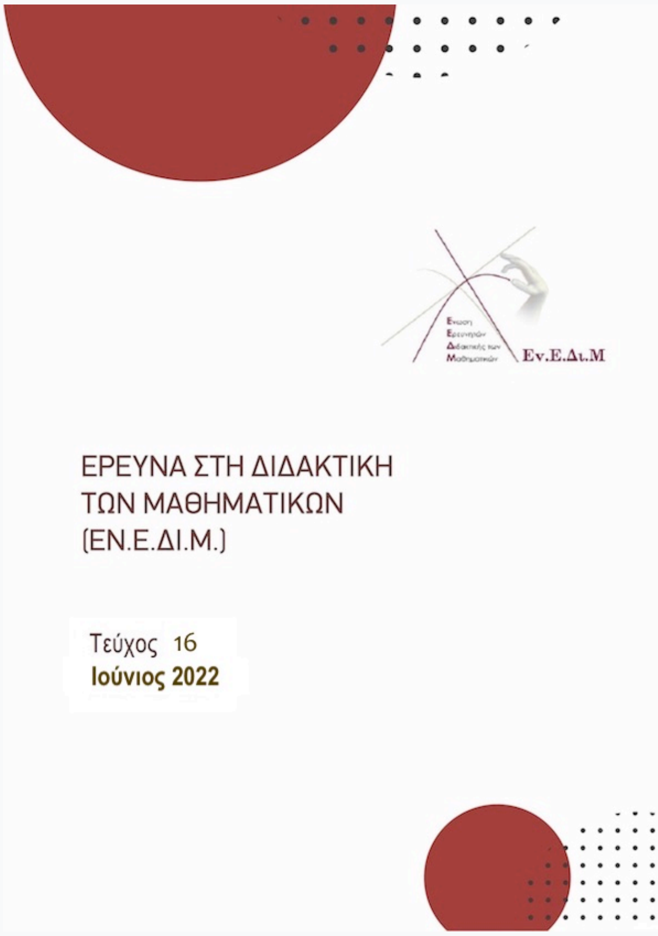
Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 16 (2022)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: ΜΙΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΟΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ.

Θεοδώρα Φώτιος Αυγέρη, Ξένια Βαμβακούση

http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/index

ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: ΜΙΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Θεοδώρα Αυγέρη & Ξένια Βαμβακούση

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, theoavg@hotmail.gr

Περίληψη: Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια εμπειρική μελέτη με στόχο τη διερεύνηση πτυχών της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Πραγματοποιήθηκαν ημι-δομημένες συνεντεύξεις με 15 εν ενεργεία εκπαιδευτικούς που κλήθηκαν να αξιολογήσουν απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε ερωτήματα σχετικά με την πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών, να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών, και να δώσουν ανατροφοδότηση. Τα ευρήματα της έρευνας αναδεικνύουν αδυναμίες όσον αφορά την Κοινή και την Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου, τη Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών και τη Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας.

Λέξεις κλειδιά: Ρητός αριθμός, αρχή του επομένου, πυκνότητα, Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία

Abstract: The present paper presents a qualitative study aimed at investigating aspects of secondary school teachers' Mathematical Knowledge for Teaching. Fifteen in service mathematics teachers were asked to evaluate hypothetical students' responses to tasks regarding the dense ordering of rational numbers, to explain the students' thinking, and to provide feedback. The findings indicate weaknesses with respect to Common as well as Specialized Content Knowledge, Knowledge of Content and Students, and Knowledge of Content and Teaching.

Keywords: rational number, the concept of the next rational number, density, mathematical knowledge for teaching.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τα βασικότερα σχολικά μαθήματα διεθνώς. Στη χώρα μας τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αναλαμβάνουν οι απόφοιτοι των Μαθηματικών Τμημάτων. Πρόκειται για μια κατηγορία εκπαιδευτικών που έχουν κατά τεκμήριο γνώσεις ανώτερων μαθηματικών. Ωστόσο, περισσότερες μαθησιακές εμπειρίες με τα πανεπιστημιακά μαθηματικά για τους εκπαιδευτικούς δε φαίνεται εν γένει να «μεταφράζεται» σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα για τους μαθητές (Zazkis & Leikin, 2010). Υπάρχουν διαφορετικές εξηγήσεις γιατί μπορεί να συμβαίνει αυτό. Έχει προταθεί ότι οι εκπαιδευτικοί με ανώτερες γνώσεις μαθηματικών μπορεί να μην αναγνωρίζουν συνάφειες μεταξύ των πανεπιστημιακών μαθηματικών και των σχολικών μαθηματικών και, επομένως, να μην μπορούν να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους (Ball & Bass, 2009). Μια άλλη εξήγηση είναι ότι η διδασκαλία των μαθηματικών απαιτεί γνώσεις και δεξιότητες που υπερβαίνουν τη μαθηματική γνώση, ακόμα και των ανώτερων μαθηματικών. Ο Schulman (1986) ήταν ο πρώτος που επιχείρησε μια συστηματική οριοθέτηση αυτής της διάκρισης, εισάγοντας τις κατηγορίες της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών εξειδίκευσαν και προσάρμοσαν τις κατηγορίες του Schulman για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Ball, Thames & Phelps, 2008; Depaepe, Verschaffel & Kelchtermans, 2013).

Στην παρούσα έρευνα υιοθετήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο των Ball και συνεργατών (2008) και μελετήσαμε πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία εν ενεργεία καθηγητών των μαθηματικών σχετικά με τη διάταξη των ρητών αριθμών και, ειδικότερα, την ιδιότητα της πυκνότητας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία

Οι Ball και συνεργάτες (Ball & Bass, 2009; Ball et all., 2008), παρόμοια με τον Schulman (1986), διάκριναν αρχικά τη Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία σε δύο αδρές κατηγορίες, στη γνώση του γνωστικού αντικειμένου και στη παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου. Η γνώση του γνωστικού αντικειμένου, υποδιαιρείται με τη σειρά της στην α) Κοινή Γνώση του Περιεχομένου (οι γνώσεις που χρησιμοποιούνται και σε άλλους τομείς εκτός της διδασκαλίας, όπως οι γνώσεις που απαιτούνται στην καθημερινή ζωή ή σε επαγγέλματα όπως των μηχανικών), β) Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου (οι γνώσεις που χρειάζονται αποκλειστικά για τη διδασκαλία των μαθηματικών, για παράδειγμα οι διαφορετικές καταστάσεις που μοντελοποιούνται από τη διαίρεση) και γ) Γνώση του Ορίζοντα του Περιεχομένου (η επίγνωση του τρόπου σύνδεσης των μαθηματικών θεμάτων κατά μήκος του προγράμματος σπουδών και με προχωρημένες μαθηματικές ιδέες, καθώς και η ικανότητα ανάδειξης των κεντρικών σημείων σε ένα μαθηματικό ζήτημα).

Αντίστοιχα, η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου υποδιαιρείται στη α) Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών (οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μπορούν να αναμένουν τις σκέψεις, αλλά και τις δυσκολίες των μαθητών), β) Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ο συνδυασμός της γνώσης για τη διδασκαλία και της μαθηματικής γνώσης, όπως η χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων για την εισαγωγή των μαθηματικών εννοιών ή η επιλογή κατάλληλων αναπαραστάσεων και η γνώση των πλεονεκτημάτων και των μειονεκτημάτων που ελλοχεύει στη χρήση τους) και γ) Γνώση του Περιεχομένου και του Προγράμματος Σπουδών.

Στην εργασία αυτή μας αφορούν πτυχές της Γνώσης του Περιεχομένου, της Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών, και της Γνώσης του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας. Για το τελευταίο, ειδικότερα, εστιάζουμε στη χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων από τους εκπαιδευτικούς. Η χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων θεωρείται σημαντική στη διδασκαλία (Zaslavsky, 2010, 2019), είναι μια πτυχή της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία και συνδέεται με την Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου, αλλά και με τη Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (Ball et al., 2008). Σημειώνουμε ότι στην εργασία αυτή με τον όρο «παραδείγματα» αναφερόμαστε σε καταστάσεις που μπορεί να θεωρηθούν ανάλογες μιας δεδομένης κατάστασης (Richland, Holyoak, & Stigler, 2004), οι οποίες μπορεί να περιλαμβάνουν αλλαγές στον τύπο της αναπαράστασης (π.χ. εικονικές, αν ο δεδομένος τύπος είναι συμβολικός), αλλαγή πλαισίων (π.χ., από αριθμητικό σε γεωμετρικό) και ρητές μαθηματικές αναλογίες (π.χ., «οι αριθμοί είναι σημεία στην αριθμογραμμή»). Η κατάλληλη επιλογή ή/και διδακτική διαχείριση παραδειγμάτων είναι μια μη τετριμμένη διαδικασία και παρόμοια για τα αντιπαραδείγματα. Πράγματι, η στοιχειώδης λειτουργία ενός αντιπαραδείγματος είναι η διάψευση ενός συγκεκριμένου ισχυρισμού. Απαιτείται κατάλληλη επιλογή ή/και διδακτική διαχείριση ενός αντιπαραδείγματος ώστε να γίνουν ορατοί οι λόγοι για τους οποίους ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος και να δημιουργηθούν προϋποθέσεις γενίκευσης, κάτι που φαίνεται να είναι απαιτητικό για τους εκπαιδευτικούς (Peled & Zaslavksy, 1997; Potari, Zachariades, & Zaslavksy, 2004; Giannakoulias, Mastorides, Potari, & Zachariades, 2010).

