

Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

No 15 (2021)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΤΙ ΕΙΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΡΟΩΘΟΥΝ ΟΙ ΕΙΚΟΝΕΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟ 1975 ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ;

Ευαγγελία Δακορώνια (Evangelia Dakoronia), Μαρίνος Αναστασάκης (Marinos Anastasakis)

doi: [10.12681/enedim.22501](https://doi.org/10.12681/enedim.22501)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Τεύχος 15
Ιούνιος 2021

Copyright © 2021, Ευαγγελία Δακορώνια, Μαρίνος Αναστασάκης



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

To cite this article:

Δακορώνια (Evangelia Dakoronia) E., & Αναστασάκης (Marinos Anastasakis) M. (2021). ΤΙ ΕΙΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΡΟΩΘΟΥΝ ΟΙ ΕΙΚΟΝΕΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟ 1975 ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ;. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (15), 24–44. <https://doi.org/10.12681/enedim.22501>

ΤΙ ΕΙΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΡΟΩΘΟΥΝ ΟΙ ΕΙΚΟΝΕΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟ 1975 ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ;

Ευαγγελία Δακορώνια και Μαρίνος Αναστασάκης

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
evagdacor@gmail.com, marinos@math.uoc.gr

Περίληψη: Η παρούσα ερευνητική μελέτη εστιάζει στο ρόλο και στην χρήση των εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας του Λυκείου από το 1975 μέχρι σήμερα. Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται στους μαθητές οι διάφορες γεωμετρικές έννοιες μέσω τριών κατηγοριών εικόνων καθώς και να διαπιστώσουμε αν και κατά πόσο έχουν αλλάξει οι προτεραιότητες που θέτει η εκάστοτε συγγραφική ομάδα. Από τα αποτελέσματα διαπιστώθηκε ότι οι εικόνες που σχετίζονται με αποδείξεις είναι η δημοφιλέστερη κατηγορία, όμως με την πάροδο του χρόνου η χρήση τους μειώνεται. Χρησιμοποιώντας την Ανθρωπολογική Θεωρία της Διδακτικής οδηγήκαμε στο συμπέρασμα ότι στα σχολικά εγχειρίδια αποδίδεται πλέον λιγότερο έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία και συνδέσαμε αυτό το εύρημα με το ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο των εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων στην Ελλάδα.

Λέξεις κλειδιά: γεωμετρία, σχολικά εγχειρίδια, εικόνες, Ανθρωπολογική Θεωρία της Διδακτικής

Abstract: The current study investigates the role and the use of images in the Greek geometry textbooks of Lyceum (Upper high-school) from 1975 to date. Our aim is to examine how geometry concepts are introduced to students in texts through three types of images and to investigate whether authors' priorities have changed. The results have shown that there is a dominant category, which has been used most from the authors; nevertheless, its use declines over time. We draw on Chevallard's anthropological theory of the didactic (ATD) in order to conclude that over time Greek geometry textbooks put less emphasis on the mathematical proof. We linked this finding to the wider socio-cultural context of educational reformations in Greece.

Keywords: geometry, textbooks, images, Anthropological Theory of the Didactic

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γεωμετρία

Η γεωμετρία διαδραματίζει πρωτεύοντα ρόλο στην εκπαιδευτική κοινότητα, καθώς δεν περιορίζεται μόνο στη μελέτη των σχηματικών αναπαραστάσεων, αλλά είναι αλληλένδετη με έννοιες όπως είναι ο χώρος, το σχήμα, η κίνηση και ο χρόνος (Κολέζα, 2017). Ειδικότερα, σύμφωνα με τον Freudenthal (1973), η Γεωμετρία επικεντρώνεται «στο χώρο στον οποίο το παιδί ζει, αναπνέει και κινείται και τον οποίο πρέπει να γνωρίσει, να εξερευνήσει και να

κατακτήσει», προκειμένου να ανταπεξέλθει καλύτερα μέσα σε αυτόν (Κολέζα, 2017, σ. 240 αναφερόμενη στον Freudenthal, 1973). Χαρακτηρίζεται ως «δύσκολο αντικείμενο» λόγω της οπτικής σκέψης που απαιτείται από την πλευρά του εκπαιδευόμενου (Χαιρέτη, 2009). Με άλλα λόγια, η γεωμετρία δεν περιλαμβάνει αλγόριθμους αποστήθισης, στους οποίους μπορεί να καταφύγει ο μαθητής για την επίλυση των προβλημάτων ή την κατανόηση των αποδείξεων, καθώς τις περισσότερες πληροφορίες τις αντλεί από το σχήμα, αλλά και από συνδυασμό των θεωρημάτων, αξιωμάτων που θα χρησιμοποιήσει, ώστε να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος ή την ολοκλήρωση των αποδείξεων αντίστοιχα.

Ο ρόλος των εικόνων των σχολικών βιβλίων

Στα ελληνικά σχολεία διδάσκεται η Ευκλείδεια γεωμετρία. Είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που επιτρέπει στους εκπαιδευόμενους να μελετήσουν τον τρόπο που οργανώνεται η μαθηματική γνώση σε ένα σύστημα, μέσω της κατανόησης της σχετικής θεωρίας (Παπαγεωργίου & Τζεκάκη, 2017). Η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος επιδρά ισχυρά κατά την αποδεικτική διαδικασία, ωστόσο οι μαθητές τείνουν να προσεγγίζουν τα σχήματα λεκτικά, καθώς δεν είναι εξοικειωμένοι με τις σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων, δηλαδή την εξεικόνιση (Αγγελή & Γαγάτσης, 2017). Μια ενδιαφέρουσα παρουσίαση της έννοιας του γεωμετρικού σχήματος απέδωσε ο Fischbein (1993), που διέκρινε τρεις οντότητές του: (1) τον ορισμό (definition), (2) την εικόνα (image) και (3) τη σχηματική έννοια (figural concept). Όπως τονίζει, κάθε γεωμετρικό σχήμα είναι μια νοητή εικόνα, που οι ιδιότητές της καθορίζονται από τον ορισμό, ενώ κάθε σχέδιο (drawing) δεν αποτελεί ένα γεωμετρικό σχήμα παρά μια γραφική αναπαράσταση (*Ibid.*). Με αντίστοιχο τρόπο, κάθε γεωμετρικό σχήμα αποτελεί μια ιδέα, μια σχηματική έννοια (figural concepts), που καθορίζεται από τον ορισμό (definition) (*Ibid.*). Οι τρεις οντότητες του Fischbein (1993) στην περίπτωση του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να αντιστοιχούν ως εξής: (1) ορισμός (definition): ο ορισμός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, (2) εικόνα (drawing): το σχήμα του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όπως αποτυπώνεται για παράδειγμα στα βιβλία μαθηματικών και (3) σχηματική έννοια (figural concepts): οι χωρικές ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ως προς την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος ο Duval αναγνώρισε τέσσερις τύπους: (1) την αντιληπτική: πραγματοποιείται κατά την πρώτη επαφή με το γεωμετρικό σχήμα και αφορά την αναγνώριση των σχημάτων και των ιδιοτήτων τους, (2) τη λειτουργική: αφορά το μετασχηματισμό σχημάτων και τη διάσπασή τους σε υποσχήματα, (3) την ακολουθιακή: αναφέρεται στην κατασκευή σχήματος ή στην περιγραφή της δομής της κατασκευής και (4) τη λεκτική: είναι η εξήγηση ή απόδειξη των ιδιοτήτων των σχημάτων μέσω της εκφώνησης του μαθηματικού συλλογισμού (Αγγελή & Γαγάτσης, 2017; Yang & Li, 2018, αναφερόμενοι στον Duval, 1995). Στη Βιβλιογραφία, οι Elia και Philipprou (2004) διέκριναν τέσσερις κατηγορίες σχετικά με το ρόλο των εικόνων στα προβλήματα: (1) οι διακοσμητικές: δεν χρησιμοποιούνται στη λύση προβλημάτων, (2) οι αντιπροσωπευτικές: αποτελούν μέρος του προβλήματος, χωρίς όμως να βοηθούν στην επίλυση, (3) οι οργανωτικές: εξυπηρετούν την οργάνωση των βημάτων της λύσης, χωρίς όμως να επιλύουν το πρόβλημα και (4) οι πληροφοριακές: περιέχουν πληροφορίες απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος. Τέλος, την παρουσία και το ρόλο των

εικόνων στις μαθηματικές σειρές εξέτασαν οι González-Martin, Nardi & Biza (2011), διακρίνοντας τρεις κατηγορίες: (1) μη εννοιολογικές: αναφέρονται κυρίως σε πορτρέτα ή φωτογραφίες, (2) περίπου-εννοιολογικές (bland-conceptual): σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα) χωρίς να τις αποδεικνύουν ή να τις εξηγούν και (3) εννοιολογικές (conceptual): αναφέρονται στην κατανόηση των αποδεικτικών διαδικασιών και των λυμένων ασκήσεων.

Τα σχολικά εγχειρίδια

Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών επηρεάζουν με τη σειρά τους τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με το «τι είναι» και τι σημαίνει «ξέρω μαθηματικά» (Κολέζα, 2017), ενώ αποτελούν τη βασική πηγή μελέτης των σχολικών μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Shield & Dole, 2013). Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών βασίζεται και στο σχολικό εγχειρίδιο, που αποσκοπεί να καθοδηγήσει, να υποστηρίξει και να βελτιώσει τη διδασκαλία και τη μάθηση στα εκπαιδευτικά ιδρύματα (Remillard, 2018). Αντίστοιχα, ο εκπαιδευτικός λειτουργεί ως «συνδιαμορφωτής» του Προγράμματος Σπουδών κατά τη διδασκαλία στη σχολική τάξη (Στουραϊτής & Πόταρη, 2015), καθώς σχεδιάζει τη διδασκαλία σύμφωνα με αυτό. Ωστόσο, καίριο παραμένει το ερώτημα που απασχολεί τη μαθηματική κοινότητα, σχετικά με τις αλλαγές στις οποίες πρέπει να προβούμε ώστε οι εκπαιδευόμενοι να κατανοούν τη μαθηματική διδασκαλία (Σκουμπούρδη & Βαϊτσίδα, 2019).

