

Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

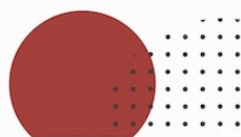
Αρ. 16 (2022)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Τεύχος 16
Ιούνιος 2022



ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δέσποινα Δεσλή (Despina Desli), Ειρήνη Τριανταφύλλου (IRINI TRIANTAFILLOU)

Copyright © 2022, Δέσποινα (Despina) Δεσλή (Desli), Ειρήνη Τριανταφύλλου



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Βιβλιογραφική αναφορά:

Δεσλή (Despina Desli) Δ., & Τριανταφύλλου (IRINI TRIANTAFILLOU) Ε. (2022). ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ . *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (16), 5–25. ανακτήθηκε από <https://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/article/view/29626>

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δέσποινα Δεσλή και Ειρήνη Τριανταφύλλου

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης,
ddesli@eled.auth.gr

Περίληψη: Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει την ικανότητα παιδιών και ενηλίκων να πραγματοποιούν εκτιμήσεις με ρητούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκαν δύο έργα, τα οποία παρουσιάστηκαν σε 46 παιδιά Στ' τάξης και 42 ενήλικες, και αφορούσαν: α) την εκτίμηση της θέσης ρητών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή (Number to Position Task) και β) την εκτίμηση αριθμητικού μεγέθους ρητού αριθμού σε συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή (Position to Number Task). Αν και οι επιδόσεις των δύο ηλικιακών ομάδων διαφοροποιήθηκαν σημαντικά, με τους ενήλικες να υπερτερούν (84%) σε σχέση με τα παιδιά (55%), η επιτυχία των παιδιών δεν διαφοροποιήθηκε από την παρουσία ενδιάμεσων σημείων αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή. Ωστόσο, το μέγεθος των αριθμών (αριθμοί μικρότεροι ή μεγαλύτεροι από την μονάδα), το είδος των ρητών αριθμών (κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί) και το είδος του έργου έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην πραγματοποίηση των εκτιμήσεων και για τις δύο ηλικιακές ομάδες.

Λέξεις κλειδιά: εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή, κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί, σημεία αναφοράς

Abstract: The aim of the present study is to examine the ability of children and adults to estimate rational numbers on the number line. For this purpose, two numberline tasks were designed and presented to 46 Year 6 children and 42 adults asking them to: a) estimate the position of rational numbers on the number line (Number to Position Task) and b) estimate the numerical value of a rational number shown as a mark on the number line (Position to Number Task). Although success rates differed significantly between the two age groups, with the adults performing better (84%) than the Year 6 children (55%), younger participants' accuracy of estimates was not influenced by the presence of reference points on the number line. Instead, number size (numbers less or more than one), type of rational numbers (fractions and decimal numbers) and type of task (NP, PN) played a key role in participants' numberline estimations.

Keywords: numberline estimation, fractions, decimal numbers, reference points

Εισαγωγή

Η εκτίμηση σε αριθμογραμμή (number line estimation) αποτελεί μέρος της εκτίμησης πλήθους (Δεσλή, 2021), αφορά στη χωρική αναπαράσταση ενός αριθμητικού μεγέθους και θεωρείται πως συμβάλλει στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού στα παιδιά (Dehaene, 1997). Περιλαμβάνει είτε την εκτίμηση της θέσης ενός αριθμού πάνω στον χώρο μιας αριθμογραμμής (π.χ., «Πού περίπου βρίσκεται ο αριθμός 78;») είτε την εκτίμηση του αριθμού

που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη θέση του χώρου μιας αριθμογραμμής (π.χ., «Ποιος αριθμός περίπου βρίσκεται εδώ;», όταν καταδεικνύεται μια συγκεκριμένη θέση πάνω σε αριθμογραμμή).

Αν και η ανάγκη για εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή πολύ σπάνια συναντάται σε καταστάσεις καθημερινής ζωής, ίσως και ποτέ, το ενδιαφέρον των ερευνητών για την ικανότητα που απαιτείται στα έργα εκτίμησης αριθμογραμμής είναι μεγάλο. Όπως επισημαίνει η Δεσλή (2021), δύο είναι οι βασικοί λόγοι για το ενδιαφέρον αυτό. Πρώτον, εξετάζοντας τις ερμηνείες των παιδιών για τους αριθμούς σε θέσεις πάνω στην αριθμογραμμή μέσα από συγκρίσεις ανάμεσα στην πραγματική θέση του αριθμού και την εκτιμώμενη θέση του αριθμού στην αριθμογραμμή, οι ερευνητές προσλαμβάνουν σημαντικές πληροφορίες αναφορικά με τις αναπαραστάσεις των παιδιών για τα αριθμητικά μεγέθη και μπορούν έτσι να εντοπίσουν αναπτυξιακές αλλαγές που λαμβάνουν χώρα. Άλλωστε η κατανόηση της έννοιας του αριθμού συνδέεται με την κατανόηση ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν μεγέθη που μπορούν να διαταχθούν και να εντοπιστεί η θέση τους πάνω σε αριθμογραμμή (Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Δεύτερον, η ικανότητα για πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή φαίνεται να συσχετίζεται θετικά με τις μαθηματικές ικανότητες. Η σχέση αυτή μάλιστα είναι ισχυρή και καλύπτει μεγάλο εύρος πολύπλοκων και σύνθετων μαθηματικών περιοχών που ξεπερνούν συχνά τις έννοιες που σχετίζονται αποκλειστικά με τον αριθμό. Τουλάχιστον αυτό αναδεικνύουν αποτελέσματα ερευνών, σύμφωνα με τα οποία τόσο η ακρίβεια όσο και ο βαθμός γραμμικότητας των εκτιμήσεων που πραγματοποιούν τα παιδιά πάνω σε αριθμογραμμή βρέθηκαν να συσχετίζονται και να προβλέπουν τη μαθηματική τους ικανότητα (για μετα-ανάλυση σχετικών ερευνών, βλ. Schneider, Merz, Stricker, De Smedt, Torbeyns, Verschaffel, & Luwel, 2018). Η ικανότητα αναπαράστασης ποσοτήτων σε αριθμογραμμή φαίνεται επίσης να ευνοεί τη σύνδεση της αναπαράστασης του μεγέθους ενός αριθμού με τη συμβολική μορφή του (Thompson, & Opfer, 2010) αλλά και τη σύγκριση των αριθμητικών μεγεθών (Schneider, Grabner, & Paetsch, 2009). Τα παραπάνω υποδηλώνουν ότι τα παιδιά με πιο ώριμες και ακριβείς αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών είναι εκείνα που εμφανίζουν υψηλότερες βαθμολογίες τόσο σε έργα που εξετάζουν τις επιδόσεις γενικά στα μαθηματικά όσο και σε έργα που σχετίζονται πιο συγκεκριμένα με τους αριθμούς, τις πράξεις και τα χαρακτηριστικά των αριθμών.

Στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά, ο ρόλος της αριθμογραμμής αναδεικνύεται και η χρήση της ενθαρρύνεται, κυρίως γιατί η αριθμογραμμή ως μοντέλο αναπαράστασης προσφέρει τη δυνατότητα οπτικοποίησης των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, των αριθμητικών πράξεων και της αξιακής θέσης των αριθμών. Για παράδειγμα, μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση ότι οι ακέραιοι αριθμοί αντιπροσωπεύουν αριθμητικά μεγέθη τα οποία διατάσσονται σε σειρά (τοποθετημένα μεγεθυντικά από τα αριστερά προς τα δεξιά) και η αριθμητική τους ανάπτυξη αποτυπώνεται στις συγκεκριμένες θέσεις που έχουν χωρικά πάνω στην αριθμογραμμή (Siegler et al., 2011. Link, Nuerk & Moeller, 2014). Στην Ελλάδα, η αριθμογραμμή εμφανίζεται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ιδιαίτερα στις πρώτες τάξεις. Όπως επισημαίνει η Σκουμπουρδή (2008), αν και

συχνά παρουσιάζονται οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της αριθμογραμμής και επιτελούνται ποικίλες λειτουργίες (π.χ., βοηθητική, αναφοράς, κλπ.), οι οποίες ενθαρρύνουν την ανάπτυξη και χρήση στρατηγικών για διαφορετικές μαθηματικές διαδικασίες, η ένταξη και η αξιοποίηση της αριθμογραμμής δεν γίνεται με συστηματικό και εξελικτικό τρόπο.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στις αναπαραστάσεις για τους αριθμούς, και συγκεκριμένα για τους ρητούς αριθμούς, όπως προκύπτουν από τις εκτιμήσεις των αριθμητικών μεγεθών που τα άτομα πραγματοποιούν όταν αναγνωρίζουν τη θέση των αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή.