Οι ρητοί αριθμοί και η πυκνή τους διάταξη

Η έννοια του ρητού αριθμού είναι μία από τις πιο πολύπλοκες αλλά και πιο σημαντικές μαθηματικές έννοιες που τα παιδιά συναντούν από την πρωτοβάθμια κιόλας εκπαίδευση (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Δύο από τις μεγαλύτερες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές με τους ρητούς αριθμούς πηγάζουν από τις πολλαπλές συμβολικές τους αναπαραστάσεις, καθώς και από τις διαφορές τους σε σχέση με τους οικείους στους μαθητές φυσικούς αριθμούς (προκατάληψη φυσικού αριθμού) (Markovits & Sowder, 1991; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Και οι δύο αυτές δυσκολίες επηρεάζουν την κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών.

Στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών, ο ρητός αριθμός παρουσιάζεται ως ένας αριθμός που έχει τη μορφή α/β ή μπορεί να εκφραστεί με αυτήν την μορφή (όπου α, β ακέραιοι και β ≠ 0). Κατά συνέπεια, όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή α/β (ακέραιοι, πεπερασμένοι δεκαδικοί, περιοδικοί δεκαδικοί) είναι ρητοί. Ο ορισμός αυτός αφήνει το περιθώριο ο ίδιος ρητός να έχει πολλαπλές συμβολικές αναπαραστάσεις.

Μία από τις βασικές ιδιότητες του συνόλου των ρητών, που το διαφοροποιεί από το σύνολο των φυσικών αριθμών, είναι αυτή της πυκνής διάταξης. Ένα σύνολο θεωρείται πυκνά διατεταγμένο, όταν ανάμεσα από δύο διαφορετικά στοιχεία α, β του συνόλου υπάρχει πάντα ένα τρίτο στοιχείο γ τέτοιο ώστε α < γ < β. Η ιδιότητα της πυκνής διάταξης μπορεί να περιγραφεί με διαφορετικούς τρόπους, οι οποίοι ωστόσο είναι μαθηματικά ισοδύναμοι: α) μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαφορετικών ρητών υπάρχει πάντα ένας άλλος ρητός (απειρία των ενδιάμεσων), β) κανένας ρητός δεν έχει μοναδικό επόμενο αριθμό (μη ύπαρξη επόμενου) και γ) οι ρητοί αριθμοί είναι άπειρα διαιρέσιμοι (άπειρη διαιρεσιμότητα).

Αν και από την πρώτη βαθμίδα της εκπαίδευσης, οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους εργαλεία που, εν δυνάμει, μπορούν να οδηγήσουν στην ιδιότητα της πυκνότητας, η έννοια αυτή φαίνεται να δυσκολεύει όχι μόνο τους μαθητές όλων των βαθμίδων, αλλά και φοιτητές των μαθηματικών τμημάτων, ακόμη και τους εκπαιδευτικούς. (Giannakoulias, Souyoul & Zachariades, 2007; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Tirosh, Fischbein, Graeber & Wilson, 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010, 2012).

Αναφορικά με την απειρία των ενδιάμεσων, τα ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι οι μαθητές, ακόμη και πρωτοετείς φοιτητές μαθηματικών τμημάτων, συχνά υποστηρίζουν ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς συγκεκριμένης μορφής, υπάρχει είτε πεπερασμένο, είτε μηδενικό πλήθος ρητών, όπως συμβαίνει στο σύνολο των φυσικών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Giannakoulias et al., 2007). Επιπλέον, οι Vamvakoussi & Vosniadou (2010) βρήκαν ότι οι μαθητές επηρεάζονται από τη αναπαράσταση των αριθμών στα άκρα του διαστήματος (δεκαδική, κλασματική) για να διαμορφώνουν την άποψη τους για το πλήθος και την αναπαράσταση των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα διάστημα, ανάλογα με τη μορφή των άκρων του διαστήματος. Για παράδειγμα, σε ένα διάστημα με άκρα δεκαδικούς αν προτείνονται ενδιάμεσοι αριθμοί, συχνά θεωρείται ότι αυτοί δεν μπορεί να είναι κλασματικοί και αντίστροφα (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι, ακόμη και οι μαθητές οι οποίοι εκφράζουν το άπειρο πλήθος των αριθμών ενός διαστήματος, δεν σημαίνει ότι αντιλαμβάνονται την έννοια του απείρου. Πράγματι, πολλοί μαθητές μπορεί να εννοούν ένα πολύ μεγάλο πλήθος αριθμών (π.χ. «ένα δισεκατομμύριο», «όσο οι κόκκοι της άμμου στην έρημο») που, όμως, παραμένει πεπερασμένο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012).

Η δεύτερη πτυχή της πυκνής διάταξης, η μη ύπαρξη του επόμενου στους ρητούς, φαίνεται να είναι ιδιαίτερα απαιτητική, καθώς παραβιάζει μια θεμελιώδη αρχή που αφορά το σύνολο των φυσικών, την «αρχή του επομένου» (Cheung, Rubenson & Barner, 2017). Οι μαθητές διαφόρων βαθμίδων, επηρεασμένοι από το σύνολο των φυσικών, φαίνεται να θεωρούν ότι και στους ρητούς συνεχίζει να ισχύει η αρχή του επόμενου. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές αντιμετωπίζουν ερωτήματα σχετικά με τον επόμενο ενός ρητού αριθμού π.χ. του 2. Σύμφωνα με τα ευρήματα των Φωκά και Βαμβακούση (υπό δημοσίευση) με μαθητές της Β΄ Λυκείου, κάποιοι μαθητές θα προσδιόριζαν τον αμέσως επόμενο ως το 2,1. Άλλοι μαθητές θα αύξαναν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, αντιπροτείνοντας π.χ. το 2,001. Άλλοι μαθητές θα δήλωναν ότι ο αριθμός αυτός δεν προσδιορίζεται μεν με ακρίβεια, αλλά υπάρχει. Τέλος, κάποιοι μαθητές θα πρότειναν τον αριθμό 2,000…..1 ως τον επόμενο. Το τελευταίο σχετίζεται με μια ευρέως γνωστή και τεκμηριωμένη εννοιολογική δυσκολία στην κατανόηση των περιοδικών ρητών αριθμών: Ένα αριθμός όπως, για παράδειγμα, ο 0,999…. θεωρείται ότι πλησιάζει «πάρα πολύ κοντά» στο 1 (τόσο κοντά ώστε να μη «χωράει» άλλος αριθμός ανάμεσα), χωρίς όμως να το φτάνει. Έτσι, το 0,999…. και το 1 θεωρούνται (λανθασμένα) διαφορετικοί αριθμοί (Ζωιτσάκος, 2019). Η πεποίθηση ότι η αρχή του επόμενου διατηρείται στους ρητούς, είναι ιδιαίτερα ανθεκτική και συνεχίζει να εκδηλώνεται σε φοιτητές Μαθηματικών Τμημάτων (Giannakoulias et al., 2007), αλλά και σε ενεργεία εκπαιδευτικούς (Ζωιτσάκος, 2019).

Η παρούσα έρευνα είχε ως στόχο την εξέταση των διαφορετικών πτυχών της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία απόφοιτων μαθηματικών τμημάτων, που εργάζονται ως εκπαιδευτικοί, σχετικά με την πυκνότητα. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν: α) Υπάρχουν πτυχές των εννοιών της πυκνότητας που δεν έχουν κατανοήσει οι εκπαιδευτικοί, απόφοιτοι μαθηματικών τμημάτων; (Κοινή Γνώση Περιεχομένου), β) Είναι οι εκπαιδευτικοί σε θέση να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών; (Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών) και γ) Τι χαρακτηριστικά έχει η ανατροφοδότηση που δίνουν σε λανθασμένες απαντήσεις; (Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου, Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας). Ειδικότερα, για το (γ), η εστίαση ήταν στη χρήση αντιπαραδειγμάτων και παραδειγμάτων, με την έννοια των ανάλογων καταστάσεων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 15 εν ενεργεία καθηγητές μαθηματικών (10 γυναίκες, 5 άντρες), απασχολούμενοι στον ιδιωτικό τομέα, με εργασιακή εμπειρία από 1 έως 7 έτη, η πλειοψηφία των οποίων είτε ήταν στη διαδικασία απόκτησης, είτε είχε ήδη λάβει μεταπτυχιακό δίπλωμα σπουδών. Μια συμμετέχουσα είχε εξειδίκευση στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Ερευνητικό εργαλείο

Μεθοδολογικές προσεγγίσεις στη διερεύνηση της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία

Το ερευνητικό εργαλείο είχε 3 σύντομα σενάρια (Πίνακας 1) που αφορούσαν παρανοήσεις των μαθητών για τη πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών. Τα σενάρια είναι ένα μεθοδολογικό εργαλείο για τη διερεύνηση της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία. Περιγράφουν συμβάντα που, αν και υποθετικά. θα μπορούσαν να συμβούν στην πραγματικότητα. Με αυτό τον τρόπο εξοικονομούνται οι πόροι που απαιτούνται για τη συστηματική παρατήρηση της διδασκαλίας και αποφεύγεται η απόκλιση που προκύπτει από αυτό-αναφορικές απαντήσεις των εκπαιδευτικών (Biza, Nardi & Zachariades, 2007).