Είδη αναλυτικού προγράμματος

Δεν μπορούμε όμως να μιλάμε για σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, χωρίς να αναφέρουμε και το αναλυτικό πρόγραμμα. Ο όρος αναλυτικό πρόγραμμα έχει διαφορετική ερμηνεία για κάθε χώρα, ωστόσο περιλαμβάνει τι πρέπει να κάνουν οι μαθητές προκειμένου να ενισχύσουν τη μάθησή τους (Remillard & Heck, 2014). Οι Remillard & Heck (*Ibid.*) διακρίνουν δύο είδη του αναλυτικού προγράμματος: (α) το επίσημο και (β) το λειτουργικό. Το **επίσημο** αναφέρεται σε τι πρέπει να διδαχτεί στη διδασκαλία, ενώ το **λειτουργικό** λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Στο πρώτο είδος αναλυτικού προγράμματος, οι κυβερνητικοί οργανισμοί καθορίζουν τις προσδοκίες για τη μάθηση των μαθητών, καθώς και τα διδακτικά μέσα ή τα διδακτικά μονοπάτια που μπορούν να αξιοποιηθούν για την επίτευξη της μάθησης (*Ibid.*). Αντίθετα, το λειτουργικό αναλυτικό πρόγραμμα λαμβάνει υπόψιν τρεις παράγοντες: το επιδιωκόμενο από τον εκπαιδευτικό πρόγραμμα, το εφαρμοζόμενο πρόγραμμα και τα αποτελέσματα των εκπαιδευόμενων (*Ibid.*). Για την πραγματοποίηση της παρούσας έρευνας είχαμε πρόσβαση μόνο σε μέρος του επίσημου αναλυτικού προγράμματος, όπως αυτό αποτυπώνεται στα σχολικά εγχειρίδια.

Μελέτες σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών

Αν και το ενδιαφέρον των ερευνητών γύρω από σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών είναι έκδηλο σε διεθνές επίπεδο (π.χ. Johansson, 2003), οι μελέτες που αφορούν το πως τα εγχειρίδια Ευκλείδειας Γεωμετρίας παρουσιάζουν το «τι είναι» και τι σημαίνει «ξέρω μαθηματικά» είναι ελάχιστες. Για παράδειγμα, ερευνητές έχουν μελετήσει την προέλευση γεωμετρικών εννοιών στα μαθηματικά, όπως είναι το Θεώρημα του Θαλή (Patsopoulos &

Patronis, 2006), την έννοια του εμβαδού (Papadopoulos, 2008), την κατανόηση των αξιωμάτων και των ορισμών της γεωμετρίας στην Α' Λυκείου (Παπαγεωργίου & Τζεκάκη, 2017) και τη συμβολή της γεωμετρίας για την κατανόηση των τυπικών αλγεβρικών συμβόλων σε μη βλέποντες μαθητές (Τουλτσινάκη & Σταυρόπουλος, 2015). Άλλες είναι ευρύτερες και μελετούν τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στα σχολικά εγχειρίδια του Γυμνασίου σε Ελλάδα και Κύπρο (Xenofontos & Papadopoulos, 2015) ή τη συχνότητα θεμάτων που σχετίζονται με το περιβάλλον σε επιλεγμένα σχολικά εγχειρίδια (Spiroroulou, Roussos & Voutirakis, 2005). Στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έχει μελετηθεί η χρήση ρεαλιστικών προβλημάτων σε ελληνικά σχολικά εγχειρίδια (Zacharos & Koustourakis, 2011), των εννοιών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού (Desli & Loukidou, 2014), η συμβολή του παιχνιδιού στη μάθηση της γεωμετρίας της Α' τάξης (Χαραλαμπίδου & Κλώθου, 2017), η έννοια της μέτρησης του μήκους σε μαθητές της Δ' δημοτικού (Γκενέ, Κανελλοπούλου & Κολέζα, 2015), η σύνδεση της χωρικής ικανότητας με τη δημιουργικότητα στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Δατσογιάννη, Ελευθερίου, Μιχαήλ & Παναγή, 2015) και η σύνδεση αυτών με την απόδειξη σε μαθητές Γ' Γυμνασίου (Γαγάτσης, Γρίδος & Σαμαρτζής, 2017), η έννοια της εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια Α', Β' και Γ' Δημοτικού (Παπανικολάου & Καλαβάσης, 2017). Αναφορικά με τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και την Ευκλείδεια Γεωμετρία, οι έρευνες είναι ελάχιστες και εστιάζουν στη σύγκριση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μεταξύ Ελλάδας και Γαλλίας (Kuzniak & Vivier, 2009) και Ελλάδας-Ιταλίας (Mouzakitis, 2006).

Σε επίπεδο εικόνων, οι έρευνες που εξετάζουν τον ρόλο τους στα σχολικά εγχειρίδια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι και πάλι λιγοστές. Για παράδειγμα, η Βουκελάτου (2017) εξετάζει τις έμφυλες αναπαραστάσεις που κατασκευάζονται στο βιβλίο μαθηματικών της Β' Γυμνασίου. Οι Αγγελή και Γαγάτσης (2017) εστιάζουν στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος, αλλά και στους τρόπους που επηρεάζει το συλλογισμό των μαθητών κατά τη γεωμετρική απόδειξη και γενικότερα το ρόλο που εξυπηρετούν στην επίλυση προβλημάτων (Elia & Philipprou, 2004) ενώ οι Γκενέ, Ζαχάρος, Λαβίδας και Κουστουράκης (2017) ανέλυσαν το διαθεματικό περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της ΣΤ' δημοτικού και Α' Γυμνασίου διαπιστώνοντας ότι δεν υπάρχει άμεση συσχέτιση με άλλα μαθήματα/επιστημονικά πεδία.

Δεδομένης της σημασίας του σχήματος στη Γεωμετρία κατά την αποδεικτική διαδικασία, αλλά και των διαφορετικών προσεγγίσεων όσων αφορά το ρόλο των εικόνων, στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε το ρόλο τριών κατηγοριών εικόνων, όπως προτάθηκαν από τους González-Martin *et al.* (2011) στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας. Με βάση την παραπάνω επισκόπηση, είναι εμφανές ότι υπάρχει κενό στη βιβλιογραφία αναφορικά με τα μηνύματα που «περνάνε» τα σχολικά εγχειρίδια Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λυκείου σχετικά με το «τι είναι» και τι σημαίνει «ξέρω γεωμετρία», δηλαδή σχετικά με το τι είναι αποδεκτό ως γνώση και προβάλλεται από τμήμα του επίσημου αναλυτικού προγράμματος, όπως είναι τα σχολικά εγχειρίδια. Επομένως, τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία στοχεύει να δώσει απαντήσεις η παρούσα μελέτη είναι τα εξής:

1. Ποιες κατηγορίες εικόνων υπάρχουν στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας από το 1975 μέχρι το 2019;
2. Υπάρχουν μεταβολές στη χρήση των εικόνων στην περίοδο που εξετάζουμε;
3. Λαμβάνοντας υπόψιν τις εικόνες που υπάρχουν στα βιβλία γεωμετρίας, τι μπορούμε να πούμε σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους παρουσιάζονται στους μαθητές οι διάφορες γεωμετρικές έννοιες;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής: η έννοια της πραξεολογίας και της διδακτικής μετάθεσης

Το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης πλαισιώνει η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (anthropological theory of the didactic, ΑΘΔ) του Chevallard (2006, Chevallard & Sensevy, 2014). Η ΑΘΔ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί μας επιτρέπει να εξετάσουμε τον τρόπο που ένα εκπαιδευτικό ίδρυμα (π.χ. σχολείο ή πανεπιστήμιο) επιλέγει να εισαγάγει μαθηματικές ιδέες σε κείμενα ή κατά τη διδασκαλία (González-Martin *et al.*, 2011), στην προκειμένη περίπτωση πώς μέσω των εικόνων οι διάφορες μαθηματικές έννοιες εισάγονται στους μαθητές μέσα από το σχολικό βιβλίο της γεωμετρίας. Αυτό συμβαίνει γιατί η ΑΘΔ αναγνωρίζει ότι το περιεχόμενο των μαθηματικών εννοιών διαμορφώνεται κατά τη διδασκαλία (*Ibid.*) και επικεντρώνεται στην κατανόηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε ένα εκπαιδευτικό ίδρυμα κατά τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Bosch & Gascón, 2014).

Στον πυρήνα της ΑΘΔ εντάσσεται η *πραξεολογία*, την οποία ο Chevallard (2006) ερμήνευσε ως «τη βασική μονάδα κατά την οποία κάποιος μπορεί να αναλύσει εκτενώς την ανθρώπινη δραστηριότητα» (p.23). Δεδομένου ότι σκοπός του ήταν να αποδώσει έναν πιο βελτιωμένο ορισμό, ανέτρεξε στην ετυμολογία της λέξης, που αποτελεί σύνθεση των όρων «πράξις» και «λόγος». Αναφέρει ότι η πράξη είναι το πρακτικό μέρος μιας δραστηριότητας, ο τρόπος που κάποιος πραγματοποιεί τη δραστηριότητα, ενώ ο λόγος αναφέρεται στην ικανότητα του ανθρώπου να σκέφτεται και να κατανοεί κάθε πληροφορία με λογικό τρόπο (*Ibid.*). Υπάρχουν τέσσερα δομικά στοιχεία που απαρτίζουν την πραξεολογία και αποτελούν τη βάση κάθε δραστηριότητας (Chevallard & Sensevy, 2014). Αυτά είναι οι εργασίες και οι τεχνικές που ενισχύουν την πράξη, οι τεχνολογίες και οι θεωρίες που ενισχύουν το λόγο. Οι *εργασίες* (tasks) είναι ο τρόπος που δρα ένα άτομο, όταν έρχεται σε επαφή με μια δραστηριότητα, ενώ ο τρόπος παρουσίασης των δραστηριοτήτων έγκειται στις *τεχνικές* (techniques) που χρησιμοποιεί (Bosch & Gascón, 2014). Με την *τεχνολογία* (technology), ένα άτομο δικαιολογεί και σχεδιάζει την τεχνική που θα χρησιμοποιήσει (González-Martin *et al.*, 2011), ενώ η *θεωρία* (theory) εξηγεί και δικαιολογεί κάθε βήμα της τεχνολογίας που έχει παραληφθεί ή είναι δυσνόητο (Bosch & Gascón, 2014).

