

Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 14 (2020)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ
ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Δ' ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ
ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Νικολέτα Γκεβρέκη (Nikoleta Gevrekí)

doi: [10.12681/enedim.22138](https://doi.org/10.12681/enedim.22138)

Copyright © 2020, Νικολέτα Αθανάσιος Γκεβρέκη



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Βιβλιογραφική αναφορά:

Γκεβρέκη (Nikoleta Gevrekí) Ν. (2020). Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Δ' ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (14), 6–21. <https://doi.org/10.12681/enedim.22138>

Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Δ' ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Γκεβρέκη Νικολέτα

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, nikoleta.gbk@gmail.com

Περίληψη: Στην παρούσα μελέτη επιχειρείται η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές της Δ' τάξης του δημοτικού προσεγγίζουν τα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα μέσα από την οπτικοποίηση. Συγκεκριμένα, σε δείγμα δεκαοχτώ μαθητών εξετάζεται η αξιοποίηση στρατηγικών οπτικοποίησης προκειμένου να διακρίνουν δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα. Οι μαθητές συμμετέχουν σε δραστηριότητες με γεωμετρικά σχήματα και παράλληλα απαντούν σε ερωτήματα συνέντευξης. Από τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές είναι σε θέση αξιοποιώντας ποιοτικά ορισμένες δεξιότητες οπτικοποίησης (που καταγράφονται) να διακρίνουν σχήματα από πολύπλοκα πλαίσια, ιδιότητες σχημάτων και σχηματικές σχέσεις.

Λέξεις κλειδιά: Οπτικοποίηση δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, δεξιότητες οπτικοποίησης, διάκριση σχημάτων από πολύπλοκα πλαίσια, διάκριση ιδιοτήτων σχημάτων, διάκριση σχηματικών σχέσεων

Abstract: The present study is focused on how students of the 4th Grade of elementary school visualize two-dimensional geometric shapes. In particular, the subject that has been put under investigation is the use of visualization strategies in order to discriminate two-dimensional geometric shapes, utilizing an eighteen-student sample. These students participate in activities with geometric shapes while answering interview questions. From the conclusions of the study it has been found that the students are capable of distinguishing shapes from complex contexts, discriminating shape properties and shape relationships through the use of certain and qualitative visualization skills.

Keywords: visualization of two-dimensional geometric shapes, visualization skills, distinguishing shapes from complex contexts, discrimination of shape properties, discrimination of shape relationships

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θέμα της συμβολής της οπτικοποίησης στη γεωμετρία έχει κατά καιρούς απασχολήσει πολλούς ερευνητές. Πιο συγκεκριμένα, έχει διερευνηθεί γενικότερα το τι αφορά η οπτικοποίηση και το τι ακριβώς ονομάζουμε οπτικοποίηση στα μαθηματικά (Lean & Clements, 1981). Παραμένει πάντα ένα σημαντικό θέμα το πώς αξιοποιείται η οπτικοποίηση στη γεωμετρία (Presmeg, 1986). Διάφοροι ερευνητές έκαναν λόγο για δεξιότητες που χρησιμοποιούν οι μαθητές καθώς οπτικοποιούν τα σχήματα (Duval, 1995, 1999; Gutiérrez, 1996). Έτσι, προκύπτουν διάφορα ζητήματα, όπως είναι το ποιες στρατηγικές είναι αυτές, πώς αξιοποιούνται από τους μαθητές κι τελικά ποια σχήματα διακρίνονται και πώς. Αρκετές

μελέτες έχουν προσανατολιστεί μόνο στις δυσκολίες κατά την οπτικοποίηση σχημάτων και κυρίως των ιδιοτήτων τους, με μικρές αναφορές σε διάκριση των σχέσεων των σχημάτων (Gal & Linchevski, 2010; Gal, 2005; Fiscbein, 1993; Mariotti, 1992). Γενικά, είναι σημαντική η διερεύνηση της χρησιμότητας της οπτικοποίησης στη διάκριση των γεωμετρικών σχημάτων (ΓΣ), γεγονός που προσανατολίζει και το σκοπό αυτής της έρευνας, η οποία διερευνά τον τρόπο προσέγγισης δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων από μαθητές 10 ετών. Σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ (2003) οι μαθητές αυτής της ηλικιακής ομάδας θεωρείται πως ως την ολοκλήρωση της φοίτησης τους στην Δ' τάξη του δημοτικού θα δύνανται να αναγνωρίζουν, να διαχειρίζονται και να κατασκευάζουν δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα. Ειδικότερα, στη μελέτη αυτή επιχειρείται να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό οι μαθητές της Δ' τάξης διακρίνουν δισδιάστατα σχήματα, ιδιότητες σχημάτων και μεταξύ τους σχέσεις μέσω της οπτικοποίησης. Τα συμπεράσματα της μελέτης καταγράφονται αναλυτικά κι ενδέχεται να στρέψουν το ερευνητικό ενδιαφέρον στις στρατηγικές της οπτικοποίησης, αλλά και να επηρεάσουν τις διδακτικές τεχνικές στο μάθημα της γεωμετρίας

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν τα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα αναφέρεται στη βιβλιογραφία μέσα από την αναγνώριση των σχημάτων από πολύπλοκα περιβάλλοντα, την διάκριση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων ή των μεταξύ τους σχέσεων. Για τη διάκριση δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων χρησιμοποιούνται στρατηγικές οπτικοποίησης. Οπτικοποίηση στα Μαθηματικά ή Μαθηματική οπτικοποίηση-mathematical visibility (MV), ονομάζεται η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, της ερμηνείας, της χρήσης και της αντανάκλασης σε εικόνες, ζωγραφιές, διαγράμματα, στο μυαλό μας, σε χαρτί ή με τεχνολογικά εργαλεία, με σκοπό την απεικόνιση και την επικοινωνία μαθηματικών/γεωμετρικών πληροφοριών. Εκφράζει τις προτιμήσεις του ατόμου σε οπτικές μεθόδους όταν διαχειρίζεται μαθηματικά προβλήματα, τα οποία επιδέχονται είτε οπτικές είτε μη οπτικές μεθόδους επίλυσης (Presmeg, 1986; Lean & Clements, 1981).

Διάκριση δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων από πολύπλοκα πλαίσια μέσω οπτικοποίησης

Την ικανότητα του ατόμου να "βλέπει" το διακριτό γεωμετρικό σχήμα ο Duval (1999) την ονομάζει ικανότητα διαχωρισμού ('discrimination'). Με αυτή, το άτομο μπορεί να κατανοήσει πρωταρχικά μονοδιάστατα και δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα, κύκλο, τετράπλευρα ή πολύγωνα κι επιτυγχάνεται με τη σύνθεση ή την αποσύνθεση των σχημάτων. Έτσι, κατά την Dupuis (1978) μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει διάφορα γεωμετρικά σχήματα για να συνθέσει ένα γεωμετρικό αντικείμενο. Βέβαια, αντί για να συνθέσει το σχήμα μπορεί το άτομο να το αποσυνθέσει για να το διακρίνει από το πλαίσιό του. Ωστόσο, ο εντοπισμός των κοινών ιχνών μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων μπορεί να μην επιτευχθεί, όπως επιβεβαιώνει η έρευνα του Gal (2005) όπου οι μαθητές έδειχναν τα λάθος μέρη ως

