Αρ. 14 (2020)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ΧΡΗΣΗ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΎΡΩΝ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ελένη Μαρκοπούλου (Eleni Markopoulou)

doi: 10.12681/enedim.22051

http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/index

Η ΧΡΗΣΗ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαρκοπούλου Ελένη

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, emarkopoulou@yahoo.gr

Περίληψη: Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκε η αποτελεσματικότητα της χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας με το λογισμικό Geogebra, σε συνδυασμό με τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων, για την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων των τετραπλεύρων και για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Στην έρευνα συμμετείχαν μαθητές της Α΄ Λυκείου, οι οποίοι κατατάχθηκαν σε οκτώ ζευγάρια με βάση το γνωστικό και αντιληπτικό τους επίπεδο αναφορικά με τα τετράπλευρα και ασχολήθηκαν με δραστηριότητες που περιλάμβαναν κατασκευές, εύρεση ειδών τετραπλεύρων, γεωμετρικά προβλήματα και ερωτήσεις σχετικές με τις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων. Στις δραστηριότητες τα 4 ζευγάρια χρησιμοποίησαν το λογισμικό και τα υπόλοιπα τα παραδοσιακά εργαλεία. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές που εργάστηκαν με το λογισμικό κατανόησαν καλύτερα τις ιδιότητες και τις σχέσεις των τετραπλεύρων και έλυσαν με μεγαλύτερη ευχέρεια τα γεωμετρικά προβλήματα.

Λέξεις κλειδιά: κατασκευή σχημάτων, χρήση εργαλείων, επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων

Abstract: The present study investigated the effectiveness of using Dynamic Geometry tools with Geogebra software in relation to the use of traditional tools to understand quadrilateral properties and relationships and to solve geometrical problems. The participants were students of Grade 10, who were divided into eight pairs based on their cognitive and perceptual levels of quadrilateral and engaged in activities involving constructions, finding quadruped species, geometrical problems, and questions about quadrilateral properties and relationships. In the activities the 4 pairs used the software and the rest used the traditional tools. The results of the study showed that students who worked with the software understood the properties and relationships of quadrilateral better and solved geometric problems more easily.

Keywords: construction of shapes, tool use, geometrical problem solving

Εισαγωγή

Στο πλαίσιο αυτής της έρευνας μελετήθηκε η σημασία και ο ρόλος της γεωμετρικής κατασκευής στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης καθώς και η σημασία της χρήσης των διαφορετικών μέσων για την κατασκευή αυτή (παραδοσιακά όργανα, λογισμικό).

Σύμφωνα με τη Mariotti (2001), μια γεωμετρική κατασκευή αποτελεί μια διαδικασία κατά την οποία, μέσω της χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων και σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες, παράγεται ένα γεωμετρικό σχέδιο. Μια γεωμετρική κατασκευή από την αρχή έως και την ολοκλήρωσή της θεωρείται σωστή, αν τα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί βάσει καθορισμένων κανόνων. Εντοπίζονται διαφορές στην κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος, με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων πάνω σε χαρτί από την κατασκευή σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας στον υπολογιστή. Από τα πρώτα χρόνια χρήσης λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, οι Yerushalmy και Chazan (1990) υποστήριζαν ότι οι μαθητές γίνονται πιο ευέλικτοι στη χρήση γεωμετρικών σχημάτων και είναι σε θέση να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στη γεωμετρία.

Είναι γεγονός ότι, όταν η κατασκευή πραγματοποιείται με γεωμετρικά όργανα, α) η πρόσβαση στο χώρο σχεδίασης, που είναι και ο Ευκλείδειος χώρος, είναι άμεση, β) κυριαρχεί το μη ισότροπο, διότι ο χώρος του χαρτιού είναι υλικός, συγκεκριμένος, περιορισμένος και άδειος, γ)ο μαθητής τραβάει γραμμές, δ) μπορούν να πραγματοποιηθούν μετρήσεις σε όλα τα κατασκευάσιμα στοιχεία, ε) οι κατασκευές είναι στατικά αντικείμενα. Αντίθετα, όταν η κατασκευή πραγματοποιείται με λογισμικό, α) η πρόσβαση στο χώρο σχεδίασης είναι έμμεση, διότι το λογισμικό αποτελεί ένα είδος διαμεσολαβητή, β) ο χώρος είναι απεριόριστος, ομογενής και ισότροπος, γ) ο μαθητής ορίζει σημεία και χαράζει γραμμές αναδεικνύοντας την ύπαρξη σημείων, δ) η μέτρηση μπορεί να γίνει μόνο αν ορισθεί από το λογισμικό και ε) οι κατασκευές είναι δυναμικές (Τζεκάκη,1991; Laborde, 1989). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχουν διαφορές στη γεωμετρική σκέψη των μαθητών όταν τα εργαλεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές είναι διαφορετικά (γεωμετρικά όργανα, λογισμικό). Έτσι όταν η γεωμετρική κατασκευή πραγματοποιείται στο χαρτί ο μαθητής δεν μπορεί να αντιληφθεί ιδιότητες και σχέσεις, για παράδειγμα, αν το σχήμα είναι στην πραγματικότητα ένα παραλληλόγραμμο και όχι ένα σχήμα που «φαίνεται» ως παραλληλόγραμμο με μια ολιστική αντίληψη. Αντίθετα όταν η γεωμετρική κατασκευή πραγματοποιείται στην επιφάνεια του υπολογιστή οι κατασκευές είναι δυναμικές, μπορούν να μετακινηθούν, να συρρικνωθούν, να μεγεθυνθούν ή να μεταβληθούν, διατηρώντας αναλλοίωτες και άρα αναδεικνύοντας τις γεωμετρικές ιδιότητες.