Σημαντική συνεισφορά της ΑΘΔ είναι η διαδικασία διδακτικής μετάθεσης (ΔΔΜ). Υπογραμμίζει τον ιδρυματικό χαρακτήρα της γνώσης και τονίζει ότι δεν είναι δυνατή η ερμηνεία των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, χωρίς να λάβουμε υπόψη μας ότι η μαθηματική γνώση εισάγεται και αναδομείται σε ένα

σχολικό περιβάλλον (Bosch & Gascón, 2014). Τα προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη διδακτική πράξη σχετίζονται με το εκπαιδευτικό ίδρυμα, και όχι με τα χαρακτηριστικά των εκπαιδευόμενων. Στο πλαίσιο της ΔΔΜ, η παραγόμενη από τους ακαδημαϊκούς γνώση (scholarly knowledge) μετασχηματίζεται αρχικά από άτομα που ασχολούνται με το σχεδιασμό αναλυτικών προγραμμάτων (noosphere) και είναι υπεύθυνα για τη γνώση που πρέπει να διδαχθεί (knowledge to be taught). Έπειτα, οι εκπαιδευτικοί μετασχηματίζουν τη γνώση αυτή κατά τη διδασκαλία (taught knowledge) και από την πλευρά τους οι μαθητές την μετασχηματίζουν κατά τη μάθηση (learnt knowledge). Μέσω λοιπόν της ΔΔΜ υπάρχει διαχωρισμός της επιστημονικής γνώσης από τη σχολική γνώση (Pepin & Haggarty, 2001). Στην παρούσα εργασία, μελετώντας τα σχολικά εγχειρίδια της γεωμετρίας, επικεντρωθήκαμε στο δεύτερο στάδιο της ΔΔΜ (πρώτος μετασχηματισμός), δηλαδή «στη γνώση που πρέπει να διδαχτεί» (knowledge to be taught) καθώς δεν είχαμε πρόσβαση ούτε «στη γνώση που δίδασκαν» οι καθηγητές (taught knowledge), ούτε στις «γνώσεις που αποκόμιζαν οι μαθητές» (learnt knowledge) κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στην τάξη.

Τα σχολικά εγχειρίδια

Η εμφάνιση του πρώτου σχολικού εγχειριδίου χρονολογείται το 1658 και ήταν το λεγόμενο εγχειρίδιο «Orbis Pictus», γραμμένο από τον Τσέχο εκπαιδευτικό Commenius (Qi, Zhang & Huang, 2018). Σύμφωνα με την Κολέζα (2017), η αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων χρονολογείται από το 1986, και όπως φαίνεται έχουν μεγάλη επίδραση κατά την εκπαιδευτική διαδικασία καθώς οι γνώσεις που αποκομίζουν οι μαθητές εξαρτώνται από το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων και από τον τρόπο που τα χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί. Τα σχολικά εγχειρίδια διαδραματίζουν ισχυρό ρόλο στη διδασκαλία, δεδομένου ότι λειτουργούν ως ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των στόχων του προγράμματος σπουδών και της παιδαγωγικής εφαρμογής του σε σχολικά περιβάλλοντα (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002). Παράλληλα, αποτελούν το κύριο μέσο στο οποίο θα στηριχτεί ο δάσκαλος για να προγραμματίσει το μάθημα και να σχεδιάσει τη δομή της διδασκαλίας (Apple, 1992). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το 75%-90% της διδασκαλίας και των δραστηριοτήτων καθορίζεται από το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων (Qi *et al.*, 2018 αναφερόμενοι στους Chamblis & Calfee, 1998).

Ο τρόπος που θα αξιοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου, θα επηρεάσει και το περιεχόμενο της μάθησης των μαθητών (Κολέζα, 2017). Αυτό συμβαίνει γιατί τα σχολικά εγχειρίδια και το βιβλίο του δασκάλου είναι από τις κυριότερες πηγές για να καλυφθεί το περιεχόμενο διδασκαλίας σε συνδυασμό με τις παιδαγωγικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται στις σχολικές τάξεις (Pepin & Haggarty, 2001). Αναφορικά με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, το εγχειρίδιο πλέον λειτουργεί σαν «υποστηρικτικό υλικό» τόσο για τον εκπαιδευτικό, όσο και για τον εκπαιδευόμενο (Qi *et al.*, 2018), με αποτέλεσμα τα εγχειρίδια των μαθηματικών να «υποστηρίζουν τη διδασκαλία», ενώ αρχικά την «έλεγχαν» (Guo, 2001).

Σύμφωνα με τη μελέτη των Pepin και Haggarty (2001), τα μαθηματικά, όπως παρουσιάζονται στα εγχειρίδια διαχωρίζονται σε τρεις περιπτώσεις: (1) τι είδους μαθηματικά

παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία, με άλλα λόγια υπάρχει διαχωρισμός της επιστημονικής γνώσης που παρουσιάζεται σε βιβλία και περιοδικά και της γνώσης που διδάσκονται οι μαθητές μέσω των σχολικών εγχειριδίων, (2) πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση των μαθηματικών όπως υπονοούνται στα βιβλία, δηλαδή δεδομένης της ποικιλίας των σχολικών εγχειριδίων σε κάποια οι ασκήσεις υπερτερούν, ενώ άλλα επιδιώκουν οι μαθητές να αποκτήσουν νέες γνώσεις μέσω της προσωπικής τους προσπάθειας και (3) παρουσίαση της μαθηματικής γνώσης, λαμβάνοντας υπόψιν προσεγγίσεις όπως θεωρητικές, αλγοριθμικές, λογικές, μεθοδολογικές και επικοινωνιακές. Τα εγχειρίδια των μαθηματικών αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών (Shield & Dole, 2013), καθώς όπως αναφέραμε, χρησιμοποιούνται ως υλικό εκμάθησης της διδαχθείσας ύλης από το μαθητή, και ως υλικό διοργάνωσης της ύλης που πρόκειται να διδαχθεί από τον καθηγητή.

Ωστόσο, τα σχολικά εγχειρίδια δεν περιορίζονται μόνο στις μαθηματικές έννοιες τις οποίες καλείται να διδάξει ο εκπαιδευτικός και να κατανοήσει ο εκπαιδευόμενος μέσα στην τάξη, αλλά έχουν και ευρύτερο χαρακτήρα. «Αντιπροσωπεύουν για κάθε γενιά μαθητών την κοινωνικά εγκεκριμένη, εξουσιοδοτημένη έκδοση της ανθρώπινης γνώσης και του πολιτισμού» (Castell, Luke & Luke, 1988, p.vii). Με άλλα λόγια, τα σχολικά εγχειρίδια υποδεικνύουν ποια είναι η «σημαντική γνώση» σε μια δεδομένη χρονολογική περίοδο (Κολέζα, 2017), δηλαδή τι οφείλει να διδάξει ο καθηγητής και αντίστοιχα να μάθει ο μαθητής. Τα μαθηματικά που διδάσκονται στα εκπαιδευτικά ιδρύματα αποτελούν ένα «σύνθετο πολιτισμικό προϊόν» (Ibid., p.344). Αυτό συμβαίνει γιατί τα σχολικά εγχειρίδια «μπορούν να θεωρηθούν ως ο βασικότερος παράγοντας στις διαδικασίες της πολιτισμικής μετάδοσης. Είναι φορείς πολλαπλώς κωδικοποιημένων μηνυμάτων. Σε αυτά οι κωδικοποιημένες έννοιες ενός γνωστικού πεδίου (“τι πρέπει να διδαχτεί”) συνδυάζονται με εκείνες της παιδαγωγικής (“πώς πρέπει να διδαχτεί και να μαθευτεί”))» (Stray, 1994, p.1-2).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Βιβλία και θεματικές περιοχές της Γεωμετρίας

Το επιλεγόμενο δείγμα αποτελείται από οχτώ σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνταν για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας από το 1975 μέχρι το 2019 στις τέσσερις τελευταίες τάξεις (Γ', Δ', Ε' και ΣΤ') του Γυμνασίου (εγχειρίδιο 1975-1976) και στις τάξεις Α' και Β' του Λυκείου (Πίνακας 1). Υπάρχει ένα τριετές κενό με αφετηρία το 1976. Οι λόγοι που δε συμπεριλήφθηκε το συγκεκριμένο εγχειρίδιο ήταν ότι αφενός δεν είχαμε πρόσβαση τη δεδομένη χρονική περίοδο σε αυτό και αφετέρου αποτελούνταν εξολοκλήρου από κεφάλαια του προηγούμενου σχολικού (Α, 1975-1976).

Σχολικό Εγχειρίδιο	Κωδικός	Χρονική Περίοδος
Ευκλείδειος Γεωμετρία (Γ', Δ', Ε' και ΣΤ' Γυμνασίου)	A	1975-1976
Ευκλείδειος Γεωμετρία (Β' Λυκείου)	B	1979-1986
Θεωρητική Γεωμετρία (Α' Λυκείου)	Γ	1979-1990

Τι είδους μαθηματική γνώση προάγουν οι εικόνες στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα;

Θεωρητική Γεωμετρία (Β' Λυκείου)	Δ	1986-1991
Θεωρητική Γεωμετρία (Α' Λυκείου)	Ε	1990-1999
Θεωρητική Γεωμετρία (Β' Λυκείου)	ΣΤ	1991-1999
Ευκλείδεια Γεωμετρία (Α' και Β' Λυκείου)	Ζ	1999-2001
Ευκλείδεια Γεωμετρία (Α' και Β' Λυκείου)	Η	2001-2014 ¹

Πίνακας 1: Απόδοση κωδικών στα σχολικά εγχειρίδια Γεωμετρίας και χρονολογική περίοδος διδασκαλίας

Επόμενο βήμα ήταν η κατηγοριοποίηση των θεματικών περιοχών της γεωμετρίας. Ως οδηγό χρησιμοποιήσαμε τα σχολικά εγχειρίδια Ζ και Η, καθώς στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει διαθέσιμη σχετική κατηγοριοποίηση της σχολικής γεωμετρίας. Τα συγκεκριμένα εγχειρίδια ενσωματώνουν την ύλη των σχολικών τάξεων Α' και Β' Λυκείου και ακολουθούν την ίδια σειρά σε επίπεδο ταξινόμησης των κεφαλαίων. Για τη δημιουργία των θεματικών περιοχών συγχωνεύσαμε κάποια κεφάλαια του σχολικού βιβλίου που έχουν παρόμοιο μαθηματικό περιεχόμενο (Πίνακας 2).