Τα σενάρια που χρησιμοποιήσαμε είχαν κοινή διάρθρωση. Στην αρχή παρουσιαζόταν το μαθηματικό ερώτημα που είχε τεθεί από τον καθηγητή στη σχολική τάξη. Ακολουθούσαν οι απαντήσεις ενός ή παραπάνω μαθητών, οι οποίες εξέφραζαν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης του ερωτήματος. Στη συνέχεια γίνονταν τα εξής ερωτήματα στους συμμετέχοντες: α) Υπάρχει κάποια απάντηση που θεωρείται σωστή; Αν ναι ποια; Αν όχι, ποια θα θεωρούσατε εσείς σωστή απάντηση; β) Πώς θεωρείτε ότι σκέφτηκε για να απαντήσει ο κάθε μαθητής; γ) Τι ανατροφοδότηση θα δίνατε εσείς αν βρισκόσασταν στη θέση του καθηγητή;

Το πρώτο σενάριο (Ε1) αφορούσε την απειρία των ενδιαμέσων. Οι απαντήσεις των μαθητών εκφράζουν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης για την πυκνή διάταξη (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Στα Ε1.1 και Ε1.2 εκφράζεται άμεσα η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, ενώ η απάντηση Ε1.3 αντιστοιχεί στην ερμηνεία της έκφρασης «άπειροι αριθμοί» ως «ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο, πλήθος αριθμών» (που, έμμεσα, σχετίζεται και με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού). Το δεύτερο έργο (Ε2) επίσης αφορά την απειρία των ενδιαμέσων (Ε2.1), με την εξήγηση του υποθετικού μαθητή (Ε2.2) να αντανακλά τη δυσκολία πολλών μαθητών να αντιληφθούν ότι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις μπορεί να αναφέρονται στο ίδιο μαθηματικό αντικείμενο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Τέλος, στο τρίτο έργο (Ε3) εξετάζεται η άρση της αρχής του επομένου, καθώς το ζητούμενο είναι, στην ουσία, αν μπορεί να προσδιοριστεί ο «αμέσως προηγούμενος» αριθμός του 1. Η απάντηση Β εκφράζει άμεσα την προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Στις άλλες δύο απαντήσεις, οι υποθετικοί μαθητές θεωρούν ότι ο αριθμός αυτός υπάρχει, είτε προσδιορίζοντάς τον ως έναν περιοδικό δεκαδικό (Γ), είτε όχι (Α).

Ε1,«Πλήθος ενδιάμεσων στο (1,1, 1,3)»	Σε μια σχολική τάξη Γ' Γυμνασίου, στο μάθημα των Μαθηματικών, ο καθηγητής θέτει στους μαθητές την παρακάτω ερώτηση: "Πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1,1 και του 1,3;" Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις: Μαθητής Α: ένας, ο 1,2 (Ε.1.1) Μαθητής Β: 19, οι 1,12, 1,13, 1,14, 1,15, ... 1,19, 1,20, 1,21, ... 1,29 (Ε.1.2) Μαθητής Γ: Είναι άπειροι... πάρα πολλοί.... πάνω από ένα δισεκατομμύριο. Μόνο ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους. (Ε.1.3)
Ε2, «Πλήθος ενδιάμεσων στο (3/8, 5/8)»	Ένας μαθητής Γ' Γυμνασίου ερωτάται πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8. Ο μαθητής απαντά: Μαθητής: "Υπάρχει ένας... Όχι, μια στιγμή! Κανένας δεν υπάρχει! (Ε2.1) Γιατί το 4/8 γίνεται 1/2 και αυτό δεν είναι ανάμεσα." (Ε2.2)
Ε3, «Μεγαλύτερη τιμή σε ανοιχτό διάστημα»	Στο μάθημα της Άλγεβρας της Α' Λυκείου, στο κεφάλαιο των ανισοτήτων δίνεται στην τάξη το παρακάτω ερώτημα: "Έστω x ϵ R, με x ϵ (0, 1). Μπορεί να προσδιοριστεί η μεγαλύτερη τιμή που θα πάρει η μεταβλητή x;" Στη συνέχεια παραθέτουμε τις απαντήσεις 3 μαθητών: Μαθητής Α: Μια τιμή πάρα πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι το 1. (Ε.3.1) Μαθητής Β:Το 0,999 (Ε.3.2) Μαθητής Γ: Το 0,9999...... (Ε.3.3)

Πίνακας 1: Τα σενάρια που επεξεργάστηκαν οι συμμετέχοντες

Διαδικασία

Οι εκπαιδευτικοί συμμετείχαν ατομικά σε ημι-δομημένες συνεντεύξεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν εξ αποστάσεως μέσω της εφαρμογής skype.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αξιολογήσεις απαντήσεων – Εξήγηση τρόπου σκέψης μαθητών

Οι αξιολογήσεις των απαντήσεων των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς εξετάστηκαν ως προς την ορθότητα τους (Ορθή/Λανθασμένη) και βαθμολογήθηκαν με 1 και 0, αντίστοιχα. Οι εξηγήσεις του τρόπου σκέψης του μαθητή εξετάστηκαν στις περιπτώσεις που η αξιολόγηση ήταν ορθή και κατηγοριοποιήθηκαν αδρά σε 3 κατηγορίες, οι οποίες δεν αφορούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του περιεχομένου της κάθε εξήγησης. Στην πρώτη κατηγορία («Καμία Εξήγηση/ Αδυναμία Εξήγησης») συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες είτε εξέφρασαν αδυναμία να εξηγήσουν, είτε απέφυγαν να δώσουν εξήγηση:

Σ2: Τι εννοεί.... 0,6 και το άλλο είναι και το 5/8 είναι... Τώρα εδώ πέρα χάθηκα - τι θέλει να πει ο ποιητής; Πώς το σκέφτηκε; Δεν ξέρω πώς το σκέφτηκε.

Στη δεύτερη κατηγορία («Μη ουσιαστική εξήγηση») συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί είτε έδιναν την απάντηση του μαθητή παραποιημένη, είτε απέδιδαν το λάθος σε γενικούς παράγοντες όπως το υπόβαθρο του μαθητή στα μαθηματικά («καλός»/ «κακός» μαθητής), στην επιπολαιότητα, ή στην ευφυία ή την έλλειψή της. Για παράδειγμα:

Σ1: Είναι μία επιπόλαιη απάντηση που μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Ο ένας είναι το υπόβαθρο γενικώς, ο δεύτερος είναι η επιπολαιότητα.

Τέλος, στην «Ουσιαστική Εξήγηση», συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί έλαβαν υπόψη τα χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου ερωτήματος που αντιμετώπιζαν οι υποθετικοί μαθητές και διατύπωσαν εύλογες εικασίες σχετικά με τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, στα υποέργα στα οποία οι υποθετικοί μαθητές αναφέρονταν σε πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων (Ε1.1, Ε1.2, Ε2.1) ή σε ένα μη περιοδικό ρητό ως τον επόμενο ενός αριθμού (Ε3.2), οι ουσιαστικές εξηγήσεις που ανιχνεύθηκαν απέδιδαν το λάθος στο γεγονός ότι οι μαθητές συλλογίζονται με βάση τους φυσικούς αριθμούς, είτε άμεσα είτε έμμεσα, περιορίζοντας τους αριθμούς που εξετάζουν σε συγκεκριμένα διακριτά σύνολα, όπως ο Σ5 στο επόμενο παράδειγμα:

Σ5: Ε ο πρώτος ρε παιδί μου σκέφτηκε ότι μετά το 1,1 πως να το πω, στο δεκαδικό μέρος, μετά το 1 υπάρχει το 2 και μετά το 3. Άρα ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3 υπάρχει το 1,2. Ο άλλος, πήρε δύο ψηφία στο δεκαδικό μέρος, δέκατα και εκατοστά.

Στις ουσιαστικές εξηγήσεις που δόθηκαν στο Ε2.2, οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στις δυσκολίες των μαθητών με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών:

Σ2: Την απλοποίηση την αντιλαμβάνονται, την κάνουν την απλοποίηση. Πολλές φορές δεν καταλαβαίνουν ότι το κλάσμα μπορεί να εκφραστεί και σαν ένας αριθμός ο οποίος δεν είναι κλάσμα. (…) Έχουν πρόβλημα με την αναπαράσταση. Από τη μία μορφή στην άλλη.

Όσον αφορά το Ε1.3, στις ουσιαστικές εξηγήσεις οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στη δυσκολία ερμηνείας του όρου «άπειροι»:

Σ15: Εεε.. ο τρίτος σκέφτηκε ότι υπάρχουν άπειροι, αλλά το γεγονός ότι λέει ότι είναι πάνω από ένα δισεκατομμύριο, βάζει κάποιο φράγμα, πάει να τους μετρήσει, δεν νομίζω ότι η έννοια του απείρου του είναι κατανοητή.

