Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 13 (2019)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δημήτρης Μαρής (Dimitris Maris), Κωνσταντίνος Χρήστου (Konstantinos Christou)

doi: [10.12681/enedim.21967](https://doi.org/10.12681/enedim.21967) http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/index

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μαρής Δημήτρης και Κωσταντίνος Π. Χρήστου

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, dmar.1986@google.com

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, kchristou@uowm.gr

Περίληψη: Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν μια από τις βασικότερες έννοιες στα μαθηματικά. Η έρευνα έχει εντοπίσει μεγάλες δυσκολίες στην κατανόησή τους και έχει καταγράψει πολλά λάθη, παρανοήσεις και αρνητικές στάσεις από τους μαθητές. Στην παρούσα μελέτη με τη χρήση της μαθηματικής λογοτεχνίας γίνεται προσπάθεια να αντιμετωπιστούν αυτές οι παρανοήσεις και οι στάσεις να γίνουν πιο θετικές. Ο πρώτος συγγραφέας του άρθρου έγραψε μια μαθηματική ιστορία με τίτλο "Ταξίδι προς το Μηδέν" που ασχολείται με τις έννοιες της διάταξης και της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Η κατανόηση των ρητών πριν και μετά την ανάγνωση της ιστορίας ελέγχθηκε με ερωτηματολόγια και ατομικές ημιδομημένες συνεντεύξεις σε έξι μαθητές της Στ' τάξης ενός δημοτικού σχολείου στην Ελλάδα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μια μαθηματική ιστορία θα μπορούσε να αντιμετωπίσει παρανοήσεις στους ρητούς και να βελτιώσει τη στάση των μαθητών στους ρητούς.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματική λογοτεχνία, Ρητοί αριθμοί, Παρανοήσεις, Στάσεις.

Abstract: Rational numbers are a cornerstone of mathematics and mathematics education. Mathematics education research has identified great difficulties understanding rational numbers and has recorded a variety of errors, misconceptions and negative attitudes towards them. In this study an attempt to use Mathematical literature as a mean to address certain difficulties, misunderstandings and attitudes with rational numbers. The first author has written a mathematical story named "Ταξίδι προς το Μηδέν (Traveling to zero)" approaching ordering and density of rational numbers in an alternative way. In order to test this story as an educational instrument, questionnaires were given to 6th graders from Greece, in pre/post test design and individual semi-structured interviews were conducted. The results showed that a mathematical story could help students address their misconceptions with rational numbers and also to improve their attitudes towards them.

Keywords: Mathematical Literature, Rational Numbers, Misconceptions, Attitudes.

Εισαγωγή

Οι ρητοί αριθμοί

Η έρευνα έχει επανειλημμένως δείξει ότι δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών αριθμών εμφανίζονται σε μαθητές από όλες τις τάξεις του σχολείου (Cramer, Post & delMas, 2002 · Li, Chen & An, 2009 · Mazzocco & Devlin, 2008) και ακόμη και σε ενήλικες (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Με τη μελέτη αυτών των δυσκολιών στους ρητούς αριθμούς έχουν αναγνωριστεί αρκετές παρανοήσεις που ευθύνονται για τα λάθη που εμφανίζουν οι μαθητές στις πράξεις και στη διάταξη των ρητών. Οι παρανοήσεις αυτές εμφανίζονται και στην κλασματική αλλά και στη δεκαδική τους αναπαράσταση (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010 · Moskal & Magone, 2000 · Moss, 2005 · Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Οι διαφορές ανάμεσα στις ιδιότητες των ρητών και των φυσικών αριθμών σε συνδυασμό με την πρότερη γνώση των φυσικών αριθμών έχει υποστηριχθεί ότι δημιουργούν κάποιες από τις παρανοήσεις και τα λάθη που κάνουν οι μαθητές με τους ρητούς. Συγκεκριμένα, οι Vamvakoussi και Vosniadou (2010) ισχυρίζονται ότι ένας από τους λόγους που οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται με τους ρητούς είναι ότι βασίζονται στη μαθηματική λογική και στα εργαλεία που έχουν αποκτήσει από τους φυσικούς αριθμούς · λογική και εργαλεία που πρέπει να αλλάξουν για να χρησιμοποιηθούν στους ρητούς αριθμούς αλλιώς μπορούν να οδηγήσουν σε παρανοήσεις και λάθη. Η τάση των μαθητών να εφαρμόζουν ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε μη-φυσικούς ονομάζεται συχνά και Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού *(natural number bias)* (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018 · Ni, & Zhou, 2005).

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού οδηγεί σε αρκετές παρανοήσεις που δημιουργούνται στους μαθητές/τριες. Οι πιο συνήθεις έχουν συγκεντρωθεί από τους Van Hoof et al. (2015) και παρουσιάζονται στη συνέχεια. Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι παρανοήσεις που εμφανίζονται στη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών [Παρανόηση δεκαδικών (ΠΔ)] και στον Πίνακα 2 οι παρανοήσεις που εμφανίζονται στην κλασματική αναπαράσταση των ρητών [Παρανόηση κλασμάτων (ΠΚ)]. Τέλος, στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται κάποιες παρανοήσεις που εμφανίζονται στον συμβολισμό (Παρανόηση συμβολισμού ρητών (ΠΣΡ)) και στην πυκνότητα των ρητών αριθμών [Παρανόηση πυκνότητας ρητών (ΠΠΡ)], όπως η τάση των μαθητών να θεωρούν τους ρητούς αριθμούς ως ένα ενιαίο σύνολο αριθμών (Killpatrick, Swafford, & Findell, 2001) και αντιμετωπίζουν τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα ως «διαφορετικούς» αριθμούς αντί για διαφορετικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών (Khoury & Zazkis, 1994.

Παρανόηση δεκαδικών 1 (ΠΔ1)	Ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος, π.χ. το 0,250 είναι μεγαλύτερο από το 0,34 (Resnick et al., 1989).
Παρανόηση δεκαδικών 2 (ΠΔ2)	Το μηδέν στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού μεγαλώνει τον αριθμό, π.χ. 2,50 είναι μεγαλύτερο από το 2,5 (Smith, Solomon, & Carey, 2005).
Παρανόηση δεκαδικών 3 (ΠΔ3)	Το μηδέν μπροστά από τα δεκαδικά ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού δεν δίνει διαφορετική αξία στα ψηφία του αριθμού, π.χ. 0,034 = 0,34 (Moss & Case, 1999).
Παρανόηση δεκαδικών 4 (ΠΔ4)	Ανάμεσα σε δύο ψευδό-διαδοχικούς δεκαδικούς αριθμούς δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί, π.χ. ανάμεσα στο 0,1 και στο 0,2 δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Πίνακας 1: Συνήθεις παρανοήσεις στην δεκαδική αναπαράσταση των ρητών. (Σε παρένθεση παρουσιάζονται κάποιες βασικές αναφορές στη βιβλιογραφία που έχουν αναδείξει αυτές τις παρανοήσεις)

Παρανόηση κλασμάτων 1 (ΠΚ1)	Το κλάσμα με τα μικρότερα/μεγαλύτερα ψηφία είναι το μικρότερο/μεγαλύτερο, π.χ. 3/4 < 5/6 αλλά και 4/3 < 5/6 (Stafylidou & Vosniadou, 2004 · Moss, 2005).
Παρανόηση κλασμάτων 2 (ΠΚ2)	Για να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω/αφαιρώ στον αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο αριθμό, π.χ. 1/2 = 4/5 (Ni, & Zou, 2005).
Παρανόηση κλασμάτων 3 (ΠΚ3)	Η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα, π.χ. 3/2 < 1 (Stafylidou & Vosniadou, 2004).
Παρανόηση κλασμάτων 4 (ΠΚ4)	Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί, π.χ. Ανάμεσα σε δύο κλάσματα δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί, π.χ. ανάμεσα στο 1/2 και στο 1/3 δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Πίνακας 2: Συνήθεις παρανοήσεις στην κλασματική αναπαράσταση των ρητών. (Σε παρένθεση παρουσιάζονται κάποιες βασικές αναφορές στη βιβλιογραφία που έχουν αναδείξει αυτές τις παρανοήσεις)

Παρανόηση συμβολισμού ρητών 1 (ΠΣΡ)	Οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί και όχι διαφορετικοί συμβολισμοί ενός ρητού αριθμού (Khoury & Zazkis, 1994).
Παρανόηση πυκνότητας ρητών 2 (ΠΠΡ)	Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς και ανάμεσα σε δύο κλάσματα υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Πίνακας 3: Συνήθεις παρανοήσεις που αφορούν τον συμβολισμό και την πυκνότητα των ρητών. (Σε παρένθεση παρουσιάζονται κάποιες βασικές αναφορές στη βιβλιογραφία που έχουν αναδείξει αυτές τις παρανοήσεις)

Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) οι μαθητές/τριες μετά τις τάξεις Ε’ και Στ’ Δημοτικού θα πρέπει να μπορούν: να συγκρίνουν δύο ρητούς αριθμούς, να διατάσσουν ρητούς αριθμούς και να εντοπίζουν την θέση τους στην αριθμογραμμή και να παρεμβάλλουν έναν ή περισσότερους ρητούς αριθμούς ανάμεσα σε δύο άλλους, εφόσον αυτό είναι δυνατό. Επίσης, σύμφωνα με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΝΠΣ) αλλά και με τα πρότυπα του NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) οι μαθητές/τριες θα πρέπει να μπορούν να αντιληφθούν την σχέση μεταξύ φυσικών, δεκαδικών και κλασματικών αριθμών και να χρησιμοποιούν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις τους (δεκαδικός ή κλάσμα) ανάλογα με το κάθε πρόβλημα.