κοινά σημεία: η πλευρά ενός σχήματος που γειτνιάζε με την πλευρά άλλου σχήματος εντοπίστηκε ως η κοινή. Πιο σύγχρονες μελέτες υποστηρίζουν πως η νοερή επεξεργασία επιτρέπει τη καλύτερη δυνατή διάκριση των υποσχημάτων του πλαισίου και αποτρέπει τέτοιου είδους οπτικές παρανοήσεις (Gal & Linchevski, 2010). Για αυτό το λόγο, άλλωστε, ο Duval (1999) αναφέρθηκε στη δεξιότητα εικονικής επεξεργασίας ('figural processing') που επιτρέπει στους ίδιους τους μαθητές να διενεργούν οπτικές πράξεις στην αναπαράσταση ενός σχήματος για να μεταβάλλουν το αρχικό γεωμετρικό σχήμα, διατηρώντας όμως τις βασικές του ιδιότητες. Αυτή η πράξη ονομάζεται επαναδιαμόρφωση ('reconfiguration'). Αντίθετα, παραδείγματα άλλων ερευνών αναφέρουν τη δημιουργία πρότυπων εικόνων στο νου ή την προσκόλληση σε ακολουθίες μοτίβων κατά την εικονική επεξεργασία που εισάγει ο Duval (1999). Οι ερευνητές Gal και Linchevski (2010) αναφέρθηκαν στις δυσκολίες διαχωρισμού των σχημάτων από τη χρωματική ομοιομορφία του πλαισίου. Πιο αναλυτικά, όταν οι μαθητές επεξεργάζονταν τα σχήματα με βάση το ενιαίο χρωματικό μοτίβο δεν διέκριναν τα υποσχήματα τους, ενώ αντίθετα, όταν το χρωματικό φόντο εναλλάσσονταν για κάθε σχήμα τότε διευκολύνονταν η διάκριση πολλών υποσχημάτων. Σύμφωνα με τη Mesquita (1998) συνήθως ο διαχωρισμός σχήματος-πλαίσιο απευθύνεται σε συγκεκριμένη οργάνωση κατεύθυνσης, μορφής και διάστασης, έτσι ώστε να αναζητάται από το άτομο ένα συγκεκριμένο πρότυπο του σχήματος μέσα στο σύνθετο πλαίσιο. Για παράδειγμα, η ερευνήτρια αναφέρει ότι το ισόπλευρο τρίγωνο αναζητιέται ως πρότυπο για κάθε άλλο τρίγωνο του πλαισίου.

Διάκριση ιδιοτήτων των δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων μέσω οπτικοποίησης

Σύμφωνα με μελετητές όπως οι Piaget & Inhelder (1966) καταγράφονται στρατηγικές που βοηθούν τους μαθητές να διατηρήσουν σταθερές τις ιδιότητες στα σχήματα, όπως είναι η χρήση της ικανότητας νοερού μετασχηματισμού του σχήματος, κάτι που ο Fischbein (1993) διαπίστωσε όταν τα παιδιά δημοτικού σε πρόβλημα με δύο σημεία από τα οποία διέρχονταν τότε μία και τότε περισσότερες ευθείες διατήρησαν σταθερά το κυκλικό μέγεθος και των δύο σημείων. Κατά πλειοψηφία οι μεγαλύτεροι μαθητές απάντησαν πως κανένα δεν ήταν πιο βαρύ, χοντρό ή εξαρτώμενο από το πλήθος των ευθειών που διέρχονταν από αυτό. Με νοερή επεξεργασία οι ιδιότητες διατηρούνται σταθερές σε ένα σχήμα (Gal & Linchevski, 2010). Οι περισσότεροι ερευνητές, ωστόσο, εντοπίζουν ορισμένες στρατηγικές οπτικοποίησης που οφείλονται συχνότερα για τη μη διατήρηση των ιδιοτήτων στα σχήματα. Αν το αντικείμενο περιστρέφεται από την πρωτότυπη θέση (Tall & Vinner, 1981), τότε τελείται μία ελεγχόμενη διαδικασία για να αναγνωρισθεί, για παράδειγμα, μία γωνία. Η αναγνώριση μιας ορθής γωνίας που είναι παράλληλη με τα περιθώρια μιας σελίδας A4 είναι ευκολότερη από την αναγνώριση μιας περιστρεφόμενης (Hershkowitz, 1989α). Τα χαρακτηριστικά του σχήματος φαίνεται να μη διατηρούνται με μεταβολή της θέσης, της κατεύθυνσης ή του μεγέθους του και ειδικότερα όταν υπάρχει ένα άκαμπτο πρωταρχικό σχήμα στο νου των μαθητών για μία ορισμένη κατηγορία σχημάτων. Αρκετές φορές η εναλλαγή του τύπου της αναπαράστασης (οπτικής ή λεκτικής) για το σχήμα μπορεί να δημιουργήσει την εντύπωση αλλαγής των

ιδιοτήτων του (Τάτσης & Γούτση, 2011). Ιδιαίτερα σημαντική αναδεικνύεται η χρήση της γλώσσας κατά την Pirie (1998), όπου υφίσταται ένας διαχωρισμός της μαθηματικής και της καθημερινής γλώσσας για τη γεωμετρία σύμφωνα με τη Σημειωτική θεωρία. Για παράδειγμα, η εξοικείωση των μαθητών με την καθημερινή γλώσσα δημιούργησε δυσκολίες στη μετάδοση των οδηγιών για την κατασκευή γεωμετρικών αντικειμένων, με αποτέλεσμα οι γεωμετρικές έννοιες να υποστούν μεταβολές κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού "σπασμένο τηλέφωνο" 'σε έρευνα των Τάτση και Γούτση (2011).

Διάκριση σχέσεων μεταξύ δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων μέσω οπτικοποίησης

Παρατηρείται μεγάλη ευστοχία κατά τη διάκριση σχηματικών σχέσεων μέσα από τις νοερές συγκρίσεις των σχημάτων προς αναζήτηση ομοιοτήτων ή διαφορών. Συγκεκριμένα, σε μελέτη των Walcott, Mohrb και Kastbergc (2009) οι μαθητές φάνηκε ν' αναπτύσσουν μια δυναμική έννοια για το σχήμα, της οποίας η κατανόηση βασίζεται στο νόημα που συμπεριλαμβάνει το νοητό χειρισμό των σχημάτων. Παρόμοια μέσω σύγκρισης διερευνήθηκαν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε τρίγωνα (Gal & Linchevski, 2010). Η απόδειξη ότι δύο τρίγωνα είναι όμοια γίνεται όλο και πιο δύσκολη, όσο περισσότερος νοητός μετασχηματισμός απαιτείται (Bishop, 1983). Την παραπάνω άποψη ασπάστηκε και η μελέτη των Clements, Wilson και Sarama (2004) όπου έγινε φανερό πως τα παιδιά απέκτησαν ικανότητες να συνδυάζουν τα σχήματα μεταξύ τους μέσα από δοκιμές και λάθη. Αντίθετα, η προσκόλληση σε αναζητήσεις πρότυπων σχημάτων ή λεκτικών ορισμών δεν οδηγεί πάντα σε σχηματικές συσχετίσεις (Vinner & Hershkowitz, 1983). Τότε θεωρείται ότι δεν χρησιμοποιούνται ικανότητες βαθιάς οπτικοποίησης, αλλά απλή ανάγνωση μιας απεικόνισης σχήματος και των χαρακτηριστικών του (Gutiirrez, 1996). Αυτό συμβαίνει, διότι το άτομο που οπτικοποιεί το κάθε σχήμα χωριστά δε μπαίνει στη διαδικασία συσχέτισης του με τα άλλα σχήματα (Hershkowitz, 1989). Σε άλλη μελέτη, από τη χρησιμοποίηση προτύπων φάνηκε πως τα παιδιά βρήκαν αιχμηρές τις διαφορές ανάμεσα σε σχήματα που δε ταίριαζαν με την εικόνα του πρότυπου σχήματος για μία κατηγορία σχημάτων, ενώ είδαν ευκολότερα τις ομοιότητες σε σχήματα που έμοιαζαν με τα πρωταρχικά του νου (Μιχαήλ, Μουσκή, & Γαγάτσης, 2014).