Το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών ως προς την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών έχει μελετηθεί από τους van Hiele (1999) σχετικά με τα στάδια ανάπτυξης και τον Duval (1995) ως προς τις γνωστικές διαδικασίες.

Η έρευνα που ακολουθεί έχει ως στόχο. να διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα της χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, όπως το λογισμικό Geogebra σε σύγκριση με τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων, για την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων των γεωμετρικών σχημάτων και την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από μαθητές Λυκείου.

Θεωρητικό πλαίσιο

Η γεωμετρική κατασκευή παίζει σημαντικό ρόλο στην προσέγγιση και κατανόηση γεωμετρικών εννοιών. Γεωμετρικές κατασκευές μπορούν να πραγματοποιηθούν με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων, όπως ο χάρακας, ο διαβήτης, το τρίγωνο, το μοιρογνωμόνιο, κ.ά., αλλά συχνά είναι χαράξεις που δεν αντιστοιχούν πάντα σε μια μαθηματική διαδικασία, όσο σε μια πρακτική διαδικασία χειρισμού των οργάνων (Τζεκάκη, 1991, 1992; Laborde, 1989). Αντίστοιχα μια γεωμετρική κατασκευή μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια λογισμικών πάνω στην επιφάνεια του υπολογιστή. Σύμφωνα με τη Heid (1997), τα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας ανοίγουν νέους μαθηματικούς κόσμους στα γεωμετρικά δεδομένα, παρέχοντάς τρόπους δημιουργίας και χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων αλλά διατηρώντας τα καθοριστικά χαρακτηριστικά αυτών. Σε ένα γεωμετρικό σχήμα το οποίο κατασκευάζεται με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, όλα τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να στραφούν και να εξεταστούν από διαφορετικές οπτικές γωνίες (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Σύμφωνα επίσης με τους Healy και Hoyles (2002), τα εργαλεία που παρέχονται από τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας (DGS) βοηθούν τους μαθητές στην καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών. Επίσης, αποτελούν μέσο διαμεσολάβησης ενθαρρύνοντας τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν στην επίλυση προβλημάτων θέτοντας τις διαδικασίες μοντελοποίησης, εικασίας, πειραματισμού και γενίκευσης (Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2005).

Μία από τις προσεγγίσεις ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών είναι το μοντέλο *των van Hiele (*1999) που προσδιορίζεται με βάση τα χαρακτηριστικά της εσωτερικής οργάνωσης της Γεωμετρίας. Οι μαθητές μπορούν να αντιστοιχηθούν σε ένα από τα πέντε διαφορετικά επίπεδα σκέψης, αναδεικνύοντας διαφορετική συμπεριφορά και χαρακτηριστικά γεωμετρικής σκέψης (αναγνώριση, ανάλυση, διάταξη, παραγωγικός συλλογισμός και αφαίρεση).

Έρευνες που μελέτησαν τα τέσσερα επίπεδα που συναντώνται στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, υπέδειξαν ότι, ειδικά για την επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων, οι μαθητές πρέπει να έχουν κατακτήσει το τρίτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά το οποίο διατάσσουν λογικά τις ιδιότητες των σχημάτων και καταλαβαίνουν τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των σχημάτων (Gawlick, 2005, σ. 361).Αντίστοιχα οι έρευνες που σχετίζονται με το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης έδειξαν ότι μαθητές που βρίσκονται στο τρίτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης van Hiele έχουν ικανότητα επίλυσης προβλημάτων αλγεβρικής γεωμετρίας χρησιμοποιώντας τις δεξιότητες σκέψης αφαίρεσης (Suwito, Yuwono, Parta, Irawati, & Oktavianingtyas, 2016).

Σε μια διαφορετική προσέγγιση, ο Duval το 1995 επιχείρησε μια προσπάθεια καθορισμού των γνωστικών διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης, καταγράφοντας τέσσερις τύπους γνωστικής κατανόησης της γεωμετρικής εικόνας (Αντιληπτική, Σειριακή, Λεκτική και Λειτουργική) από τους μαθητές. Κάθε είδος κατανόησης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος. Κατά τον Duval,ένα σχήμα για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό απαιτεί σίγουρα την αντιληπτική κατανόηση και τουλάχιστον ένα από τα άλλα είδη. Η λειτουργική κατανόηση εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος αλλά η κατάκτηση από το μαθητή του σταδίου της λειτουργικής κατανόησης προϋποθέτει την αντιληπτική και τη λεκτική κατανόηση (Duval, 1995).

Συμπληρωματικά στις παραπάνω θεωρητικές προσεγγίσεις, σχετικά με την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, οι Yerushalmy και Chazan (1990) ανέδειξαν τρία εμπόδια τα οποία οι μαθητές πρέπει να ξεπεράσουν κατά την εξέταση και ερμηνεία των γεωμετρικών σχημάτων και πιο συγκεκριμένα: α) να κατανοήσουν ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει χαρακτηριστικά που είναι ειδικά και όχι αντιπροσωπευτικά της κατηγορίας αυτής, β) να απομονώσουν μια περιοχή του γεωμετρικού σχήματος και γ) να δουν ένα γεωμετρικό σχήμα με διαφορετικούς τρόπους.