Στην κατανόηση των ρητών αριθμών παίζει ρόλο και η στάση των μαθητών θετική η αρνητική όταν αντιμετωπίζουν τους αριθμούς αυτούς. Με τον όρο στάσεις οι Φιλίππου & Χρίστου, (2001) ορίζουν τις τάσεις και την προδιάθεση των μαθητών να ανταποκρίνονται με κάποιο ομοιόμορφο τρόπο, ευμενώς (θετικές στάσεις) ή δυσμενώς (αρνητικές στάσεις), έναντι συγκεκριμένων εννοιών ή και μαθημάτων.

Διδακτικές παρεμβάσεις για την κατανόηση των ρητών

Η διδασκαλία των ρητών αριθμών έχει απασχολήσει εκτενώς την ερευνητική κοινότητα και σε αρκετά πειραματικά αναλυτικά προγράμματα έχουν προστεθεί πολλές και διαφορετικές προσεγγίσεις ώστε να διορθωθούν τα λάθη και να αντιμετωπιστούν οι παρανοήσεις που εμφανίζονται στους ρητούς αριθμούς (Maloney, 2014). Μερικά από τα πιο γνωστά αναλυτικά προγράμματα που έχουν περιλάβει διαφορετικές προσεγγίσεις στους ρητούς είναι το Rational Number Project (RNP), το Connected Mathematics Project (CNP) και το UCSMP Transition Mathematics, (Maloney, 2014). Όμως, παρά το μεγάλο πλήθος των διδακτικών παρεμβάσεων για την διδασκαλία των ρητών αριθμών δεν υπάρχουν πολλές διδακτικές παρεμβάσεις που να στοχεύουν συγκεκριμένα στις παρανοήσεις που ευθύνονται στην προκατάληψη των φυσικών αριθμών (βλ. Πίνακες 1, 2 και 3) (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018).

Μία από τις προσεγγίσεις που στοχεύει στις παρανοήσεις αυτές είναι το αναλυτικό πρόγραμμα για τους ρητούς αριθμούς που ανέπτυξαν οι Moss και Case (για μια κριτική παρουσίαση βλ. Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018). Οι Moss και Case βασίστηκαν στην ιδέα ότι η έννοια των φυσικών και των ρητών αριθμών έχουν διαφορετική δομή αλλά κατανοούνται με τον ίδιο τρόπο, με τη χρήση δύο εννοιολογικών σχημάτων. Το αναλυτικό πρόγραμμα των Moss και Case δοκιμάστηκε σε μία ομάδα μαθητών Ε' δημοτικού και τα αποτελέσματα ήταν πολύ ενθαρρυντικά (Moss & Case, 1999). Μία άλλη προσέγγιση ήρθε από τον Siegler και τους συνεργάτες τους (Siegler, Thompson, & Schneider, 2011), οι οποίοι ανέπτυξαν ένα αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο έδινε έμφαση στο μέγεθος των κλασμάτων, εστιάζοντας πρωτίστως στην αναπαράσταση, στη διάταξη και στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή. Το αναλυτικό αυτό πρόγραμμα δίνει έμφαση στις ομοιότητες μεταξύ των εννοιών των φυσικών και των ρητών αριθμών και συγκεκριμένα στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού ως «μέγεθος που μπορεί να διαταχτεί και να του δοθεί συγκεκριμένη θέση στην αριθμογραμμή» (Siegler et al., 2011). Το αναλυτικό πρόγραμμα των Siegler et al. (2011) δοκιμάστηκε σε μία ομάδα μαθητών Δ' δημοτικού και τα αποτελέσματα έδειξαν βελτίωση στην κατανόηση του μεγέθους των κλασμάτων.

Εκτός από τις δύο προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν, υπάρχουν και παρεμβάσεις που στοχεύουν άμεσα στην αντιμετώπιση των παρανοήσεων που ευθύνονται στην προκατάληψη των φυσικών αριθμών. Κάποιες τέτοιες παρεμβάσεις στηρίζονται στην θεωρία πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής (*framework theory approach to conceptual change*) (Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008). Η θεωρία αυτή αναπτύχθηκε με σκοπό την περιγραφή και την κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν έννοιες με αντιδιαισθητικές ιδιότητες στα μαθηματικά και στην επιστήμη γενικότερα. Οι παρεμβάσεις που βασίστηκαν στη θεωρία αυτή σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν σε πειραματικά σχολεία με σκοπό να υποστηριχθούν μαθητές της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για να αναφερθούμε μόνο σε κάποιες από αυτές, οι Vamvakoussi και Vosniadou, (2012) χρησιμοποίησαν το παράδειγμα της *λαστιχένιας γραμμής* με σκοπό να δώσουν μία αναλογία για την πυκνότητα των ρητών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή. Επίσης, οι Christou & Prokopou (υπό έκδοση), εφάρμοσαν μια διδακτική παρέμβαση με χρήση ανατρεπτικού κειμένου, που είχε θετικά αποτελέσματα στην διαχείριση της παρανόησης ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει ενώ η διαίρεση μικραίνει τους αρχικούς όρους. Για μια κριτική και πιο λεπτομερή ανάλυση των τριών προσεγγίσεων που αναφέρθηκαν δείτε (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018).

Στην παρούσα εργασία θα εφαρμοστεί μια παρέμβαση με χρήση μαθηματικής ιστορίας με στόχο την αντιμετώπιση των παρανοήσεων που προκαλούνται από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού αλλά και την αλλαγή των στάσεων των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και ειδικά απέναντι στους ρητούς αριθμούς. Υπάρχουν λόγοι να πιστεύουμε ότι μία μαθηματική ιστορία θα μπορούσε να λειτουργήσει ως διδακτικό εργαλείο καθώς η σχέση των μαθηματικών και της λογοτεχνίας είναι πολυεπίπεδη και η διερεύνηση της αναδεικνύει πολύ σημαντικά κοινά χαρακτηριστικά τόσο για τα μαθηματικά όσο και για τη λογοτεχνία.

Μαθηματικά και λογοτεχνία

Για την σχέση επιστήμης και λογοτεχνίας επικρατούν δύο βασικές θεωρήσεις. Η πρώτη προέρχεται από την σχολή των κοινωνικών κονστρουκτιβιστών οι οποίοι αμφισβητούν την "ηγεμονία" της επιστήμης θεωρώντας την επιστήμη κοινωνική δραστηριότητα (Cartwright, 2007). Ένας από τους βασικούς υπέρμαχους της θεώρησης αυτής είναι ο George Levine ο οποίος θεωρεί την επιστήμη ως ένα είδος λόγου (discourse) κι έτσι δεν μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή αλήθειας και μπορεί να αμφισβητηθεί και να κριθεί με κοινωνικά κριτήρια που επηρεάζουν και τη λογοτεχνία (Cartwright, 2007). Η επιστήμη υπό αυτή την έννοια "έχει τη δική της διαφορετική γλώσσα αλλά πάντα παραμένει είδος γλώσσας και απευθύνεται σε συγκεκριμένο κοινό" (Beer, 1990). Η δεύτερη θεώρηση αναγνωρίζει τον ρόλο της λογοτεχνίας ως ένα μέσο για αναστοχασμό στις επιστήμες (Naumann, 2005). Η λογοτεχνία υπό αυτή την έννοια "διεξάγει" έρευνα για την επιστήμη σε ένα συγκεκριμένο μέσο: στην δική της καλλιτεχνική μορφή αναπαράστασης. Η λογοτεχνία, για την Naumann, παραμένει μόνο λογοτεχνία άσχετα με το πόσο πολύ αναπαριστά την κάθε επιστήμη (Naumann, 2005). Στην παρούσα εργασία, η σχέση μαθηματικών και λογοτεχνίας προσεγγίζεται μέσα από την οπτική της Naumann, (2005), που επισημαίνει ότι μία μαθηματική ιστορία δεν μπορεί να αντικαταστήσει τα σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια αλλά μόνο να τα συμπληρώσει και να τα επεκτείνει.

Έρευνες με χρήση μαθηματικής λογοτεχνίας

Το εργαλείο της μαθηματικής ιστορίας [με την έννοια του μύθου-διήγημα (story)] και όχι με την έννοια της καταγραφής και μελέτης γεγονότων του παρελθόντος (history) έχει χρησιμοποιηθεί από ερευνητές και εκπαιδευτικούς σε κάποιες παρεμβάσεις, αν και το πλήθος τέτοιων παρεμβάσεων είναι αρκετά περιορισμένο στη βιβλιογραφία (Usnick & McCarthy, 1998 · Bintz, 2002 · Sriraman, 2003 · Martinie & Bay-Williams, 2003 · Copple & Bredekamp, 2009). Σκοπός στις παρεμβάσεις αυτές ήταν η μαθηματική ιστορία να παρέχει συμπληρωματικό ρόλο στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, αλλά και να αποτελέσει αφορμή για δραστηριότητες επέκτασης. Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν δύο διδακτικές παρεμβάσεις με την χρήση του εργαλείου της μαθηματικής ιστορίας, ως πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων παρεμβάσεων.