Τέλος, στις εξηγήσεις που θεωρήθηκαν ουσιαστικές στα Ε3.1, Ε3.3, συμπεριλήφθηκαν αυτές στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι οι όλοι οι μαθητές προσπαθούν να βρουν έναν αριθμό κοντινό στο 1, με τον περιορισμό του ανοιχτού διαστήματος, όπως στο παρακάτω παράδειγμα:

Σ9: Ε κοίτα, όλοι πάλι σαν τον Α σκέφτηκαν, να βρουν μία τιμή πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι το 1 γιατί είναι ανοιχτό, απλά ο Β και ο Γ πήγε να πει και ποιος είναι αυτός ο αριθμός. Τώρα το παιδί το Β μάλλον θα είπε θα βάλω μια τιμή, κοντά στο 1, μου φαίνεται το 0,999 και να σταμάτησε εκεί και του φαίνεται ότι αυτή είναι μια τιμή σχεδόν στο 1 και σταμάτησε εκεί, αυτό. Ενώ ο Γ είπε ότι.... θεώρησε ότι θα πλησιάσει τη μονάδα, προσθέτοντας άπειρα εννιάρια.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται στοιχεία για τις αξιολογήσεις των συμμετεχόντων σε όλα τα υποέργα καθώς και για την κατηγορία εξήγησης (Καμία Εξήγηση/ Αδυναμία Εξήγησης, Μη Ουσιαστική, Ουσιαστική) που δόθηκε στην περίπτωση που η αξιολόγηση ήταν ορθή, ανά συμμετέχοντα και ανά υποέργο. Η κατηγορία εξήγησης σημαίνεται με χρωματικό κωδικό (βλ. Σημείωση Πίνακα 2). Οι συμμετέχοντες είναι διατεταγμένοι σε φθίνουσα σειρά, με κριτήριο το πλήθος των σωστών αξιολογήσεων που έκαναν συνολικά.

Αξιοποιώντας τα στοιχεία του Πίνακα 2, προκύπτει ότι στο σύνολο των ζητούμενων αξιολογήσεων (15x8=120), οι 90 έγιναν ορθά (75%). Σε ατομικό επίπεδο, 4 εκπαιδευτικοί (Σ1, Σ10, Σ12, Σ15) αξιολόγησαν ορθά όλες τις απαντήσεις, ενώ ένας (Σ13) αξιολόγησε ορθά μόνο δύο. Τις περισσότερες λανθασμένες αξιολογήσεις συναντούμε στα υποέργα Ε3.1, Ε.3.3 και Ε1.3. Πιο συγκεκριμένα, στο Ε1 (*Πλήθος ενδιάμεσων στο (1,1, 1,3)*), όλοι οι εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν ορθά τα Ε1.1 και Ε1.2, αλλά μόνο 7 εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν σωστά και το Ε1.3, συμφωνώντας ότι είναι δυνατή η εύρεση των ενδιάμεσων αριθμών από έναν υπολογιστή. Για παράδειγμα:

Σ7: Συμφωνώ στο ότι ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους. Ένας ο οποίος θα έχει προγραμματιστεί από κάποιον μαθηματικό τέλος πάντων, και θα τρέξει έναν αλγόριθμο π.χ. για να τους βρει όλους.

	Έργα										
Εκπαι-δευτικοί	Ε1			Ε2		Ε3					
	Ε1.1	Ε1.2	Ε.1.3	Ε2.1	Ε2.2	Ε3.1	Ε3.2	Ε3.3	**Σύνολο ΟΑ**	**Σύνολο ΟΕ**	**Λόγος ΟΕ/ΟΑ**
Σ1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	5	0,63
Σ10	1	1	1	1	1	1	1	1	8	5	0,63
Σ15	1	1	1	1	1	1	1	1	8	6	0,63
Σ12	1	1	1	1	1	1	1	1	8	3	0,38
Σ8	1	1	1	1	1	0	1	1	7	5	0,71
Σ9	1	1	1	1	1	0	1	1	7	6	0,86
Σ14	1	1	1	1	1	0	1	1	7	2	0,29
Σ3	1	1	0	1	1	0	1	1	6	3	0,50
Σ7	1	1	0	1	1	1	1	0	6	2	0,33
Σ11	1	1	0	1	1	0	1	1	6	1	0,17
Σ5	1	1	1	1	1	0	1	0	6	2	0,33
Σ2	1	1	0	0	1	0	1	1	5	2	0,40
Σ6	1	1	0	1	1	0	1	0	5	4	0,80
Σ4	1	1	0	1	1	0	1	0	5	4	0,80
Σ13	1	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0
Σύνολο ΟΑ	15	15	8	13	14	5	14	10	93		
Σύνολο ΟΕ	9	4	4	13	4	2	9	4	49		

Σημείωση:

0: Λανθασμένη Αξιολόγηση 1: Ορθή Αξιολόγηση

Καμία εξήγηση Μη ουσιαστική εξήγηση Ουσιαστική εξήγηση

Σύνολο ΟΑ: Σύνολο Ορθών Αξιολογήσεων

Σύνολο ΟΕ: Σύνολο Ουσιαστικών Εξηγήσεων

Πίνακας 2: Αξιολογήσεις εκπαιδευτικών και εξήγηση του τρόπου σκέψης των μαθητών

Δύο εκπαιδευτικοί (Σ7, Σ13) αξιολόγησαν λανθασμένα στο Ε2 (*Πλήθος ενδιάμεσων στο (3/8-5/8)*), εκφράζοντας ρητά την αντίληψη ότι οι αναπαραστάσεις των αριθμών επηρεάζουν το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών:

Σ13: Αυτό που έχει απαντήσει για το 4/8 έχει μία λογική το ότι επειδή γίνεται απλοποίηση πάνω στον αριθμό δεν είναι ανάμεσα, αλλά επειδή ζητάει ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8 και επειδή μιλάμε για κλάσματα, ο μοναδικός που υπάρχει είναι το 4/8 και νομίζω ότι δεν υπάρχει λόγος να μιλήσουμε για απλοποίηση.

Στο Ε3 (*Μεγαλύτερη τιμή σε ανοιχτό* διάστημα) , 4 εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι και οι τρεις απαντήσεις των μαθητών ήταν λανθασμένες. Οι υπόλοιποι αξιολόγησαν λανθασμένα με μεγαλύτερη συχνότητα το Ε3.1, αλλά και το Ε3.3, ή και τα δύο ταυτόχρονα, με τον Σ13 να αξιολογεί λανθασμένα και τα 3 υποέργα. Τόσο στο Ε3.1, όσο και στο Ε3.3, οι λανθασμένες αξιολογήσεις οφείλονται στην παραδοχή ότι υπάρχει ο αμέσως προηγούμενος του 1, ο οποίος προσδιορίστηκε από τους εκπαιδευτικούς που αξιολόγησαν λανθασμένα το Ε3.3 ως ο 0,99…. :

Σ5: Έχουμε x ανήκει, είπαμε, στο ανοιχτό (0,1). Μεγαλύτερη τιμή θα είναι αυτή που θα είναι πλησιέστερα στο 1, χωρίς να παίρνει τη τιμή 1.

Σ6: Μία τιμή που είναι οσοδήποτε κοντά στο 1 και για ένα πολύ μικρό, οσοδήποτε μικρό ε όπως λέγαμε, εεε να απέχει από το 1. Αλλά παρ' όλα αυτά, με την ίδια λογική και του μαθητή Γ είναι σωστή γιατί το απειρίζει σχεδόν. Το παίρνει σαν το 0,9999…. και άπειρα. Οπότε και αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί σωστό.

Ο αριθμός 0,999…. σε άλλες περιπτώσεις απορρίφθηκε ως η μεγαλύτερη τιμή στο (0,1), καθώς φαίνεται ότι θεωρήθηκε μια διαδικασία η οποία δεν τελειώνει, ή δεν είναι γνωστό πότε τελειώνει. Αυτό οδήγησε στη δήλωση ότι η απάντηση του μαθητή στο Ε1.3 είναι λανθασμένη, αλλά για λάθος λόγους. Για παράδειγμα:

Σ3: το 0,9999…. που λέει ο μαθητής Γ δεν ξέρουμε πόσο κοντά θα είναι στο 1 και πού θα τελειώσουν τα εννιάρια του.

Μελετώντας τον Πίνακα 2 ως προς τον τρόπο εξήγησης της σκέψης των μαθητών, παρατηρούμε ότι στα υποέργα όπου οι υποθετικοί μαθητές αναφέρονται σε έναν ή κανέναν ενδιάμεσο αριθμό (Ε1.1, Ε2.1) ή αναφέρουν ένα δεκαδικό με τρία δεκαδικά ψηφία ως τον «προηγούμενο» του 1 (Ε3.2) δόθηκαν οι περισσότερες ουσιαστικές εξηγήσεις στις οποίες, όπως προαναφέρθηκε, το λάθος αποδόθηκε στο γεγονός ότι οι μαθητές συλλογίζονται με βάση τους φυσικούς αριθμούς. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι 5 από τους εκπαιδευτικούς που έδωσαν μια τέτοια ουσιαστική εξήγηση στο Ε1.1, δεν αναγνώρισαν ως παρόμοια την απάντηση στο Ε1.2, όπου αναφέρονται 19 ενδιάμεσοι αριθμοί. Για παράδειγμα:

Σ10: Η δεύτερη απάντηση είναι λίγο περίεργη. Ο Β είναι περίεργη φουλ η απάντησή του. Εεε.. (μικρή παύση). Ο Β πραγματικά δεν ξέρω, δεν ξέρω πως προέκυψε η απάντησή του, δε μπορώ να φανταστώ.