Ο Han (2007) σε έρευνά που πραγματοποίησε σε μαθητές β' γυμνασίου κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η συστηματική χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην τάξη δημιουργούν σημαντική διαφορά στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο των van Hiele για την ανάλυση των δεδομένων του, διαπίστωσε ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό Sketchpad του Geometer έδειξαν στατιστικά σημαντική υψηλότερη μέση βαθμολογία όσον αφορά τις κατανοήσεις στις ιδιότητες και ορισμούς κάθε τύπου σχέσεων μεταξύ των τετράπλευρων από ό, τι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν χάρακα και μοιρογνωμόνιο.
Αντίστοιχες έρευνες έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί που έχουν εφαρμόσει λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας στην τάξη έχουν επισημάνει σημαντική διαφορά στη διερεύνηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές (Leung, 2011; Healy & Hoyles, 2001; Holzl, 1996). Εκτός όμως από την έρευνα του Han (2007), παρουσιάζεται μια έλλειψη ερευνών στη συγκριτική μελέτη με χρήση λογισμικών και παραδοσιακών οργάνων. Η παρούσα μελέτη λοιπόν έχει ως στόχο να διερευνήσει την αποτελεσματικότητα της χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, όπως το λογισμικό Geogebra σε σύγκριση με τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων, για την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων των γεωμετρικών σχημάτων και την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από μαθητές Λυκείου, θέτοντας τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα: α) κατά πόσο η χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, σε σχέση με τα παραδοσιακά εργαλεία βοηθάει την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων; και β) κατά πόσο η χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας σε σχέση με τα παραδοσιακά εργαλεία συμβάλλει στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων;

Μέθοδος έρευνας

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε αποτελεί συγκριτική μελέτη. Συμμετείχαν 16 μαθητές (5 αγόρια και 11 κορίτσια) της Α΄ Λυκείου από σχολεία της πόλης της Φλώρινας. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε 2 ομάδες των τεσσάρων ζευγαριών η καθεμία. Τα τέσσερα ζευγάρια χρησιμοποίησαν το λογισμικό, ενώ τα υπόλοιπα τέσσερα τα γεωμετρικά όργανα. Προκειμένου να γίνει η κατάταξη των μαθητών σε ζευγάρια καθώς και η επιλογή των ζευγαριών μεταξύ των οποίων πραγματοποιήθηκε η σύγκριση, οι μαθητές συμπλήρωσαν ατομικά, πριν τη διεξαγωγή της έρευνας, ένα διαγνωστικό τεστ με 4 ενότητες. Η $1^{η}$ ενότητα περιείχε 8 προτάσεις συμπλήρωσης με ιδιότητες πλευρών, γωνιών και ιδιότητες διαγωνίων. Η $2^{η}$ ενότητα περιλάμβανε 3 ζεύγη ειδών τετραπλεύρων και καταγραφή των κοινών ιδιοτήτων που αφορούσαν πλευρές, γωνίες και διαγώνιους. Η $3^{η}$ ενότητα περιλάμβανε 5 προτάσεις, τύπου σωστού – λάθους που αναδείκνυαν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων. Τέλος η $4^{η}$ ενότητα, αφορούσε στην επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος, το οποίο για να επιλυθεί, ο μαθητής έπρεπε πρώτα να κατασκευάσει το σχήμα.

Για τους μαθητές που χρησιμοποίησαν τα παραδοσιακά εργαλεία, έγινε καταγραφή των στρατηγικών που ακολούθησαν, μαγνητοφωνήθηκαν οι συνομιλίες τους και συμπληρώθηκαν όλα τα φύλλα εργασίας. Για τους μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό καταγράφηκαν στον υπολογιστή σε μορφή βίντεο με το λογισμικό Bandicam screen recorder οι στρατηγικές που ακολούθησαν, μαγνητοφωνήθηκαν οι συνομιλίες τους και συμπληρώθηκαν όλα τα φύλλα εργασίας, εκτός από την $1^{η}$ δραστηριότητα του $1^{ου}$ φύλλου εργασίας που σχετίζεται με τις κατασκευές, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν αποκλειστικά μέσω του λογισμικού στον υπολογιστή. Η μαγνητοφώνηση έγινε με τη χρήση κινητού.

Ανάλυση διαγνωστικού τεστ

Το διαγνωστικό τεστ βοήθησε στην κατάταξη των μαθητών σε ζευγάρια σύμφωνα με το γνωστικό και αντιληπτικό τους επίπεδο. Στη συνέχεια οι συμμετέχοντες στα ζευγάρια του ίδιου επιπέδου, επέλεξαν ελεύθερα το μέσο με το οποίο θα εργαστούν (λογισμικό ή όργανα).

Ο πίνακας 1, δίνει τις απαντήσεις των 16 μαθητών συγκεντρωτικά σε κάθε μία από τις τέσσερις ενότητες του διαγνωστικού τεστ.

	Λ.1		Ο.1		Λ.2		Ο.2		Λ.3		Ο.3		Λ.4		Ο.4	
	Λ.1.1	Λ.1.2	Ο.1.1	Ο.1.2	Λ.2.1	Λ.2.2	Ο.2.1	Ο.2.2	Λ.3.1	Λ.3.2	Ο.3.1	Ο.3.2	Λ.4.1	Λ.4.2	Ο.4.1	Ο.4.2
1η ενότητα	7	8	7	6	7	7	6	4	5	4	6	6	5	5	4	4
2η ενότητα	6	6	6	8	7	8	4	7	4	3	5	8	4	5	3	3
3η ενότητα	5	5	3	4	3	3	5	4	5	4	2	2	3	3	3	2
4η ενότητα	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1