Συνοψίζοντας βασικά στοιχεία των ερευνητών αναφορικά με τη διάκριση των γεωμετρικών σχημάτων παρατηρείται πως αναφέρονται διάφορες μορφές οπτικοποίησης. Οι μαθητές του δημοτικού χρησιμοποιούν στρατηγικές όταν οπτικοποιούν τα σχήματα, από την αναζήτηση των προτύπων και των χρωματικών μοτίβων έως τις νοερές περιστροφές και μετασχηματισμούς με σκοπό τη διάκριση. Σύμφωνα με τις βιβλιογραφικές μελέτες μεγαλύτερη είναι η χρήση διαχωρισμών, αποσυνθέσεων ή επαναδιαμόρφωσης των σχημάτων για τη διάκρισή τους από το σύνθετο πλαίσιο. Αντίστροφα, στρατηγικές όπως η νοερή επεξεργασία χρησιμοποιούνται για τη καλύτερη δυνατή διάκριση ιδιοτήτων ή σχέσεων των γεωμετρικών σχημάτων. Σε μελέτη της Gorgorio (1998) επιβεβαιώνεται ότι για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων μπορεί κανείς να αναγνωρίσει τα σχήματα μέσα από

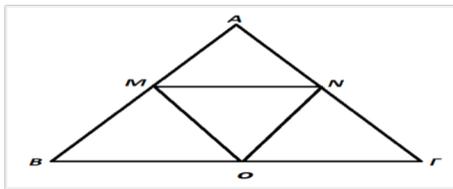
στρατηγικές ανάλογες με τα χαρακτηριστικά και τη φύση της άσκησης. Συνεπώς η δράση που απαιτείται σχετίζεται με τη φύση μιας άσκησης και καθορίζει τη στρατηγική που θα χρησιμοποιηθεί. Ωστόσο, είναι ελάχιστες οι έρευνες που αφορούν τη διάκριση σχήματος από το σύνθετο πλαίσιο του κι επομένως καθίσταται αναγκαία η επιβεβαίωση για τις στρατηγικές οπτικοποίησης που παρατηρούνται σε κάθε είδους διάκριση μέσα από κάποια νέα έρευνα. Επιπρόσθετα, είναι σημαντικό να διερευνηθεί ο βαθμός της κατανόησης, εφόσον σχετίζεται η κάθε στρατηγική με το ποσοστό επιτυχίας στην επίλυση μιας άσκησης. Πιο σύγχρονες έρευνες τονίζουν τη σημασία των πολλών οπτικών αναπαραστάσεων για τη διάκριση των γεωμετρικών σχημάτων. Τόσο οι κινήσεις των χεριών για νοερή επεξεργασία όσο και ο σχεδιασμός και χειρισμός των σχημάτων σε δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας οδηγούν σε μεγαλύτερη ευστοχία κατά τη διάκριση σχημάτων (Latsi & Kynigos, 2010).

Στην παρούσα μελέτη, λοιπόν, επιδιώκεται να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό οι μαθητές της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου προσεγγίζουν και κατανοούν τα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα μέσα από τη χρήση στρατηγικών οπτικοποίησης (visualization). Τα ερευνητικά ερωτήματα που επιδιώκεται να απαντηθούν είναι τα εξής: Α) Κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν τα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα μέσα από διαφορετικά περιβάλλοντα οπτικοποίησης; Β) Ποιες ιδιότητες των δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων μπορούν να διακρίνουν οι μαθητές μέσα από την οπτικοποίηση; και Γ) Ποιες σχέσεις μεταξύ των δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων μπορούν να διακρίνουν οι μαθητές μέσα από την οπτικοποίηση;

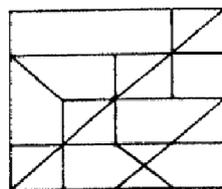
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η μέθοδος που ακολουθείται στην παρούσα ερευνητική εργασία είναι ποιοτική, διότι η κατανόηση των παιδιών για τα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα είναι μεταβλητή μη ποσοτικά μετρήσιμη (Presmeg, 1986). Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα ήταν στο σύνολό τους 16 (8 κορίτσια, 8 αγόρια) ηλικίας 10-11 ετών, από τρεις διαφορετικές τάξεις της Δ' δημοτικού δημοσίου σχολείου της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Οι μαθητές της συγκεκριμένης σχολικής βαθμίδας επιλέχθηκαν διότι τη χρονική αυτή περίοδο διδάσκονταν στα τμήματά τους τα δισδιάστατα τετράπλευρα γεωμετρικά σχήματα (ΔΕΠΠ, 2003). Επίσης, η επιλογή των παιδιών αυτών πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τις επιδόσεις τους που κυμαίνονταν από χαμηλές έως υψηλές βάσει της καταγεγραμμένης βαθμολογίας των προηγούμενων τριμήνων, ώστε να εξασφαλιστεί η ποικιλομορφία του δείγματος. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το Φεβρουάριο και Μάρτιο του 2019. Ειδικότερα, διεξάγεται μία συνέντευξη, όπου ένας ερευνητής προτείνει στα παιδιά να κατονομάσουν τα σχήματα, άλλοτε να υποδείξουν τα σχήματα μέσα σε σύνθετα περιβάλλοντα κι άλλοτε να επικολλήσουν τα σχήματα σε πλαίσια ανάλογα με τις ιδιότητές τους. Η διάρκεια κάθε συνέντευξης κυμάνθηκε από 45' με 60' περίπου. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης ο ερευνητής καταγράφει τις απαντήσεις των μαθητών και σημειώνει παρατηρήσεις σχετικά με τον τρόπο που διέκριναν τα γεωμετρικά σχήματα. Παράλληλα, ζητά από τα παιδιά να συσχετίσουν τα σχήματα που τοποθέτησαν σε κοινά πλαίσια και να αιτιολογήσουν τις δράσεις τους πάνω στο έργο που

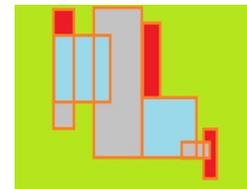
κλήθηκαν να επιτελέσουν (task interview). Για την πραγματοποίηση της έρευνας, λοιπόν, δημιουργήθηκαν: ένα σύνολο δράσεων σε έντυπο ή χειραπτικό περιβάλλον με ένα σύνολο ερωτήσεων και ένα φύλλο παρατήρησης. Οι δράσεις σε έντυπο περιβάλλον αφορούν τη διερεύνηση της διάκρισης των γεωμετρικών σχημάτων μέσα από πολύπλοκα πλαίσια από τους μαθητές. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν τρεις δράσεις, όπου αξιοποιήθηκαν στοιχεία από τις έρευνες των Gal και Linchevski, 2010, Kalogirou και Gagatsis (2011) και προσαρμόστηκαν για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης. Στα παιδιά εκφωνούνταν προφορικά οι εξής ερωτήσεις: Σε αυτό το σχήμα είναι κρυμμένα πολλά άλλα σχήματα. Πόσα διαφορετικά σχήματα μπορείς να διακρίνεις; Ονόμασέ τα με τα γράμματα (δράση 1), το παρακάτω σχήμα είναι λίγο πιο σύνθετο. Και μέσα σε αυτό κρύφτηκαν μερικά τετράγωνα. Μπορείς να δοκιμάσεις να τα περιγράψεις με κίτρινο χρώμα για να φανερωθούν; (δράση 2), ο μικρός αδελφός της Ελένης έβαψε κατά λάθος με το πινέλο του όλα τα σχήματα της εργασίας της. Μπορείς να βοηθήσεις την Ελένη να ξεχωρίσει πόσα από αυτά είναι τετράγωνα και πόσα είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα; (δράση 3).