Για να ελέγξουμε την παρουσία ή όχι της κάθε θεματικής περιοχής στα οχτώ εγχειρίδια της Γεωμετρίας προχωρήσαμε σε συγχωνεύσεις κάποιων εγχειριδίων. Ο λόγος ήταν ότι οι δέκα θεματικές περιοχές υπήρχαν μόνο σε τρία εγχειρίδια (Α, Ζ και Η). Για τη συγχώνευσή τους λάβαμε υπόψιν και τη χρονολογική περίοδο διδασκαλίας των βιβλίων, κατά προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα, το εγχειρίδιο Α ήταν αυτόνομο (περιλάμβανε τις 10 θεματικές) ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο και αποτελούσε βασικό μάθημα του σχολικού έτους 1975-1976. Ακολουθεί το διάστημα 1979-1990 που είναι διασπασμένο σε δύο περιόδους. Η πρώτη είναι από το 1979 μέχρι το 1986 και αποτελεί ομαδοποίηση των σχολικών εγχειριδίων Β και Γ, ενώ η δεύτερη χρονολογείται από το 1986 με 1990 και συμπεριλαμβάνει τα εγχειρίδια Γ και Δ. Αυτός ο διαχωρισμός προέκυψε καθώς το 1986 διανεμήθηκε στα σχολεία το νέο βιβλίο για τη Β' Λυκείου. Η τελευταία συγχώνευση πραγματοποιήθηκε μεταξύ των εγχειριδίων Ε και ΣΤ με χρονική περίοδο από το 1990-1999. Τα εγχειρίδια Ζ και Η ήταν αυτόνομα, οπότε δεν χρειάστηκε να τα συγχωνεύσουμε. Η νέα σύνθεση περιλαμβάνει όλες τις θεματικές ενότητες. Τα ομαδοποιημένα εγχειρίδια μετονομάστηκαν σε Βιβλία και ήταν 6 (Πίνακας 3). Πλέον ήμασταν σε θέση να καταμετρήσουμε τις εικόνες των Βιβλίων, καθώς τα δεδομένα μας ήταν συγκρίσιμα.

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία
Τρίγωνα
Παράλληλες Ευθείες
Τετράπλευρα

Εγγεγραμμένα σχήματα
Αναλογίες και ομοιότητα
Μετρικές σχέσεις (σε τρίγωνα, πολύγωνα και κύκλο)
Εμβαδά
Μέτρηση κύκλου
Στοιχεία στερεομετρίας

Πίνακας 2: Θεματικές περιοχές της Γεωμετρίας

Βιβλίο	Σχολικά Εγχειρίδια	Χρονολογική περίοδος
Βιβλίο 1	A	1975-1976
Βιβλίο 2	B+Γ	1979-1986
Βιβλίο 3	Γ+Δ	1986-1990
Βιβλίο 4	E+ΣΤ	1990-1999
Βιβλίο 5	Z	1999-2001
Βιβλίο 6	H	2001-2019

Πίνακας 3: Κατανομή ομαδοποιημένων σχολικών βιβλίων ανά χρονολογική περίοδο διδασκαλίας

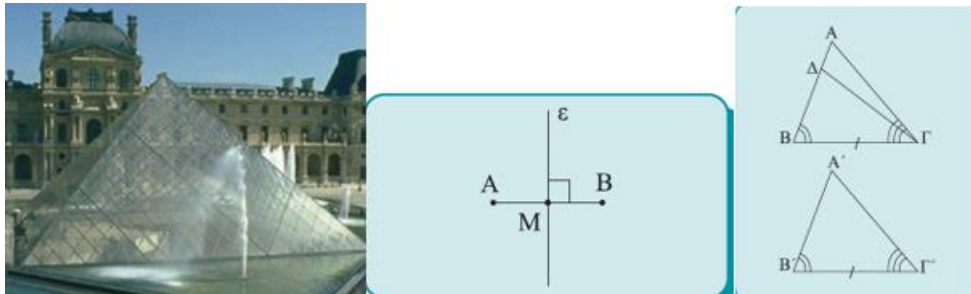
Κατηγοριοποίηση και παρουσία των εικόνων στα Βιβλία

Στη μελέτη των González-Martin *et al.* (2011), οι συγγραφείς διακρίνουν τρεις κατηγορίες εικόνων. Η πρώτη αφορά εικόνες που δε σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες, ο ρόλος τους είναι καθαρά διακοσμητικός και ονομάζονται **μη εννοιολογικές**. Αναφέρονται κυρίως σε πορτρέτα ή φωτογραφίες. Στη δεύτερη κατηγορία συγκαταλέγονται εικόνες που σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα) χωρίς να τις αποδεικνύουν ή να τις εξηγούν. Δηλαδή ρόλος τους είναι να υπενθυμίσουν στους εκπαιδευόμενους τα σχήματα και ονομάζονται **περίπου-εννοιολογικές**. Τέλος είναι οι **εννοιολογικές** εικόνες που αναφέρονται στην κατανόηση των αποδεικτικών διαδικασιών και των λυμένων ασκήσεων.

Ειδικότερα, στη συγκεκριμένη μελέτη οι μη εννοιολογικές εικόνες περιέχουν πορτρέτα, πίνακες ζωγραφικής ή τοπία. Ως εικόνες τύπου περίπου εννοιολογικές ονομάζουμε αυτές που εμφανίζονται σε ορισμούς, αξιώματα, πορίσματα και θεωρήματα χωρίς απόδειξη. Οι συγκεκριμένες δεν απαιτούν εξήγηση των μαθηματικών εννοιών, παρά μόνο τις υπενθυμίζουν ή τις γνωστοποιούν στους μαθητές. Στην κατηγορία των εννοιολογικών εικόνων κατατάσσεται οποιαδήποτε εικόνα λειτουργεί ως εξήγηση για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Εικόνες που χρησιμοποιούνται για την κατανόηση των βημάτων της απόδειξης και των λυμένων ασκήσεων ή σε σχόλια και ιστορικές αναφορές, ερμηνεύοντας

Τι είδους μαθηματική γνώση προάγουν οι εικόνες στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα;

μαθηματικές έννοιες, ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Ακολουθούν παραδείγματα για κάθε μια από τις τρεις κατηγορίες εικόνων του Βιβλίου 6.



Εικόνα 1: Παραδείγματα των τριών κατηγοριών εικόνων του Βιβλίου 6. Από αριστερά προς τα δεξιά: η πυραμίδα του Λούβρου (μη εννοιολογική), η μεσοκάθετος (περίπου-εννοιολογική), δεύτερο κριτήριο ισότητας τριγώνων (εννοιολογική)

Αναλυτική προσέγγιση ερευνητικών ερωτημάτων

Με δεδομένη τη σημασία των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά και την επίδραση που έχουν τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η καταγραφή και ταξινόμηση των εικόνων (γεωμετρικών σχημάτων και μη) στα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα. Προκειμένου να δώσουμε απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα που έχουμε θέσει, χρειάζεται να εξετάσουμε τι θα αξιοποιήσουμε για την παρουσίαση του καθενός. Για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε τις τρεις κατηγορίες εικόνων μη εννοιολογικές, περίπου εννοιολογικές, εννοιολογικές, όπως τις διαχώρισαν οι González-Martin *et al.* (2011), ενώ για το δεύτερο, μέσω ποσοστών, θα δούμε τι αλλαγές παρουσιάζουν οι συγκεκριμένες κατηγορίες εικόνων, τόσο ανά Βιβλίο, όσο και ανά θεματική ενότητα. Τέλος, για το τρίτο ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της πραξεολογίας του Chevallard (2006). Αναλυτικότερα, οι εικόνες που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας είναι οι εργασίες (tasks), ενώ ως τεχνικές (techniques) θεωρούμε τις τρεις κατηγορίες εικόνων (μη εννοιολογικές, περίπου-εννοιολογικές, εννοιολογικές). Η λογική που η συγγραφική ομάδα επιλέγει τη χρήση των εικόνων αφορά την τεχνολογία (technology), ενώ το σύνολο των θεμελιωδών αξιωμάτων της γεωμετρίας αποτελεί τη θεωρία (theory). Δηλαδή μέσω της καταγραφής των τριών κατηγοριών εικόνων (techniques) που επιλέγονται από την εκάστοτε συγγραφική ομάδα, μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες σχετικά με τους τρόπους που παρουσιάζονται οι γεωμετρικές έννοιες στους μαθητές μέσω των εικόνων των σχολικών βιβλίων, δηλαδή να ερμηνεύσουμε τη λογική πίσω από τη χρήση τους (technology).