Πίνακας 1: Απαντήσεις ανά μαθητή στις τέσσερις ενότητες του διαγνωστικού τεστ

Όσον αφορά την $4^{η}$ ενότητα του διαγνωστικού τεστ, επίλυση γεωμετρικού προβλήματος με κατασκευή, η βαθμολόγηση όπως φαίνεται και στον πίνακα 1, έγινε ως εξής: βαθμολογία 0, όταν δεν κατασκευαστεί το σχήμα και δεν λυθεί το πρόβλημα, βαθμολογία 1, όταν κατασκευαστεί το σχήμα και δεν λυθεί το πρόβλημα, βαθμολογία 2 όταν κατασκευαστεί το σχήμα και λυθεί μερικώς το πρόβλημα και βαθμολογία 3, όταν κατασκευαστεί το σχήμα και λυθεί το πρόβλημα. Έτσι από τους 16 μαθητές, μόνο οι 4 κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν σωστά το πρόβλημα, οι 8 κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν μερικώς το πρόβλημα, ενώ οι υπόλοιποι 4 κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και δεν έλυσαν το πρόβλημα. Σχετικά με τις υπόλοιπες 3 ενότητες, οι μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα είχαν περισσότερες σωστές απαντήσεις και κατατάχθηκαν σε 2 ζευγάρια: το $1^{ο}$ ζευγάρι (Λ1) που ασχολήθηκε με το λογισμικό και το $1^{ο}$ ζευγάρι (Ο1) που ασχολήθηκε με τα όργανα. Επίσης, οι 8 μαθητές που κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν μερικώς το πρόβλημα, ανάλογα με τις σωστές απαντήσεις που έδωσαν συγκεντρωτικά, όπως φαίνεται στον πίνακα 1, κατηγοριοποιήθηκαν σε ζευγάρια και συγκρίθηκαν ανά 2, δηλαδή το $2^{ο}$ ζευγάρι (Λ2) και το $3^{ο}$ ζευγάρι (Λ3) που ασχολήθηκαν με το λογισμικό με το $2^{ο}$ ζευγάρι (Ο2) και το $3^{ο}$ ζευγάρι (Ο3) που ασχολήθηκαν με τα όργανα αντίστοιχα. Τέλος, οι 4 μαθητές που κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και δεν έλυσαν το πρόβλημα και έδωσαν τις λιγότερες σε αριθμό συγκεντρωτικά σωστές απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν σε 2 ζευγάρια: το 4ο ζευγάρι (Λ4) που ασχολήθηκε με το λογισμικό και το 4ο ζευγάρι (Ο4) που ασχολήθηκε με τα όργανα.

Με την κατάταξη, τα ζευγάρια δούλεψαν με δραστηριότητες από 2 φύλλα εργασίας και μετά την ολοκλήρωση τους συμπλήρωσαν αμέσως ένα τεστ αξιολόγησης.

Πιο συγκεκριμένα στη διάρκεια της εργασίας τους οι μαθητές στο 1ο φύλλο εργασίας, δοκίμασαν (1) να κατασκευάσουν ένα παραλληλόγραμμο, ένα ορθογώνιο, έναν ρόμβο και ένα τετράγωνο με βάση ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε πλάγια κατεύθυνση προκειμένου να διερευνηθεί η ικανότητά τους να ορίσουν σωστά τις ιδιότητες του κάθε είδους τετραπλεύρου κατά τη φάση της κατασκευής. Στη συνέχεια (2) να ανακαλύψουν είδη τετραπλεύρων όπως τραπέζια, ισοσκελή τραπέζια, παραλληλόγραμμα, ορθογώνια, ρόμβους και τετράγωνα και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους με γνώμονα τις ιδιότητες των τετραπλεύρων σε ένα έτοιμο σύνθετο γεωμετρικό σχήμα που τους δόθηκε και αποτελούνταν από δύο παράλληλες ευθείες μεταξύ των οποίων υπήρχαν διάφορα είδη γεωμετρικών σχημάτων προκειμένου να διερευνηθεί η ικανότητά τους να αναγνωρίσουν τα είδη τετραπλεύρων και να τεκμηριώσουν το κάθε είδος με βάση τις ιδιότητες. Αντίστοιχα στο 2υ φύλλο εργασίας οι μαθητές δοκίμαζαν να επιλύσουν δύο γεωμετρικά προβλήματα που απαιτούσαν και την κατασκευή του σχήματος προκειμένου να διερευνηθεί η ικανότητά τους να κατασκευάσουν σωστά το σχήμα και χρησιμοποιώντας σωστά τις ιδιότητες των τετραπλεύρων, καθώς και θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας να οδηγηθούν στη λύση. Το 1ο και το 2ο πρόβλημα αφορούσε στην κατασκευή ενός τετραπλεύρου και ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Οι μαθητές έπρεπε να ορίσουν τα μέσα Ε, Ζ, Η και Θ, των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, και να ανακαλύψουν τι σχήμα είναι το ΕΖΗΘ σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις και στη συνέχεια να το αποδείξουν.

Τέλος, και τα 8 ζευγάρια, συμπλήρωσαν ένα τεστ αξιολόγησης το οποίο περιλάμβανε: (1) ιδιότητες πλευρών, γωνιών και ιδιότητες διαγωνίων μεταξύ των τετραπλεύρων τις οποίες οι μαθητές θα έπρεπε να αντιστοιχήσουν σε έξι είδη τετραπλεύρων (τραπέζιο, ισοσκελές τραπέζιο, παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβο και τετράγωνο) και (2) επτά προτάσεις τύπου σωστό – λάθος οι οποίες αναδείκνυαν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων.