Θεωρητικό πλαίσιο

Αναπαραστάσεις αριθμητικών μεγεθών στην αριθμογραμμή

Στη βιβλιογραφία, τρεις είναι οι κύριες τάσεις αναφορικά με την ερμηνεία των αναπαραστάσεων που έχουν τα παιδιά για τα αριθμητικά μεγέθη, όπως αναδεικνύονται μέσα από τα έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή. Η μία τάση, που προτείνεται από τον Siegler και τους συνεργάτες του (π.χ., Siegler, & Booth, 2004; Siegler, & Opfer, 2003; Thompson, & Opfer, 2010), υποστηρίζει ότι τα παιδιά αρχικά εκτιμούν τους αριθμούς με έναν λιγότερο ακριβή τρόπο που παραπέμπει σε λογαριθμικές αναπαραστάσεις της αριθμητικής αξίας και σταδιακά με την ηλικία και τις εμπειρίες αναπτύσσουν και ακολουθούν περισσότερο γραμμικές αναπαραστάσεις που οδηγούν σε πιο ακριβείς εκτιμήσεις. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, τα μικρά παιδιά μεγιστοποιούν την απόσταση των αριθμών στα χαμηλά άκρα της αριθμογραμμής (όπου η αριθμητική αξία είναι μικρή) και ελαχιστοποιούν την απόσταση των αριθμών στα μεσαία και υψηλά άκρα της αριθμογραμμής (όπου η αριθμητική αξία είναι μεγαλύτερη). Καθώς μεγαλώνουν, αναπτύσσουν γραμμική αναπαράσταση για τους αριθμούς και βασίζουν τις εκτιμήσεις τους σε μία αριθμητική γραμμή με ίσες αποστάσεις μεταξύ των αριθμητικών μεγεθών. Για παράδειγμα, αν και η απόσταση μεταξύ της εκτίμησης για τη θέση του 5 και τη θέση του 10 πάνω στην αριθμογραμμή θα πρέπει να είναι περίπου ίδια με την απόσταση μεταξύ της εκτίμησης των θέσεων για τις τιμές 65 και 70, τα μικρά παιδιά τείνουν να πραγματοποιούν εκτιμήσεις για τους μικρούς αριθμούς οι οποίες απέχουν αρκετά μεταξύ τους και οι διαφορές μεταξύ τους είναι εμφανείς, ενώ οι εκτιμήσεις τους για τους μεγαλύτερους αριθμούς απέχουν λιγότερο μεταξύ τους και οι διαφορές τους δεν διακρίνονται εύκολα. Έτσι, όταν υιοθετείται η λογαριθμική αναπαράσταση των αριθμών, η απόσταση μεταξύ των εκτιμώμενων θέσεων για τους αριθμούς 5 και 10 πάνω στην αριθμογραμμή είναι μεγαλύτερη από την απόσταση μεταξύ των εκτιμώμενων θέσεων για τους αριθμούς 65 και 70.

Η δεύτερη τάση εντοπίζεται από ερευνητές (π.χ., Barth, & Paladino, 2011; Slusser, Santiago, & Barth, 2013) που θεωρούν πως οι αλλαγές που παρατηρούνται στις εκτιμήσεις των παιδιών και των ενηλίκων πιθανότατα οφείλονται στη βελτίωση των ικανοτήτων αναλογικού συλλογισμού και τη χρήση στρατηγικών που στηρίζονται στον αναλογικό συλλογισμό. Οι

Barth και Paladino (2011), για παράδειγμα, υποστηρίζουν ότι, όταν τα παιδιά εκτιμούν τη θέση αριθμητικών μεγεθών σε μία αριθμητική γραμμή, οι εκτιμήσεις τους βασίζονται στη σχέση ανάμεσα στο μέγεθος ενός μέρους της αριθμογραμμής και το μέγεθος ολόκληρης της αριθμογραμμής. Αναπόφευκτα η κατανόηση αυτής της σχέσης βασίζεται σε κάποιο δοσμένο σημείο στην αριθμογραμμή, το οποίο μπορεί να είναι είτε το αριστερό άκρο της αριθμογραμμής, δηλαδή η αρχή της (το 0) είτε το δεξιό άκρο της αριθμογραμμής, δηλαδή το τέλος της (π.χ., το 100). Με άλλα λόγια, τα έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή έμμεσα ζητούν από τους συμμετέχοντες αρχικά να ανακτήσουν από τη μνήμη τους τα αριθμητικά μεγέθη που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες τιμές αριθμών (π.χ., να ανακτήσουν τα μεγέθη που αντιστοιχούν στο «35» και το «100» σε μία αριθμογραμμή από το 0 έως το 100), στη συνέχεια να πραγματοποιήσουν εκτίμηση για την αναλογία μεταξύ των δύο αριθμητικών μεγεθών («35» και «100») και, τέλος, να παράγουν μία αντίστοιχη χωρική αναλογία σημειώνοντας την κατάλληλη θέση πάνω στην αριθμογραμμή.

Στην έρευνά τους οι Barth και Paladino (2011) βρήκαν πως πεντάχρονα και επτάχρονα παιδιά εκτιμούν με επιτυχία την τιμή ενός αριθμού σε συγκεκριμένη θέση σε μία οριοθετημένη αριθμογραμμή από το 0 έως το 100, χρησιμοποιώντας γνωστά σημεία της αριθμογραμμής ως «στηρίγματα» ή «σημεία αναφοράς». Πιο συγκεκριμένα, τα περισσότερα επτάχρονα παιδιά τοποθετούν το 50 περίπου στη μέση της γραμμής αιτιολογώντας στη βάση της αναλογικής σχέσης ανάμεσα στο 50 και το 100. Ωστόσο, τα πεντάχρονα παιδιά δεν λαμβάνουν υπόψη τους το δεξιό άκρο της αριθμογραμμής και στην πλειοψηφία τους πραγματοποιούν εκτιμήσεις σαν να υπάρχει στην αριθμογραμμή μόνο το σημείο έναρξης. Τα μεγαλύτερα παιδιά φαίνεται πως είναι σε θέση να συνυπολογίσουν και τα δύο σημεία της αριθμογραμμής, προκειμένου να αποφασίσουν για τη θέση ενός συγκεκριμένου αριθμού σε αυτήν. Αυτή η ικανότητα, που εμφανίζεται περίπου στην ηλικία των έξι ετών (Slusser et al., 2013), επιτρέπει στα παιδιά να κάνουν περισσότερο ακριβείς εκτιμήσεις. Τα ακόμα μεγαλύτερα παιδιά (ηλικίας 7 έως 10 ετών), στην έρευνα των Slusser et al. (2013), ήταν σε θέση να χρησιμοποιούν την τιμή ενός ενδιάμεσου σημείου ως σημείο αναφοράς, πέρα από τα δύο άκρα της αριθμογραμμής. Καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν και μαθαίνουν για τις αναλογίες, χρησιμοποιούν όλο και περισσότερα σημεία στήριξης πάνω στην αριθμογραμμή τα οποία τους επιτρέπουν να εμφανίζουν μοτίβο απαντήσεων που είναι περισσότερο γραμμικό. Αυτό επιβεβαιώνουν ευρήματα μεταγενέστερων ερευνών σε μικρά και μεγάλα παιδιά (Peeters, Degrande, Ebersbach, Verschaffel, & Luwel, 2016; Peeters, Sekeris, Verschaffel, & Luwel, 2017) και σε ενήλικες (Huber et al., 2014; Patalano et al., 2020).