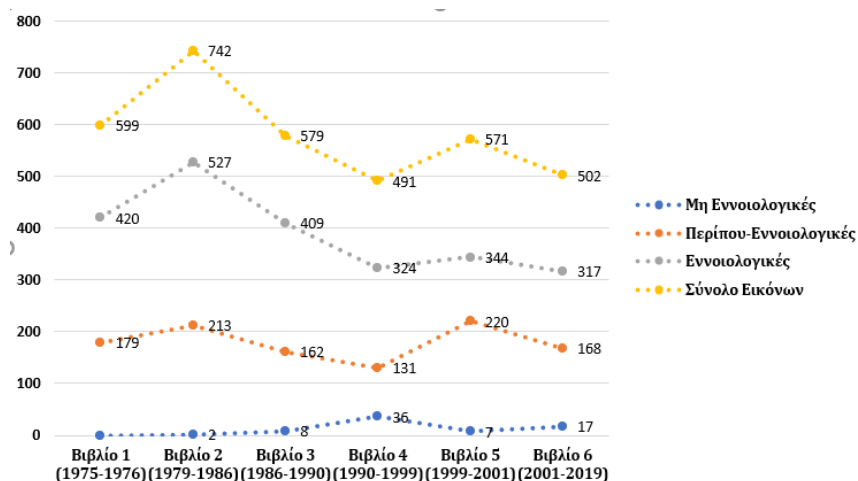
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τάσεις κατά τη χρήση εικόνων στα Βιβλία Γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα

Από την καταμέτρηση των εικόνων που υπάρχουν στα Βιβλία που δημιουργήσαμε για το μάθημα της Γεωμετρίας, παρατηρούνται μεγάλες αποκλίσεις ως προς το συνολικό αριθμό τους (Εικόνα 2). Όπως φαίνεται, το Βιβλίο 2 αποτελείται συνολικά από 742 εικόνες και

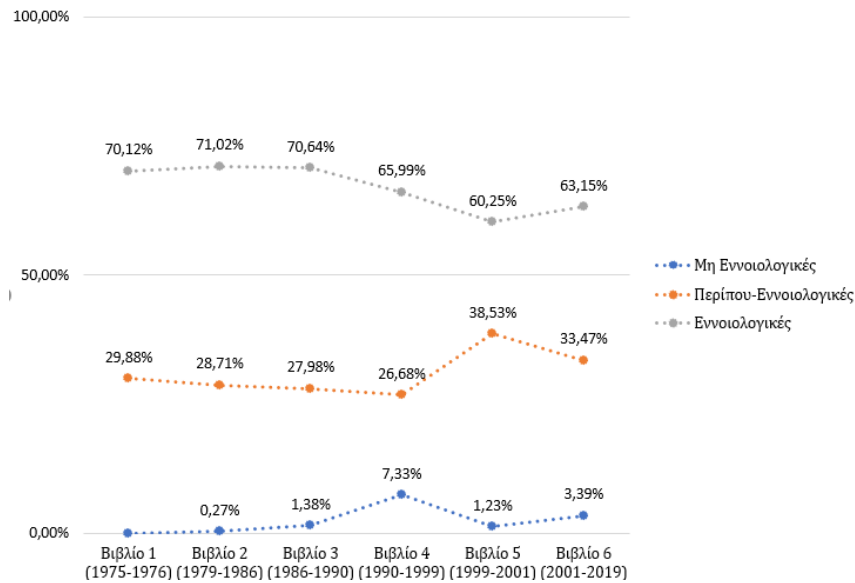
παρουσιάζει το μεγαλύτερο αριθμό από όλα τα βιβλία. Στο τέλος της κατάταξης βρίσκεται το Βιβλίο 4, με 491 εικόνες συνολικά. Ως προς την ταξινόμηση ανά τύπο εικόνων, υπερισχύουν οι εννοιολογικές εικόνες, ακολουθούν σε ικανοποιητικό βαθμό οι περίπου-εννοιολογικές εικόνες και στο τέλος βρίσκονται οι μη εννοιολογικές εικόνες. Δεδομένων όμως των μεγάλων αποκλίσεων, δεν είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε σε συγκρίσεις μεταξύ των 3 κατηγοριών καθώς μπορεί οι διαφορές στους αριθμούς να είναι αποτέλεσμα των συγχωνεύσεων που πραγματοποιήσαμε στα εγχειρίδια. Για αυτό το λόγο επιλέξαμε την εμφάνιση των αποτελεσμάτων σε μορφή ποσοστών.

Από την Εικόνα 3, παρατηρούμε ότι η δημοφιλέστερη κατηγορία είναι οι εννοιολογικές εικόνες διαχρονικά. Ακολουθούν οι περίπου-εννοιολογικές, ενώ οι μη εννοιολογικές είναι σχεδόν ανύπαρκτες. Ωστόσο, από το 1990 και έπειτα (Βιβλίο 4, 5, 6) παρατηρείται πτώση της παρουσίας των εννοιολογικών εικόνων, με παράλληλη αύξηση των περίπου-εννοιολογικών. Από μια διαφορά γύρω στο 40% στο Βιβλίο 1, η διαφορά τους έπεσε στο 30% στο Βιβλίο 6. Από την άλλη μεριά, η χρήση των μη εννοιολογικών εικόνων είναι μικρότερη της τάξης του 10% σε όλα τα Βιβλία, καταλαμβάνοντας το υψηλότερο ποσοστό του 7,33% στο Βιβλίο 4.



Εικόνα 2: Καταγραφή του συνολικού αριθμού των εικόνων και των τριών κατηγοριών ανά Βιβλίο

Τι είδους μαθηματική γνώση προάγουν οι εικόνες στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα;



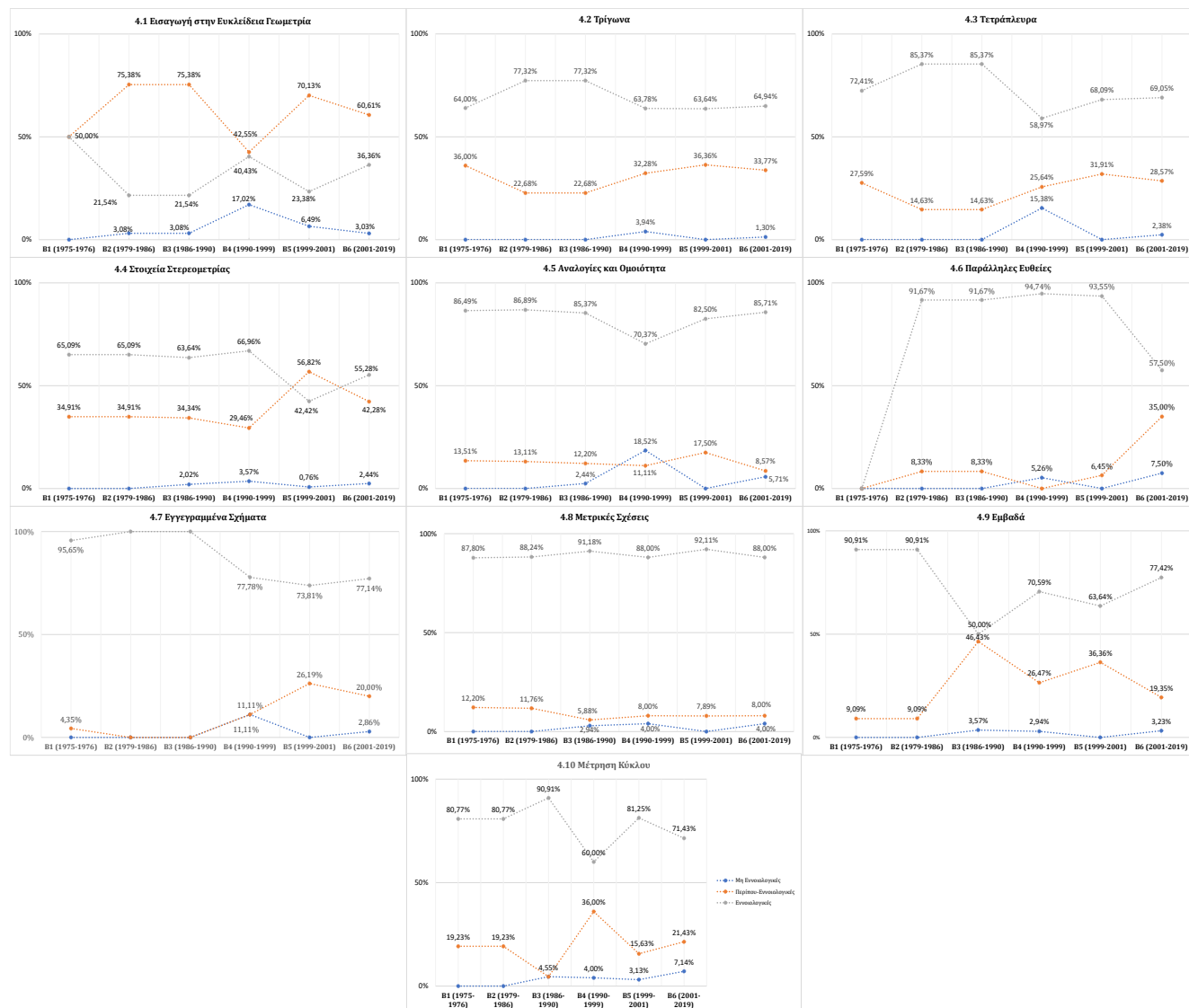
Εικόνα 3 : Κατάταξη των εικόνων τύπου Μη Εννοιολογικών, Περίπου-Εννοιολογικές και Εννοιολογικές ανά Βιβλίο

Τάσεις κατά τη χρήση εικόνων ανά θεματική ενότητα

Τα ποσοστά για κάθε μια από τις τρεις κατηγορίες εικόνων, σε καθένα από τα Βιβλία που εξετάστηκαν, παρουσιάζονται στην Εικόνα 4. Μελετώντας τη χρήση των εικόνων στα Βιβλία ανά θεματική ενότητα διακρίναμε τρεις περιπτώσεις. Η πρώτη και μοναδική περίπτωση που υπερσχύει η παρουσία των περίπου-εννοιολογικών εικόνων παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.1. Εξαιρέση αποτελούν τα Βιβλία 1 και 4, όπου οι περίπου-εννοιολογικές και εννοιολογικές είτε είναι ίσες, είτε συγκλίνουν στις τιμές αντίστοιχα. Οι μη εννοιολογικές εικόνες ενώ κατά την πλειονότητα των Βιβλίων εμφανίζονται σε ποσοστά μικρότερα του 6,50%, στο Βιβλίο 4 καταλαμβάνουν το 17,02%. Η δεύτερη περίπτωση ακολουθεί το ίδιο μοτίβο με την Εικόνα 3. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2, στη θεματική ενότητα Τρίγωνα έχουμε περισσότερη χρήση των εννοιολογικών εικόνων (64%- 77,32%), ακολουθούν οι περίπου-εννοιολογικές εικόνες (22,68%- 36,36%), ενώ γίνεται πολύ μικρότερη χρήση των μη εννοιολογικών εικόνων (Βιβλίο 4: 3,94%, Βιβλίο 6: 1,30%). Άλλες θεματικές ενότητες με παρόμοια ευρήματα με την προαναφερθείσα περίπτωση εμφανίζονται στις Εικόνα 4.3 και Εικόνα 4.4. Ωστόσο, στο Βιβλίο 5 στην Εικόνα 4.4, οι περίπου-εννοιολογικές εικόνες υπερτερούν έναντι των εννοιολογικών. Ο λόγος είναι ότι οι εικόνες που σχετίζονται με ορισμούς είναι περισσότερες από αυτές που σχετίζονται με αποδείξεις ή λυμένα παραδείγματα.