Η εγκυρότητα του περιεχομένου των εργαλείων εξασφαλίστηκε με την τεκμηρίωση της έρευνας στη βάση των εννοιολογικών αποσαφηνίσεων, οι οποίες προέκυψαν από τη συστηματική βιβλιογραφική μελέτη, την αντιστοίχιση των φύλλων εργασίας και των δραστηριοτήτων στα ερευνητικά ερωτήματα και τη βελτίωση σε δεύτερη φάση του ερευνητικού εργαλείου, όπως αυτό προέκυψε μετά την εφαρμογή μιας αρχικής πιλοτικής εφαρμογής.

Αποτελέσματα

Ανάλυση κατασκευών 1ου φύλλου εργασίας

Ο πίνακας 2 που ακολουθεί δείχνει την ορθή ή μη κατασκευή κάθε είδους τετραπλεύρου από το κάθε ζευγάρι στην 1η δραστηριότητα.

	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Ρόμβος	Τετράγωνο

Λ.1	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή
Ο.1	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή
Λ.2	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Λάθος κατασκευή σταθερό σχήμα
Ο.2	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες	Σωστή κατασκευή
Λ.3	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες
Ο.3	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή
Λ.4	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν	Τυχαία σωστή κατασκευή
Ο.4	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή

Πίνακας 2: Ανάλυση κατασκευών ανά ζευγάρι.

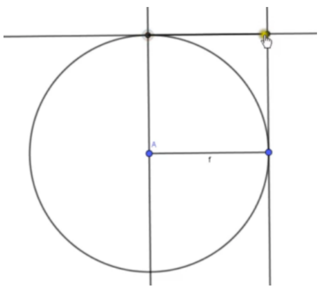
Για την κατασκευή του παραλληλογράμμου όλα τα ζευγάρια που δούλεψαν με το λογισμικό και τα όργανα έκαναν σωστή την κατασκευή, εκτός από το 3ο και το 4ο από τα ζευγάρια που δούλεψαν με τα όργανα, τα οποία κατασκεύασαν παραλληλόγραμμο χωρίς να ορίσουν κατασκευαστικά σωστά τις παράλληλες ευθείες. Πιο συγκεκριμένα δεν όρισαν κάθετα τμήματα στην ΑΒ ίσου μήκους αλλά έφεραν μια τυχαία ευθεία η οποία οπτικά φαίνεται παράλληλη με την ΑΒ αλλά δεν είναι.

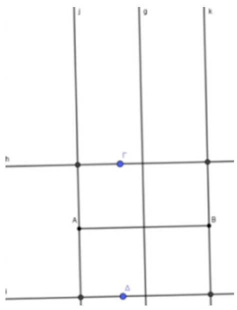
Για την κατασκευή του ορθογωνίου όλα τα ζευγάρια που δούλεψαν με το λογισμικό και τα όργανα έκαναν σωστή την κατασκευή, εκτός από το 4ο ζευγάρι που δούλεψε με τα όργανα, το οποίο δεν όρισε σωστά την ιδιότητα ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. Πιο συγκεκριμένα έφερε κάθετες στα σημεία Α και Β της ΑΒ και δεν μέτρησε ώστε τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ να είναι ίσα αλλά τα πήρε με τυχαίο τρόπο και ένωσε τα σημεία Γ και Δ.

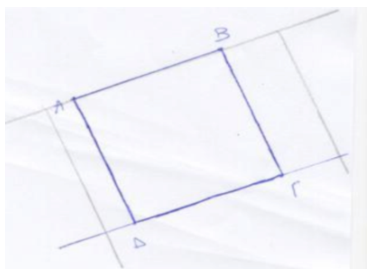
Σχετικά με την κατασκευή του ρόμβου, όλα τα ζευγάρια που δούλεψαν με το λογισμικό έκαναν σωστή την κατασκευή, εκτός από το 4ο ζευγάρι το οποίο δεν μπόρεσε να κάνει την κατασκευή. Αντίστοιχα όλα τα ζευγάρια που δούλεψαν με τα όργανα, έκαναν σωστή την κατασκευή, εκτός από το 2ο ζευγάρι το οποίο κατασκεύασε το ρόμβο χωρίς να κάνει μετρήσεις έτσι ώστε οπτικά να φαίνεται ρόμβος αλλά κατασκευαστικά να μην είναι.

Τέλος, για την κατασκευή του τετραγώνου μόνο το 1ο ζευγάρι που δούλεψε με το λογισμικό έκανε σωστή τη κατασκευή. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στην εικόνα 1, έφερε κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ και κάθετες από τα σημεία Α και Β στην ΑΒ και πήρε το σημείο τομής της καθέτου από το σημείο Α με τον κύκλο. Στη συνέχεια, έφερε κάθετη από το προαναφερόμενο σημείο τομής στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και πήρε το σημείο τομής αυτής με την κάθετο από το σημείο Β στην ΑΒ. Ένωσε τα 3 σημεία και απέκρυψε τις κάθετες ευθείες και τον κύκλο. Με τη διαδικασία του συρσίματος διαπίστωσε ότι το τετράπλευρο που προέκυψε ήταν τετράγωνο.

