703-710).

Callingham, R., & Watson, J. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal, 16*(2), 69-86.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. In *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*.

Christiansen, H., Howson, A. G., & Otte, M. (Eds.). (2012). *Perspectives on mathematics education: papers submitted by members of the Bacomet Group* (Vol. 2). Springer Science & Business Media.

Cobb, P. (1995). Cultural tools and mathematical learning: A case study. *Journal for research in mathematics education, 26*(4), 362-385.

Cochran, B. S., Barson, A., & Davis, R. B. (1970). Child-created mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *17*(3), 211-215.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A., & Irons, C. J. (1996). Children's mental strategies for addition and subtraction word problems. *Children's number learning*, 147-162.

Davis, R. B. (1984). Learning mathematics: *The cognitive science approach to mathematics education.* Greenwood Publishing Group.

Duffin, J. M., & Simpson, A. P. (1995). A theory, a story, its analysis, and some implications. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(2), 237-250.

Ellis, S. (1997). Strategy choice in sociocultural context. *Developmental Review, 17*(4), 490-524.

Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, 53-187.

Hartnett, J. E. (2007) Categorisation of Mental Computation Strategies to Support Teaching and to Encourage Classroom Dialogue. In Watson, Jane and Beswick, Kim, Eds. *Proceedings 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia - Mathematics: Essential Research, Essential Practice,* pp. 345-352, Hobart, Tasmania.

Jansen, B. R., Schmitz, E. A., & van der Maas, H. L. (2016). Affective and motivational factors mediate the relation between math skills and use of math in everyday life. *Frontiers in psychology*, *7*, 513.

Lemonidis, C. (2016). *Mental computation and estimation: Implications for mathematics, education research, teaching and learning*. Oxon: Routledge.

Lemonidis, C., & Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *Journal of Educational Research*, *1*, 61-74.

Macintyre, T., & Forrester, R. (2003). Strategies for mental calculation. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *23*(2), 49-54.

Madell, R. (1985). Children's natural processes. *The arithmetic teacher, 32*(7), 20-22.

Rezat, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers*. Proceedings of CERME-7* (pp. 396-405). Rseszow, Poland: CERME.

Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science, 9*(5), 405-410.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in school*, *29*(1), 24-26.

Thompson, F. I., & Smith, F. (1999). *Mental calculation strategies for the addition and subtraction of 2-digit numbers*. Department of Education, University of Newcastle.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational studies in Mathematics*, *50*(1), 29-47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*(5), 541-555.

Treffers, A. (1991). Meeting innumeracy at primary school*. Educational Studies in Mathematics, 22*(4), 333-352.

Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal, 35*(1), 89–94.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*(3), 335.

Wilson, J. W. (1971). Evaluation of learning in secondary school mathematics. *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*, 646-696.

Whitacre, I., Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2012). Happy and sad thoughts: An exploration of children's integer reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 356-365.

Young, L. K., & Booth, J. L. (2015). Student magnitude knowledge of negative numbers. *Journal of Numerical Cognition*, *1*(1), 38-55.

Ελληνική

Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ., (2007): *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*, Βιβλίο Μαθητή, ΟΕΔΒ

Βρυώνης Κ., Δουκάκης Σ., Καρακώστα Β., Μπαραλής Γ., Στραύρου Ι., (2016): *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού,* Βιβλίο Εκπαιδευτικού, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών Και Εκδόσεων «Διόφαντος»

Βρυώνης Κ., Δουκάκης Σ., Καρακώστα Β., Μπαραλής Γ., Στραύρου Ι., (2016): *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού*, Βιβλίο Μαθητή, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών Και Εκδόσεων «Διόφαντος»

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ'***.** Εκδόσεις Ζυγός. Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης, Χ., & Λυγούρας, Γ., (2008). Η επίδοση και η ευελιξία των μαθητών της τρίτης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. Ευκλείδης Γ', 68, 20-44.

Van de Walle, John A. (2007). Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο : *Μια εξελικτική διδασκαλία* (Αλεξανδροπούλου, Α., Κομπορόζος, Β., Μετάφ.). Αθήνα : Τυπωθήτω. (Το πρωτότυπο έργο δημοσιεύτηκε το 2001).