Στο σύνολο των εξηγήσεων που δόθηκαν για τις ορθές αξιολογήσεις (90), οι 49 ήταν ουσιαστικές (54,4%), εύρημα που δείχνει ότι η ορθή αξιολόγηση δεν εξασφαλίζει απαραίτητα και την ικανότητα ερμηνείας του τρόπου σκέψης των μαθητών. Ο ισχυρισμός αυτός ενισχύεται, παρατηρώντας το λόγο των ουσιαστικών εξηγήσεων προς τις ορθές αξιολογήσεις ανά συμμετέχοντα. Πράγματι, υπάρχουν εκπαιδευτικοί με μεγάλη συχνότητα ορθών αξιολογήσεων και, αναλογικά, λίγες ουσιαστικές εξηγήσεις (π.χ. Σ12, Σ14, Σ11) και το αντίθετο (π.χ. Σ6 και Σ4).

Ανατροφοδότηση

Για την ανάλυση της ανατροφοδότησης, ελήφθησαν υπόψη όλες οι ανατροφοδοτήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στις απαντήσεις των μαθητών που είχαν οι ίδιοι θεωρήσει ως λανθασμένες, ανεξάρτητα από την ορθότητα ή μη της αξιολόγησής τους. Σε κάποιες περιπτώσεις, δόθηκε μία κοινή ανατροφοδότηση για περισσότερα από ένα από τα υποέργα ενός διδακτικού σεναρίου. Συνολικά, 48 κείμενα ανατροφοδότησης εξετάστηκαν. Στα κείμενα των ανατροφοδοτήσεων αναζητήθηκαν αντιπαραδείγματα από τους συγγραφείς, αρχικά ξεχωριστά και στη συνέχεια μαζί, όπου συγκρίθηκαν τα ευρήματα και λύθηκαν οι (ελάχιστες) διαφορές με συζήτηση. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και για τις ανάλογες καταστάσεις. Στη συνέχεια, εφαρμόστηκε θεματική ανάλυση (Terry, Hayfield, Clarke & Braun, 2017), από την οποία προέκυψε μια ακόμα θεματική που αφορούσε τον τρόπο με τον οποίο περιγραφόταν η εμπλοκή των μαθητών. Και στις δύο περιπτώσεις, οι κατηγορίες εντός κάθε θεματικής διαμορφώθηκαν από κοινού, αναλύθηκαν τα μισά κείμενα ξεχωριστά, συζητήθηκαν προτεινόμενες αναθεωρήσεις και στη συνέχεια η πρώτη συγγραφέας ανέλυσε τα υπόλοιπα.

Χρήση αντιπαραδειγμάτων. Όλοι οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε παραδείγματα «ενδιάμεσων αριθμών» ως αντιπαράδειγμα στους ισχυρισμούς των υποθετικών μαθητών, σε ένα τουλάχιστον από τα έργα. Τέτοια παραδείγματα είτε αναφέρθηκαν ρητά (ως συγκεκριμένοι αριθμοί) ή περιγραφικά (π.χ. «δεκαδικοί με πολλά δεκαδικά ψηφία»), είτε υπονοήθηκαν με αναφορά στις απαντήσεις άλλων υποθετικών μαθητών ή με αναφορά σε μια τροποποιημένη μορφή του προβλήματος, στην οποία περισσότεροι ενδιάμεσοι αριθμοί θεωρούνται ορατοί στο μαθητή (π.χ. μετά τη μετατροπή δύο κλασμάτων σε ισοδύναμα με μεγαλύτερους όρους). Συνολικά, 30 περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν αντιπαραδείγματα εντοπίστηκαν στις ανατροφοδοτήσεις των εκπαιδευτικών. Οι περιπτώσεις αυτές εξετάστηκαν ως προς τον τρόπο χρήσης των αντιπαραδειγμάτων, ανάλογα με τις δυνατότητες γενίκευσης που αναδείχθηκαν από τους εκπαιδευτικούς και κατατάχτηκαν σε τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία [«Χωρίς γενίκευση», N=15 (50%)] εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες ο εκπαιδευτικός αναφέρθηκε σε ένα ή περισσότερα παραδείγματα ενδιάμεσων αριθμών με την πρόθεση να διαψεύσει τον ισχυρισμό ότι «δεν υπάρχουν άλλοι ενδιάμεσοι» αριθμοί», χωρίς περαιτέρω γενίκευση, όπως στα επόμενο παραδείγματα:

Σ9: Γιατί θα του έλεγα το 3/8 ουσιαστικά είναι το 3 δια 8 το οποίο μας κάνει μηδέν κόμμα τριάντα κάτι, και μετά το άλλο είναι το 5 δια 8 που μας κάνει 0,60 και ανάμεσα υπάρχουν αριθμοί. Θα το έδειχνα έτσι με δεκαδικούς.

Σ15: Θα τους ρωτούσα, ας πούμε, το 1,135 είναι ανάμεσα; Εκεί πιστεύω ότι όλοι οι μαθητές θα κοντοστέκονταν και θα έλεγαν α ναι, είναι ανάμεσα. Και θα έλεγα το 1,1355, ας πούμε, είναι ανάμεσα; Είναι ανάμεσα. Να φτάσουν έτσι στο άτοπο, να καταλάβουν ότι είναι λάθος το σκεπτικό τους.

Στη δεύτερη κατηγορία [«Ακατάλληλη γενίκευση», N=3 (10%)] εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες το συμπέρασμα δεν στηρίζεται από τα παραδείγματα και τη διαχείρισή τους και είτε προκύπτει από ένα «άλμα» γενίκευσης, είτε βασίζεται σε ένα μη έγκυρο συλλογισμό. Για παράδειγμα, ο Σ7 στο επόμενο απόσπασμα ξεκινάει με τη δήλωση ότι οι ενδιάμεσοι αριθμοί είναι άπειροι και δίνει μια αόριστη περιγραφή ενδιάμεσων αριθμών, από την οποία δεν προκύπτει κάποια μέθοδος από την οποία θα μπορούσε να εξαχθεί το συμπέρασμα:

Σ7: Θα τους έλεγα ότι είναι άπειροι οι αριθμοί ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3 ε και δεν μπορούμε να το προσδιορίσουμε πόσο είναι αυτό, ότι δεν σταματάει κάπου το άπειρο τέλος πάντων, ότι θα είναι αριθμοί με πάρα πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία που προσεγγίζουν το 1,3.

Από την άλλη μεριά, ο Σ13 στο επόμενο απόσπασμα στηρίζεται στον μη έγκυρο συλλογισμό ότι, από το γεγονός ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι άπειροι, προκύπτει ότι στα διαστήματα μεταξύ δύο αριθμών βρίσκονται άπειροι αριθμοί.

Σ13: Επειδή είναι πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών κι επειδή είναι άπειροι όλοι αυτοί οι αριθμοί, προφανώς ανάμεσα σε δύο αριθμούς δεν υπάρχει μόνο ένας δύο κτλ, υπάρχουν πάρα πολλοί, τους οποίους δεν είναι εύκολο να βρούμε. Συνήθως στην καθημερινότητα και στα μαθήματα χρησιμοποιούμε τους πιο εύκολους δηλαδή το 1,13 το 1,14 κτλ. Απλά υπάρχουν και άλλοι κρυμμένοι, οι οποίοι όμως δεν είναι τόσο εύχρηστοι.

Στην τρίτη κατηγορία [«Ατελής γενίκευση», N=6 (20%)] εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί συνόδεψαν τα παραδείγματα με αναφορές στις οποίες διαφαίνεται η δυνατότητα γενίκευσης, ωστόσο αυτή παρουσιάζεται ασαφώς. Για παράδειγμα, ο Σ8 στο παρακάτω απόσπασμα αναφέρεται στη δυνατότητα προσθήκης περισσότερων μηδενικών («όσα θες») χωρίς να διασαφηνίζει ποια είναι η διαδικασία που «δεν τελειώνει ποτέ» και πώς προκύπτουν οι «άπειροι αριθμοί». Με παρόμοιο σκεπτικό, ο Σ5 ξεκινάει με τη δυνατότητα προσθήκης «άπειρων μηδενικών», αλλά αναφέρεται σε δύο δεκαδικούς με μη προσδιορισμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, πιθανώς πεπερασμένου, θεωρώντας άμεσο το συμπέρασμα ότι το πλήθος των ενδιάμεσών τους αριθμών είναι άπειρο.

Σ8: Βρίσκονται άπειροι αριθμοί, αυτό θα τους έλεγα και θα τους εξηγούσα ένα παράδειγμα, πχ το 1,3 θα το έκανα 1,300 οπότε γιατί σταμάτησες στο 1,29, θα πήγαινες στο 1,299 ο δεύτερος θα μου πει ναι. Θα του πω βάλε όσο μηδενικά θες, άρα δεν τελειώνεις ποτέ.

Σ5: (Θα έλεγα) ότι, μετά το 1 στους δεκαδικούς, μπορείς να βάλεις όσα μηδενικά θες. Άπειρα. Οπότε με αυτό το σκεπτικό το 1,1 μπορεί να γραφεί σαν ένα κόμμα όσο θες και το 1,3 ακριβώς το ίδιο. Άρα ανάμεσά τους δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον ακριβή αριθμό, τον αριθμό που υπάρχει μεταξύ αυτών των δύο. Είναι άπειροι.