Το 2ο ζευγάρι κατασκεύασε το τετράγωνο με λάθος τρόπο, και το σχήμα που προέκυψε ήτανε ένα σταθερό σχήμα δηλαδή με τη λειτουργία του συρσίματος δεν μπορούσε να αυξομειώνεται. Πιο συγκεκριμένα όπως φαίνεται και στην εικόνα 2, το ζευγάρι έφερε τη μεσοκάθετη g στο ΑΒ και δύο τυχαίες παράλληλες ευθείες στο ΑΒ εκατέρωθεν του ΑΒ, τις h και i αντίστοιχα. Στη συνέχεια, έφερε δύο κάθετες ευθείες από τα σημεία Α και Β στην ΑΒ, j και k αντίστοιχα και πήρε τις τομές των παράλληλων ευθειών h και i με τις κάθετες j και k. Απέκρυψε το ΑΒ, και όλες τις ευθείες και ένωσε τα τέσσερα σημεία που προέκυψαν από την τομή των παράλληλων ευθειών h και i με τις κάθετες j και k. Το τετράπλευρο που κατασκεύασε, δεν είχε πλευρά την ΑΒ σύμφωνα με το ζητούμενο και επειδή ήταν ένα σταθερό σχήμα, δεν μπόρεσε να ελέγξει αν έκανε σωστά την κατασκευή. Το 3ο ζευγάρι δεν όρισε σωστά τις ιδιότητες δηλαδή πήρε ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ χωρίς να ορίσει αυτά να είναι κάθετα στην ΑΒ και ίσα μεταξύ τους. Στη συνέχεια δεν έλεγξε με τη λειτουργία του συρσίματος αν η κατασκευή ήταν σωστή. Το 4ο ζευγάρι στην προσπάθεια κατασκευής του ρόμβου κατασκεύασε τυχαία το τετράγωνο. Αντίθετα, όλα τα ζευγάρια μαθητών που ασχολήθηκαν με τα όργανα ακολούθησαν την πιο εύκολη στρατηγική κατασκευής δηλαδή έφεραν παράλληλη στο τμήμα ΑΒ μετρώντας ίσα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα από τα σημεία Α και Β στην ΑΒ και ίσα με το μήκος του ΑΒ όπως φαίνεται στην εικόνα 3.







Εικόνα 1: Λ.1 ζευγάρι **Εικόνα 2: Λ.2 ζευγάρι** **Εικόνα 3: Ο.1 ζευγάρι**

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό όρισαν κατασκευαστικά σωστά τις ιδιότητες στις περισσότερες κατασκευές, σε σχέση με τα ζευγάρια του ίδιου επιπέδου που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα. Μόνο στην κατασκευή του τετραγώνου τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό δυσκολεύτηκαν περισσότερο σε σχέση με αυτά που ασχολήθηκαν με τα όργανα και έκαναν τις λιγότερο σωστές κατασκευές.

Εύρεση ειδών τετραπλεύρων 1ου φύλλου εργασίας

Ο πίνακας 3 δείχνει τον αριθμό των ειδών τετραπλεύρου που ανακάλυψε το κάθε ζευγάρι στη 2η δραστηριότητα. Ο αστερίσκος υποδηλώνει ότι έχει βρεθεί το σωστό είδος τετραπλεύρου, αλλά η τεκμηρίωση δεν είναι σωστή. Επίσης, κάποια ζευγάρια ανακάλυψαν είδη τετραπλεύρων τα οποία δεν αντιστοιχούν στο σωστό είδος. Για παράδειγμα αναφέρουν ένα τετράπλευρο ως παραλληλόγραμμο το οποίο είναι και ορθογώνιο. Τα εν λόγω τετράπλευρα δεν αποτυπώνονται στον πίνακα.

	Λ1	Ο1	Λ2	Ο2	Λ3	Ο3	Λ4	Ο4
Τραπέζιο	4		1		1		1*	1
Ισοσκελές τραπέζιο	1		1			1*		1*

Παραλληλόγραμμο		2	1	1*		1*		
Ορθογώνιο	2	2*	1	1*	1	2*	1	1
Ρόμβος						1*		
Τετράγωνο	1	1*	1	1*	1	1	1*	1
Σύνολο	8	5	5	3	3	6	3	4

*η τεκμηρίωση δεν είναι σωστή **Πίνακας 3: Εύρεση ειδών τετραπλεύρων ανά ζευγάρι.**

Όπως φαίνεται στον πίνακα 3, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό ανακάλυψαν περισσότερα είδη τετραπλεύρων και κατά την τεκμηρίωση έδειξαν περισσότερες κατανοήσεις σε σχέση με τις ιδιότητες των τετραπλεύρων.

Τα ζευγάρια που χρησιμοποίησαν το λογισμικό, φέρανε κάθετες, παράλληλες, μεσοκαθέτους, κύκλους, χρωμάτισαν ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα, μετακίνησαν τμήματα του σύνθετου σχήματος και γενικά χρησιμοποίησαν πολλές από τις δυνατότητες που τους έδωσε το λογισμικό για να ανακαλύψουν είδη τετραπλεύρων και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Για παράδειγμα το $1^{ο}$ ζευγάρι έφερε τις διαγώνιους στο τετράγωνο που ανακάλυψε και μετά με κέντρο την τομή των διαγωνίων έφερε κύκλο και διαπίστωσε ότι ο κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου. Στην τεκμηρίωσε ανέφερε ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ίσες και τέμνονται κάθετα

Τα ζευγάρια που χρησιμοποίησαν τα όργανα προσπάθησαν μόνο με μετρήσεις να τεκμηριώσουν με βάση τις ιδιότητες τα είδη τετραπλεύρων που ανακάλυψαν και επιπλέων το $2^{ο}$ ζευγάρι χρωμάτισε με διάφορα χρώματα τα τετράπλευρα που ανακάλυψε. Για παράδειγμα το $1^{ο}$ ζευγάρι μέτρησε με τον κανόνα τις πλευρές του τετραγώνου που ανακάλυψε και βρήκε ότι είναι ίσες, δεν έλεγξε όμως ότι πρέπει να είναι και κάθετες. Επομένως η τεκμηρίωση για το συγκεκριμένο είδος τετραπλεύρου χαρακτηρίστηκε λάθος.

Επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων $2^{ου}$ φύλλου εργασίας

Σχετικά με την επίλυση των δύο γεωμετρικών προβλημάτων, το $1^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό έλυσε σωστά το $1^{ο}$ γεωμετρικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ έδειξε αδυναμία στην επίλυση του $2^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος, ενώ το $2^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό έλυσε σωστά και τα δύο γεωμετρικά προβλήματα χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έτσι για παράδειγμα το $2^{ο}$ ζευγάρι κατά την κατασκευή του τυχαίου τετραπλεύρου, του $1^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος, κατασκεύασε ένα σχήμα το οποίο αρχικά φαινόταν τραπέζιο και μετακινώντας το με τη διαδικασία του συρσίματος, φάνηκε ότι είναι ένα τυχαίο τετράπλευρο. Στη συνέχεια αφού πρώτα όρισε τα μέσα των πλευρών του και τα ένωσε, με τη βοήθεια του συρσίματος διαπίστωσε ότι το τετράπλευρο που προέκυψε ήταν παραλληλόγραμμο. Έφερε τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ, τις χρωμάτισε, απομόνωσε περιοχές του σχήματος αποκρύπτοντας ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα και γενικά με την βοήθεια των δυνατοτήτων που του έδωσε το λογισμικό οδηγήθηκε στη λύση.

Αντίθετα, όλα τα υπόλοιπα ζευγάρια έδειξαν αδυναμία στην επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλα τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα προσπάθησαν να λύσουν τα προβλήματα, κάνοντας μετρήσεις με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων και ψηλαφώντας το σχήμα και δεν προσανατολίστηκαν στο να χρησιμοποιήσουν θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας τα οποία είχαν διδαχθεί. Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό έλυσαν πιο αποτελεσματικά τα γεωμετρικά προβλήματα του 2ου φύλλου εργασίας σε σχέση με τα ζευγάρια του ίδιου επιπέδου που ασχολήθηκαν με τα όργανα. Επίσης, όλα τα ζευγάρια κατασκεύασαν σωστά τα σχήματα που απαιτούσαν τα δύο γεωμετρικά προβλήματα.

Τεστ αξιολόγησης

Ο πίνακας 4 δείχνει τις σωστές και τις ημιτελείς απαντήσεις στις ιδιότητες αντιστοίχισης που έδωσαν συνολικά τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό και τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα. Οι λάθος απαντήσεις δεν αναφέρονται, όμως είναι προφανείς και οι ιδιότητες έχουν ομαδοποιηθεί σε τρεις κατηγορίες: ιδιότητες πλευρών, γωνιών και ιδιότητες διαγωνίων.

Ιδιότητες πλευρών, γωνιών και διαγώνιες ιδιότητες.	με λογισμικό	με όργανα
Ι.Π.Γ.1 Δύο πλευρές είναι παράλληλες	3 (1)*	2 (2)*
Ι.Π.Γ.2 Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες	4	4
Ι.Π.Γ.5 Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες	4	2 (2)*
Ι.Π.Γ.7 Όλες οι πλευρές είναι ίσες	4	3
Ι.Π.Γ.8 Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες	4	3 (1)*
Ι.Π.Γ.3 Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση είναι ίσες	3	1 (2)*
Ι.Π.Γ.4 Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες	3 (1)*	3 (1)*
Ι.Π.Γ.6 Όλες οι γωνίες είναι ορθές	4	4
Δ.Ι.1 Οι διαγώνιοί διχοτομούνται	3 (1)*	4
Δ.Ι.2 Οι διαγώνιοί είναι ίσες	3 (1)*	1 (3)*
Δ.Ι.3 Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα	2 (1)*	3 (1)*
Δ.Ι.4 Οι διαγώνιοί διχοτομούν τις γωνίες του	3 (1)*	1 (2)*

*ημιτελής απάντηση; **Πίνακας 4: Ιδιότητες αντιστοίχησης ανά ομάδα**

Έτσι, σχετικά με τις ιδιότητες πλευρών, γωνιών και τις ιδιότητες των διαγωνίων, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό, όπως φαίνεται ξεκάθαρα στον πίνακα 4, είχανε περισσότερες σωστές απαντήσεις και λιγότερες ημιτελείς και λάθος απαντήσεις από τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα όργανα.

Επίσης, ο πίνακας 5, δείχνει τις σωστές απαντήσεις που έδωσαν τα ζευγάρια της κάθε ομάδας σε μία από τις επτά προτάσεις σωστού λάθους, οι οποίες αναδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων.

Προτάσεις σωστού –λάθους	με λογισμικό	με όργανα
Σ_1 Το τετράγωνο, ένα ορθογώνιο;	4	2
Σ_2 Το ορθογώνιο είναι ρόμβος;	4	3
Σ_3 Το παραλληλόγραμμο είναι τραπέζιο;	4	2
Σ_4 Το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο;	4	1
Σ_5 Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο;	4	3

Σ_6 Το τετράγωνο είναι ρόμβος;	1	3
Σ_7 Το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο;	1	1

Πίνακας 5: Προτάσεις που αναδεικνύουν σχέσεις ανά ομάδα

Παρόμοια είναι και τα αποτελέσματα στις απαντήσεις των προτάσεων τύπου σωστού λάθους που αναδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων. Πιο συγκεκριμένα, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό, όπως φαίνεται ξεκάθαρα στον πίνακα 5, είχανε περισσότερες σωστές απαντήσεις από τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα όργανα, με συνέπεια να δείξουν πολύ περισσότερες κατανοήσεις στις σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων.