Τα τελευταία χρόνια μία τρίτη εναλλακτική θεώρηση, που βασίζεται και επεκτείνει τις δύο παραπάνω προσεγγίσεις, έχει προταθεί (π.χ., Ebersbach, Luwel, & Verschaffel, 2015; Dackermann, Huber, Bahnmueller, Nuerk, & Moeller, 2015), σύμφωνα με την οποία οι αναπτυξιακές αλλαγές στις αριθμητικές εκτιμήσεις των παιδιών και των ενηλίκων είναι αποτέλεσμα της εξοικειώσής τους με τους αριθμούς. Για παράδειγμα, οι Ebersbach, Luwel, Frick, Onghena και Verschaffel (2008), εξετάζοντας τις εκτιμήσεις των παιδιών ηλικίας από πέντε έως εννέα ετών σε αριθμογραμμές (από το 1 έως το 100 και από το 1 έως το 1.000) και παράλληλα ελέγχοντας τις γνώσεις τους για τους αριθμούς, βρήκαν πως οι εκτιμήσεις που

πραγματοποιούσαν τα παιδιά για τους μικρούς αριθμούς, με τους οποίους ήταν περισσότερο εξοικειωμένα, εμφάνιζαν γραμμικότητα. Οι λιγότερο γνωστοί μεγάλοι αριθμοί μάλιστα συνδέονταν με περισσότερο αργοπορημένη ανάπτυξη των γραμμικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τους περισσότερο γνωστούς αριθμούς. Συμπεράναν ότι οι εκτιμήσεις των πεντάχρονων και εξάχρονων παιδιών χαρακτηρίζονταν καλύτερα από ένα μοντέλο που αποτελείται από δύο γραμμικά τμήματα (διμερές γραμμικό μοντέλο), σε καθένα από τα οποία η κλίση της γραμμής είναι διαφορετική, παρά από ένα αποκλειστικά λογαριθμικό ή αποκλειστικά γραμμικό μοντέλο. Σε αυτό το μοντέλο, παρατηρείται αφενός γραμμική αναπαράσταση για τους μικρούς αριθμούς στο πρώτο τμήμα όπου η κλίση της γραμμής είναι απότομη και αφετέρου μία διαφορετική, αλλά επίσης γραμμική, αναπαράσταση για τους μεγάλους αριθμούς στο δεύτερο τμήμα με λιγότερο απότομη, και μάλλον επίπεδη, κλίση της γραμμής. Επιπλέον, επειδή το σημείο διακοπής μεταξύ των δύο γραμμικών τμημάτων βρέθηκε να συσχετίζεται με το εύρος των αριθμών που τα παιδιά γνώριζαν, οι Ebersbach et al. (2008) υποστήριξαν ότι αυτό το σημείο αντικατοπτρίζει την εξοικείωση των παιδιών με τους αριθμούς και εξηγεί τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των παιδιών.

Παράγοντες που επηρεάζουν τις εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή

Ανεξάρτητα από την εξήγηση που καθεμία από τις παραπάνω προσεγγίσεις προσφέρει, συχνά χωρίς να λειτουργούν ακυρωτικά μεταξύ τους, ο τρόπος πραγματοποίησης των εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή επηρεάζεται από διάφορους παράγοντες, οι οποίοι με τη σειρά τους επηρεάζουν την ακρίβεια των εκτιμήσεων. Για παράδειγμα, οι Δεσλή και Τριανταφύλλου (2019), εξετάζοντας την ικανότητα παιδιών πρώτης και δευτέρας τάξης για εκτίμηση σε αριθμογραμμή από το 0 έως το 100, βρήκαν πως το μέγεθος των αριθμών επηρεάζει τις εκτιμήσεις που πραγματοποιούνται, καθώς τα παιδιά δυσκολεύτηκαν περισσότερο στις δοκιμασίες με τους μεσαίους αριθμούς σε σχέση με τις δοκιμασίες που είχαν μικρούς ή μεγάλους αριθμούς. Συγκεκριμένα, η επιτυχία των παιδιών και των δύο ηλικιακών ομάδων στις εκτιμήσεις για τους μικρούς αριθμούς (από το 0 έως το 20) και τους μεγάλους αριθμούς (από το 81 έως το 100) ήταν πολύ μεγαλύτερη (95% και 75%, αντίστοιχα) από την επιτυχία τους στις εκτιμήσεις για τους μεσαίους αριθμούς (από το 21 έως το 80), όπου τα ποσοστά επιτυχίας ήταν σημαντικά χαμηλότερα (περίπου 60%). Το εύρημα αυτό αναδεικνύει ότι, πέρα από την επίδραση του μεγέθους των αριθμών, τα άκρα της αριθμογραμμής λειτούργησαν ως σημεία αναφοράς στα οποία βασίστηκαν τα παιδιά για τις εκτιμήσεις τους. Οι Peeters et al. (2016) μάλιστα βρήκαν πως η παρουσία πρόσθετου σημείου αναφοράς στο κέντρο της αριθμογραμμής οδηγεί σε ακριβέστερες εκτιμήσεις για τους αριθμούς που βρίσκονται κοντά σε αυτό σε σύγκριση με τις αριθμογραμμές στις οποίες σημειώνονται μόνο το σημείο εκκίνησης και το τελικό σημείο.

Το είδος των αριθμών αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην επιτυχία των εκτιμήσεων καθώς, όπως βρήκαν οι Iuculano και Butterworth (2011), οι εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν 10-χρονα παιδιά και ενήλικες για τη θέση των κλασματικών αριθμών σε αριθμογραμμή είναι

λιγότερο επιτυχείς από εκείνες για τη θέση των ακεραίων αριθμών σε αριθμογραμμή. Δύο ήταν οι κύριες κατηγορίες στρατηγικών που οι Siegler, Thompson και Schneider (2011) εντόπισαν να εφαρμόζουν τα παιδιά ηλικίας 11 και 13 ετών κατά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων για τη θέση των κλασμάτων σε αριθμογραμμή από το 0 έως το 1 και από το 0 έως το 5. Η πρώτη κατηγορία στρατηγικών αφορά μετατροπές των κλασματικών αριθμών σε περισσότερο βολικούς αριθμούς, κυρίως με στρογγυλοποίηση (π.χ., «το $\frac{5}{9}$ είναι λίγο μεγαλύτερο από το $\frac{1}{2}$ »), και χρησιμοποιήθηκε πολύ περισσότερο από τα μεγαλύτερα παιδιά. Τη δεύτερη κατηγορία στρατηγικών χρησιμοποίησαν όσοι συμμετέχοντες χώριζαν την αριθμογραμμή σε επιμέρους τμήματα δημιουργώντας βολικά σημεία αναφοράς. Για παράδειγμα, άλλοτε χώριζαν την αριθμογραμμή από το 0 έως το 1 στη μέση ή την αριθμογραμμή από το 0 έως το 5 σε πέντε ίσα μέρη και άλλοτε χώριζαν τις αριθμογραμμές σε τόσα μέρη όσα έδειχνε ο παρονομαστής του κλάσματος.