Τέλος, στην τέταρτη κατηγορία [«Με Γενίκευση», Ν=6 (20%)], εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί περιέγραψαν επαρκώς μια γενικεύσιμη διαδικασία, όπως στα επόμενα αποσπάσματα:

Σ10: Θα έμενα λίγο παραπάνω στις δύο πρώτες απαντήσεις αρχικά που λέει 1,2 και 1,12. Θα τους έλεγα: Το πρώτο στάδιο είναι να πούμε απλά το 1,2. Αλλά μετά όπως είπε και ο άλλος μαθητής, μπορούμε να πάρουμε και τη δεύτερη περίπτωση, να έχουμε 2 δεκαδικά ψηφία, 1,12 1,13 1,29. Θα τους έλεγα με την ίδια λογική, εφόσον την πρώτη φορά πήραμε ένα δεκαδικό και τη δεύτερη δύο δεκαδικά, γιατί να μη συνεχίσω να παίρνω τρία δεκαδικά; Και θα συνέχιζα ότι αυτό που σας λέω τώρα από 3 δεκαδικά μπορεί να πάει 4 δεκαδικά. Οπότε γενικά είναι μια διαδικασία που μπορούμε να τη συνεχίζουμε συνεχώς. Αφού αυτό μπορούμε να το κάνουμε για οποιονδήποτε αριθμό δεκαδικών, αρχίζουμε να καταλαβαίνουμε ότι είναι άπειροι αριθμοί.

Σ12: Θα τους έλεγα να διαλέξουν δύο οποιουσδήποτε αριθμούς θέλουν. Θα έπαιρνα, θα τους έλεγα ποια είναι η μέση; Θα πάρω τη μέση αυτού του ευθυγράμμου τμήματος. Άρα υπάρχει ένας σίγουρα. Μετά στη μέση θα διαλέξω το ένα από τα δύο και θα το πήγαινα έτσι. Μπορούμε να κάνουμε άπειρη μεγέθυνση και να βρίσκουμε άπειρους αριθμούς. (…) Και με τα κλάσματα το ίδιο θα έκανα, αν είχαμε μάθει να τοποθετούμε κλάσματα στην ευθεία.

Σημειώνεται ότι οι περιπτώσεις της κατηγορίας «Με Γενίκευση» προήλθαν από 3 εκπαιδευτικούς (Σ1, Σ10, Σ12). Οι Σ1 και ο Σ12 ήταν οι μόνοι εκπαιδευτικοί που εξέφρασαν σαφή πρόθεση να πραγματευθούν την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών όχι μόνο για τα δεδομένα, αλλά για οποιοδήποτε διάστημα.

Χρήση παραδειγμάτων. Σε παραδείγματα με την έννοια των ανάλογων καταστάσεων αναφέρθηκαν 7 εκπαιδευτικοί (Σ2, Σ3, Σ4, Σ11, Σ12, Σ13, Σ15) σε 11 περιπτώσεις , είτε μέσω αλλαγής στην αναπαράσταση, είτε μέσω αλλαγής πλαισίου, είτε σε μαθηματικές αναλογίες. Η επικρατούσα περίπτωση ήταν η αξιοποίηση του γεωμετρικού πλαισίου (συνολικά, 9 περιπτώσεις). Τρεις από τις περιπτώσεις αυτές (Σ3, Σ4, Σ15) αφορούσαν τη χρήση μοντέλων εμβαδού για την εξήγηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων, ενώ μία αφορούσε τη γεωμετρική αναπαράσταση ανοιχτού διαστήματος με «ανοιχτά κυκλάκια στα άκρα» (Σ14).

Στις υπόλοιπες 5 περιπτώσεις, 4 εκπαιδευτικοί (Σ3, Σ11, Σ12, Σ13) αξιοποίησαν το γεωμετρικό πλαίσιο και την αναλογία «οι αριθμοί είναι σημεία στην ευθεία», με τον Σ3 να χρησιμοποιεί επιπλέον και το πλαίσιο της μετατροπής μονάδων μήκους ως εισαγωγή:

Σ3: Πρώτα εξηγώ όταν θέλουμε τα μέτρα να τα μετατρέψουμε σε εκατοστά, σε δεκατόμετρα, σε χιλιοστά και σε τέτοια. Χωρίζω το κάθε διάστημα σε μικρά μικρά κομματάκια και τους λέω ότι μπορούμε να τα χωρίσουμε σε πολλά μικρά κομματάκια. Δηλαδή τα μέτρα, το 1 μέτρο ας πούμε, για να το εκφράσουμε σε χιλιοστά πρέπει να χωρίσω, αυτό το διάστημα σε χίλια ίσα μέρη.

Ενώ ο Σ3 και ο Σ15 αξιοποίησαν το νέο αυτό πλαίσιο επαρκώς (βλ. αντίστοιχα παραδείγματα της κατηγορίας «Με γενίκευση» στην υποενότητα «Χρήση αντιπαραδειγμάτων), ο Σ13 βάσισε σε αυτό έναν μη έγκυρο συλλογισμό (βλ. αντίστοιχο παράδειγμα της κατηγορίας «Ακατάλληλη Γενίκευση» στην υποενότητα «Χρήση αντιπαραδειγμάτων). Ο Σ11, από την άλλη μεριά, χρησιμοποίησε την 1-1 αντιστοιχία των αριθμών με τα σημεία της ευθείας για να εξηγήσει ότι ένας δεκαδικός με περισσότερα δεκαδικά ψηφία από αυτά που προτείνουν οι υποθετικοί μαθητές υπάρχει και στη συνέχεια φαίνεται να αντιμετωπίζει την ευθεία ως ένα φυσικό αντικείμενο, το οποίο υπόκειται σε περιορισμούς «χώρου».

Σ11: Αν παίρναμε έναν χάρακα, όχι χάρακα, μια ευθεία, τον άξονα των πραγματικών αριθμών(…) Μπορεί να τους έδινα έναν αριθμό που θα είναι ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3, που θα ήταν δηλαδή το ένα κόμμα χίλια διακόσια κάτι, και να τους έλεγα ότι δεν υπάρχει αυτός ο αριθμός; Πώς προέκυψε; Άρα κάπου υπάρχει μέσα στον άξονα των πραγματικών αριθμών στο διάστημα ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3. (…) Και δεν θα μπορούσαμε να τους βάλουμε όλους επάνω σε έναν άξονα. (…) Δηλαδή, αν θέλαμε να εξετάσουμε συγκεκριμένα ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3 θα βάζαμε κάποιους, αλλά και πάλι δεν θα μπορούσαμε να τους βάλουμε και όλους αυτούς, δηλαδή είναι και με βάση το χώρο που δεν έχουμε.

Σε 2 περιπτώσεις, οι εκπαιδευτικοί (Σ2, Σ15) μετέφεραν το πρόβλημα της ύπαρξης άπειρων ενδιάμεσων αριθμών στο πλαίσιο της χρηματικής αξίας, που στην πραγματικότητα περιορίζεται σε αριθμούς με μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία:

Σ2: Για παράδειγμα μπορείς να αγοράσεις πράγματα με πολλά, με πολύ περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Άρα θα τους έδειχνα κάποια υλικά παραδείγματος χάρη, τα οποία τα αγοράζεις, η αξία τους είναι με πολλά παραπάνω δεκαδικά ψηφία, για να τους δείξω ότι υπάρχουν πολλοί δεκαδικοί αριθμοί. Και αυτοί χάνουν αυτούς τους αριθμούς.

Τέλος, σημειώνουμε ότι όλοι οι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν την απειρία των φυσικών αριθμών ως ανάλογη περίπτωση για να εξηγήσουν τον όρο «άπειρο» («δεν τελειώνουν ποτέ», «πάντα μπορείς να βρεις κι άλλο», «συνεχίζουν και συνεχίζουν»):

Σ10: Και μετά απλά θα σχολίαζα το γεγονός ότι ακόμη και ένας υπολογιστής δε μπορεί να τους βρει όλους. Γιατί όταν λέμε άπειρο θα τους έλεγα ότι όταν εννοώ άπειρο, πράγματι όσο περίεργο και αν φαίνεται κάτι άπειρο, δηλαδή κάτι που δε μπορώ, και να άρχιζα από σήμερα να τους μετράω τους αριθμούς δε θα τελείωνα σε άπειρη, σε 100 ζωές, δε θα τελείωνα. Οπότε και ένα υπολογιστής να το έκανε αυτό, πάλι δε θα κέρδιζε κάτι παραπάνω.

Εμπλοκή των μαθητών. Όσον αφορά τη δεύτερη θεματική, που αφορά τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται η εμπλοκή του μαθητή στις περιγραφές των εκπαιδευτικών, δημιουργήσαμε τρεις αδρές κατηγορίες. Στην πρώτη («Καμία εμπλοκή») εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες δεν έγινε καμία αναφορά στο ρόλο του μαθητή κατά την ανατροφοδότηση. Σε αυτές, οι εκπαιδευτικοί φάνηκε να αναλαμβάνουν εξ ολοκλήρου την ευθύνη να παρουσιάσουν/εξηγήσουν ή/και να τεκμηριώσουν αυτή που θεωρούν ως σωστή απάντηση. Για παράδειγμα:

Σ13: Εεε... ότι επειδή είναι πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και ότι επειδή είναι άπειροι όλοι αυτοί οι αριθμοί, ότι προφανώς ανάμεσα σε δύο αριθμούς δεν υπάρχει μόνο ένας δύο κτλ, υπάρχουν πάρα πολλοί τους οποίους δεν είναι εύκολο να βρούμε, και ότι συνήθως στην καθημερινότητα και για αυτό που χρησιμοποιούμε εμείς κυρίως στα μαθήματα, χρησιμοποιούμε τους πιο εύκολους δηλαδή το 1,13 το 1,14 κτλ. Απλά υπάρχουν και άλλοι κρυμμένοι οι οποίοι όμως δεν είναι τόσο εύχρηστοι. Έτσι θα τους το εξηγούσα.