Η σειρά βιβλίων *"Round the Rug Math"* είναι μία συμπληρωματική σειρά μαθηματικών βιβλίων για τις τάξεις του νηπιαγωγείου μέχρι την Β' δημοτικού που γράφτηκαν με την οικονομική υποστήριξη του National Science Foundation (NSF) και στοχεύουν στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης, της ανάγνωσης κανονικοτήτων και της ανάπτυξης γεωμετρικών δεξιοτήτων. Η σειρά αποτελείται από έξι βιβλία βασισμένα στην ερευνητική δουλειά των Copple et al., (2009), με κάθε βιβλίο να εστιάζει σε μία διαφορετική μαθηματική έννοια. Τα βιβλία συνδυάζουν μαθηματικές έννοιες με πρακτική προσέγγιση και προφορική αφήγηση (Casey, Kersh, & Young, 2004). Η αποτελεσματικότητα της σειράς των βιβλίων αυτών εξετάστηκε μερικά χρόνια αργότερα από τους Casey et al. (2008) με σκοπό να διερευνηθεί κατά πόσο η χρήση τους ευνοεί τις γεωμετρικές δεξιότητες παιδιών νηπιαγωγείου σε περιοχές με ανθρώπους διαφορετικών πολιτιστικών χαρακτηριστικών. Τα αποτελέσματα των ερευνών έδειξαν ότι μαθηματικές ιστορίες σαν αυτές ήταν αποτελεσματικές και ιδιαίτερα για παιδιά από φτωχότερες οικονομικά περιοχές (Casey, Erkut, Ceder, & Young, 2008).

Η Επιπεδοχώρα *(Flatland: A Romance of Many Dimensions)* αποτελεί ίσως το πιο γνωστό κείμενο του είδους της μαθηματικής λογοτεχνίας και είναι ένα από τα βιβλία που ουσιαστικά δημιούργησαν το είδος της μαθηματικής λογοτεχνίας. Γράφτηκε από τον δάσκαλο Edwin Abbott (1838-1926) και εκδόθηκε το 1884 στην Αγγλία (Abbott, 2006). Το βιβλίο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές διδακτικές παρεμβάσεις από ερευνητές αλλά και από εκπαιδευτικούς. Ο Sriraman, (2003), χρησιμοποίησε το βιβλίο ως διδακτικό εργαλείο ώστε να προκαλέσει την ενασχόληση μαθητών, ηλικίας 13-15 ετών, με την μαθηματική έννοια της διάστασης. Μέσα από την ανάγνωση του βιβλίου, μπορούν να δημιουργηθούν οι κατάλληλες προϋποθέσεις για να γίνουν συζητήσεις για τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες όπως την χώρο-χρονική γεωμετρία Μινκόφσκι και την γεωμετρία Φράκταλ (Sriraman, 2003). Η Φλάτερλαντ (*Flatterland: like Flatland. Only more so*) είναι ένα βιβλίο που γράφτηκε το 2001 από τον μαθηματικό Ian Stewart, (2010). Η Φλάτερλαντ προκαλεί τους αναγνώστες της να πάνε "πέρα" από τον κόσμο της Επιπεδοχώρας και να έρθουν σε επαφή με φαινόμενα που εμφανίζονται σε περισσότερες από τέσσερις διαστάσεις. Ο Sriraman, (2004), χρησιμοποίησε το βιβλίο της Φλάτερλαντ με σκοπό οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με μη-διαισθητικά μαθηματικά αντικείμενα όπως οι περισσότερες των τριών διαστάσεις.

Οι πιο πολλές ερευνητικές εργασίες που εξετάζουν την επίδραση της μαθηματικής λογοτεχνίας συνήθως χρησιμοποιούν ήδη υπάρχουσες λογοτεχνικές ιστορίες, όπως αυτή της Επιπεδοχώρας (Abbott, 2006). Αυτό έχει ως συνέπεια ο ερευνητικός σχεδιασμός να προσαρμόζεται συχνά με τις μαθηματικές έννοιες των λιγοστών διαθέσιμων μαθηματικών ιστοριών και να μην ερευνά διαφορετικές μαθηματικές έννοιες. Στην παρούσα μελέτη υπάρχει το πλεονέκτημα της συγγραφής μιας νέας μαθηματικής ιστορίας. Η συγγραφή μιας νέας ιστορίας δίνει τη δυνατότητα στον συγγραφέα να εστιάσει σε μαθηματικές έννοιες της αρεσκείας του, και να δώσει έμφαση στις έννοιες και τις ιδιότητες εκείνες που ο ίδιος θεωρεί σημαντικές. Στον σχεδιασμό μιας ιστορίας μπορεί να γίνει κατάλληλη χρήση λογοτεχνικού λόγου λαμβάνοντας υπόψιν το κοινωνικό υπόβαθρο της τάξης αλλά και της εποχής που ζουν τα παιδιά στα οποία απευθύνεται. Η μαθηματική έννοια που διαπραγματεύεται η ιστορία που σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε στην παρούσα μελέτη είναι οι ρητοί αριθμοί και συγκεκριμένα ο τρόπος διάταξης και η πυκνότητας των δομής των ρητών αριθμών.

Ερευνητικά ερωτήματα

Το βασικό ερευνητικό ερώτημα της παρούσας μελέτης ήταν αν και κατά πόσο μία μαθηματική λογοτεχνική ιστορία που εστιάζει στις ιδιότητες των ρητών αριθμών (διάταξη και πυκνότητα) θα μπορούσε να βοηθήσει μαθητές του Δημοτικού σχολείου να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους με τις έννοιες αυτές και να αναπτύξουν θετικότερες στάσεις απέναντι στους ρητούς αριθμούς.

Μεθοδολογία

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν οικειοθελώς 6 μαθητές που φοιτούσαν στην τάξη της Στ' δημοτικού σε Δημοτικό σχολείο των Αθηνών στην περιοχή του κέντρου της Αθήνας, εκ των οποίων 3 δήλωσαν αγόρια και 3 κορίτσια. Οι ηλικίες των μαθητών της έρευνας κυμαίνονταν από 11-12 χρόνια. Το σχολείο στο οποίο έγινε η παρέμβαση ήταν ιδιωτικό και η μητρική γλώσσα των παιδιών ήταν η Ελληνική.

Ερευνητικά εργαλεία – Υλικά

Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκαν δυο διαφορετικά ερωτηματολόγια, ένα που εξέταζε τη γνώση (Α) και ένα που εξέταζε τις στάσεις (Β) των μαθητών. Τα ερωτηματολόγια σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν πριν (Π) και μετά (Μ) την ανάγνωση της ιστορίας, κι έτσι προέκυψαν τέσσερα σε σύνολο ερωτηματολόγια (ΑΠ, ΑΜ, ΒΠ και ΒΜ). Τα Ερωτηματολόγια ΑΜ που δόθηκαν μετά την ιστορία ήταν ίδια με τα Ερωτηματολόγια ΑΠ που δόθηκαν πριν, με μικρές διαφορές στους αριθμούς. Η αλλαγή στα παραδείγματα του Ερωτηματολογίου ΑΜ, εξασφαλίζει ότι οι απαντήσεις των μαθητών δεν θα στηρίζονται στην μνήμη τους από τη συμπλήρωση του Ερωτηματολογίου ΑΠ. Τα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ χρησιμοποιήθηκαν ως άξονες για ατομικές ημιδομημένες συνεντεύξεις με σκοπό να μελετηθούν οι στάσεις των μαθητών στους ρητούς αριθμούς και τα μαθηματικά πριν (ΒΠ) και μετά (ΒΜ) την ανάγνωση της ιστορίας, αντίστοιχα. Τα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ περιλαμβάνουν 7 ερωτήσεις που αφορούν τη διάταξη και την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνουν:

- **Ερωτήσεις διάταξης δεκαδικών:** Οι μαθητές στην Ερώτηση ΑΠ.1 κλήθηκαν να επιλέξουν από πέντε ζευγάρια δεκαδικών αριθμών τον μεγαλύτερο (π.χ. 0,3 ή 0,30) και στην Ερώτηση ΑΠ.2 να διατάξουν τους δεκαδικούς αριθμούς: 3.682, 3.2, 3.02, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.
- **Ερωτήσεις διάταξης κλασμάτων:** Στην Ερώτηση ΑΠ.3 ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλέξουν από εννιά ζευγάρια κλασμάτων το μεγαλύτερο (π.χ. 3/2 ή 8/9) και στην Ερώτηση ΑΠ.4 πρέπει να διατάξουν τα κλάσματα: 5/6, 4/4 , 1/7 , 4/3 από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.
- **Ερώτηση συμβολισμού:** Στην Ερώτηση ΑΠ.5 ζητήθηκε από τους μαθητές να βάλουν στην σειρά τους αριθμούς: 0.5, 7/4, 1/5, 2.32, 4/10, 10/3, 2.301, 0.316, 1, 4, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.
- **Ερωτήσεις πυκνότητας:** Στην Ερώτηση ΑΠ.6 δόθηκαν έξι παραδείγματα στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν ένα αριθμό ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς (π.χ. 3,49 και 3,50). Στην Ερώτηση ΑΠ.7 δόθηκαν δύο παραδείγματα στα οποία ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν πόσοι αριθμοί βρίσκονται ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς (π.χ. 1,4 και 1,9).