Η πραγματοποίηση μιας εκτίμησης για τη θέση ενός αριθμού πάνω σε αριθμογραμμή (έργα NP) φαίνεται πως είναι λιγότερο απαιτητική σε σχέση με την πραγματοποίηση μιας εκτίμησης για το αριθμητικό μέγεθος που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη θέση σε αριθμογραμμή (έργα PN). Για παράδειγμα, οι Iuculano και Butterworth (2011) εντόπισαν σημαντικά μεγαλύτερη ακρίβεια στις εκτιμήσεις που πραγματοποιήθηκαν στα έργα NP σε σχέση με τα έργα PN αλλά και μεγάλες διαφορές στον χρόνο που χρειάζονταν τα παιδιά και οι ενήλικες που συμμετείχαν στην έρευνά τους προκειμένου να απαντήσουν. Βρήκαν μάλιστα ότι ο χρόνος στα έργα PN ήταν σχεδόν διπλάσιος από τον αντίστοιχο χρόνο στα έργα NP, ένδειξη της δυσκολίας που προκαλούσαν. Αντίστοιχες διαφορές ως προς το είδος της εκτίμησης βρήκαν οι Slusser και Barth (2017), όταν παρουσίασαν αριθμογραμμές διαφορετικού εύρους σε παιδιά 7 ετών, 8 έως 10 ετών και σε ενήλικες (αριθμογραμμές από το 0 έως το 100, από το 1 έως το 1.000 και από το 0 έως το 100.000, αντίστοιχα) στις οποίες προσδιοριζόταν το σημείο που αντιστοιχούσε στο κέντρο τους καθώς και τα δύο άκρα τους. Συγκεκριμένα, στα έργα NP τα μικρότερα παιδιά πραγματοποίησαν υπερεκτιμήσεις των μικρότερων τιμών και υποεκτιμήσεις των μεγαλύτερων τιμών, ενώ τα μεγαλύτερα παιδιά και οι ενήλικες πραγματοποίησαν υποεκτιμήσεις των μικρότερων τιμών και υπερεκτιμήσεις των μεγαλύτερων τιμών. Ωστόσο, όλοι οι συμμετέχοντες πραγματοποίησαν τις περισσότερο ακριβείς εκτιμήσεις τους για τους αριθμούς που βρίσκονταν στα άκρα και στο κέντρο των αριθμογραμμών. Αντίθετα, στα έργα PN, η ακρίβεια των εκτιμήσεων όλων των συμμετεχόντων, ανεξάρτητα από ηλικία, δεν διαφοροποιούνταν μεταξύ των μικρότερων και μεγαλύτερων τιμών.

Εξετάζοντας τις εκτιμήσεις ενηλίκων με τη χρήση οριοθετημένων και μη οριοθετημένων αριθμογραμμών, οι Reinert, Hartmann, Huber και Moeller (2019) επιβεβαίωσαν την επίδραση του είδους των εκτιμήσεων. Όταν οι συμμετέχοντες καλούνταν να βρουν τη θέση ενός αριθμού πάνω σε μη οριοθετημένη γραμμή (έργο NP), στην οποία σημειώνονταν μόνο το σημείο έναρξης μαζί με μία προκαθορισμένη μονάδα η οποία συμβολιζόταν με το 1, έτειναν να υπερεκτιμούν, ενώ έτειναν να υποεκτιμούν όταν καλούνταν να βρουν ποιος αριθμός βρίσκεται σε συγκεκριμένη θέση της μη οριοθετημένης γραμμής (έργο PN). Το ακριβώς αντίθετο μοτίβο παρατηρήθηκε για τις εκτιμήσεις των συμμετεχόντων στην οριοθετημένη

αριθμογραμμή, στην οποία υπήρχε το 0 στο αριστερό άκρο και το 10.000 στο δεξιό: πραγματοποιούσαν υποεκτιμήσεις στο έργο NP και υπερεκτιμήσεις στο έργο PN. Τα παραπάνω ευρήματα ενισχύουν την άποψη ότι η επιτυχία των εκτιμήσεων βελτιώνεται με την ηλικία και οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην εφαρμογή στρατηγικών που βασίζονται σε σημεία αναφοράς.

Η παρούσα εργασία

Παρόλο που η έρευνα για τις εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή είναι αρκετά πλούσια, είναι ταυτόχρονα περισσότερο προσανατολισμένη αφενός στη χρήση ακέραιων αριθμών και αφετέρου στην ικανότητα των παιδιών -και πολύ λιγότερο των ενηλίκων- για αυτές τις εκτιμήσεις. Με δεδομένο ότι, ακόμα και οι ενήλικες δυσκολεύονται να διαχειριστούν τους ρητούς αριθμούς (Fitzsimmons, Thompson, & Sidney, 2020), σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει την ικανότητα παιδιών και ενηλίκων να πραγματοποιούν εκτιμήσεις για τους ρητούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή. Πιο συγκεκριμένα, το κύριο ερευνητικό ερώτημα αφορά στην επιτυχία των εκτιμήσεων που πραγματοποιούν παιδιά Στ' τάξης και ενήλικες, όταν καλούνται να τοποθετήσουν κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που θα επιχειρήσει η παρούσα εργασία να απαντήσει είναι τα εξής: α) Διαφοροποιείται η ικανότητα για πραγματοποίηση εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή από την ηλικία των συμμετεχόντων; β) Επηρεάζονται οι εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή από το είδος των έργων εκτίμησης; γ) Παράγοντες, όπως το είδος των ρητών αριθμών, το μέγεθος των αριθμών και η παρουσία σημείων αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή, επηρεάζουν αυτή την ικανότητα και με ποιον τρόπο;

Μεθοδολογία

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 88 άτομα, παιδιά Στ' τάξης του δημοτικού σχολείου και ενήλικες. Πιο συγκεκριμένα, 46 συμμετέχοντες ήταν παιδιά Στ' τάξης από τα οποία τα 22 ήταν αγόρια (47,8%) και τα 24 κορίτσια (52,2%). Προέρχονταν από δημόσια δημοτικά σχολεία αστικού κέντρου και παρουσίαζαν ποικιλία ακαδημαϊκών επιδόσεων. Η ηλικία τους κυμαινόταν από 11 χρονών και 5 μηνών έως 12 χρονών και 3 μηνών, με μέσο όρο τα 11 χρόνια και 9 μήνες. Δεν είχαν δεχθεί εξειδικευμένη διδασκαλία στην εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή και η εξοικείωσή τους με τις εκτιμήσεις περιοριζόταν σε όσα προβλέπονται από το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και αφορούν τη χρήση της αριθμογραμμής και τις εκτιμήσεις.

Οι υπόλοιποι 42 συμμετέχοντες ήταν ενήλικες, από τους οποίους οι 19 ήταν άντρες (45,2%) και οι 23 γυναίκες (54,8%), με μέσο όρο ηλικίας τα 36 χρόνια και 7 μήνες. Είχαν ολοκληρώσει

τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και κάλυπταν ένα ευρύ φάσμα μορφωτικών και κοινωνικό-πολιτισμικών επιπέδων. Συγκεκριμένα, οι 9 ήταν απόφοιτοι Λυκείου (21,4%), οι 25 ήταν κάτοχοι πτυχίου ΑΕΙ (59,5%) και υπόλοιποι 8 ήταν κάτοχοι μεταπτυχιακού τίτλου (19,1%). Επιπλέον, μεταξύ των συμμετεχόντων υπήρχαν 6 ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και 3 υποψήφιοι δάσκαλοι. Οι υπόλοιποι κάλυπταν ποικιλία επαγγελμάτων, όπως ελεύθεροι επαγγελματίες, δημόσιοι και ιδιωτικοί υπάλληλοι κ.λπ. Η επιλογή των συμμετεχόντων βασίστηκε στη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας.