Η τελευταία περίπτωση σκιαγραφείται στην Εικόνα 4.5. Η χρήση των εικόνων είναι πάνω από το 82%, με εξαίρεση το Βιβλίο του 1990 (Βιβλίο 4: 70,37%). Η εμφάνιση των περίπου-εννοιολογικών εικόνων μειώνεται διαδοχικά από το 13,51% στο 11,11% στα Βιβλία 1, 2, 3, και 4, στο Βιβλίο 5 αυξάνεται στο 17,50%, με τη χρήση τους να μειώνεται στο Βιβλίο 6 (8,57%). Τέλος οι μη εννοιολογικές εικόνες εμφανίζονται πρώτη φορά στο Βιβλίο 3 (2,44%), αυξάνονται ραγδαία στο 18,52% (Βιβλίο 4) και έπειτα στο 5,71% (Βιβλίο 6). Δηλαδή προκύπτει ότι οι εννοιολογικές εικόνες είναι η δημοφιλέστερη κατηγορία και αποκλίνουν σε

μεγάλο βαθμό από τις περίπου-εννοιολογικές και μη εννοιολογικές εικόνες. Παρόμοια αποτελέσματα εμφανίζονται στις θεματικές ενότητες «Παράλληλες Ευθείες» (Εικόνα 4.6), «Εγγεγραμμένα σχήματα» (Εικόνα 4.7), «Μετρικές σχέσεις» (Εικόνα 4.8), «Εμβαδά» (Εικόνα 4.9) και «Μέτρηση κύκλου» (4.10).



Εικόνα 4: Κατάταξη των εικόνων τύπου Μη Εννοιολογικών, Περίπου-Εννοιολογικών και Εννοιολογικών στις θεματικές ενότητες ανά Βιβλίο (όπου B1 είναι Βιβλίο 1, όπου B2 είναι Βιβλίο 2 κ.ο.κ.)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων ανά Βιβλίο, προκύπτει ότι οι εννοιολογικές εικόνες χρησιμοποιούνται περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη κατηγορία στα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας διαχρονικά. Οι περίπου-εννοιολογικές εικόνες χρησιμοποιούνται σε ικανοποιητικό βαθμό, ενώ η χρήση των μη εννοιολογικών εικόνων είναι πρακτικά

ανύπαρκτη. Ερμηνεύοντας τα αποτελέσματά μας ως προς τις θεματικές ενότητες μπορούμε να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- (1) Η ενότητα «Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία» (Εικόνα 4.1) είναι η μοναδική περίπτωση που η παρουσία των περίπου-εννοιολογικών εικόνων ξεπερνάει την παρουσία των εννοιολογικών εικόνων. Εξαίρεση αποτελεί το Βιβλίο 1 που ο αριθμός περίπου-εννοιολογικών ταυτίζεται με τον αριθμό των εννοιολογικών εικόνων. Η συγκεκριμένη ενότητα περιλαμβάνει ορισμούς, αξιώματα ιδιότητες βασικών σχημάτων (χωρίς τη χρήση αποδεικτικών διαδικασιών) και εισάγει τον εκπαιδευόμενο στις πρωταρχικές έννοιες της γεωμετρίας, των οποίων η εκμάθηση είναι απαραίτητη προκειμένου να κατανοήσει τις έννοιες των κεφαλαίων που ακολουθούν. Συνεπώς δεν αποτελεί έκπληξη ότι οι περίπου-εννοιολογικές εικόνες υπερτερούν έναντι των δύο άλλων κατηγοριών.
- (2) Στις ενότητες «Τρίγωνα» (Εικόνα 4.2), «Τετράπλευρα» (Εικόνα 4.3) και «Στοιχεία Στερεομετρίας» (Εικόνα 4.4) η παρουσία των εννοιολογικών εικόνων ξεπερνά την παρουσία των περίπου-εννοιολογικών εικόνων, με τη διαφορά τους να κυμαίνεται από 30% μέχρι 50%. Ωστόσο, υπάρχουν οι εξής εξαιρέσεις: (α) Στα Βιβλία 2 και 3 των «Τετράπλευρων» (Εικόνα 4.3) οι εννοιολογικές εικόνες έχουν διαφορά περίπου στο 70% και (β) Στα «Στοιχεία Στερεομετρίας» (Εικόνα 4.4) οι περίπου-εννοιολογικές εικόνες είναι περισσότερες από τις εννοιολογικές (Βιβλίο 5), με την παρατηρούμενη διαφορά να είναι γύρω στο 14%, και στο Βιβλίο 6 οι εννοιολογικές εικόνες έχουν διαφορά λιγότερη από 13% από τις περίπου-εννοιολογικές εικόνες.
- (3) Στις υπόλοιπες ενότητες η ποσοστιαία εμφάνιση των εννοιολογικών εικόνων είναι μεγαλύτερη από την εμφάνιση των περίπου-εννοιολογικών εικόνων με την παρατηρούμενη διαφορά να κυμαίνεται μεταξύ 50% και 80% κατά την πλειονότητα. Βέβαια, υπάρχουν και κάποιες εξαιρέσεις όπως: (α) στα «Εμβαδά» (Εικόνα 4.9) στα Βιβλία 3, 4 και 5, (β) στη «Μέτρηση Κύκλου» (Εικόνα 4.10) στο Βιβλίο 4, (γ) στα «Εγγεγραμμένα σχήματα» (Εικόνα 4.7) στο Βιβλίο 5 και (δ) στις «Παράλληλες Ευθείες»² (Εικόνα 4.6) στο Βιβλίο 6.

Λαμβάνοντας υπόψιν την Εικόνα 3 μπορούμε να διακρίνουμε δύο χρονολογικές περιόδους: η πρώτη περιλαμβάνει τα Βιβλία μεταξύ 1975-1990 (Βιβλία 1, 2, 3) ενώ η δεύτερη τα Βιβλία μεταξύ 1990-2019 (Βιβλία 4, 5, 6). Όπως έχουμε ήδη δει, οι εννοιολογικές εικόνες είναι η δημοφιλέστερη κατηγορία εικόνων σε όλα τα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας διαχρονικά. Ωστόσο, από το 1990 και έπειτα (Βιβλία 4, 5, 6), παρατηρείται μείωση της χρήσης τους. Ειδικότερα, έχει επέλθει μείωση της συχνότητας των εννοιολογικών εικόνων από ένα μέσο όρο 70,59% (Βιβλία 1, 2, 3) στο 63,13% (Βιβλία 4, 5, 6) με την παρατηρούμενη διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική ($z=4.78, p<0.05$). Αντίθετα αποτελέσματα παρατηρούνται στις περίπου-εννοιολογικές εικόνες. Από το 1990 και έπειτα (Βιβλία 4, 5, 6) έχει επέλθει αύξηση της χρήσης των περίπου-εννοιολογικών εικόνων, δηλαδή από ένα μέσο όρο 29,86% (Βιβλία 1, 2, 3) στο 32,89% (Βιβλία 4, 5, 6) με την παρατηρούμενη διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική ($z=-2.75, p<0.05$).

Για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων από τη σκοπιά της ΑΘΔ επιλέγουμε την προαναφερθείσα χρονολογική διάκριση. Την περίοδο 1975-1990 (Βιβλία 1, 2, 3) γινόταν συχνότερη χρήση εργασιών (εικόνες) με χρήση τεχνικών (κατηγορίες εικόνων) που δίνουν έμφαση σε αποδεικτικές διαδικασίες και λυμένες εφαρμογές. Αυτό σημαίνει ότι οι υπεύθυνοι για τη συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων της Γεωμετρίας έδιναν περισσότερη έμφαση στις αποδείξεις και τις λυμένες εφαρμογές. Άρα, η πραξολογία «μαθαίνω γεωμετρία» όπως αυτή αποτυπώνεται μέσω του περιεχομένου (εικόνες) των σχολικών εγχειριδίων γεωμετρίας, φανερώνει τον «ιδρυματικό» χαρακτήρα της γνώσης κατά την προαναφερθείσα περίοδο, δηλαδή το είδος της διδακτικής μετάθεσης που έλαβε χώρα κατά τον μετασχηματισμό της μαθηματικής γνώσης σε γνώση που πρέπει να διδαχθεί: «μαθαίνω γεωμετρία» σημαίνει «μαθαίνω γεωμετρικές αποδείξεις και εφαρμογές αυτών». Αντίθετα, την περίοδο 1990-2019 (Βιβλία 4, 5, 6) γίνεται μικρότερη χρήση εργασιών (εικόνες) με χρήση τεχνικών (κατηγορίες εικόνων) που δίνουν έμφαση σε αποδεικτικές διαδικασίες και λυμένες ασκήσεις, ενώ αυξάνεται η χρήση εργασιών (εικόνες) μέσω τεχνικών (κατηγορίες εικόνων) που σχετίζονται με ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα χωρίς απόδειξη. Άρα, η πραξολογία «μαθαίνω γεωμετρία», όπως αυτή αποτυπώνεται μέσω του περιεχομένου (εικόνες) των σχολικών εγχειριδίων γεωμετρίας, φανερώνει ότι το είδος της διδακτικής μετάθεσης που έλαβε χώρα κατά το μετασχηματισμό της μαθηματικής γνώσης σε γνώση που πρέπει να διδαχθεί άλλαξε και συγκεκριμένα «μαθαίνω γεωμετρία» σημαίνει «μαθαίνω ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα χωρίς απόδειξη». Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψιν την όλο και μικρότερη χρήση εργασιών (εικόνων) που σχετίζονται με αποδείξεις και την αυξανόμενη χρήση εργασιών που σχετίζονται με ορισμούς και αξιώματα, μπορούμε να πούμε ότι από το 1975 μέχρι σήμερα έχει επέλθει μια αλλαγή στην λογική πίσω από τη χρήση συγκεκριμένων εργασιών (τεχνολογία): με την πάροδο του χρόνου, οι εκάστοτε συγγραφείς των εγχειριδίων έδιναν όλο και μικρότερη έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία. Θεωρώντας ότι τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν για τους μαθητές μια εκδοχή της γνώσης η οποία είναι αποδεκτή από την κοινωνία (Castell *et al.*, 1988), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η μάθηση και η κατανόηση της σχολικής γεωμετρίας, όπως αυτή παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια, τείνει να γίνει λιγότερο συνυφασμένη με τη γεωμετρική απόδειξη.