Οι ερωτήσεις των ερωτηματολογίων αποτελούνταν από έργα Συμβατά και μη-Συμβατά με την προκατάληψη των φυσικών αριθμών. Με τον όρο *Συμβατά (Congruent),* χαρακτηρίστηκαν τα έργα στα οποία αν εφαρμοστούν διαισθητικές ιδιότητες για τους αριθμούς που οφείλονται στην προϋπάρχουσα γνώση του φυσικού αριθμού δεν οδηγούν σε εσφαλμένο συμπέρασμα (π.χ.: 0,25 > 0,24 διότι για τους φυσικούς αριθμούς ισχύει ότι 25 > 24). Ενώ ως *μη-Συμβατά (Incongruent),* χαρακτηρίστηκαν τα έργα στα οποία αν εφαρμοστούν διαισθητικές ιδιότητες για τους αριθμούς οδηγούν σε εσφαλμένη απάντηση (π.χ., 0,25 > 0,3 διότι για τους φυσικούς αριθμούς 25 και 3 ισχύει ότι 25 > 3). Οι ερωτήσεις που περιέχονται στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ, προέρχονται από ερωτηματολόγιο που σχεδιάστηκε από τους Van Hoof et al., (2015) και περιλαμβάνει ερωτήσεις με έργα που εστιάζουν στην κατανόηση του μεγέθους των αριθμών και της πυκνότητας του συνόλου των ρητών αριθμών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μία περιγραφή των ερωτήσεων του Ερωτηματολογίου ΒΠ που χρησιμοποιήθηκαν ως άξονες για τις πρώτες ημι-δομημένες συνεντεύξεις με τους μαθητές. Οι ερωτήσεις αυτές σχεδιάστηκαν κατάλληλα για το γνωστικό αντικείμενο των ρητών, με βάση ερωτήσεις από τα ερωτηματολόγια των Shoenfeld, (1989) και Lim et al., (2013) και αφορούσαν τη μελέτη των στάσεων των μαθητών/τριών απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών γενικότερα και των ρητών ειδικότερα.

Στην Ερώτηση ΒΠ.1 ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να αναφέρουν τι σκέφτονται όταν έρχεται η ώρα να κάνουν μαθηματικά. Στην Ερώτηση ΒΠ.2 ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να αναφέρουν τους αγαπημένους τους αριθμούς επιλέγοντας από τους φυσικούς, τους δεκαδικούς και τα κλάσματα. Η Ερώτηση ΒΠ.3 αποτελεί συνέχεια της ΒΠ.2 και ζητούσε από τους μαθητές/τριες να δικαιολογήσουν τον λόγο που δεν διάλεξαν τους φυσικούς, τους δεκαδικούς και τα κλάσματα, αντίστοιχα. Τέλος, η Ερώτηση ΒΠ.4 ζητούσε από τους μαθητές/τριες να αναφέρουν τους αριθμούς που θεωρούν ότι δυσκολεύουν περισσότερο τους συμμαθητές/τριες τους. Η Ερώτηση ΒΠ.1 σκοπό έχει να εξετάσει την στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών γενικότερα. Η Ερώτηση ΒΠ.2 εξετάζει την προτίμηση των μαθητών ως προς τους φυσικούς, τους δεκαδικούς και τα κλάσματα. Η Ερώτηση ΒΠ.3 διερευνά την αιτία μη προτίμησης των φυσικών, των δεκαδικών ή των κλασμάτων και η Ερώτηση ΒΠ.4 έχει ως σκοπό να ανιχνευθούν οι ιδιότητες που οι μαθητές θεωρούν δύσκολες στους συγκεκριμένους αριθμούς.

Τέλος, παρουσιάζονται οι ερωτήσεις του Ερωτηματολογίου ΒΜ οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν ως άξονες για τις δεύτερες ημιδομημένες συνεντεύξεις με τους μαθητές. Για τον σχεδιασμό των ερωτήσεων αυτών λήφθηκαν υπόψιν οι ερωτήσεις του Ερωτηματολογίου ΒΠ αλλά και το λογοτεχνικό περιεχόμενο της ιστορίας. Οι ερωτήσεις ήταν: «Πως σου φάνηκε η ιστορία που διάβασες;» (Ερώτηση ΒΜ.1), «Τι σου άρεσε πιο πολύ στην ιστορία;» (Ερώτηση ΒΜ.2), «Θυμάσαι μερικούς χαρακτήρες τις ιστορίας; Ποιοι σου άρεσαν περισσότερο; Γιατί;» (Ερώτηση ΒΜ.3), «Πιστεύεις ότι η ιστορία που διάβασες μπορεί να βοηθήσει έναν/μία συμμαθητή/τριά σου που δεν έχει καταλάβει τους δεκαδικούς; Πως;» (Ερώτηση ΒΜ.4), «Πιστεύεις ότι η ιστορία που διάβασες μπορεί να βοηθήσει έναν/μία συμμαθητή/τριά σου που δεν έχει καταλάβει τα κλάσματα; Πως;» (Ερώτηση ΒΜ.5) και «Θα ήθελες να χρησιμοποιούνται τέτοιες ιστορίες στην διδασκαλία των μαθηματικών; Πως πιστεύεις ότι μπορεί να βοηθήσει αυτό;» (Ερώτηση ΒΜ.6). Η Ερώτηση ΒΜ.1 ζητά να κρίνουν οι μαθητές την μαθηματική ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» ως προς το λογοτεχνικό της περιεχόμενο. Η Ερώτηση ΒΜ.2 διερευνά αν οι μαθητές διάβασαν όντως την ιστορία και αν θυμούνται λεπτομέρειες, ενώ η Ερώτηση ΒΜ.3 εξετάζει την προτίμηση των μαθητών ως προς τους χαρακτήρες της ιστορίας (φυσικοί, δεκαδικοί, κλάσματα). Η Ερώτηση ΒΜ.4 εξετάζει αν οι μαθητές θεωρούν ότι κατανόησαν περισσότερο την έννοια των δεκαδικών και τις ιδιότητες τους και η Ερώτηση ΒΜ.5 εξετάζει αν οι μαθητές θεωρούν ότι κατανόησαν περισσότερο την έννοια των κλασμάτων και τις ιδιότητες τους. Τέλος, η Ερώτηση ΒΜ.6 ζητά από τα παιδιά να αξιολογήσουν την μαθηματική ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» ως προς τον διδακτικό της χαρακτήρα.

Το ταξίδι προς το μηδέν

Η ιστορία που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία ονομάζεται «Ταξίδι προς το Μηδέν» και συγγραφέας είναι ο πρώτος συγγραφέας της έρευνας. Στη συγγραφή της ιστορίας λήφθηκαν υπόψιν όλοι οι υπάρχοντες ορισμοί του τι ορίζεται ως μαθηματική λογοτεχνία. Ένας επικρατής ορισμός που δόθηκε από τον Μιχαηλίδη (2007, σελ. 3) είναι: "*Μαθηματική λογοτεχνία ονομάζεται κάθε μορφή μυθοπλασίας στην οποία τα μαθηματικά παίζουν καθοριστικό ρόλο, είτε επειδή το αντικείμενο της πλοκής σχετίζεται με αυτά είτε γιατί κάποιοι από τους χαρακτήρες της συνδέονται με αυτά και οι ενέργειές τους επηρεάζονται σημαντικά από αυτή τη σχέση."* Στην ιστορία *«Ταξίδι προς το Μηδέν»* οι χαρακτήρες οι οποίοι είναι αριθμοί ορίζονται από τις μαθηματικές σχέσεις της διάταξης και της πυκνότητας και η πλοκή της ιστορίας επηρεάζεται από αυτές τις σχέσεις και την γεωμετρία του κόσμου όπου οι χαρακτήρες κατοικούν. Έτσι, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, το «Ταξίδι προς το μηδέν» μπορεί να οριστεί ως μαθηματική λογοτεχνία. Η ιστορία που συγγράφηκε περιλαμβάνει αρκετούς διαλόγους αλλά και παραγράφους στις οποίες ο συγγραφέας αφηγείται την γεωμετρία του κόσμου της ιστορίας σε τρίτο πρόσωπο. Δεν επιλέχθηκε το καταφατικό ύφος παρουσίασης των μαθηματικών ιδιοτήτων και συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο του διαλόγου διότι αυτό το χαρακτηριστικό είναι που διαχωρίζει ένα λογοτεχνικό κείμενο από ένα επιστημονικό κείμενο. Τέλος, η ιστορία που συγγράφηκε στην παρούσα μελέτη μπορεί να θεωρηθεί *μαθηματική λογοτεχνία* με βάση τα κριτήρια των Zazkis και Liljedahl (2009) για τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που πρέπει να διαθέτει μια ιστορία ώστε να χαρακτηριστεί μαθηματική που είναι, μεταξύ άλλων, να έχει ενσωματωμένα τα μαθηματικά προβλήματα στην πλοκή της, να διαπραγματεύεται συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, να αποσαφηνίζει τις μαθηματικές έννοιες και να μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διδακτικό τρόπο για την διδασκαλία των εννοιών που διαπραγματεύεται.

Η ιστορία «Ταξίδι προς το Μηδέν» αφορά ένα φανταστικό κόσμο «Το βασίλειο του Άρπλας» στον οποίο ζουν όλοι οι ρητοί αριθμοί (φυσικοί, δεκαδικοί και κλάσματα). Στον κόσμο αυτό οι φυσικοί αριθμοί βρίσκονται στην ανώτερη κλίμακα της ιεραρχίας και διοικούν τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα. Η γεωμετρία του κόσμου είναι ο μονοδιάστατος άξονας πάνω στον οποίο κατοικούν όλοι οι αριθμοί. Με τη χρήση της αριθμογραμμής στην ιστορία παρουσιάζεται η έννοια της θέσης των ρητών αριθμών στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Με την χρήση των διαστημάτων ανάμεσα στους αριθμούς στην συγκεκριμένη ιστορία, γίνεται μία προσπάθεια να γίνει εισαγωγή στην πυκνότητα των ρητών αριθμών. Η πλοκή της ιστορίας αφορά τρεις δεκαδικούς αριθμούς που αποφασίζουν, ενάντια στο καθήκον τους, να κάνουν ένα ταξίδι προς το Μηδέν.

Οι έννοιες και ο τρόπος που εμφανίζονται στην ιστορία συμβαδίζουν με τους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων (ΔΕΠΠΣ, ΝΠΣ και NCTM) που αναφέρθηκαν παραπάνω για παιδιά αυτής της ηλικίας (Αναλυτικό Πρόγραμμα, 2011 · Common Core Standards, 2019). Μάλιστα σε κάποια σημεία, το πλαίσιο της ιστορίας καθιστά δυνατή την εισαγωγή σε έννοιες που εμφανίζονται αργότερα στα ελληνικά αναλυτικά προγράμματα, όπως είναι τα διαστήματα των αριθμών, με τρόπο κατανοητό και ενδιαφέρων για τα παιδιά, όπως θα φανεί και στα αποσπάσματα από την ιστορία που θα παρουσιαστούν παρακάτω.