Εικόνα 1: Δράση 1^η



Εικόνα 2: Δράση 2^η



Εικόνα 3: Δράση 3^η

β) Επίσης, χορηγήθηκε μία δραστηριότητα σε μακέτα με χειραπτικό υλικό, σχετικά με τη διερεύνηση της διάκρισης ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων. δραστηριότητα αυτή είναι μια αυτοσχέδια κατασκευή με χαρτόνι. Στα παιδιά εκφωνούνταν οι οδηγίες και στο τέλος γίνονταν ερωτήσεις που προωθούσαν τη συσχέτιση μεταξύ των σχημάτων, όπως: Τι κοινό έχει το σχήμα 1 (τετράγωνο) με το σχήμα 2 (παραλληλόγραμμο);, Γιατί τα τοποθέτησες στο ίδιο πλαίσιο; κ.α. Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του κάθε σχήμα μπορεί να "κολληθεί" στα αντίστοιχα κουτάκια-πλαίσια (δίνεται 6 φορές το ίδιο σχήμα όσες και οι αντιστοιχίσεις). Στα παιδιά διευκρινίζεται ότι το κάθε σχήμα μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε περισσότερες της μιας κατηγορίες. Για παράδειγμα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ανήκει και στο πλαίσιο των σχημάτων που έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες, αλλά και στο πλαίσιο των σχημάτων που έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Το κάθε σχήμα δίνεται η οδηγία να επικολλάται πάνω από το προηγούμενο, ώστε να εξυπηρετηθεί κατόπιν η συσχέτιση. Η έμπνευση για την κατασκευή της 4^{ης} δράσης προήλθε από τη χρησιμοποίηση εκπαιδευτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών σε έργο της Σκουμπουρδή (2014).



Εικόνα 4: Δράση 4^η

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο 1^{ος} ερευνητικός άξονας της παρούσας μελέτης αφορά δύο ευρύτερες κατηγορίες απαντήσεων των παιδιών: α) τη διάκριση σχήματος με τη βοήθεια νοερού μετασχηματισμού ή αντιστροφής (μέσω σύνθεσης ή αποσύνθεσης κ.α) και β) τη διάκριση μόνο με αναζήτηση προτύπων ή μοτίβων. Φαίνεται πως τα περισσότερα παιδιά (13) διέκριναν όλα τα τρίγωνα από το σύνθετο πλαίσιο της δράσης 1. Οι μαθητές αυτοί αποσύνθεσαν τα μικρά τρίγωνα από το όλο σχήμα, αλλά και είχαν επίγνωση της σύνθεσης του μεγαλύτερου σχήματος από αυτά. Τα παιδιά, δηλαδή βρήκαν και απέσπασαν το κάθε σχήμα από το κοινό σύνορο-πλευρά που μοιραζόταν με κάποιο άλλο τρίγωνο (Dupuis, 1978). Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα απάντησης μαθήτριας για το μεγάλο τρίγωνο:

Ερευνήτρια: Πώς κατάλαβες ότι όλη η εικόνα αποτελεί ένα τρίγωνο;

Μαθήτρια: Όλα τα μικρά τρίγωνα φτιάχνουν ένα μεγάλο... άμα ξεκολλήσω μερικά τρίγωνα, το μεγάλο τρίγωνο θα πάψει να υπάρχει.. (διάκριση με σύνθεση)

Παρόμοια, σχεδόν όλοι οι μαθητές που διέκριναν το ρόμβο, χρησιμοποίησαν πολλές στρατηγικές επαναδιαμόρφωσης του σχήματος ('reconfiguration', Duvall, 1999). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, την κατανόηση ότι από το συνδυασμό δύο τριγώνων φτιάχνεται ένας ρόμβος ή το ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του ρόμβου τον χωρίζει σε δύο ίσα μέρη-τρίγωνα. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές που έβρισκαν το ρόμβο ενθαρρύνονταν να βρουν κι άλλα παρόμοια τετράπλευρα. Τα πρώτα σχήματα που "έβλεπαν" μετά ήταν τα πλάγια παραλληλόγραμμα. Αυτό συνέβη, καθώς τα πλάγια παραλληλόγραμμα εμπεριείχαν σχεδόν τον ίδιο αριθμό επικαλύψεων με το ρόμβο.

Ερευνήτρια: Τι σχήμα είναι αυτό που βρήκες;

Μαθητής: Είναι σαν αυτό που βρήκα πριν, απλά πιο πλαγιαστό (εικονική επεξεργασία με νοερό μετασχηματισμό)

Από την άλλη πλευρά, ελάχιστοι μαθητές (3) δεν εντόπισαν ούτε το ρόμβο αλλά ούτε και το πιο σύνθετο μεγάλο τρίγωνο. Μάλιστα, τα ίδια παιδιά, αλλά κι ακόμη περισσότερα (9) δε βρήκαν κανένα πλάγιο παραλ/μο σχήμα, αλλά ούτε και τραπέζια (12).

Αυτό το γεγονός εξηγείται από την προσκόλληση στην ανεύρεση πρότυπων μόνο σχημάτων σε προσανατολισμό ή μέγεθος (π.χ. μόνο ίδιου μεγέθους τρίγωνα, Mesquita, 1998). Βέβαια, όσο αυξάνεται η κλίση του σχήματος ή και όσο πιο σύνθετες γίνονται οι επικαλύψεις του τόσο μεγαλύτερη μοιάζει να είναι η δυσκολία διάκρισης ενός γεωμετρικού σχήματος. Έτσι, κάποιες σχηματικές κατηγορίες αποδείχθηκε πως είναι πιο δύσκολο να διακριθούν κι επομένως η διάκριση φαίνεται να συνδέεται με το γεωμετρικό σχήμα. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται ο αριθμός των μαθητών που διέκρινε τα γεωμετρικά σχήματα της δράσης 1 (πόσα από τα τρίγωνα, αν διέκριναν ή όχι το ρόμβο, πόσα παραλληλόγραμμα και πόσα τραπέζια).