Σχεδιασμός έρευνας - Εργαλείο μέτρησης

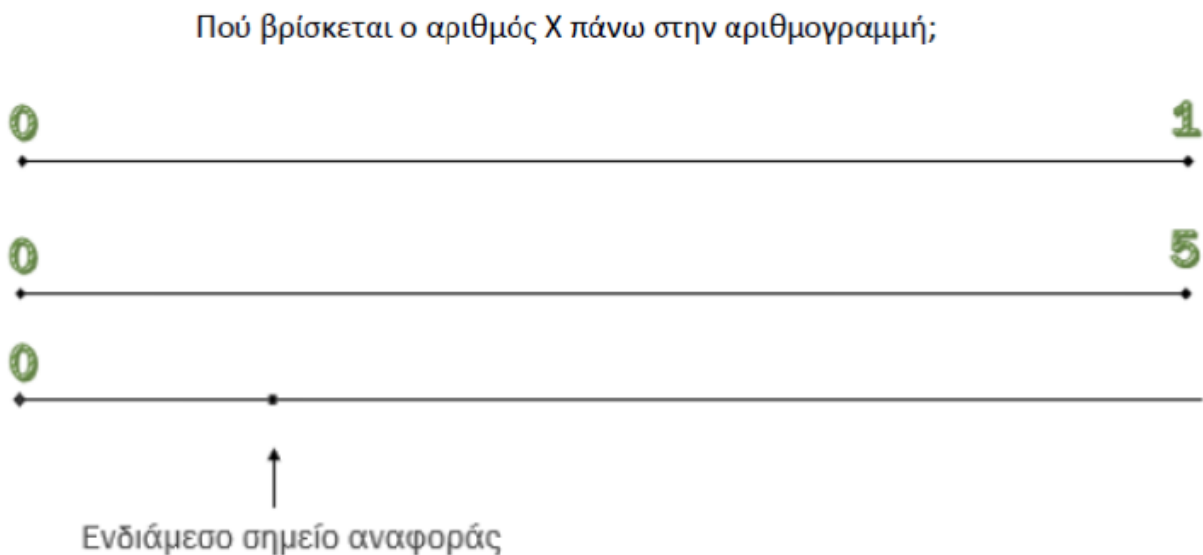
Για την επίτευξη του ερευνητικού σκοπού, η ερευνητική στρατηγική που επιλέχθηκε ήταν η ποσοτική έρευνα, η οποία προκρίνει την ποσοτικοποίηση στη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων από πληθυσμιακές ομάδες (Bryman, 2017). Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόστηκε συγχρονικό σχέδιο έρευνας (έρευνα επισκόπησης) και η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω τεστ που περιείχαν συγκεκριμένες δοκιμασίες και επέτρεπαν υπό προϋποθέσεις την εξαγωγή γενικεύσιμων συμπερασμάτων.

Σχεδιάστηκαν δύο έργα τα οποία παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες και περιλάμβαναν συνολικά 16 δοκιμασίες, ισάριθμα προερχόμενες από αυτά. Στο πρώτο έργο (Έργο 1: Εκτίμηση της θέσης του αριθμού σε αριθμογραμμή - Number to Position (NP) task), οι συμμετέχοντες έπρεπε να εκτιμήσουν τη θέση συγκεκριμένων αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή σημειώνοντας μία κάθετη γραμμή στο σημείο που θεωρούσαν κατάλληλο (π.χ., «Πού βρίσκεται ο αριθμός 0,77 πάνω στην αριθμογραμμή;»). Στο δεύτερο έργο (Έργο 2: Εκτίμηση του αριθμητικού μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση στην αριθμογραμμή - Position to Number (PN) task), δινόταν σε αριθμογραμμή μία συγκεκριμένη θέση (η οποία σημειωνόταν με μία κάθετη γραμμή και ένα βέλος από πάνω) και ζητούνταν από τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν την αριθμητική αξία αυτής της θέσης (π.χ., «Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση του βέλους;» καταδεικνύοντας μια συγκεκριμένη θέση στην αριθμογραμμή).

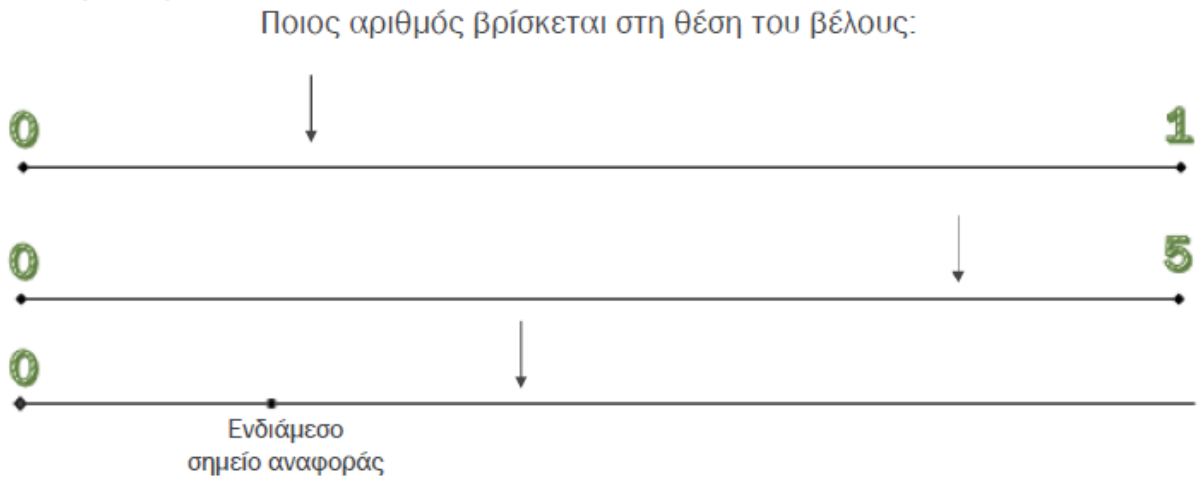
Με σκοπό να εξεταστεί αν η ικανότητα για εκτιμήσεις με ρητούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή διαφοροποιείται από το είδος των ρητών αριθμών, οι συμμετέχοντες και από τις δύο ηλικιακές ομάδες χωρίστηκαν τυχαία σε δύο υποομάδες: στους μισούς συμμετέχοντες δόθηκαν οι δοκιμασίες με κλάσματα και στους άλλους μισούς δόθηκαν οι δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς. Οι δοκιμασίες σχεδιάστηκαν με τους ίδιους αριθμούς σε κλασματική και δεκαδική μορφή. Έτσι, για παράδειγμα, από τους συμμετέχοντες που ανήκαν στην ομάδα των κλασμάτων ζητήθηκε να πραγματοποιήσουν εκτίμηση για τη θέση του αριθμού $\frac{7}{9}$ πάνω στην αριθμογραμμή (Έργο 1), ενώ από τους συμμετέχοντες που ανήκαν στην ομάδα των δεκαδικών αριθμών η εκτίμηση αφορούσε τη θέση του αριθμού 0,77 πάνω στην ίδια αριθμογραμμή. Με τον τρόπο αυτό, το επίπεδο γνωστικής απαίτησης διατηρούνταν σταθερό και περιορίστηκε η πιθανότητα να ευνοηθεί η επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με δεκαδικούς ή κλασματικούς αριθμούς.

Εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή: Η περίπτωση των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών

Σε όλες τις δοκιμασίες, η αριθμογραμμή είχε σταθερό μήκος 25εκ. Ωστόσο, τα άκρα της αριθμογραμμής διέφεραν στις δοκιμασίες κάθε έργου οι οποίες δόθηκαν ως εξής: α) δύο δοκιμασίες με άκρα το 0 και το 1, β) δύο δοκιμασίες με άκρα το 0 και το 5, γ) δύο δοκιμασίες με αριστερό άκρο το 0, χωρίς δεξί άκρο αλλά με ενδιάμεσο σημείο αναφοράς που ήταν αριθμός μικρότερος του 1 (π.χ., το 0,75 ή το $\frac{3}{4}$ για το Έργο 1 και το 0,25 ή το $\frac{1}{4}$ για το Έργο 2) και δ) δύο δοκιμασίες με αριστερό άκρο το 0, χωρίς δεξί άκρο αλλά με ενδιάμεσο σημείο αναφοράς που ήταν αριθμός μεγαλύτερος του 1 (το 2,33 ή το $2\frac{3}{9}$ για το Έργο 1 και το 3,66 ή το $3\frac{4}{6}$ για το Έργο 2). Ο λόγος που επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες συνθήκες ήταν για να εξεταστούν οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων σε αριθμούς μικρότερους του 1 (εύρος 0-1), σε αριθμούς μεγαλύτερους του 1 (εύρος 0-5) αλλά και χωρίς να δίνεται το ανώτερο άκρο αλλά ένα ενδιάμεσο σημείο αναφοράς (μικρότερο ή μεγαλύτερο του 1). Οι Εικόνες 1 και 2 παρουσιάζουν τις συνθήκες που ακολουθήθηκαν στις δοκιμασίες των Έργων 1 και 2, αντίστοιχα.