Στην συνέχεια παρατίθενται τρία επιλεγμένα αποσπάσματα της ιστορίας, με σκοπό να παρουσιαστεί ο τρόπος που η ιστορία αντιμετωπίζει τις παρανοήσεις στη διάταξη και στην πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Διάταξη Δεκαδικών

> «…Νομίζω πως κάτι κατάλαβα. Για να βρεθώ ανάμεσα σε δύο Δεκαδικούς, σαν να χρειάζομαι το νούμερο 5, ε;»
> «Ακριβώς! Και τώρα, ποιος Δεκαδικός είναι σε μεγαλύτερη θέση, ο 3,5 ή ο 3,55;» ρώτησε ο 3,622.
> «Η 3,55 είναι, αφού, όπως είπαμε, είναι στη μέση του Διαστήματος (3,5 , 3,6), οπότε είναι μετά από τον 3,5 και πριν από τον 3,6». Ο 3,618 σταμάτησε να μιλά, και το ξανασκέφτηκε.
> «Μα, έτσι όπως το λέω τώρα, η 3,55 είναι σε μεγαλύτερη θέση από τον 3,5 και σε μικρότερη θέση από τον 3,6, αλλά, αυτό που με ζορίζει είναι ότι το 55 είναι μεγαλύτερο από το 6. Πώς γίνεται λοιπόν;»
> «Σκέψου το ως εξής: Το πρώτο ψηφίο πριν την υποδιαστολή σου λέει σε ποιο Διάστημα μένεις. Εμείς οι δύο λόγου χάριν, μένουμε μετά το Κάστρο 3 και πριν το Κάστρο 4, οπότε αναγκαστικά, έχουμε και οι δυο μας, το 3 πριν την υποδιαστολή. Μετά την υποδιαστολή, μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε νούμερο, αλλά πάντως, για να ανήκουμε στο Διάστημα (3, 4], πριν την υποδιαστολή μας, πρέπει να έχουμε οπωσδήποτε 3…» (Απόσπασμα, Ταξίδι προς το μηδέν, σελ. 34).

Σκοπός στο παραπάνω απόσπασμα είναι να μπορεί να βρει ο μαθητής τη θέση ενός δεκαδικού ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς. Με τον τρόπο αυτό μπορούν εύκολα να συγκριθούν δεκαδικοί όπως το 3,5 και το 3,55 που ανήκουν στα ίδια διαστήματα φυσικών[1]. Στο σημείο αυτό στόχος είναι η παρανόηση ΠΔ1 («Ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος») και η παρανόηση ΠΔ4 («Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί»).

Διάταξη κλασμάτων

> «…Όχι, είπα ότι όλα τα Κλάσματα που έχω συναντήσει στο Διάστημά μας έχουν τον αριθμητή τους μεγαλύτερο από τον παρονομαστή τους, άρα μάλλον αυτό είναι χαρακτηριστικό του Διαστήματός μας» συνέχισε ο 3,622.
> «Γιατί; Έχεις δηλαδή ακούσει για Κλάσματα που ο αριθμητής τους είναι μικρότερος από τον παρονομαστή;» παρατήρησε ο 3,618.

«Ναι, για παράδειγμα, ένα φημισμένο Κλάσμα του Άρπλας είναι ο 1/2. Δεν ξέρω αν έχεις δει τις αφίσες και το αφιέρωμα που είχαν κάνει πέρυσι στο Σώμα των Κλασμάτων. Εκεί, ήταν ο 1/2 μαζί με τον Φυσικό 1 κι ο τίτλος ήταν: "Αφιέρωμα στον 1/2, το δεξί χέρι του Μονάς: του ισχυρότερου Φυσικού!"» είπε ο 3,622.
«Έχεις δίκιο, είχα ξεχάσει αυτό το "αφιέρωμα"!» είπε ο 3,618, ειρωνικά.
«Επομένως, τα Κλάσματα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή είναι στο Διάστημα (0, 1];» ρώτησε ο 3,618 γενικεύοντας.
«Ναι, αυτό νομίζω πως ισχύει…»
«Άρα, τα Κλάσματα που έχουν μεγαλύτερο αριθμητή από παρονομαστή δεν είναι στο (0, 1]!» συμπέρανε ο 3,618…»
(Απόσπασμα, Ταξίδι προς το μηδέν, σελ. 93)

Ο τρόπος που η ιστορία προσεγγίζει τα κλάσματα είναι μέσα από τη θέση τους στα διαστήματα φυσικών αριθμών και συγκεκριμένα μέσα από τη σχέση αριθμητή και παρονομαστή. Οπότε, στο απόσπασμα αυτό όλα τα κλάσματα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή τοποθετούνται στο διάστημα (0,1) και κατευθείαν διατάσσονται ως μικρότερα από τα κλάσματα που βρίσκονται στα υπόλοιπα διαστήματα (1 , 2) ή (2 , 3), κτλ. Εδώ στόχος είναι να αντιμετωπιστούν οι παρανοήσεις ΠΚ1 («Το κλάσμα με τα μικρότερα/μεγαλύτερα ψηφία είναι το μικρότερο/μεγαλύτερο») και η ΠΚ3 («Η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα»).

Πυκνότητα ρητών

«…Η ετήσια απογραφή του Κάστρου! Γίνεται μία φορά το χρόνο και σκοπός της είναι να βρεθεί η σωστή θέση όλων των Δεκαδικών και όλων των Κλασμάτων του Διαστήματος. Μόλις βρεθεί η θέση τους πρέπει να καταγραφεί σωστά σε ένα "έγγραφο-άξονα", σύμφωνα με το Νόμο της Διάταξης. Μετά, το έγγραφο αυτό παραδίδεται στον Φυσικό του Κάστρου. Βάσει του εγγράφου αυτού, ο Φυσικός μπορεί να γνωρίζει, ανά πάσα στιγμή, με μαθηματική ακρίβεια τη θέση των υπηκόων του, στο Διάστημά του».
«Ατελείωτη δουλειά! Και πως βρίσκεις σωστά τη θέση όλων αυτών των άπειρων Δεκαδικών; Κι όλων αυτών των άπειρων Κλασμάτων;» θαύμασε ο 3,618.
«Μα, γι' αυτό και διαρκεί ένα έτος η κάθε απογραφή! Τι νόμισες; Θεωρητικοί Δεκαδικοί του Κάστρου όλο τον χρόνο κινούνται αδιάκοπα στο Διάστημα και προσπαθούν να απομνημονεύσουν τη θέση Δεκαδικών και Κλασμάτων. Μετά, την αναφέρουν στον υπεύθυνο της απογραφής και αυτός προσπαθεί να τους τοποθετήσει στο "έγγραφο-άξονα", σύμφωνα με τα λεγόμενα», εξήγησε ο 3,622.
«Πω, πω, πόση φασαρία..» αναφώνησε ο 3,618.
«Άσε… Κι όπως καταλαβαίνεις, αν γίνουν μετακινήσεις στον άξονα, ή αν κάποιοι Δεκαδικοί μετατραπούν σε Κλάσματα, η δουλειά αυτή πρέπει να ξαναγίνει…. Είναι απίστευτα χρονοβόρα διαδικασία…»
(Απόσπασμα, Ταξίδι προς το μηδέν, σελ. 45)

Αν και δεν γίνεται ρητή αναφορά για την πυκνότητα των ρητών στο βιβλίο, σε όλα τα κεφάλαια του βιβλίου, όπως και στο παραπάνω απόσπασμα, παρουσιάζεται μια "εικόνα ατελείωτων αριθμών" που βρίσκονται δίπλα σε άλλους αριθμούς, και ανήκουν σε διαστήματα φυσικών αριθμών, που με την σειρά τους βρίσκονται μέσα σε άλλα διαστήματα κλασμάτων και δεκαδικών. Σκοπός είναι να παρουσιαστεί στους αναγνώστες η πυκνότητα της δομής του συνόλου των ρητών αριθμών. Στο παραπάνω απόσπασμα γίνεται επίσης μια προσπάθεια να αντιμετωπιστεί η παρανόηση ΠΠΡ («Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς και ανάμεσα σε δύο κλάσματα υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί»).

Διαδικασία

Στην πρώτη επίσκεψη στο σχολικό περιβάλλον έγινε εισαγωγή στην μαθηματική λογοτεχνία και τονίστηκε με την βοήθεια των δασκάλων ότι μια μαθηματική ιστορία απευθύνεται σε όλους τους μαθητές που τους αρέσει να διαβάζουν λογοτεχνία. Σε συνεννόηση με τους διδάσκοντες επιλέχτηκαν 6 μαθητές/τριες από τους 10 που δήλωσαν αρχικά συμμετοχή. Η επιλογή έγινε με κριτήριο τις διαφορετικές επιδόσεις τους στα μαθηματικά, συγκεκριμένα επιλέχθηκαν να συμμετάσχουν μαθητές όλων των επιπέδων στην μελέτη. Στην δεύτερη επίσκεψη στο σχολικό περιβάλλον, δόθηκε στους έξι συμμετέχοντες το Ερωτηματολόγιο ΑΠ, ώστε να κριθούν οι γνώσεις τους πριν την ανάγνωση της ιστορίας. Μετά τη συμπλήρωση του Ερωτηματολογίου ΑΠ, έγιναν ατομικές ημιδομημένες συνεντεύξεις με άξονες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου στάσεων ΒΠ. Στο τέλος δόθηκε στους μαθητές που συμμετείχαν στη μελέτη το χρονικό διάστημα του ενός μήνα για την ανάγνωση της ιστορίας «Ταξίδι προς το Μηδέν».