Σχήματα	Τρίγωνα		Ρόμβοι		Πλάγια παραλ/μα			Τραπέζια			
1 ^{ης} δράσης	(από 5)		(από 1)		(από 2)			(από 3)			
Πλήθος	5	4	1	0	0	1	2	0	1	2	3
Αρ. μαθητών	13	3	13	3	9	2	5	12	2	1	1

Πίνακας 1: αριθμός μαθητών που διέκριναν μέσω οπτικοποίησης σχήματα από το σύνθετο πλαίσιο της 1^{ης} δράσης

Στη 2^η δράση επαληθεύτηκε η δυσκολία των μαθητών να διακρίνουν μέσα απ' το πολύπλοκο περιβάλλον τους τα τετράγωνα με τις περισσότερες επικαλύψεις. Οι απαντήσεις των μαθητών και σε αυτή την περίπτωση ομαδοποιούνται σύμφωνα με τη στρατηγική τους για σύνθεση ή αποσύνθεση. Δύο μαθητές διέκριναν όχι όλα, αλλά αρκετά τετράγωνα, συμπεριλαμβανομένου του όλου σύνθετου τετραγωνικού πλαισίου. Τα περισσότερα παιδιά (14) αναζήτησαν τετράγωνα σύμφωνα με τα πρωταρχικά πρότυπα του νου για αυτά τα γεωμετρικά σχήματα (τα 5 τετράγωνα ίδιου μεγέθους, προσανατολισμού κι επικαλύψεων).

Σχήματα	Τετράγωνα			
2 ^{ης} δράσης	(από 8)			
Πλήθος	5	6	7	8
Αρ. μαθητών	14	2	0	0

Πίνακας 2: αριθμός μαθητών που διέκριναν μέσω οπτικοποίησης σχήματα από το σύνθετο πλαίσιο της 2^{ης} δράσης

Στην 3^η δράση παρατηρήθηκαν απαντήσεις που φανερώνουν ότι οι μαθητές που παρασύρθηκαν από τη χρωματική ομοιομορφία του πλαισίου άρχιζαν συνήθως να κατονομάζουν μόνο τα μεγάλα γεωμετρικά σχήματα ενιαίου χρώματος (3, 4 τετράγωνα, 5, 6 ορθογώνια). Έτσι, οι απαντήσεις τους στηρίχθηκαν στο χρωματικό μοτίβο, με συνέπεια να μη διακρίνουν διαχωριστικά σύνορα μεταξύ των σχημάτων (Gal & Linchevski, 2010). Αντίθετα, παρατηρήθηκαν και απαντήσεις ανεξάρτητες από τη χρωματική ομοιομορφία του πλαισίου. Οι μαθητές που ανήκουν σε αυτή την ομάδα απαντήσεων παρατηρήθηκε πως ακολούθησαν τις διαχωριστικές γραμμές κατά τη διάκριση (Duvall, 1999). Επιπλέον, εφάρμοσαν νοερές αποσυνθέσεις των κοινών σημείων των σχημάτων, ξεκινώντας από την υπόδειξη μικρότερων σχημάτων και κατόπιν των μεγαλύτερων, όπως για παράδειγμα των πιο σύνθετων τετραγώνων ή ορθογωνίων. Έτσι, κατόρθωσαν να διακρίνουν τόσο μικρά όσο και μεγάλα γεωμετρικά σχήματα και κατ' επέκταση περισσότερα σχήματα (5,6,7 τετράγωνα, 8, 9 ορθογώνια). Παρόλα αυτά, κανένα παιδί δε βρήκε όλα τα ορθογώνια. Κάποια από τα παιδιά αυτά (ένας μαθητής βρήκε και τα 7 τετράγωνα, 2 παιδιά βρήκαν 9 ορθογώνια) συνδύασαν τόσο τη βοήθεια που παρείχε το ενιαίο χρωματικό φόντο όσο και τις δεξιότητες νοερού διαχωρισμού, επιτυγχάνοντας να διακρίνουν αν όχι όλα τα περισσότερα σχήματα.

Η κατανόηση των δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων μέσα από την οπτικοποίηση σε μαθητές της δ' τάξης Δημοτικού

Αναφέρεται ενδεικτικά το παράδειγμα του μαθητή που διέκρινε όλα τα τετράγωνα, αλλά και τα 9 ορθογώνια.

Μαθητής: Βλέπω ότι αυτό το σχήμα αποτελείται από δύο μικρότερα τετράγωνα.

Ερευνήτρια: Ωραία λοιπόν, τι σχήμα είναι αυτό που είδες;

Μαθητής: Ά! Να κι ένα ορθογώνιο όπου υπάρχουν και τα δύο μικρά τετραγωνάκια, τα οποία χωρίζονται μεταξύ τους με μία γραμμή (για την κοινή πλευρά τους)

Σχήματα	Τετράγωνα					Ορθογώνια παραλ/μα				
3ης δράσης	(από 7)					(από 10)				
Πλήθος	7	6	5	4	3	10	9	8	6	5
Αρ. μαθητών	1	1	7	5	2	0	2	12	1	1

Πίνακας 3: αριθμός μαθητών που διέκριναν μέσω οπτικοποίησης σχήματα από το σύνθετο πλαίσιο της 3^{ης} δράσης

Προσεγγίζοντας τον 2^ο ερευνητικό άξονα, που αφορά τις απαντήσεις των παιδιών για τις ιδιότητες των δισδιάστατων τετράπλευρων σχημάτων στη δράση 4, αυτές ομαδοποιούνται ως εξής: α) απαντήσεις με βάση τη διατήρηση των ιδιοτήτων στα σχήματα και β) απαντήσεις με μη διατήρηση των ιδιοτήτων στα σχήματα. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν νοερούς μετασχηματισμούς (σύνθεση, αποσύνθεση, επαναδιαμόρφωση) κι αντιστροφές σχημάτων, επαλήθευση κάποιου καθημερινού λεκτικού κανόνα ή αναπαράστασης για το σχήμα όταν οι απαντήσεις τους διατηρούν σταθερές τις ιδιότητες. Με αυτό τον τρόπο τα πιο πολλά παιδιά οπτικοποίησαν τις ιδιότητες σε πολλά και διαφορετικά σχήματα. Κάποιες οπτικοποιήσεις εφαρμόστηκαν περισσότερο στη διάκριση ορισμένων σχημάτων. Για παράδειγμα:

Ερευνήτρια: Πώς βρήκες ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες στο ορθογώνιο παραλ/μο;

Μαθητής: Μα αν δεν ήταν ίδιες (εννοώντας ίσες ή και παράλληλες) τότε τα κουφώματα της πόρτας (δείχνοντας αυτή της αίθουσας) θα ήταν λάθος... δε θα χωρούσαμε να περάσουμε από την πόρτα.. (δεξιότητα αναγωγής σε καθημερινές αναπαραστάσεις, καθημερινή γλώσσα)(Clements & Battista, 1992b).