Εικόνα 1: Παραδείγματα αριθμογραμμών στο Έργο 1



Εικόνα 2: Παραδείγματα αριθμογραμμών στο Έργο 2

Οι αριθμοί προς εκτίμηση δεν ξεπερνούσαν το 5 και επιλέχθηκαν με τρόπο ώστε στις μισές δοκιμασίες να απαιτείται η εκτίμηση ενός «μικρού» αριθμού και στις άλλες μισές να απαιτείται η εκτίμηση ενός «μεγάλου» αριθμού συγκριτικά με το αριθμητικό εύρος το οποίο παρουσιάζοταν στην αριθμογραμμή. Για την επιλογή των αριθμών χρησιμοποιήθηκαν κυρίως τα συμπληρώματα των αριθμών μεταξύ των δύο έργων (βλ. Πίνακα 1).

Για να αποφευχθούν φαινόμενα κόπωσης αλλά και να περιοριστούν λάθη κούρασης στις τελευταίες δοκιμασίες, δημιουργήθηκαν δύο σειρές παρουσίασης των έργων: στη σειρά παρουσίασης Α, οι συμμετέχοντες απαντούσαν πρώτα στο Έργο 1 και μετά στο Έργο 2, ενώ στη σειρά παρουσίασης Β οι συμμετέχοντες απαντούσαν πρώτα στο Έργο 2 και έπειτα στο Έργο 1. Επίσης, με την υιοθέτηση διαφορετικής σειράς παρουσίασης των έργων οι συμμετέχοντες δεν θα μπορούσαν εύκολα να συσχετίσουν τα αριθμητικά δεδομένα του Έργου 1 με αυτά του Έργου 2.

Διαδικασία

Όλοι οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν σε χώρο όπου επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να συγκεντρωθούν και να εκφραστούν ελεύθερα. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν ανώνυμη και εθελοντική, χωρίς να συνδέεται στην περίπτωση των μαθητών με την αξιολόγησή τους στα σχολικά μαθήματα ή το μάθημα των μαθηματικών.

Σε όλους τους συμμετέχοντες δόθηκε από ένα μπλοκ με 16 σελίδες (8 για κάθε έργο) για να σημειώνουν τις απαντήσεις τους στις ισάριθμες δοκιμασίες. Σε κάθε σελίδα υπήρχε μία αριθμογραμμή μήκους 25 εκατοστών στην οποία, ανάλογα με τις δοκιμασίες κάθε έργου, ήταν σημειωμένα τα άκρα ή/και τα ενδιάμεσα σημεία αναφοράς. Στην αρχή δίνονταν οι βασικές οδηγίες και πραγματοποιούνταν ένα παράδειγμα. Μετά το τέλος κάθε δοκιμασίας δεν δινόταν ανατροφοδότηση και στους συμμετέχοντες παρουσιάζοταν η επόμενη δοκιμασία. Όλη η διαδικασία διήρκησε περίπου 15'-20' για κάθε συμμετέχοντα.

Αριθμογραμμή με:	Είδος αριθμών			
	Κλάσματα		Δεκαδικοί αριθμοί	
	Έργο 1 (NP)	Έργο 2 (PN)	Έργο 1 (NP)	Έργο 2 (PN)
Άκρα 0, 1	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$	0,77	0,23
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0,25	0,75
Άκρα 0, 5	$1\frac{3}{5}$	$3\frac{2}{5}$	1,6	3,4
	$3\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	3,75	1,25
Άκρα 0 και ενδιάμεσος αριθμός	$\frac{2}{8} \left(\frac{3}{4}\right)$	$\frac{6}{8} \left(\frac{1}{4}\right)$	0,25 (0,75)	0,75 (0,25)
	$\frac{5}{6} \left(\frac{3}{4}\right)$	$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)$	0,83 (0,75)	0,17 (0,25)
Άκρα 0 και ενδιάμεσος αριθμός	$4\frac{1}{6} \left(2\frac{3}{9}\right)$	$1\frac{2}{3} \left(3\frac{4}{6}\right)$	4,16 (2,33)	1,66 (3,66)
	$1\frac{2}{3} \left(2\frac{3}{9}\right)$	$4\frac{1}{6} \left(3\frac{4}{6}\right)$	1,66 (2,33)	4,11 (3,66)

Πίνακας 1: Άκρα (και ενδιάμεσοι αριθμοί) αριθμογραμμών και αριθμοί προς εκτίμηση για κάθε έργο με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς

Ανάλυση των δεδομένων

Για την κωδικοποίηση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα ελαστικό κριτήριο το οποίο χρησιμοποιείται σε ανάλογες έρευνες (π.χ., Sekeris, Verschaffel, & Luwel, 2019; Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015), σύμφωνα με το οποίο επιτυχείς θεωρούνταν οι εκτιμήσεις που έχουν ποσοστιαία απόκλιση κατά 20% από το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης. Το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης εξαρτάται από το μήκος της αριθμογραμμής που κάθε φορά χρησιμοποιείται. Στην αριθμογραμμή των 25 εκ. που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα, η απόκλιση 20% υπολογίζεται ως 2,5 εκ. πριν από και 2,5 εκ. μετά τη θέση του αριθμού με ακρίβεια. Για παράδειγμα, η ακριβής θέση του αριθμού 0,77 πάνω στην αριθμογραμμή των 25 εκ. με άκρα 0-1 βρίσκεται στα 19,25 εκ. αυτής και το εύρος των σωστών απαντήσεων, σύμφωνα με το ελαστικό κριτήριο που υιοθετήθηκε, αφορά τις θέσεις από τα 16,75 εκ. έως τα 21,75 εκ.

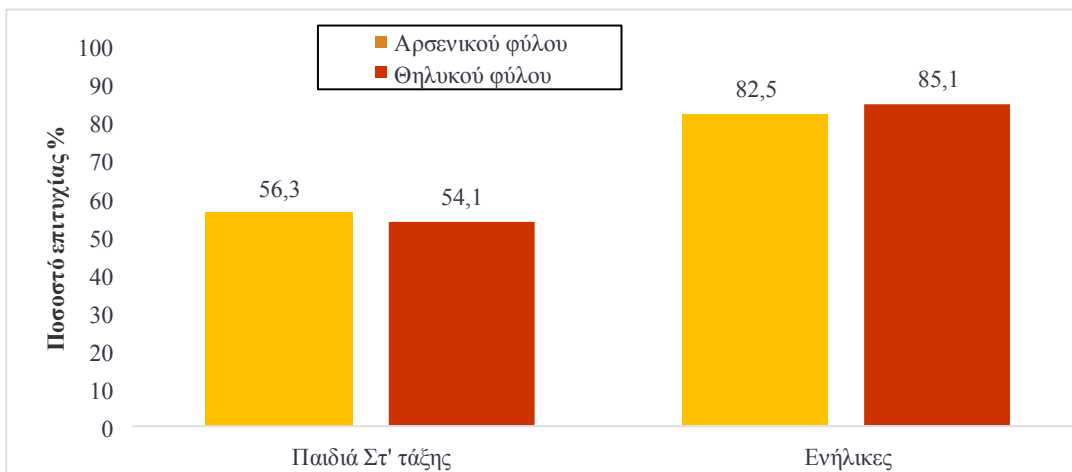
Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 βαθμό, ενώ κάθε λανθασμένη απάντηση με 0 βαθμούς. Ο μέγιστος αριθμός των σωστών απαντήσεων για κάθε συμμετέχοντα δυνητικά ήταν 16. Η στατιστική επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του προγράμματος SPSS 27.