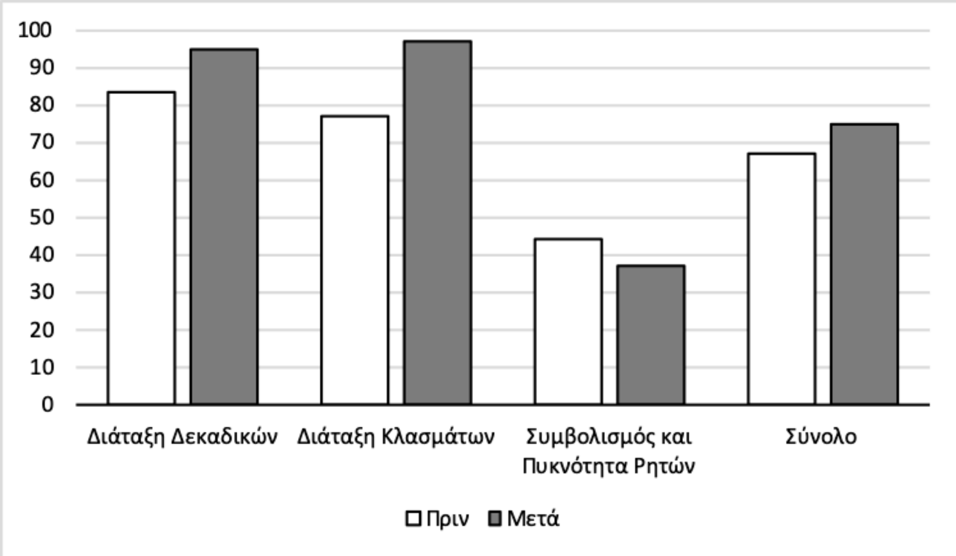
Στην τελευταία επίσκεψη στο σχολικό περιβάλλον, μετά από ένα μήνα, οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα εξετάστηκαν ξανά ως προς τις γνώσεις τους με το Ερωτηματολόγιο ΑΜ. Μετά τη συμπλήρωση του Ερωτηματολογίου ΑΜ ακολούθησαν ξανά ατομικές συνεντεύξεις με άξονες τις ερωτήσεις του Ερωτηματολογίου ΒΜ του οποίου βασικός στόχος ήταν να διερευνήσει τυχόν αλλαγές στις στάσεις των μαθητών απέναντι στους ρητούς αριθμούς.

Ερευνητικά αποτελέσματα

Καθώς κάποιοι συμμετέχοντες, κατά δήλωση τους, δεν διάβασαν ολόκληρη την ιστορία, για την καλύτερη παρουσίαση των αποτελεσμάτων των απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις κατανόησης των ρητών αριθμών (Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ) αποφασίστηκε να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιέχει τους μαθητές/τριες που διάβασαν ολόκληρη την ιστορία και η δεύτερη αυτούς που διάβασαν ένα κομμάτι της. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι Μ1 (μαθητής), Μ2 (μαθήτρια) και Μ3 (μαθητής) που στο χρονικό διάστημα που δόθηκε κατάφεραν να διαβάσουν όλη την ιστορία και στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι Μ4 (μαθήτρια), Μ5 (μαθητής) και Μ6 (μαθήτρια) που, κατά δήλωση τους, διάβασαν ένα μέρος της ιστορίας, Μ4 (ανάγνωση του 75% περίπου), Μ5 και Μ6 (ανάγνωση του 40% περίπου).

Στην Εικόνα 1, παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των μαθητών/τριών Μ1, Μ2 και Μ3, που διάβασαν ολόκληρη την ιστορία, στα Ερωτηματολόγια ΑΠ (Πριν) και ΑΜ

(Μετά) σε κάθε ένα από τα είδη παρανοήσεων που ορίστηκαν παραπάνω (βλ. Πίνακες 1,2 και 3).



Εικόνα 1: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων των μαθητών/τριών Μ1,Μ2 και Μ3 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ (Πριν) και ΑΜ (Μετά).

Στην Εικόνα 1 παρατηρείται ότι τα συνολικά αποτελέσματα στις ερωτήσεις των ερωτηματολογίων ΑΠ και ΑΜ έδειξαν ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων μετά την ανάγνωση της ιστορίας βελτιώθηκε και αρκετές από τις παρανοήσεις που εμφανίστηκαν πριν την ανάγνωση της ιστορίας διορθώθηκαν. Συγκεκριμένα, το συνολικό ποσοστό των σωστών απαντήσεων των τριών μαθητών (Μ1, Μ2 και Μ3) είναι 67% πριν την ιστορία και 75% μετά. Στις ερωτήσεις διάταξης δεκαδικών (Ερωτήσεις Α.1 και Α.2) για την περίπτωση των μαθητών Μ1, Μ2 και Μ3 εμφανίζεται ποσοστό επιτυχίας 83% πριν και 94% μετά την ανάγνωση της ιστορίας ενώ όσον αφορά τη διάταξη κλασμάτων (Ερωτήσεις Α.3 και Α.4), εμφανίζουν ποσοστό σωστών απαντήσεων 77% πριν την ανάγνωση και 97% μετά την ανάγνωση. Τέλος στις ερωτήσεις που αφορούν τον συμβολισμό των ρητών αριθμών και την πυκνότητα (Ερωτήσεις Α.5, Α.6 και Α.7) το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των τριών μαθητών πριν την ανάγνωση της ιστορίας είναι 44% και 37% μετά. Για τους μαθητές Μ1, Μ2 και Μ3, μπορούν να βγουν τα ακόλουθα συμπεράσματα όσον αφορά την κατανόηση:

- Ο Μ1 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε μέτρια επίδοση 33% και μετά την ανάγνωση της ιστορίας υψηλότερη επίδοση 63%. Ο Μ1 φάνηκε να ξεπερνά τις περισσότερες παρανοήσεις των δεκαδικών, όπως ότι ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος και ότι το μηδέν στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού μεγαλώνει τον αριθμό (ΠΔ1 και ΠΔ2, βλ. Πίνακα 1) και τις παρανοήσεις κλασμάτων ότι ένα κλάσμα με τα μικρότερα/μεγαλύτερα ψηφία είναι το μικρότερο/μεγαλύτερο και ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα (ΠΚ1 και ΠΚ3, βλ. Πίνακα 2).

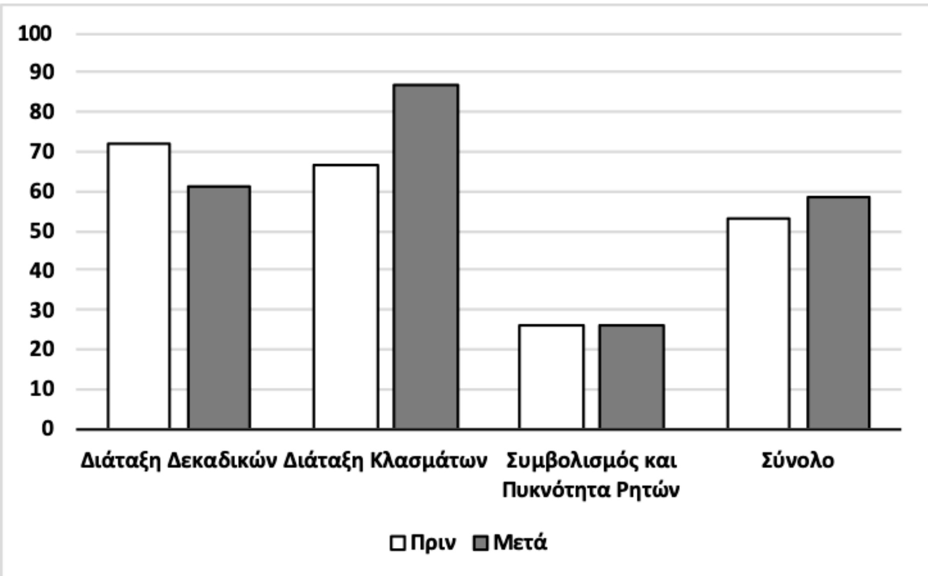
- Η Μ2 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε υψηλή επίδοση 63% όπως και μετά την ανάγνωση της ιστορίας, 62%. Η Μ2 φαίνεται να ξεπέρασε την παρανόηση ότι οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί (ΠΣΡ, βλ. Πίνακα 3) και ότι για να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω/αφαιρώ στον αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο αριθμό (ΠΚ2, βλ. Πίνακα 2).
- Ο Μ3 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε πολύ καλή επίδοση 81% και μετά την ανάγνωση της ιστορίας φάνηκε να έχει χαμηλότερη επίδοση (67%). Η μεγάλη πτώση του ποσοστού του Μ3 αποδίδεται σε λάθη απροσεξίας στο δεύτερο ερωτηματολόγιο σε ερώτηση συμβολισμού και πυκνότητας (π.χ., στο Ερωτηματολόγιο ΑΜ απάντησε ότι 3/10<1/6 ενώ απάντησε σωστά ότι 6/11<6/5 και 1/13<2/15 στο ίδιο ερωτηματολόγιο). Η πτώση αυτή επηρέασε τα συνολικά ποσοστά επιτυχίας στις ερωτήσεις συμβολισμού και πυκνότητας όλων των μαθητών (βλ. Εικόνα 1). Ο Μ3 δήλωσε ότι κατάλαβε πως να μετατρέπει κλάσματα σε δεκαδικούς και αντίστροφα.