Από την άλλη πλευρά, παρατηρείται πως οι μαθητές χρησιμοποιούν πρότυπες εικόνες όταν οι απαντήσεις τους υποδεικνύουν τη μη διατήρηση των ιδιοτήτων και οδηγούν σε λεκτικές ή οπτικές παρανοήσεις. Για παράδειγμα, το παραλληλόγραμμο σχήμα συνδέθηκε με την αντίστοιχη ιδιότητά του λεκτικού ορισμού του ως μοναδικό πρότυπο για την ιδιότητα της παραλληλίας όλων των πλευρών (Gutierrez, 1996; Presmeg, 1986). Επιπλέον, κάποια σχήματα αποδείχθηκε να είναι πιο οικεία, εύκολα κατά τη διάκριση ιδιοτήτων (ορθογώνιο & τετράγωνο) ενώ κάποια άλλα όχι (ρόμβοι & τραπέζια). Η διάκριση των ιδιοτήτων, λοιπόν, παρατηρήθηκε πως εξαρτάται και από το δισδιάστατο γεωμετρικό σχήμα. Το σχήμα-

πρότυπο είναι πιο πιθανό να διακριθεί και να τοποθετηθεί ορθώς σύμφωνα με τις ιδιότητές του. Έτσι, όσο μεγαλύτερος ήταν ο νοερός μετασχηματισμός που απαιτούνταν για να γίνει αντιληπτή η ιδιότητα (ρόμβος B σε σχέση με ρόμβο A) τόσο δυσκολότερη ήταν η διάκριση του σχήματος (Walcott, Mohrb, & Kastbergc, 2009). Για παράδειγμα, ως προς τις ιδιότητες των γωνιών παρατηρήθηκαν οι περισσότερες δυσκολίες οπτικοποίησης, κυρίως για τα σχήματα με τη μεγαλύτερη κλίση πλευρών (πλάγιο παραλ/μο, ρόμβοι, τραπέζια). Για τους μαθητές αυτά τα σχήματα δε θεωρήθηκαν πρότυπα, καθώς έπρεπε να τα περιστρέψουν νοερά για να τα διακρίνουν. Είναι γεγονός πως οι ιδιότητες των γωνιών αποτελούν τα λεπτά σημεία που διαφοροποιούν το ρόμβο από το τετράγωνο, τα πλάγια από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Για αυτό, ίσως να εξηγούνται και τα πολλά λάθη των μαθητών σε αυτές τις ιδιότητες.

Ιδιότητες Σχημάτων 4ης δράσης	Ορθογώνιο παραλ.	Πλάγιο παραλ.	τετράγωνο	ρόμβος		Κανονικό Τραπέζιο	Μη κανονικό τραπέζιο
				A	B		
Ως προς τις Πλευρές							
A. Οι απέναντι παράλληλες	15	14	16	16	13	16	13
B. Όλες παράλληλες	15	13	15	15	14	3	1
Γ. Οι απέναντι ίσες	16	12	16	14	15	13	1
Δ. Όλες ίσες	1	2	14	13	12	0	0
Ως προς τις Γωνίες							
E. Όλες ίσες	15	6	16	7	3	3	3
Στ. Όλες ορθές	14	3	16	1	0	0	2

Πίνακας 4: αριθμός μαθητών που διέκριναν μέσω οπτικοποίησης ιδιότητες στα τετράπλευρα σχήματα της 4ης δράσης

Εν συνεχεία, όσον αφορά τη διερεύνηση των σχηματικών σχέσεων που διακρίνουν οι μαθητές αυτοί μέσω της οπτικοποίησης δόθηκαν τα ερωτήματα που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Οι μαθητές της Δ' τάξης φάνηκαν να δυσκολεύονται περισσότερο στην εύρεση σχέσεων ανάμεσα στα τετράπλευρα σχήματα. Σε αυτό τον ερευνητικό άξονα σημειώθηκαν αρκετά λάθη. Από τις απαντήσεις των μαθητών μπορούν να δημιουργηθούν οι

Η κατανόηση των δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων μέσα από την οπτικοποίηση σε μαθητές της δ' τάξης Δημοτικού

εξής ομάδες: α) μαθητές που οπτικοποίησαν σχέσεις με σύγκριση σχημάτων και β) μαθητές που οπτικοποίησαν σχέσεις με πρότυπες εικόνες.

Σχέσεις σχημάτων 4ης δράσης		
Απαντήσεις μαθητών	Ναι	Όχι
1. Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος;	14	2
2. Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια παραλ/μα;	10	5
3. Ο ρόμβος είναι και ορθογώνιο;	0	16
4. Έχουν όλα τα παραλ/μα τις απέναντι πλευρές τους ίσες;	4	11

Πίνακας 5: απαντήσεις μαθητών αναφορικά με τη διάκριση σχηματικών σχέσεων μέσα από την οπτικοποίηση στην 4η δράση

Έτσι λοιπόν, στις απαντήσεις των μαθητών της πρώτης ομάδας παρατηρήθηκε η χρήση νοερών μετασχηματισμών του ενός σχήματος στο άλλο με το οποίο αναζητούνταν κάποια σχέση (Hershkowitz, 1989). Επίσης, παρατηρήθηκε η τάση των μαθητών να τροποποιούν το αρχικό σχήμα που τους ήταν πιο οικείο, έτσι ώστε να μοιάζει στο δεύτερο. Αντέστρεφαν, άλλαζαν νοερά τον προσανατολισμό και τοποθετούσαν το ένα σχήμα δίπλα ή πάνω στο άλλο. Για παράδειγμα, αντιστροφή και κλίση των πλευρών του τετραγώνου σε ρόμβο:

Μαθητής: Το τετράγωνο είναι και ρόμβος, γιατί στην ουσία αν το γυρίσω ανάποδα γίνεται πάλι τετράγωνο.

Τα παιδιά της πρώτης ομάδας έβρισκαν αρχικά τις διαφορές ανάμεσα στα σχήματα και στη συνέχεια διέκριναν κάποια ομοιότητα. Για παράδειγμα, σχεδόν όλα τα παιδιά (14) απάντησαν ότι το τετράγωνο έχει τα χαρακτηριστικά του ρόμβου, διότι οπτικά αυτός μοιάζει με αντεστραμμένο τετράγωνο. Από την άλλη πλευρά, μαθητές της δεύτερης ομάδας

παρατηρείται πως βασίστηκαν σε πρότυπα σχήματα, κατονομάζοντας αρχικά τις ομοιότητες. Αναγνώρισαν, λοιπόν, σχήματα που έμοιαζαν πολύ οπτικά με αυτό που είχαν διδαχθεί για μία ορισμένη κατηγορία σχημάτων.

Ερευνήτρια: Τώρα μήπως μπορείς να μου πεις αν το τετράγωνο αυτό μπορεί να είναι γενικότερα ρόμβος; (δείχνοντας τους ρόμβους Α και Β)

Μαθητής: Χμμ... μπορεί να γίνει ρόμβος, αλλά μόνο αυτός(υποδεικνύοντας τον Α). Ο άλλος(Β) είναι πολύ στραβός... το τετράγωνο δεν είναι έτσι. Αυτό είναι ένα παράξενο σχήμα.