Αποτελέσματα

Γενική επίδοση

Οι συμμετέχοντες παρουσίασαν καλή επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών, με ποσοστό επιτυχίας που έφτασε το 69,5%. Ωστόσο, στατιστικά σημαντικές διαφορές εντοπίστηκαν στην επιτυχία των εκτιμήσεων ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες ($t(86)=-6,735, p<.001$), με τους ενήλικες να εμφανίζουν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις (84%) σε σχέση με τα παιδιά της Στ' τάξης (55%).

Το φύλο δεν βρέθηκε να επηρεάζει τις εκτιμήσεις τόσο όταν αυτό εξετάστηκε για το σύνολο των συμμετεχόντων ($t(86)=-1,098, p=.276$) όσο και όταν εξετάστηκε για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά. Με άλλα λόγια, παρόμοια επιτυχίες ήταν οι εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν τα αγόρια και τα κορίτσια της Στ' τάξης ($t(44)=-,959, p=.345$) όσο και οι ενήλικοι άντρες και οι ενήλικες γυναίκες ($t(40)=-,541, p=.593$). Το Σχήμα 1 παρουσιάζει τα παραπάνω στοιχεία.



Σχήμα 1: Ποσοστό επιτυχιών εκτιμήσεων ως προς το φύλο και την ηλικιακή ομάδα

Εκτιμήσεις και είδος αριθμών

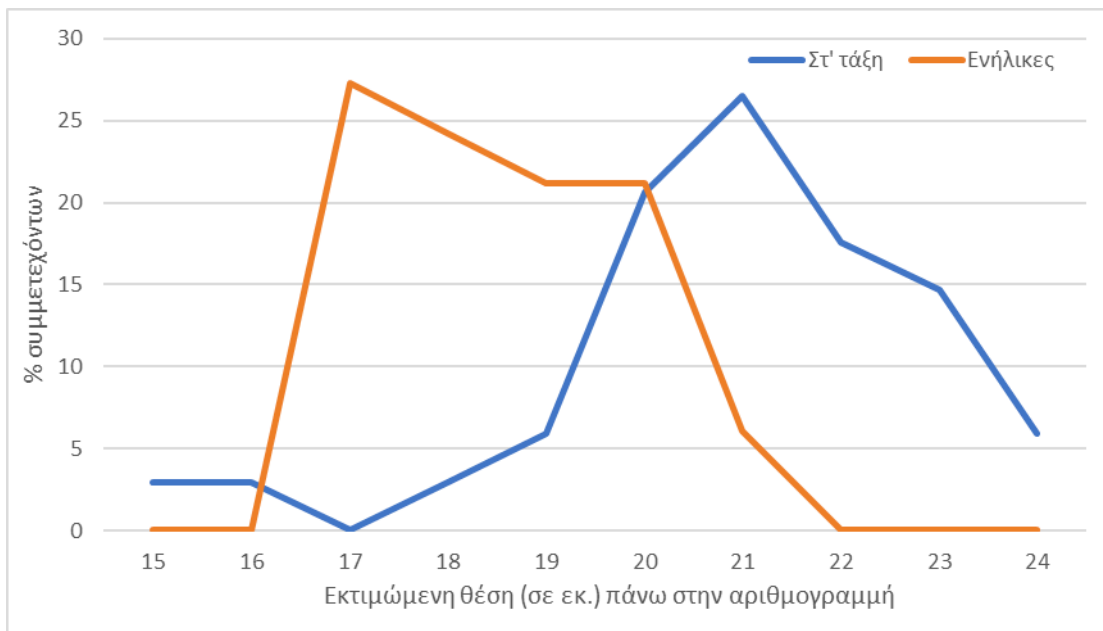
Οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων επηρεάστηκαν από το είδος των αριθμών στις οποίες αυτές πραγματοποιήθηκαν: στο σύνολό τους οι συμμετέχοντες παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες εκτιμήσεις για τους δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή σε σχέση με τις εκτιμήσεις για τα κλάσματα ($t(86)=-3,106, p<.05$). Αυτές οι διαφορές

επιβεβαιώθηκαν και για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά ($t(44) = -3,59, p < .05$ και $t(40) = -3,483, p < .01$, για τα παιδιά και τους ενήλικες, αντίστοιχα). Πιο συγκεκριμένα, τόσο τα παιδιά όσο και οι ενήλικες πραγματοποίησαν περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις στις δοκιμασίες που αφορούσαν δεκαδικούς αριθμούς (62% και 88%, αντίστοιχα) παρά σε αυτές με κλάσματα (49% και 80%, αντίστοιχα).

Εκτιμήσεις και είδος έργου

Το είδος του έργου επηρέασε στατιστικά σημαντικά την επιτυχία των εκτιμήσεων των συμμετεχόντων ($t(87) = 2,836, p < .05$). Το Έργο 2 (PN) που καλούσε τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν ποιος αριθμός βρίσκεται σε συγκεκριμένη θέση της αριθμογραμμής ήταν περισσότερο απαιτητικό για τα παιδιά ($t(45) = 1,649, p < .05$) και για τους ενήλικες ($t(41) = 1,786, p < .05$) σε σχέση με το Έργο 1 (NP) στο οποίο οι συμμετέχοντες καλούνταν να βρουν τη θέση ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή. Αν και τα ποσοστά επιτυχίας ήταν σημαντικά υψηλότερα στις δοκιμασίες του Έργου 1 (61,5% και 87%, για τα παιδιά και τους ενήλικες, αντίστοιχα), διαφορές ανάμεσα στα δύο έργα αλλά και ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες επίσης εντοπίστηκαν αναφορικά με το είδος των εκτιμήσεων που οι συμμετέχοντες πραγματοποίησαν.

Πιο συγκεκριμένα, στο Έργο 1 τα παιδιά έτειναν να πραγματοποιούν υπερεκτιμήσεις των μικρότερων τιμών και υποεκτιμήσεις των μεγαλύτερων τιμών. Για παράδειγμα, το 76% των παιδιών τοποθέτησε τον αριθμό 1,6 πολύ δεξιότερα από την πραγματική του θέση πάνω στην αριθμογραμμή (από το 0 έως το 5), σε θέσεις που αντιστοιχούσαν κοντά στο 3. Παρόμοια, όπως δείχνει το Σχήμα 2, περίπου το 35% των παιδιών εκτίμησε ότι η θέση του 0,77 σε αριθμογραμμή από το 0 έως το 1 θα βρίσκεται δεξιότερα του ανώτερου άκρου των επιτυχών εκτιμήσεων (επιτυχείς ήταν οι εκτιμήσεις από τα 16,75 εκ. έως τα 21,75 εκ. της αριθμογραμμής), ενώ περίπου το 45% πραγματοποίησε μεν επιτυχείς εκτιμήσεις οι οποίες όμως βρίσκονταν κοντά στο δεξιότερο άκρο των επιτυχών εκτιμήσεων (στα 20 εκ. και τα 21 εκ. της γραμμής). Όταν καλούνταν να εκτιμήσουν τη θέση μεγαλύτερων αριθμών όπως, για παράδειγμα, το 4,16, παρόμοιο ποσοστό παιδιών (περίπου 70%) τοποθέτησε τον αριθμό σε θέσεις με μικρότερη αριθμητική αξία και, συγκεκριμένα, σε θέσεις που αντιστοιχούσαν κοντά στο 3,5. Αντίθετα, αυτή η τάση δεν βρέθηκε στους ενήλικες, οι οποίοι πραγματοποίησαν υπερεκτιμήσεις και υποεκτιμήσεις ανεξάρτητα από τους αριθμούς που τους παρουσιάζονταν και ανεξάρτητα από το είδος έργου (βλ. Σχήμα 2). Από την άλλη μεριά, οι δοκιμασίες του Έργου 2 δεν ευνόησαν αυτή την τάση των παιδιών για υπερεκτιμήσεις των μικρότερων αριθμητικών τιμών: ήταν το ίδιο 'μεγάλες' ή 'μικρές' οι εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν για να εντοπίσουν ποιο είναι το αριθμητικό μέγεθος σε θέσεις που είδαν πάνω στην αριθμογραμμή. Στο σύνολο των συμμετεχόντων, ωστόσο, ενήλικες και παιδιά πραγματοποίησαν τις περισσότερο ακριβείς εκτιμήσεις τους για τους αριθμούς που βρίσκονταν στα άκρα και στο κέντρο των αριθμογραμμών.