Στη δεύτερη κατηγορία («Υποτυπώδης Εμπλοκή») εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες αν και οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να εμπλέκουν τους μαθητές, ουσιαστικά προβαίνουν είτε σε κατευθυντικές ερωτήσεις (π.χ. "Δεν είναι το ίδιο πράγμα;"), είτε σε ερωτήσεις οι οποίες είναι τόσο γενικές, που είναι ανούσιες (π.χ. "Θα τον ρώταγαν αν καταλαβαίνει τι είναι ρητός"). Για παράδειγμα:

Σ11: Θα του έλεγα στην αρχή, για να το καταλάβει, ότι το 3/8 βγαίνει περίπου τόσο και το 5/8 βγαίνει περίπου τόσο. Και θα του έλεγα δεν είναι και ο αριθμός αυτός ανάμεσα σε αυτούς; Ή δεν είναι και αυτός, δεν είναι και το μηδέν κόμμα τέσσερα κάτι; Άρα δεν είναι ένας, είναι και το 4/8. Και μετά δεν έχεις, θα του έλεγα, ότι είτε 4/8 πούμε, είτε 1/2, είναι ισοδύναμα, απλώς έχει κάνει απλοποίηση και το έχεις κάνει ανάγωγο. Το ίδιο δεν βγαίνει;

Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί εμφανίστηκαν να αποδίδουν ένα πιο ουσιαστικό ρόλο στο συγκεκριμένο μαθητή (π.χ. ζητώντας του να εξηγήσει πώς σκέφτηκε) ή την τάξη (π.χ. αναφέροντας ότι ζητάνε τη γνώμη άλλων μαθητών, ή αναθέτοντας σε ομάδες μαθητών να επεξεργαστούν το πρόβλημα). Συμπεριελήφθησαν επίσης περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε ερωτήματα που απαιτούσαν κάποια επεξεργασία από τους μαθητές.

Σ1: Γενικά προτιμώ σε τέτοιες περιπτώσεις να ζητάω από τα παιδιά να εξηγήσουν, ποιο είναι το λάθος του άλλου. Ώστε να μπορέσουμε να φτάσουμε διαδοχικά στο ποιο είναι το σωστό.

Στο σύνολο των 48 κειμένων ανατροφοδότησης, επικρατούσα ήταν η κατηγορία «Καμία εμπλοκή» (N=31) σε ποσοστό 64,6% επί του συνόλου των ανατροφοδοτήσεων. Ακολούθησε η κατηγορία «Υποτυπώδης Εμπλοκή» (N=12) με ποσοστό 25%. Τέλος, την κατηγορία «Εμπλοκή Μαθητών» (N=5) τη συναντούμε σε ένα ποσοστό της τάξεως του 10,4%. Ωστόσο, οι ανατροφοδοτήσεις αυτής της κατηγορίας στις οποίες περιγράφεται μια ουσιαστικότερη εμπλοκή των μαθητών δόθηκαν από 2 μόνο εκπαιδευτικούς και συγκεκριμένα τους Σ1 και Σ6.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην εργασία αυτή εξετάσαμε πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία (Ball et al., 2008) εκπαιδευτικών της (ιδιωτικής) Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Χρησιμοποιήσαμε σύντομα σενάρια (Biza et al., 2007) με απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε ερωτήματα σχετικά με την πυκνή διάταξη των ρητών. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να αξιολογήσουν ως προς την ορθότητα τις απαντήσεις, να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών και να δώσουν ανατροφοδότηση στις απαντήσεις που θεώρησαν λανθασμένες.

Μέσω της αξιολόγησης των απαντήσεων των υποθετικών μαθητών διερευνήθηκαν πτυχές της Κοινής Γνώσης Περιεχομένου των συμμετεχόντων (Ball et al., 2008). Στο σύνολο των υποέργων, η ορθή αξιολόγηση ήταν η επικρατούσα κατηγορία απόκρισης. Ωστόσο, μια βαθύτερη εξέταση αναδεικνύει ελλείμματα στην Κοινή Γνώση Περιεχομένου. Πράγματι, μόνο τέσσερις εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν σωστά όλες τις υποθετικές απαντήσεις, ενώ υπήρξε και μία συμμετέχουσα που αξιολόγησε σωστά μόνο δύο από τις οκτώ. Όσον αφορά την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών, επτά από τους συμμετέχοντες αποδέχτηκαν ως σωστή την απάντηση ότι ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους. Αυτό το, εύρημα δείχνει ότι για τους μισούς περίπου από τους συμμετέχοντες, «άπειροι ενδιάμεσοι αριθμοί» σημαίνει «ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο πλήθος αριθμών», παρόμοια με μαθητές διαφόρων ηλικιών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Μη αναμενόμενο ήταν το εύρημα ότι δυο εκπαιδευτικοί εμφανίστηκαν να συγχέουν τους αριθμούς με τις αναπαραστάσεις τους (δεκαδική, κλασματική), παρόμοια με μαθητές διαφόρων ηλικιών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Τέλος, όσον αφορά τον «επόμενο αριθμό», μόνο τέσσερις εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι όλες οι υποθετικές απαντήσεις ήταν λανθασμένες. Οι υπόλοιποι φάνηκε να θεωρούν ότι ο αμέσως προηγούμενος του 1 υπάρχει, είτε προσδιορίζοντάς τον ως το 0,999…., είτε ως «έναν αριθμό πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι το 1», παρόμοια με μαθητές της δευτεροβάθμιας (Φωκάς & Βαμβακούση, υπό δημοσίευση), αλλά και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς που έχουν αντιμετωπίσει παρόμοια έργα (Ζωιτσάκος, 2019).

Μέσω της εξήγησης του τρόπου σκέψης των μαθητών από τους συμμετέχοντες διερευνήθηκε μια πτυχή της Γνώσης του Περιεχομένου και των Μαθητών (Ball et al., 2008). Σύμφωνα με τα ευρήματά μας, οι μισές απαντήσεις των μαθητών εξηγήθηκαν ουσιαστικά από τους εκπαιδευτικούς που τις είχαν αξιολογήσει σωστά, γεγονός που αναδεικνύει τη διαφοροποίηση ανάμεσα στην Κοινή Γνώση Περιεχομένου και τη Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών. Η διαφοροποίηση αυτή γίνεται πιο εμφανής εξετάζοντας τους συμμετέχοντες ως προς το πλήθος των ουσιαστικών εξηγήσεων που έδωσαν σε σχέση με τις ορθές τους αξιολογήσεις και διαπιστώνοντας ότι υπάρχουν συμμετέχοντες με μεγάλη συχνότητα ορθών αξιολογήσεων αλλά όχι ουσιαστικών εξηγήσεων. Σημειώνεται ότι οι περισσότερες ουσιαστικές εξηγήσεις βασίζονταν στην αναγνώριση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού και δόθηκαν στα υποέργα που παρέπεμπαν ευθέως στο φαινόμενο αυτό. Ωστόσο, πέντε εκπαιδευτικοί που αναγνώρισαν το φαινόμενο αυτό στο Ε1.1, δεν το αναγνώρισαν στον Ε1.2.

Από την εξέταση των ανατροφοδοτήσεων προκύπτουν επίσης ευρήματα που αφορούν στην Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου και διατρέχουν και τη Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (Ball et al., 2008). Η πρώτη θεματική που εξετάστηκε ήταν προαποφασισμένη και αφορούσε τη χρήση αντιπαραδειγμάτων καθώς και παραδειγμάτων, με την έννοια των ανάλογων καταστάσεων (Richland et al., 2004).Τα έργα που χρησιμοποιήσαμε προσφέρονταν για τη χρήση παραδειγμάτων «ενδιάμεσων αριθμών» ως αντιπαράδειγμα στους ισχυρισμούς των μαθητών και, πράγματι, όλοι οι εκπαιδευτικοί τα χρησιμοποίησαν. Στις μισές περιπτώσεις, το αντιπαράδειγμα χρησιμοποιήθηκε για τη διάψευση ενός συγκεκριμένου ισχυρισμού, που είναι η πιο στοιχειώδης λειτουργία του αντιπαραδείγματος (Peled & Zaslavsky, 1997). Μόνο τρεις εκπαιδευτικοί διαχειρίστηκαν το αντιπαράδειγμα με τέτοιο τρόπο, ώστε να προκύψουν προϋποθέσεις γενίκευσης στην απειρία των ενδιάμεσων αριθμών, με δύο από αυτούς να εκφράζουν ρητά την πρόθεση να γενικεύσουν και πέραν του δεδομένου διαστήματος.