Παράλληλα, είχαν ταυτίσει με κάποιον τρόπο το λεκτικό ορισμό με την ιδιότητα ή με το συγκεκριμένο σχήμα (2 παιδιά στην 1η ερώτηση, 5 παιδιά για τη 2η ερώτηση). Για αυτό το λόγο, δε μπορούσαν να πουν π.χ. ότι ένα τετράγωνο μπορεί να είναι και ορθογώνιο. Το ορθογώνιο είχε άλλο σχήμα οπτικά κι όπως υποστήριζαν κι άλλον ορισμό. Έτσι εξηγείται το γεγονός ότι όλοι οι μαθητές αμφισβήτησαν στην 3η ερώτηση το ότι ένας ρόμβος είναι ορθογώνιος. Αυτό το ερώτημα ήταν το μοναδικό στο οποίο όλα τα παιδιά απάντησαν σωστά, γιατί αφορούσε συγκεκριμένη ιδιότητα, η οποία είναι ευδιάκριτη οπτικά. Από την άλλη πλευρά, η ιδιότητα δεν γινόταν εύκολα διακριτή ανάμεσα στα σχήματα που ήταν μεγαλύτερη η μεταξύ τους ομοιότητα και αυξάνονταν η πιθανότητα ταύτισης (Μιχαήλ, Μουσκή, & Γαγάτσης, 2014). Για παράδειγμα, στην 4η ερώτηση όλα τα παραλληλόγραμμα θεωρήθηκε ότι έχουν και ίσες τις απέναντι παράλληλες πλευρές τους, διότι η πλειοψηφία των παραλληλογράμμων εμφάνιζε και αυτή την ιδιότητα, ώστε 4 παιδιά να γενικεύσουν τον κανόνα. Επιπρόσθετα, όσα περισσότερα σχήματα συγκρίνονταν μεταξύ τους τόσο μεγαλύτερη ήταν η δυσκολία ένταξης τους σε μία ανώτερη κατηγορία σχημάτων βάσει μίας κοινής ιδιότητας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με μία βαθύτερη ματιά στα ευρήματα της παρούσας μελέτης μπορεί κανείς να οδηγηθεί σε συμπεράσματα που αφορούν στον τρόπο διάκρισης δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων μέσω της οπτικοποίησης σε παιδιά αυτών των ηλικιών. Από την έρευνα προκύπτει ότι οι μαθητές της Δ' τάξης προσεγγίζουν τα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα μέσα από τη χρήση ορισμένων στρατηγικών οπτικοποίησης (Gutiérrez, 1996; Fischbein, 1993; Presmeg, 1986), που ήταν κι ο σκοπός της έρευνας. Απαντώντας στο 1ο ερευνητικό ερώτημα για τη διάκριση από το σύνθετο πλαίσιο οι απαντήσεις όπως είδαμε ομαδοποιήθηκαν σε δύο ευρύτερες κατηγορίες: α) απαντήσεις μαθητών με βάση πρότυπες εικόνες και β) σε απαντήσεις μαθητών με εικονική επεξεργασία. Θετική αποδείχθηκε η χρήση της αποσύνθεσης, σύνθεσης, διαχωρισμού και γενικότερα της νοητής εικονικής επεξεργασίας στη διάκριση γεωμετρικών σχημάτων απ' το σύνθετο πλαίσιο (Gal, 2005; Duval, 1999; Dupuis, 1978). Σχήματα γνώριμα με τη συμβατική-πρότυπη τους εικόνα έγιναν γρήγορα αντιληπτά. Δεν ειδώθηκαν, όμως, σε αντιστροφή ή ξέχωρα από κοινά σημεία ή το χρωματικό φόντο (Cheng & Lin, 2005; Mesquita, 1998). Η εναλλαγή μεταξύ των οπτικών αναπαραστάσεων ανάλογα με το πολύπλοκο περιβάλλον μέσα στο οποίο εμφανίζονται αποδείχθηκε απαιτητική διαδικασία για τη

διάκριση σχημάτων (Τάτσης & Γούτση, 2011). Συνεπώς, σύμφωνα με τα καταγεγραμμένα αποτελέσματα επισημαίνεται η σημασία πολλών και διαφορετικών οπτικοποιήσεων, δηλαδή η αξιοποίηση συνδυασμού στρατηγικών κατά τη διάκριση με οπτικοποίηση από τους μαθητές που φανέρωσαν πολλά κ διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα.

Απαντώντας στο 2ο ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε σε αυτή τη μελέτη οι απαντήσεις των παιδιών κατηγοριοποιήθηκαν σε: α) απαντήσεις μη διατήρησης ιδιοτήτων και σε β) απαντήσεις διατήρησης ιδιοτήτων. Από τα αποτελέσματα φάνηκε πως τα παιδιά δυσκολεύονται στη διατήρηση ιδιοτήτων, βασιζόμενα μόνο σε πρότυπες εικόνες γεωμετρικών σχημάτων και οδηγούνται σε οπτικές παρανοήσεις (Gal & Linchevski, 2010). Αντίστροφα, οι ιδιότητες διατηρήθηκαν σταθερές όταν πραγματοποιούνταν νοερές επεξεργασίες των γεωμετρικών σχημάτων (Duvall, 1999). Επιπλέον, μεγαλύτερη ήταν η δυσκολία διάκρισης ιδιοτήτων όταν αυξάνονταν η κλίση των πλευρών στα σχήματα (Mariotti, 1992). Η επιστράτευση του είδους οπτικοποίησης μοιάζει να εξαρτάται και από το γεωμετρικό σχήμα. Σε μη πρότυπα γεωμετρικά σχήματα, όπου απαιτείται μεγαλύτερη νοερή επεξεργασία οι ιδιότητες δε διατηρήθηκαν σταθερές, ενώ σε πρότυπα γεωμετρικά σχήματα, όπου απαιτείται μικρότερη νοερή επεξεργασία οι ιδιότητες διατηρήθηκαν σταθερές (Bishop, 1983). Ως μη πρότυπα σχήματα θεωρήθηκαν τα κυρτά, όπως τα πλάγια παραλ/μα. Ως πρωταρχικά στο νου σχήματα θεωρήθηκαν τα ισόπλευρα, τα ορθογώνια (Hershkowitz, 1989). Γενικότερα, οι ιδιότητες των πλευρών διακρίθηκαν σχετικά πιο γρήγορα από τις ιδιότητες των γωνιών. Επιβεβαίωση αυτού του ευρήματος γίνεται ίσως από την καθυστερημένη εισαγωγή της έννοιας της γωνίας στο δημοτικό (Clements et al, 1999). Εν συνεχεία, για τη διερεύνηση των σχέσεων που διακρίνονται μεταξύ των σχημάτων, που αποτελεί και το 3ο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας μελέτης, φαίνεται πως οι απαντήσεις κατηγοριοποιούνται σε: α) απαντήσεις σύγκρισης πρότυπων εικόνων και σε β) απαντήσεις σύγκρισης ομοιοτήτων & διαφορών. Από την ανάλυση των παρατηρήσεων προκύπτει ότι λιγότερο υιοθετήθηκαν τεχνικές σύγκρισης ομοιοτήτων και διαφορών από τους μαθητές. Αναζητήθηκαν κυρίως, σχέσεις ανάμεσα σε πρωταρχικά στο νου σχήματα (Hershkowitz, 1989; Vinner & Hershkowitz, 1983). Παρατηρείται, επίσης, ότι η διάκριση σχέσεων εξαρτάται από τα γεωμετρικά σχήματα που συσχετίζονται. Σχέσεις βρέθηκαν μεταξύ παρόμοιων σχημάτων, όχι όμως υπερβολικά όμοιων (Μιχαήλ, Μουσκή, & Γαγάτσης, 2014). Επομένως, πιο δύσκολη αποδείχθηκε η οπτικοποίηση σχέσης μεταξύ πολλών γεωμετρικών σχημάτων της ίδιας κατηγορίας, για παράδειγμα των παραλληλογράμμων. Ωστόσο, καμία σχέση δε βρέθηκε όσο άλλαζε η κλίση, το μέγεθος ή ο προσανατολισμός του ενός εκ των δύο σχημάτων. Συνοπτικά, φάνηκε ότι πιο εύκολα οπτικοποιούνται τα κοινά χαρακτηριστικά σε παρόμοια σε μέγεθος και προσανατολισμό σχήματα (Gal & Linchevski, 2010; Clements, Wilson, & Sarama, 2004).