Συζήτηση - Προτάσεις

Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων του 1ου φύλλου εργασίας, το οποίο συνδέεται με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό μπόρεσαν να κατασκευάσουν σωστά και να ανακαλύψουν περισσότερα είδη τετραπλεύρων σε αντίθεση με τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα (βλ. Σχετικά πίν. 2 και 3). Το αποτέλεσμα αυτό συνάδει και με τη βιβλιογραφία (Hölzl, 1996) σύμφωνα με την οποία με τη χρήση του λογισμικού οι κατασκευές είναι δυναμικές και μπορούν να μετακινηθούν, να συρρικνωθούν, να μεγεθυνθούν ή να μεταβληθούν, διατηρώντας αναλλοίωτες και άρα αναδεικνύοντας τις γεωμετρικές ιδιότητες.

Σχετικά με το 2ο φύλλο εργασίας το οποίο συνδέεται με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, τα δύο πρώτα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό, έλυσαν σωστά συνολικά τρία προβλήματα και είχαν τις περισσότερες σωστές απαντήσεις στο διαγνωστικό τεστ. Έτσι σύμφωνα με τη βιβλιογραφία βρίσκονται στο 3ο επίπεδο van Hiele και έχουν κατακτήσει τη λειτουργική κατανόηση του Duval.

Στο ίδιο επίπεδο βρίσκονταν και το 1ο και 2ο ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα, παρόλα αυτά δεν μπόρεσαν να λύσουν κανένα από τα 2 γεωμετρικά προβλήματα του 2ου φύλλου εργασίας. Τα ευρήματα αυτά συνάδουν με ερευνητικές μελέτες στο γεγονός πως η χρήση του λογισμικού ενθάρρυνε τους μαθητές να αναπτύξουν μια πιο ευέλικτη σκέψη στην εκμάθηση των ιδιοτήτων των σχημάτων και των σχέσεων μεταξύ τους (Han, 2007).

Σύμφωνα με έρευνες, τα λογισμικά μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο, διότι οι μαθητές κατανοούν καλύτερα και εξερευνούν τις πιθανές απαντήσεις σε ένα πρόβλημα με σημαντικό εργαλείο το σύρσιμο. Επίσης οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό έγιναν πιο ευέλικτοι στη χρήση διαγραμμάτων και ήταν σε θέση να ξεπεράσουν τα τρία εμπόδια σύμφωνα με την έρευνα των Yerushalmy και Chazan (1990) και να δουν ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους.

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μία πιλοτική εφαρμογή η οποία υλοποιήθηκε για μικρό χρονικό διάστημα σε περιορισμένο αριθμό μαθητών και με μικρό αριθμό δραστηριοτήτων. Συνεπώς, τα συμπεράσματα αυτής δεν είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε γενικεύσεις. Ωστόσο τα αποτελέσματά αυτά είναι ενδεικτικά αναφορικά με τη χρήση εργαλείων στην προσέγγισης της γεωμετρίας και θα μπορούσαν να επιβεβαιωθούν σε μελλοντικές έρευνες, οι οποίες θα χρησιμοποιούσαν αφενός μεγαλύτερο δείγμα μαθητών και αφετέρου θα μπορούσαν να επεκταθούν και σε άλλες ενότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Αναφορές(References)

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15(3), 225-253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005).Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Mathematics Enthusiast*, *2*(2), 125-143.Retrieved from http://scholarworks.umt.edu/tme/vol2/iss2/6/

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Gawlick, T. (2005).Connecting arguments to actions - Dynamic geometry as means for the attainment of higher van Hiele levels. *ZDM. International Journal on Mathematics Education*, *37*(5), 361-370.https://doi.org/10.1007/s11858-005-0024-2

Han, H. (2007). *Middle school students' quadrilateral learning: A comparison study* (pp. 1-188). University of Minnesota.

Healy, L., & Hoyles, C. (2002). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 235-256.https://doi.org/10.1023/A:1013305627916

Heid, M. K. (1997).The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education*, *106*(1), 5-61.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(2), 169-187.https://doi.org/10.1007/BF00571077

Laborde, C. (1989). L'enseignement de la géométrie entantque terrain d' exploration de phénomènes didactiques. *Publications mathématique set informatique de Rennes*, (S6), 9-11.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM. International Journal on Mathematics Education, 43*(3), 325-336.https://doi.org/10.1007/s11858-011-0329-2

Mariotti, M. A. (2002).Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 257-281.https://doi.org/10.1023/A:1013357611987

Suwito, A., Yuwono, I., Parta, I. N., Irawati, S., & Oktavianingtyas, E. (2016). Solving Geometric Problems by Using Algebraic Representation for Junior High School Level 3 in Van Hiele at Geometric Thinking Level. *International Education Studies*, *9*(10), 27-33.https://doi.org/10.5539/ies.v9n10p27

Τζεκάκη, Μ. (1991). *Γεωμετρικές δραστηριότητες στο Γυμνάσιο: τι συμβόλαιο υπογράφουμε;* Ανακοίνωση στο 8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ε.Μ.Ε. Θεσσαλονίκη.

Τζεκακη, Μ. (1992). *Αξιοποίηση του Η/Υ σε θέματα Γεωμετρίας.* Στο Μ. Μεϊμάρης & Φ, Καλαβάσης (εκδ.), Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών (σσ. 115 - 128), Αθήνα, Προτάσεις.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics*, *6*, 310-316.

Yerushalmy, M. & Chazan D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. *EducationalStudiesinMathematics*, 21(3), 199–219.

https://doi.org/10.1007/BF00305090