Στις απαντήσεις των μαθητών αυτών στις ατομικές συνεντεύξεις με άξονες τις ερωτήσεις των ερωτηματολογίων ΒΠ και ΒΜ, εμφανίστηκε μία βελτίωση της στάσης τους απέναντι στους ρητούς αριθμούς και στα μαθηματικά γενικότερα. Συγκεκριμένα, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Ο Μ1 πριν την ανάγνωση της ιστορίας αντιμετώπιζε με αρνητική στάση τους αριθμούς και τα μαθηματικά γενικότερα. Δήλωνε ξεκάθαρα την προτίμηση του για τους φυσικούς αριθμούς, λόγω του ότι τους θεωρεί τους πιο εύκολους αριθμούς «*Εεεε, γιατί είναι πανεύκολοι*». Από τους δεκαδικούς αριθμούς προτιμούσε τα κλάσματα και αυτό διότι «*Εεεε, τους δεκαδικούς δεν τους θυμάμαι…*». Τέλος ανέφερε χαρακτηριστικά ότι αυτό που τον μπερδεύει στους δεκαδικούς αριθμούς είναι τα δεκαδικά ψηφία μετά το κόμμα και η αξίες τους «*πότε μπαίνει 3 και πότε 03… (διαφορά 2,3 και 2,03)*». Μετά την ανάγνωση της ιστορίας η στάση του έγινε πιο θετική, και δήλωσε ότι: «*οι αριθμοί έγιναν πιο ζωντανοί, οι δεκαδικοί, οι φυσικοί,…, και είχε πλάκα*». Συγκεκριμένα για τους δεκαδικούς αριθμούς ανέφερε ότι η ιστορία τον βοήθησε «*να καταλάβω πως διατάσσονται και τέτοια…*».
- Η Μ2 και πριν και μετά την ιστορία είχε θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Πριν την ανάγνωση της ιστορίας δήλωσε πως: «*…κυρίως αισθάνομαι χαρά (όταν σκέφτομαι τα μαθηματικά) γιατί μου αρέσουν πολύ τα μαθηματικά*». Μετά την ιστορία δήλωσε πως της «*…φάνηκε πάρα πολύ ωραία, …. ο τρόπος που έδειχνε όλη την θεωρία, των μαθηματικών που έχουμε κάνει από την αρχή της 6ης μέχρι τώρα, με ένα πάρα πολύ ωραίο και διασκεδαστικό τρόπο*» και επιπλέον ότι την βοήθησε με την διάταξη των ρητών: *«(εγώ) κατάλαβα πως μπορούμε να τοποθετήσουμε κλάσματα και δεκαδικούς, ανάλογα με το ποιο είναι μεγαλύτερο και ποιο είναι μικρότερο…»*.
- Η στάση του Μ3 ήταν θετική και πριν και μετά την ιστορία για τα μαθηματικά. Μετά την ιστορία δήλωσε πως η ιστορία του φάνηκε *«Ωραία γραμμένη, με ωραία πλοκή»* και του άρεσε ο πρωταγωνιστής που «*ήταν σχεδόν έτοιμος για τα πάντα*» αλλά

«*ζορίζεται στα μαθηματικά*». Πριν την ανάγνωση της ιστορίας ο Μ3 δήλωσε πως δεν είχε καμία απορία και ανέφερε χαρακτηριστικά ότι: «*Εεεεε, υποθέτω..., κάτι (εννοεί απορία) υπάρχει αλλά δεν μου έρχεται τώρα...*». Μετά από την ιστορία ο Μ3 ανέφερε κάποιες απορίες του με ενδιαφέρον για να τις κατανοήσει: «*Ας πούμε πως τους (εννοεί τους δεκαδικούς) κάνεις κλάσματα αυτό δεν κατάλαβα και πάρα πολύ καλά...*». Εδώ φαίνεται πως η ιστορία του ελάττωσε το φόβο να ρωτήσει κάτι που δεν καταλάβαινε.

Στην Εικόνα 2 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών/τριών Μ4, Μ5 και Μ6 που δεν διάβασαν όλη την ιστορία. Συγκρίνοντας την Εικόνα 2 με την Εικόνα 1 παρατηρείται ότι οι μαθητές που δεν διάβασαν όλη την ιστορία αντιμετώπισαν μεγαλύτερα προβλήματα στις ερωτήσεις που αφορούσαν την διάταξη δεκαδικών (Ερωτήσεις Α.1 και Α.2), ποσοστό επιτυχίας 72% πριν την ανάγνωση της ιστορίας και 61% μετά, σε αντίθεση, με τους μαθητές Μ1, Μ2 και Μ3 που διάβασαν την ιστορία. Η μείωση του ποσοστού επιτυχίας στο δεύτερο ερωτηματολόγιο των μαθητών Μ4, Μ5 και Μ6 στις ερωτήσεις διάταξης οφείλονταν πιθανότατα σε απροσεξία. Όσον αφορά τις ερωτήσεις διάταξης κλασμάτων (Ερωτήσεις Α.3 και Α.4) οι μαθητές Μ4, Μ5 και Μ6 παρουσίασαν και αυτοί βελτίωση στα ποσοστά τους. Τέλος στις ερωτήσεις που αφορούσαν τον συμβολισμό και την πυκνότητα (Ερωτήσεις Α.5, Α.6 και Α.7) δεν εμφανίστηκε διαφορά στα ποσοστά πριν και μετά την ιστορία. Συνολικά οι μαθητές Μ4, Μ5 και Μ6, που δεν διάβασαν την ιστορία, εμφάνισαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας και στα δύο ερωτηματολόγια που ακολούθησαν.



Εικόνα 2: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων των μαθητών/τριών Μ4,Μ5 και Μ6 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ (Πριν) και ΑΜ (Μετά).

Όσον αφορά τις στάσεις των μαθητών αυτών, οι απαντήσεις τους στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ, έδειξαν ότι:

- Η Μ4 πριν την ανάγνωση της ιστορίας δήλωνε τον φόβο της για τους δεκαδικούς αριθμούς αναγνωρίζοντας την ελλιπή κατανόησή της: «..θέλω να καταλάβω ποιο είναι μεγαλύτερο όταν είναι 1,313 ή 1,31» ενώ μετά την ανάγνωση ενός μέρους της ιστορίας η στάση της Μ4 έγινε θετικότερη και ανέφερε ότι: «εμένα προσωπικά με βοήθησε (η ιστορία) λίγο να καταλάβω, την διαφορά ανάμεσα στους δεκαδικούς…(εννοεί ποιος είναι μεγαλύτερος και ποιος μικρότερος)».

- Ο Μ5 ανέφερε πριν την ανάγνωση της ιστορίας ότι τον δυσκολεύουν τα κλάσματα και ότι προτιμά να μην κάνει ασκήσεις με αυτά: «…δεν θα πω ότι μου προκαλούν ενδιαφέρον ούτε όχι, απλά αυτά είναι αρκετά δύσκολα…» και η αρνητική του στάση δεν άλλαξε ούτε μετά το μικρό κομμάτι της ιστορίας που διάβασε: «…εμένα δεν με βοήθησε πολύ… (εννοεί την ιστορία)…».
- Η στάση της Μ6 απέναντι στους ρητούς αριθμούς και γενικότερα στα μαθηματικά ήταν αρνητική πριν την ανάγνωση της ιστορίας και αυτό φάνηκε από την απάντηση της στην πρώτη ερώτηση του ερευνητή: «…Τι σκέφτεσαι όταν έρχεται η ώρα να κάνεις μαθηματικά;» «…πότε θα τελειώσει (εννοεί το μάθημα)». Μετά όμως την ανάγνωση ενός μέρους της ιστορίας η Μ6 ανέφερε ότι, την βοήθησε η ιστορία και θα ήθελε να την χρησιμοποιούσε ως εργαλείο για να καταλάβει και άλλες μαθηματικές έννοιες που δεν έχει καταλάβει: «Ναι γιατί με αυτά (άλλες ενότητες στα μαθηματικά) δεν είμαι τόσο καλή…(ενώ με τους δεκαδικούς είναι πλέον καλή)».

Συζήτηση/συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα εξετάστηκε αν η ανάγνωση μιας μαθηματικής ιστορίας από τους μαθητές μπορεί να βοηθήσει στην αντιμετώπιση γνωστών παρανοήσεων αλλά και να βελτιώσει την στάση τους απέναντι στους ρητούς αριθμούς. Η ιστορία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη ονομάζεται «Ταξίδι προς το μηδέν» και γράφτηκε από τον πρώτο συγγραφέα της μελέτης. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι μια τέτοια ιστορία μπορεί να βοηθήσει σε παρανοήσεις καθώς από τα αποτελέσματα των ερωτηματολογίων μετά την ανάγνωση μέρους ή ολόκληρης της ιστορίας φάνηκε ότι οι μαθητές εμφάνισαν λιγότερα λάθη και πιο θετικές στάσεις σε σχέση με τις απαντήσεις τους στα ερωτηματολόγια, που προηγήθηκαν της ανάγνωσης της ιστορίας.

Πιο συγκεκριμένα, στους μαθητές που διάβασαν όλη την ιστορία παρατηρήθηκε αύξηση στις επιδόσεις τους στις ερωτήσεις κατανόησης των ρητών όμως αυτό που απασχόλησε περισσότερο την έρευνα, πέρα από τα ποσοστά επιτυχίας, ήταν η αντιμετώπιση συγκεκριμένων παρανοήσεων που οφείλονται στο φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, που εμφανίστηκαν στα μη-συμβατά έργα των ερωτηματολογίων κατανόησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» κατάφερε να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν σε κάποιο βαθμό τις παρανοήσεις τους που αφορούν την διάταξη των ρητών αριθμών. Η παρανόηση που δεν φάνηκε να ξεπερνούν εύκολα οι μαθητές ήταν η παρανόηση της διακριτότητας των ρητών αριθμών, δηλαδή την παρανόηση ότι κάθε ρητός αριθμός έχει έναν επόμενο και ένα προηγούμενο ρητό αριθμό. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με πολλές έρευνες που αναφέρουν μεγάλες δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν την πυκνότητα των ρητών (Christou, 2015 · Vamvakoussi & Vosniadou, 2010 · Van Hoof, Janssen, Verschaffel, & Dooren, 2015 · McMullen et al., 2015).