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα αυτής της μελέτης οι κατηγορίες των μαθητών που αναδεικνύονται υιοθέτησαν τη χρησιμοποίηση είτε μοτίβων και προτύπων είτε νοερής επεξεργασίας και μετασχηματισμών κατά τη διάκριση γεωμετρικών σχημάτων (Gutiérrez,

1996). Παρατηρήθηκε ότι σε κάποιες περιπτώσεις τα πρότυπα βοήθησαν στην μετάδοση του γεωμετρικού αντικειμένου, ενώ σε άλλες περιπτώσεις δημιούργησαν προβλήματα στη διάκριση, κάτι που επιβεβαιώνεται και από προγενέστερες μελέτες (Τάτσης & Γούτση, 2011). Βέβαια, οι μαθητές αξιοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές ανάλογα με τη δραστηριότητα που είχαν να πραγματοποιήσουν. Πιο αναλυτικά, όπως αναφέρθηκε, η αναζήτηση προτύπων και μοτίβων διευκόλυνε αρκετά τους μαθητές να αναγνωρίσουν τα επίπεδα σχήματα από σύνθετα πλαίσια. Αντίθετα, πιο πολλές νοερές αντιστροφές παρατηρήθηκαν στη διάκριση ιδιοτήτων ή σχέσεων, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από άλλες μελέτες όπως αυτή της Gorgorio (1998) σχετικά με τις διάφορες στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στη γεωμετρία ανάλογα με τη δράση που έχει κανείς να κάνει. Η έρευνα, ωστόσο, αποκαλύπτει ακόμη την κατηγορία των παιδιών που χρησιμοποίησαν συνδυαστικά πλήθος των μορφών οπτικοποίησης για κάθε δράση. Συνεπώς, αυτοί οι μαθητές παρουσίασαν μεγαλύτερη ευστοχία στη διάκριση ποικιλίας σχημάτων, ιδιοτήτων και σχέσεων. Αυτό το εύρημα υπογραμμίζει τη σημασία της παρουσίας των γεωμετρικών αντικειμένων μέσα από πλήθος αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία, γεγονός που ενθαρρύνει τη χρήση πολλών οπτικοποιήσεων από τους μαθητές, ώστε να αντιλαμβάνονται και να κατανοούν τα γεωμετρικά σχήματα που υφίστανται οπτικές μεταβολές (Τάτσης & Γούτση, 2011). Η σημασία της οπτικοποίησης για τους μαθητές διαφαίνεται μέσα από την επιτυχία αναγνώρισης των δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων. Παρά το γεγονός ότι εντόπισαν ιδιότητες και σχέσεις οι μαθητές έκριναν αδύνατο να τις περιγράψουν. Χρησιμοποίησαν κυρίως καθημερινό λόγο και βρέθηκαν σε σύγχυση όταν τα γεωμετρικά αντικείμενα παρουσιάζονταν με αντιστροφές, μεγέθυνση ή άλλες μεταβολές. Ενδεχομένως, οι δυσκολίες με τα σχήματα να οφείλονται στον τρόπο διδασκαλίας της Γεωμετρίας, όπου τα παιδιά μαθαίνουν να αντιμετωπίζουν το κάθε σχήμα ως ολότητα, δίχως να διαχωρίζουν τα επιμέρους στοιχεία-μονάδες τους (Dunal, 2008). Για όλους αυτούς τους λόγους είναι σημαντικό οι μαθητές του δημοτικού, από τις μικρές κιόλας τάξεις να εξοικειώνονται με τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιώντας πολλούς τρόπους προσέγγισης τους. Άλλωστε, η διδαχή ενός μεμονωμένου τρόπου επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη στην χρησιμοποίηση διάφορων στρατηγικών από τους μαθητές (Gorgorio, 1998). Κατά τους Lean και Clements (1981) μαθητές που αντιμετωπίζουν οπτικοχωρικές δυσκολίες εμφανίζουν ελλείψεις στη μετάφραση, την αντανάκλαση, την αντιστροφή, την επέκταση ενός γεωμετρικού σχήματος στο νου. Είναι, λοιπόν, αναγκαίος ο εμπλουτισμός του αναλυτικού προγράμματος με σχετικές δραστηριότητες με γεωμετρικά σχήματα με έμφαση στο ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεών τους (Τάτσης & Γούτση, 2011). Η παρούσα έρευνα έχει ως στόχο την ευαισθητοποίηση της εκπαιδευτικής κοινότητας σχετικά με τη διδακτική της γεωμετρίας. Η αύξηση του χρόνου που αφιερώνεται στη διδασκαλία της γεωμετρίας στην τάξη, η παροχή ποικιλίας ασκήσεων και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών θα μπορούσαν να διευρύνουν τις γνώσεις και τις στρατηγικές των μαθητών κατά την οπτικοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Bishop, A. (1983). *Space and geometry*. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175–203). New York: Academic Press.
- Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 88(4), 286-290.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for research in Mathematics Education*, 30, 192-212.
- Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 163-184.
- Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2005). One more step toward acceptable proof in geometry. Cyprus: *In Symposium Proposal EARLI*.
- ΔΕΠΠ, Σ., & ΑΠ, Σ. Μ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. *ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ανακτήθηκε στις, 27(11), 2013*.
- Dupuis C., Duval R., Pluvillage F. (1978). Etude sur la geometrie en fin de Troisieme. *Geometrie au Premier Cycle, II*, Paris, A.P.M.E.P., pp.65-101
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.
- Duval, R. (2008). Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics Education. In L. Radford, G.Schubring, , & F.Seeger, (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 39-62). Rotterdam, NL: Sense Publishers.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24(2), 139-162.
- Gal, H. (2005). Identifying problematic learning situations in geometry instruction, and handling them within the framework of teacher training. *Unpublished Ph. D. dissertation. Jerusalem: Hebrew University of Jerusalem (Hebrew)*.
- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, 74(2), 163-183.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 207-231.
- Gutiérrez, A. (1996, July). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In *PME CONFERENCE*(Vol. 1, pp. 1-3). THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE.

- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Kalogirou, P., & Gagatsis, A. (2011). A first insight of the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematica*, 11, 27-39.
- Latsi, M., & Kynigos, C. (2010). Gestures as a tool of semiotic mediation in 3d turtle geometry environment. *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6)*
- Lean, G., & Clements, M. K. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299.
- Mariotti, A.: 1992, 'Imagini e concetti in geometria'. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrata* 15(9), 863-885.
- Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Μιχαήλ, Μουσκή & Γαγάτσης (2014). Η ικανότητα αναγνώρισης και κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων στις γ' - δ' τάξεις του δημοτικού. Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Piaget, J. and Inhelder, B. (1966). L'Image Mentale Chez l'Enfant. *Etude sur le Developpement des Representations Imagees*, PUF, Paris.
- Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska, (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 7-29.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational studies in mathematics*, 17(3), 297-311.
- Σκουμπουρδή, Χ. (2014). Ο ρόλος των εκπαιδευτικών υλικών στα μαθηματικά της πρώτης σχολικής ηλικίας. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Τα μαθηματικά στην προσχολική και στην πρώτη σχολική εκπαίδευση: 12ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (σελ. 31-55), Αθήνα.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169
- Τάτσης, Κ., & Γούτση Θ. (2011). Το παιχνίδι "Σπασμένο τηλέφωνο" στο μάθημα της Γεωμετρίας. Στο Μ. Καλδρυμίδου, Ε. Βαμβακούση (Επιμ.), *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών: Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας*, 479-488
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *International Review of Mathematical Education*, 15, 20-25.
- Walcott, C., Mohr, D., & Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 30-40.