Όσον αφορά τη χρήση παραδειγμάτων, με την έννοια της ανάλογης κατάστασης (Richland et al., 2004), στην πλειοψηφία των ανατροφοδοτήσεων, οι εκπαιδευτικοί παρέμειναν στο δεδομένο αριθμητικό πλαίσιο, οι περισσότεροι συστηματικά. Ανάλογες καταστάσεις εκτός αριθμητικού πλαισίου χρησιμοποιήθηκαν από επτά εκπαιδευτικούς. Έχει ενδιαφέρον ότι μόνο τρεις εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι θα χρησιμοποιούσαν μια εικονική αναπαράσταση (μοντέλο του εμβαδού) για να εξηγήσουν τη ισοδυναμία των κλασμάτων. Ενδεχομένως, αναπαραστάσεις τέτοιου είδους να μη θεωρούνται αξιόλογες για παιδιά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Δυο εκπαιδευτικοί θεώρησαν τη χρηματική αξία ως κατάλληλο πλαίσιο για να εξηγήσουν την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών, ενδεχομένως με την πρόθεση να αξιοποιήσουν την καθημερινή εμπειρία των μαθητών που, όμως, στην περίπτωση αυτή, περιορίζεται σε δεκαδικούς με δύο μόνο δεκαδικά ψηφία. Το γεωμετρικό πλαίσιο, μαζί με την αναλογία «οι αριθμοί είναι σημεία στην ευθεία», το οποίο προτείνεται ως πρόσφορο για την πραγμάτευση της πυκνής διάταξης (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012), χρησιμοποιήθηκε από τέσσερις εκπαιδευτικούς και συνόδεψε δύο από τις πιο εύστοχες ανατροφοδοτήσεις.

Τέλος, το «εν δυνάμει άπειρο» των φυσικών αριθμών (π.χ. «δεν τελειώνουν ποτέ») χρησιμοποιήθηκε από όλους τους εκπαιδευτικούς για να εξηγηθεί ο όρος «άπειροι». Παρά το γεγονός ότι το «εν δυνάμει άπειρο» δεν οδηγεί απαραίτητα στην πυκνή διάταξη και, ειδικότερα, στη άρση της «αρχής του επόμενου» (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012), η επιλογή αυτή ήταν συμβατή με τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν οι εκπαιδευτικοί (π.χ., επαναλαμβανόμενη προσθήκη δεκαδικών ψηφίων), αλλά και με τον πρωταρχικό τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν την έννοια του απείρου οι μαθητές.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι και σε άλλες περιπτώσεις εντοπίστηκαν σφάλματα, ή εννοιολογικές δυσκολίες κατά την ανατροφοδότηση, αναδεικνύοντας αδυναμίες στην Κοινή Γνώση Περιεχομένου. Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός ότι δεν μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι ενδιάμεσοι αριθμοί πάνω στην ευθεία λόγω έλλειψης «χώρου», δείχνει μια σύγχυση ανάμεσα στο ιδεατό μαθηματικό αντικείμενο και τη φυσική του αναπαράσταση (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Αδυναμίες εντοπίστηκαν και ως προ το συλλογισμό, όπως στο παράδειγμα του μη έγκυρου συλλογισμού «οι πραγματικοί αριθμοί είναι άπειροι, άρα στα διαστήματα των πραγματικών αριθμών υπάρχουν άπειροι αριθμοί», αλλά και στο φαινόμενο των μη τεκμηριωμένων «αλμάτων γενίκευσης» που παρατηρήθηκαν, ένα φαινόμενο που εγείρει λόγους ανησυχίας (Giannakoulias et al., 2007). Σημειώνουμε ότι τα ζητήματα αυτά, καθώς και η χρήση αντιπαραδειγμάτων, αφορούν το γενικότερο θέμα της ανάπτυξης επιχειρηματολογίας. Μελλοντικά, μια δεύτερη ματιά στα δεδομένα της έρευνας, με θεωρητικά και μεθοδολογικά εργαλεία από αυτή την ερευνητική περιοχή (για μια επισκόπηση, βλ. Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016), ενδεχομένως θα αναδείκνυε περισσότερα χαρακτηριστικά της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία, όσον αφορά την επιχειρηματολογία από την πλευρά των εκπαιδευτικών.

Η δεύτερη θεματική που αναδύθηκε από την ανάλυση των κειμένων της ανατροφοδότησης αφορά τον τρόπο με τον οποίο αναφέρθηκαν οι εκπαιδευτικοί στη συμμετοχή των μαθητών και εμπίπτει στην περιοχή της Γνώσης του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας, καθώς αφορά την κατανόηση «παιδαγωγικών θεμάτων τα οποία επηρεάζουν την κατανόηση των μαθητών» (Ball et al., 2008: 401). Με την εξαίρεση δύο εκπαιδευτικών που εξέφρασαν την πρόθεση να εμπλέξουν το συγκεκριμένο μαθητή (π.χ. ζητώντας να εξηγήσει τον τρόπο που σκέφτηκε) ή και άλλους μαθητές (π.χ. ζητώντας την άποψή τους), οι αναφορές στο μαθητή ήταν ανύπαρκτες, ή περιέγραφαν μια τετριμμένη συμμετοχή, κυρίως μέσω προσχηματικών ερωτήσεων. Το συγκεκριμένο εύρημα, παρόλο που δίνει κάποιες ενδείξεις για την πρόθεση διαχείρισης παρόμοιων συμβάντων στην τάξη, θα πρέπει να αντιμετωπιστεί με επιφύλαξη, καθώς δεν αποκλείεται σε συνθήκες πραγματικής τάξης οι εκπαιδευτικοί να επεδίωκαν μια πιο ουσιαστική αλληλεπίδραση με τους μαθητές. Το ζήτημα αυτό αναδεικνύει έναν περιορισμό της έρευνας και της μεθοδολογίας που υιοθέτησε και υποδεικνύει την ανάγκη να εξεταστεί το ζήτημα της ανατροφοδότησης και στο πλαίσιο της τάξης, λαμβάνοντας υπόψη τις αλληλεπιδράσεις που αναπτύσσονται σε αυτή τη συνθήκη.

Συνοψίζοντας, η συγκεκριμένη έρευνα δίνει ενδείξεις για ελλείμματα σε διάφορες κατηγορίες της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, όπως τις εξειδικεύουν για τα μαθηματικά οι Ball και συνεργάτες (2008), σε απόφοιτους Μαθηματικών Τμημάτων που εργάζονται ως εκπαιδευτικοί. Δεδομένου του μαθηματικού υποβάθρου του συγκεκριμένου δείγματος, το έλλειμμα όσον αφορά την πυκνή διάταξη των ρητών, ειδικότερα για την «απειρία των ενδιάμεσων αριθμών» που θεωρείται η πιο ευπρόσιτη πτυχή της (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012) είναι μη αναμενόμενο και, όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, δεν αναφέρεται στη βιβλιογραφία. Επιπλέον, αναδύθηκαν κατανοήσεις για αριθμητικές και γεωμετρικές έννοιες που δεν αφορούν αποκλειστικά την πυκνή διάταξη και ενδεχομένως ενισχύουν ή και προκαλούν παρόμοιες παρανοήσεις στους μαθητές. Το εύρημα ότι η Κοινή Γνώση Περιεχομένου δε σχετίζεται απαραίτητα με άλλες πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία δεν είναι, ασφαλώς, καινοφανές και προβλέπεται από το θεωρητικό πλαίσιο που υιοθετήσαμε. Η έρευνα συνεισφέρει αναδεικνύοντας μια ποικιλία πτυχών της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου στο συγκεκριμένο πλαίσιο της πυκνής διάταξης, οι οποίες μπορούν να διερευνηθούν βαθύτερα ή/και με μεγαλύτερο δείγμα στο ίδιο πλαίσιο, ή να αναζητηθούν και να τεκμηριωθούν σε διαφορετικό πλαίσιο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009, March). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures.* Keynote address at the *43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik*, Germany.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., &Silver, E.A. (1983). Rational number concepts. *In R. Lesh and M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (pp. 91-125)*. New York: Academic Press.Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 301-309.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4), 301-309.

Cheung, P., Rubenson, M., & Barner, D. (2017). To infinity and beyond: Children generalize the successor function to all possible numbers years after learning to count. *Cognitive Psychology, 92*, 22-36.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education, 34*, 12-25.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* ERME, Department of Education, University of Cyprus, Cyprus, (pp. 416–425).

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(3), 160-168.

Markovitz, Z., & Sowder, J. (1991). Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13(1)*, 3–11.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In: M. Limon, & L. Mason (Eds), *Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice* (pp. 233–258). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counterexamples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in Mathematics*, 19(3), 49- 61.

Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O, (2004). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 281-290). Lyon, France: Institut national de recherche pédagogique.

Richland, L. E., Holyoak, K. J., & Stigler, J. W. (2004). Analogy use in eighth-grade mathematics classrooms. *Cognition and Instruction*, *22*(1), 37-60.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2*), 4-14.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G.C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotterdam, The Netherlands: Brill Sense.

Terry, G.; Hayfield, N., Clarke, V. & Braun, C. (2017). Thematic analysis. In C. Willig & W. Stainton Rogers (eds) *The Sage Handbook of Qualitative Research in Psychology (pp. 17–37)*, 2nd ed., London: Sage

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers Retrieved June 11, 2004, from http://jwilson.coe.uga.edu/texts.folder/tirosh/pros.el.tchrs.html

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28*(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(4), 265-284.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 263-281.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. *In Instructional Explanations in the Disciplines (pp. 107-128).* Springer, Boston, MA.

Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 245-255.

Ζωιτσάκος, Σ. (2019). *Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των ανώτερων μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση* (Διδακτορική διατριβή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Ανακτήθηκε από: https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/46255

Φωκάς, Δ., & Βαμβακούση (υπό δημοσίευση). Η κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών από μαθητές Β΄ Λυκείου: Ένα διδακτικό πείραμα. *Ψυχολογία.*