Με δεδομένο ότι η διαδικασία της απόδειξης έχει κεντρικό ρόλο στα μαθηματικά, και πρέπει να αποτελεί μέρος της διδασκαλίας τους σε όλες τις σχολικές τάξεις (Ball, Hoyles, Jahnke & Monshovitz-Hadar, 2002), η παρατηρούμενη μείωση ενδεχομένως να είναι ανησυχητική, καθώς παρατηρείται μια απομάκρυνση από την αποδεικτική διαδικασία. Επιπλέον, καθώς οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη γεωμετρία λόγω της ορολογίας, της αντίληψης του χώρου, της δημιουργία συλλογισμού και της κατασκευής αποδείξεων (Χαιρέτη, 2009), οι εικόνες είναι καθοριστικής σημασίας γιατί λειτουργούν ως ο «διαμεσολαβητής» της θεωρίας και της πράξης σχετικά με την κατανόηση (Elia & Philippou, 2004).

Όμως, αν λάβουμε υπόψιν το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον της Ελλάδας και τις μεταρρυθμίσεις που προωθήθηκαν στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οδηγούμαστε σε μια συμπληρωματική ερμηνεία των ευρημάτων μας. Η ύλη της γεωμετρίας στα ελληνικά σχολεία από το 1836 μέχρι και το 1985 χαρακτηρίζεται από μια «προσκόλληση» στην αυστηρή

παρουσίαση των γεωμετρικών εννοιών με βάση τα Στοιχεία του Ευκλείδη (Toumasis, 1990). Ο Toumasis (1990) αναφέρει ότι σε οποιαδήποτε προσπάθεια εκσυγχρονισμού του μαθήματος της γεωμετρίας, οι υπεύθυνοι για τη διαμόρφωση του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, έφερναν αντιρρήσεις, προβάλλοντας εκπαιδευτικά, φιλοσοφικά και εθνικά επιχειρήματα³. Σχετικά με τα εκπαιδευτικής φύσεως επιχειρήματα, μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα η διδασκαλία γινόταν σύμφωνα με την κρίση του διδάσκοντα και τα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια ήταν προϊόν μετάφρασης ξένων βιβλίων. Η έλλειψη διδακτικού προσωπικού μαθηματικών ήταν εμφανής· οι περισσότεροι καθηγητές ήταν απόφοιτοι Λυκείων και ελάχιστοι ήταν Πανεπιστημίων με επαρκείς γνώσεις για τα μαθηματικά. Επίσης το 1980 και 1985 στα πλαίσια των αλλαγών με την προοπτική τα μαθηματικά να γίνουν «μοντέρνα», δεν έγινε καμία προσπάθεια εκσυγχρονισμού στο περιεχόμενο της γεωμετρίας, παρόλες τις διεθνείς πιέσεις για ανανέωση και αλλαγή, ενώ η Ευκλείδεια γεωμετρία, σύμφωνα με τις νέες διατάξεις, δεν αποτελούσε πλέον μάθημα της τελευταίας τάξης του Λυκείου. Αναφορικά με τις φιλοσοφικές αντιρρήσεις επικρατούσε η άποψη του Πλάτωνα ότι «τα μαθηματικά είναι το μέσο για την εκπαίδευση του νου». Κατά κύριο λόγο επιλεγόταν μια θεωρητική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ από το 1897 γινότουσαν νύξεις για την καθιέρωση της πρακτικής γεωμετρίας. Οι λόγοι ήταν ότι ναι μεν η διδασκαλία της θεωρίας ήταν αδύνατη σε μαθητές που δεν ήταν συνηθισμένοι με εμπειρικές γεωμετρικές έννοιες, αλλά οι καθηγητές μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έρχονταν αντιμέτωποι με δυσκολίες, στην προσπάθειά τους να εντάξουν τους μαθητές στον «αυστηρό γεωμετρικό συλλογισμό». Τέλος, προβάλλονταν και εθνικά επιχειρήματα: αρχικά ο κλάδος της γεωμετρίας έχει τις ρίζες του στην αρχαία Ελλάδα και επεκτάθηκε στη Δύση, συνεπώς ήταν καθήκον των Ελλήνων να διατηρήσουν τον αυστηρό χαρακτήρα της γεωμετρίας από θεωρητική και επιστημονική άποψη. Επιπλέον, επικρατούσε η αντίληψη ότι οι συνεχείς αλλαγές του περιεχομένου της Γεωμετρίας των άλλων χωρών, μαζί με τις προσπάθειες για την απλοποίησή της, ώστε να είναι πιο κοντά στην πρακτική εκδοχή, είχε ως αποτέλεσμα την αλλοίωση της συνοχής της γεωμετρίας.

Φαίνεται λοιπόν ότι η παρατηρούμενη μείωση των εννοιολογικών εικόνων κατά την περίοδο 1990-2019 να σχετίζεται με το γεγονός ότι κατά την περίοδο 1975-1990 οι συγγραφικές ομάδες των σχολικών εγχειριδίων γεωμετρίας έδιναν υπέρμετρη έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία λόγω των φιλοσοφικών και εθνικών τους θέσεων. Ενδεχομένως, με την πάροδο του χρόνου η επίδραση των συγκεκριμένων να εξασθένησε, γεγονός που οδήγησε τελικά στην μειωμένη χρήση εννοιολογικών εικόνων.

Όπως αναφέρει και ο Toumasis (1990, σ. 499, μετάφραση μας):

«Η ενίσχυση ειδικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε όλα τα σχολικά αναλυτικά προγράμματα στη σύγχρονη Ελλάδα, μπορεί να αποδοθεί στο ότι η θεωρητική γεωμετρία θεωρούνταν ευρέως ως το άνθος του αρχαίου ελληνικού πνεύματος και το καθιερωμένο πρότυπο για την επιστημονική θεμελίωση κάθε κλάδου των μαθηματικών. Περισσότερη γεωμετρία στα σχολεία σήμαινε καλύτερη οργάνωση της σκέψης των μαθητών σύμφωνα με τις αρχές των Στοιχείων του Ευκλείδη και ταυτόχρονα ισχυρότερους δεσμούς με την παράδοση και την εθνική κληρονομιά».

Ενδεχομένως η μείωση των εννοιολογικών εικόνων και η παράλληλη αύξηση των περίπου-εννοιολογικών εικόνων να σχετίζονται και με την ενσωμάτωση νέων παιδαγωγικών τάσεων, όμως λόγω της μεγάλης μείωσης του ενδιαφέροντος των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών για τη σχολική γεωμετρία από το 1980 και μετά (Inglis & Foster, 2018) δεν ήμασταν σε θέση να εξάγουμε συμπεράσματα. Αν και η γεωμετρία στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα πλέον δεν επέχει σημαντική θέση καθώς διδάσκεται μόνο για πολιτισμικούς λόγους, η διδασκαλία της εξακολουθεί να είναι περισσότερο συνδεδεμένη με μια πιο αυστηρή και θεωρητική προσέγγιση σε σχέση με άλλες χώρες όπως τη Γαλλία (Kuzniak & Vivier, 2009). Με άλλα λόγια, παρατηρείται το παράδοξο ότι ενώ έχουν μειωθεί οι εικόνες που σχετίζονται με αποδείξεις, η σχολική γεωμετρία στην Ελλάδα έχει διατηρήσει τον αυστηρό της χαρακτήρα γεγονός που ίσως μαρτυρά προσκόλληση στην πολιτισμική μας κληρονομιά.

Αφήνοντας κατά μέρος συζητήσεις σχετικά με το κατά πόσο η έμφαση ή μη της αποδεικτικής διαδικασίας θα πρέπει να αποτελεί κύριο ζητούμενο της διδασκαλίας της γεωμετρίας και έχοντας υπόψιν τις επιρροές που άσκησαν οι φιλοσοφικές και εθνικές θέσεις όσων εμπλέκονται στο σχεδιασμό των σχολικών εγχειριδίων γεωμετρίας, θα συμφωνήσουμε με τον Toumasis (1990) ο οποίος τονίζει ότι κάθε δράση που αποσκοπεί σε αλλαγές στην εκπαίδευση των μαθηματικών θα πρέπει να είναι απαλλαγμένη από προκαταλήψεις και εθνικά σύνδρομα ώστε να είναι σε θέση να ανοίξει δρόμο για μια μελλοντική μεταρρύθμιση.

Σημειώσεις

1. Το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία (Α' και Β' Λυκείου) του 2001 χρησιμοποιείται έως σήμερα στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Από το σχολικό έτος 2014 και έπειτα, έχει διαχωριστεί σε δύο εγχειρίδια, ένα για την Α' και ένα για τη Β' Λυκείου.
2. Οι Παράλληλες Ευθείες αποτελούσαν μέρος του εισαγωγικού κεφαλαίου της Εισαγωγής στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, για αυτό και στο Βιβλίο 1 (1975-1976) παρατηρείται απουσία των τριών κατηγοριών εικόνων.
3. Η παρουσίαση των εκπαιδευτικών, φιλοσοφικών και εθνικών αντιρρήσεων αναγράφεται στο έργο του Toumasis, Ch. (1990): The epos of Euclidean geometry in Greek secondary education (1836-1985): Pressure of change and resistance. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 491-508.