Όσον αφορά τις στάσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και ειδικά απέναντι στους ρητούς αριθμούς, τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών έδειξαν ότι πριν την ανάγνωση της ιστορίας η πλειοψηφία των μαθητών είχε αρνητικές στάσεις απέναντι στους ρητούς αριθμούς και μετά την ανάγνωση της ιστορίας φάνηκε ότι οι στάσεις αυτές άλλαξαν και έγιναν θετικότερες. Οι αρνητικές στάσεις των μαθητών προέρχονταν από ένα γενικό φόβο στα μαθηματικά, είτε από δυσκολίες που αντιμετώπιζαν στους δεκαδικούς και στα κλάσματα, οπότε η ανάγνωση της ιστορίας φάνηκε ότι τους βοήθησε να ξεπεράσουν λίγο τον φόβο τους για τα μαθηματικά και να κατανοήσουν περισσότερο αυτούς τους αριθμούς και.

Λόγω του ότι οι δυσκολίες στην κατανόηση των ιδιοτήτων των ρητών αριθμών, όπως η πυκνότητα, όπως αναφέρθηκε και στην βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε, είναι μεγάλες, δεν αναμένονταν να εξαλειφθούν όλες με τη ανάγνωση μιας μαθηματικής ιστορίας. Όμως, έγινε φανερό ότι μια μαθηματική ιστορία θα μπορούσε να αποτελέσει εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού για την καλύτερη κατανόηση των μαθητών στους ρητούς αριθμούς. Στην παρούσα μελέτη είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι το δείγμα ήταν αρκετά μικρό, κι έτσι τα αποτελέσματα δεν μπορούν να γενικευτούν και να αφορούν το σύνολο των μαθητών. Ο διαφορετικός χρόνος που απαιτείται από κάθε μαθητή για τη ανάγνωση μιας ιστορίας όπως και η διαφορετική προσοχή/συγκέντρωση κατά την ανάγνωση αποτελούν δυσκολίες που θα πρέπει να αντιμετωπίσει μια παρέμβαση με τη χρήση μαθηματικής λογοτεχνίας. Όμως, παρ' όλους τους περιορισμούς της μελέτης, φάνηκε ότι μια μαθηματική ιστορία μπορεί να συμβάλει σε κάποιο βαθμό στην καλύτερη κατανόηση των συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών. Αν μάλιστα η ιστορία ήταν συντομότερη ή δίνονταν στους μαθητές σε μικρότερα μέρη, ίσως να ήταν πιο εύκολο για τους μαθητές να την διαβάσουν ολόκληρη και τα αποτελέσματα να ήταν ακόμα καλυτέρα. Επίσης, σημαντικό θα ήταν να διερευνηθεί με ποιον τρόπο μια τέτοια ιστορία θα μπορούσε να ενταχθεί στη διδασκαλία και να αξιοποιηθεί διδακτικά από τους δασκάλους.

Εδώ θα πρέπει να αναφερθεί ότι πέρα από τα διδακτικά οφέλη που μπορούν να αποκομίσουν οι μαθητές, ωφελείται και ο ίδιος ο συγγραφέας, καθώς μπαίνει στην διαδικασία της εμβάθυνσης στο νόημα των μαθηματικών εννοιών και της προσπάθειας σύνδεσης τους με το λογοτεχνικό περιεχόμενο. Μέσα από την προσωπική εμπειρία της συγγραφής έγινε κατανοητό ότι η συγγραφή αποτελεί μια πολύ απαιτητική εργασία που εμπλέκει τον συγγραφέα σε έντονες μεταγνωστικές διεργασίες. Για το λόγο αυτό θα προτείνονταν ανεπιφύλακτα να εμπλακούν οι εκπαιδευτικοί της τάξης σε μια τέτοια διαδικασία τόσο για τη ανάπτυξη της γνώσης περιεχομένου αλλά και για τη παιδαγωγική γνώση που απαιτείται για τη διδακτική προσέγγιση αυτών των εννοιών.

Σημειώσεις,

[1] Αν και η εισαγωγή της γραφής των διαστημάτων ως (α,β) δεν προβλέπεται από τα αναλυτικά προγράμματα του Δημοτικού σχολείου, η χρήση της στην ιστορία «ταξίδι προς το μηδέν» κρίθηκε ως μια καλή ευκαιρία να γίνει μια εισαγωγή των μαθητών στα διαστήματα αριθμών. Αρχικά παρουσιάστηκε στην ιστορία η έννοια του διαστήματος μεταξύ δύο αριθμών περιγραφικά και μετά

δόθηκε η γραφή (α,β) ως ονομασία του συγκεκριμένου διαστήματος. Οι μαθητές φάνηκε να δέχονται τη γραφή αυτή χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες και χωρίς να ζητηθούν διευκρινήσεις από τον συγγραφέα.

Ο Δημήτρης Μαρής είναι απόφοιτος του ΔΜΠΣ «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» (2019) και η παρούσα μελέτη εκπονήθηκε στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας του με τίτλο "Χρήση της μαθηματικής λογοτεχνίας για την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού" υπό την επίβλεψη του καθ. Κωνσταντίνου Π. Χρήστου.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση:

Abbott, E. A. (2006). *Flatland: A romance of many dimensions. OUP Oxford*.

Beer, G. (1990). Translation or transformation? The relations of literature and science. *Notes and Records of the Royal Society of London*, 44(1), 81-99.

Bintz, W. P. (2002). Using literature to support mathematical thinking in middle school. *Middle School Journal*, 34(2), 25-32.

Cartwright, J. (2007). Science and Literature: Towards a conceptual framework. *Science & education*, 16(2), 115-139.

Casey, B., Erkut, S., Ceder, I., & Young, J. M. (2008). Use of storytelling context to improve girls' and boys' geometry skills in Kindergarden. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 29(1), 29-48.

Casey, B., Kersh, J. E., & Young, J. M. (2004). Storytelling sagas: An effective medium for teaching early childhood mathematics. *Early Childhood research Quarterly*, 19(1), 167-172.

Christou K.P and Prokopou, A (in press). Using refutational text to address the Multiplication Makes Bigger misconception. Educational Journal of the University of Patras. UNESCO Chair.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, 47(5), 747-758.

Common Core State Standards Initiative (2019), Standards for Mathematical Practice, Grade 6, The Number System. Retrieved from: http://www.corestandards.org/Math/Content/6

Copple, C., & Bredekamp, S. (2009). Developmentally appropriate practive in early childhood programs serving children from birth through age 8. *ERIC*.

Cramer, K. A., Post, T. R., & & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 111-144.

Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representantions: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 191-204.

Killpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press*.

Levine, G. (1988). *Darwin and the novelists: patterns of science in Victorian fiction. University of Chicago Press*.

Lim, S. Y., & Chapman, E. (2013). Development of a short form of the attitudes toward mathematics inventory. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 145-164.

Li, Y., Chen, X., & & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinesem Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 41, 908-826.

Maloney, A. P. (2014). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. *IAP*.

Martinie, S. L., & Bay-Williams, J. M. (2003). Using literature to engage Students in proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(3), 142-148.

Mazzocco, M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11, 681-691.

McMullen, J. L.-S. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept (s). *Learning and Instruction*, 37, 14-20.

Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2000). Making Sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies in Mathematics*, (43), 313-335.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In M.S. Donovan & J.D. Bransford (Eds.). *How students learn: Mathematics in the classroom, DC: National Academic Press*, 121-162.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122-147.

Naumann, B. (2005). Introduction: Science and Literature. *Science in context*, 18(4), 511-523.

Ni, Y. & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*, 8-27.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273-296.

Smith, C. L., Solomon, G. E., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, 101-140.

Sriraman, B. (2003). Mathematics and Literature: Synonyms, Antonyms or the Perfect Amalgam? *Australian Mathematics Teacher, The,* 59(4), 26.

Sriraman, B. (2004). Mathematics and Literature (the sequel): Imagination as a pathway to Advanced Mathematical Ideas and Philosophy. *Australian Mathematics Teacher*, 60(1), 17-23.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.

Stewart, I. E. (2010). *Flatterland: Like Flatland, only more so*. ReadHowYouWant.com.

Usnick, V., & McCarthy, J. (1998). Turning adolescents onto mathematics through literature. *Middle School Journal*, 29(4), 50-54.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging Psychological and Educational Research on Rational Number Knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 84-106.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 31, 344-355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions, Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and instruction*, 28(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 265-284.

Van Hoof, J., Janssen, R., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Inhibiting natural knowledge in fourth graders: towards a comprehensive test instrument. *ZDM*, *47*(5), 849-857.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.). *Handbook of reasearch on conceptual change*, 3-34.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching mathematics as storytelling*. Sense Publishers.

Ελληνική:

Μιχαηλίδης, Τ. (2007). Από τον Αισχύλο στους μεταμοντέρνους: μαθηματική λογοτεχνία.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-Πρώτη Σχολική Ηλικία (Β’ μέρος). Ανακτήθηκε από: http://ebooks.edu.gr/info/newps

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών. Αθήνα: Ατραπός*.