Η Ευαγγελία Δακορώνια είναι μεταπτυχιακή φοιτήτρια του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης στο πρόγραμμα «Μαθηματικά και Εφαρμογές στην Εκπαίδευση» και η παρούσα μελέτη εκπονήθηκε στα πλαίσια της διπλωματικής της εργασίας η οποία εξετάζει το ρόλο και την παρουσία των εικόνων και των ασκήσεων που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας, σε συνδυασμό με τις αλλαγές που έχουν υποστεί από το 1975 μέχρι το 2019, υπό την επίβλεψη του καθηγητή Μ. Αναστασάκη. Τμήμα της συγκεκριμένης εργασίας παρουσιάστηκε στο 8^ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ. 8) στην Κύπρο, στις 6-8 Δεκεμβρίου 2019, με τίτλο «Ανάλυση των εικόνων των σχολικών βιβλίων γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα: μια ανθρωπολογική προσέγγιση».

*Τι είδους μαθηματική γνώση προάγουν οι εικόνες στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας
από το 1975 μέχρι σήμερα;*

Ο Μαρίνος Αναστασάκης έλαβε το διδακτορικό του στη Διδακτική των Μαθηματικών από το Mathematics Education Centre του Πανεπιστημίου του Loughborough στο Ηνωμένο Βασίλειο. Έχει διδάξει σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο μαθήματα Διδακτικής των Μαθηματικών και Μεθοδολογίας της Έρευνας στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστήμιο Κρήτης και είναι συνεργαζόμενος ερευνητής στο Ινστιτούτο Εφαρμοσμένων και Υπολογιστικών Μαθηματικών του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας. Έχει εργαστεί σε διάφορα ερευνητικά προγράμματα σχετιζόμενα με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν καθηγητές και φοιτητές κατά τη διδασκαλία και μάθηση των Πανεπιστημιακών Μαθηματικών, τη χρήση GeoGebra και Autograph από φοιτητές, τη χρήση διαδικτυακών διαλέξεων από φοιτητές και τη μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Αναφορές

Ελληνική

- Αγγελή, Α. & Γαγάτσης, Α. (2017). Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος και πώς αυτό λειτουργεί στην ανάπτυξη γεωμετρικού συλλογισμού και γεωμετρικής απόδειξης. *Πρακτικά 7^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ: Η Μαθηματική Γνώση για τη διδασκαλία και η ανάπτυξή της* (σσ. 713-722). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Βουκελάτου, Σ. (2017). Έμφυλες αναπαραστάσεις στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Β' Γυμνασίου. *Πρακτικά 7^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ: Κοινωνικο-πολιτισμικές, πολιτικές και θεσμικές διαστάσεις της μάθησης και της διδασκαλίας* (σσ. 568-578). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Γαγάτσης, Α., Γρίδος, Π. & Σαμαρτζής, Π. (2017). Χωρική ικανότητα και δημιουργικότητα: σύμμαχοι στη μαθηματική απόδειξη. *Πρακτικά 7^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ: Η Μαθηματική Γνώση για τη διδασκαλία και η ανάπτυξή της* (σσ. 743-752). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Γκενέ, Κ., Ζαχάρος, Κ., Λαβίδας, Κ. & Κουστουράκης, Γ. (2017). Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών ως προς τον διαθεματικό τους χαρακτήρα. *Πρακτικά 7^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ: Κοινωνικο-πολιτισμικές, πολιτικές και θεσμικές διαστάσεις της μάθησης και της διδασκαλίας* (σσ. 579-588). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Γκενέ, Κ., Κανελλοπούλου, Β. & Κολέζα, Ε. (2015). Μέτρηση μήκους με μη τυπικές και τυπικές μονάδες από μαθητές της τετάρτης δημοτικού. *Πρακτικά 6^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Ερευνητικές ή θεωρητικές εργασίες στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών που δεν εντάσσονται στους παραπάνω άξονες* (σσ. 409-418). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Δατσογιάννη, Α., Ελευθερίου, Π., Μιχαήλ, Π., & Παναγή, Ν. (2015). Χωρική ικανότητα και δημιουργικότητα μαθητών Ελλάδας και Κύπρου: διερεύνηση της σχέσης των δύο εννοιών. *Πρακτικά 6^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Δημιουργικότητα στη μαθηματική εκπαίδευση* (σσ. 106-115). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Κολέζα, Ευγενία (2017). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών. Αθήνα: Gutenberg.
- Παπαγεωργίου, Μ. & Τζεκάκη, Μ. (2017). Κατανόηση μαθητών Α' Λυκείου για το ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών στη Γεωμετρία. *Πρακτικά 7^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Η μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη* (σσ. 193-202). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

- Παπανικολάου, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2017). Μελέτη της εισαγωγής της έννοιας της εκτίμησης στα σχολικά μαθηματικά της Α', Β' και Γ' Δημοτικού. *Πρακτικά 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη* (σσ. 224-234). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Σκουμπουρδή (Chrisanthi Skoumpourdi), Χ., & Βαϊτσίδη (Georgia Vaitsidi), Γ. (2019). Η διερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση: συνδέσεις, διαφοροποιήσεις, καινοτομίες. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 0(12), 8 - 22. doi:<https://doi.org/10.12681/enedim.21142>
- Στουραϊτής, Κ. & Πόταρη, Δ. (2015). Διαλεκτικές αντιθέσεις και μετατοπίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Πρακτικά 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Επαγγελματική ανάπτυξη «δημιουργικών» εκπαιδευτικών* (σσ. 248-257). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Τουλτσινάκη, Μ. & Σταυρόπουλος, Π. (2015). Ο ρόλος της γεωμετρίας στην κατανόηση των συμβόλων της άλγεβρας σε μαθητές με προβλήματα όρασης. *Πρακτικά 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Ίσες ευκαιρίες στη μαθηματική εκπαίδευση* (σσ. 187-196). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ
- Χαιρέτη, Μ. (2009). Τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών στα μαθηματικά και η διδακτική αξιοποίησή τους. Ιωάννινα: Διπλωματική εργασία.
- Χαραλαμπίδου, Ε. & Κλώθου, Α. (2017). Δραστηριότητες γεωμετρίας μέσα στο παιχνίδι στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση: η περίπτωση της πρώτης τάξης. *Πρακτικά 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη* (σσ. 278-287). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

Ξενόγλωσση

- Apple, M. (1992). The text and cultural politics. *Educational Researcher* (21), (pp. 4–11).
- Ball, D. L., Hoyle, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (3), (pp. 907–920).
- Bosch M., & Gascón J. (2014) Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: Bikner-Ahsbahr A., Prediger S. (eds) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham
- Castell, S., Luke, A., & Luke, C. (Ed.) (1988). *Language, authority, and criticism: Readings on the school textbook*. (6th ed.) London: Falmer Press.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in Mathematics Education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21–30).
- Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014) Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht
- Desli, D., & Loukidou, H. (2014). Addition and Subtraction Word Problems in Greek Grade A and Grade B Mathematics Textbooks: Distribution and Children's Understanding. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.
- Elia, I., & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. Johnsen Hoines, & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2* (pp. 327–334). Bergen: PME.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2): 139–162.

- González-Martin, A.S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually driven and visually rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42 (5), (pp. 565-589).
- Guo, X. (2001). From “Bible” to “Material”—Argument on the transformation of teachers’ view of textbook. *Higher Teacher Education Research*, 13(6), 17–21.
- Inglis, M., & Foster, C. (2018). Five Decades of Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(4), (pp. 462-500).
- Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education—A study of textbooks as the potentially implemented curriculum*. Luleå: Universitetsstryckeriet, Licentiate Thesis at Luleå University of Technology, Department of Mathematics.
- Kuzniak, A., & Vivier, L. (2009) A French Look on the Greek Geometrical Working Space at Secondary School Level, *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France
- Mouzakitis, A. (2006). A comparative analysis of Italian and Greek Euclidean geometry textbooks: A case study. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 19.
- Papadopoulos, I. (2008) Complex and Non-Regular Shapes: Their Evolution in Greek Textbooks (1749–1971). *Science & Education* 17, 115–129. <https://doi.org/10.1007/s11191-006-9055-5>
- Patsopoulos, D., & Patronis, T. (2006). The theorem of Thales: A study of the naming of theorems in school. *The International Journal for the History of Mathematics Education*, 1(1).
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt for the Didactics of Mathematics*, 33(5), (pp. 158–175).
- Qi, C., Zhang, X., & Huang, D. (2018). Textbook Use by Teachers in Junior High School in Relation to Their Role. In L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, & J. Visnovska (Eds.), *Research on Mathematics Textbooks and Teachers’ Resources*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham
- Remillard J.T. (2018) Examining Teachers’ Interactions with Curriculum Resource to Uncover Pedagogical Design Capacity. In: Fan L., Trouche L., Qi C., Rezat S., Visnovska J. (Eds) *Research on Mathematics Textbooks and Teachers’ Resources*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham
- Remillard, J., & Heck, D. J. (2014). Conceptualising the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM—International Journal on Mathematics Education*, 46(5), 705–718. doi:[10.1007/s11858-014-0600-4](https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4).
- Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 183–199.
- Spiropoulou, D., Roussos, G., & Voutirakis, J. (2005). The role of environmental education in compulsory education: The case of mathematics textbooks in Greece. Published by Shannon Research Press Adelaide, South Australia, 6(3), 400-406.
- Stray, C. (1994). Paradigms regained: Towards a historical sociology of the textbook. *Journal of Curriculum Studies*, 26(1), 1-29.
- Toumasis, Ch. (1990). The epos of Euclidean geometry in Greek secondary education (1836-1985): Pressure of change and resistance. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 491–508.

- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Xenofontos, C. & Papadopoulos, C. E. (2015). Opportunities of learning through the history of mathematics: The example of national textbooks in Cyprus and Greece. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.
- Yang, K., & Li, J. (2018). A Framework for Assessing Reading Comprehension of Geometric Construction Texts. *International Journal of Science and Mathematics Education* 16(1), 109–124. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9770-6>
- Zacharos, K., & Koustourakis, G. (2011). A critical approach to school mathematical knowledge: The case of realistic problems in Greek primary schooltextbooks for seven-year-old pupils. *Acta Didactica Napocensia*, 4(1), 39–51.