Σχήμα 2: Συχνότητα εκτιμήσεων της θέσης του αριθμού 0,77 πάνω σε αριθμογραμμή (Έργο 1) ως προς την ηλικιακή ομάδα

Με σκοπό να ελεγχθεί αν το είδος των αριθμών (κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί) επηρεάζει τις διαφορές που εντοπίστηκαν στις εκτιμήσεις ανάμεσα στα δύο έργα, εξετάστηκαν ξεχωριστά οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με κλάσματα και στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς. Από την ανάλυση αυτή προέκυψε ότι το Έργο 1 εξακολουθούσε να είναι αυτό που οδηγεί τους συμμετέχοντες περισσότερο συχνά σε επιτυχείς εκτιμήσεις σε σχέση με το Έργο 2, είτε πρόκειται για δοκιμασίες με κλάσματα ($t(43)=-1,409, p<.05$) είτε πρόκειται για δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς ($t(43)=1,692, p<.05$). Αυτές οι διαφορές επιβεβαιώθηκαν όταν η ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για τους ενήλικες που είδαν τις δοκιμασίες με κλάσματα ($t(20)=-1,815, p<.05$) και τις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς ($t(20)=1,065, p<.05$).

Ωστόσο, οι εκτιμήσεις των παιδιών της Στ' τάξης για τα κλάσματα υπήρξαν ιδιαίτερα φτωχές και δεν διέφεραν στατιστικά σημαντικά ως προς το είδος του έργου ($t(22)=1,507, p=.352$), ενώ δεν ισχύει το ίδιο για τις εκτιμήσεις τους για τους δεκαδικούς αριθμούς που ήταν πολύ περισσότερο επιτυχείς στο Έργο 1 παρά στο Έργο 2 ($t(22)=1,732, p<.05$). Μάλιστα η τάση των παιδιών για υπερεκτιμήσεις των μικρότερων τιμών και υποεκτιμήσεις των μεγαλύτερων τιμών ήταν πολύ πιο έντονη στις δοκιμασίες με κλάσματα και διατηρήθηκε και στα δύο έργα. Για παράδειγμα, πάνω από το 85% των παιδιών τοποθέτησε το $1\frac{3}{5}$ δεξιότερα της πραγματικής του θέσης (Έργο 1) και σχεδόν το 80% των παιδιών, βλέποντας τη θέση της αριθμογραμμής που αντιστοιχεί στο $4\frac{1}{5}$ απάντησε πως ο αριθμός σε αυτή τη θέση είναι πολύ μικρότερος του πραγματικού (Έργο 2). Η διαφοροποίηση στις εκτιμήσεις ανάμεσα στο είδος του έργου και το είδος των αριθμών, ιδιαίτερα για τα παιδιά, φαίνεται από τους χαμηλούς

μέσους όρους ($m_x=8$) στο Έργο 2 αλλά και τις μεγάλες τυπικές αποκλίσεις που εμφανίζουν ιδιαίτερα στις δοκιμασίες με τα κλάσματα, όπως δείχνει ο Πίνακας 2.

Είδος αριθμών	Έργο 1 (NP, $m_x=8$)		Έργο 2 (PN, $m_x=8$)	
	Στ' τάξη	Ενήλικες	Στ' τάξη	Ενήλικες
Κλάσματα	4,26 (2,15)	6,81 (,83)	3,76 (2,64)	5,94 (1,85)
Δεκαδικοί αριθμοί	5,24 (1,71)	7,24 (1,15)	4,47 (1,89)	6,88 (1,32)

Πίνακας 2: Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) των εκτιμήσεων των συμμετεχόντων ως προς το είδος αριθμών και το είδος έργου

Εκτιμήσεις και είδος αριθμογραμμής

Οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων επηρεάστηκαν από το εύρος της αριθμογραμμής ($t(87)=6,596, p<.001$): στατιστικά σημαντικά καλύτερες ήταν οι επιδόσεις στις δοκιμασίες με αριθμογραμμή από το 0 έως το 1 (79%) σε σχέση με τις δοκιμασίες στην αριθμογραμμή με εύρος από το 0 έως το 5 (60%). Οι διαφορές αυτές επιβεβαιώθηκαν και για τις δύο ηλικιακές ομάδες ($t(45)=5,137, p<.001$ και $t(41)=4,875, p<.001$, για τα παιδιά και τους ενήλικες, αντίστοιχα), για κάθε έργο ξεχωριστά ($t(87)=5,607, p<.001$ και $t(87)=5,092, p<.001$, για τα Έργα 1 και 2, αντίστοιχα) αλλά και για τα δύο είδη αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν στις δοκιμασίες ($t(43)=4,997, p<.001$ και $t(43)=4,872, p<.001$, για τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς, αντίστοιχα).

Όταν οι εκτιμήσεις εξετάστηκαν ως προς την παρουσία σημείων αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή, δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($t(87)=,649, p=.461$). Οι συμμετέχοντες εμφάνισαν παρόμοια επίδοση στις δοκιμασίες με δύο άκρα πάνω στην αριθμογραμμή (68,5%) και στις δοκιμασίες με ένα άκρο και ένα ενδιάμεσο σημείο αναφοράς (70,5%). Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν και όταν εξετάστηκε ξεχωριστά η επίδοση των συμμετεχόντων ως προς το είδος των αριθμών ($t(43)=1,905, p=.541$ και $t(43)=,753, p=.263$, για τις δοκιμασίες με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς, αντίστοιχα) και το είδος του έργου ($t(87)=,271, p=.829$ και $t(87)=,450, p=.654$, για τις δοκιμασίες του Έργου 1 και του Έργου 2, αντίστοιχα).

Η επιτυχία των εκτιμήσεων που πραγματοποίησαν τα παιδιά της Στ' τάξης ($t(45)=-1,675, p=.107$) δεν επηρεάστηκε από τις αριθμογραμμές που είχαν δύο άκρα ή είχαν ένα άκρο και ένα ενδιάμεσο σημείο αναφοράς, ενώ δεν ισχύει το ίδιο για τις εκτιμήσεις των ενηλίκων ($t(41)=3,845, p<.01$) που ήταν περισσότερο επιτυχείς στις δοκιμασίες με τα ενδιάμεσα σημεία αναφοράς πάνω στις αριθμογραμμές (88%). Αν και γενικά τα ποσοστά επιτυχίας των ενηλίκων ήταν υψηλά στο σύνολο των δοκιμασιών, ιδιαίτερα βοηθητικά φάνηκε πως ήταν τα

ενδιάμεσα σημεία αναφοράς για αυτούς στο Έργο 2, στις δοκιμασίες του οποίου το ποσοστό επιτυχίας τους ξεπέρασε το 90%.

Συζήτηση

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση της ικανότητας παιδιών Στ' τάξης του δημοτικού σχολείου και ενηλίκων για πραγματοποίηση εκτιμήσεων της θέσης κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή. Τέσσερα είναι τα κύρια ευρήματα όπως προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Πρώτον, εντοπίστηκαν σημαντικές ηλικιακές διαφορές ανάμεσα στις εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν οι ενήλικες και τα παιδιά, με τις εκτιμήσεις των ενηλίκων να είναι περισσότερο επιτυχείς. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει προηγούμενα ευρήματα ερευνών (π.χ., Siegler, & Booth, 2004; Siegler, & Opfer, 2003; Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015). Αξίζει να σημειωθεί, επίσης, ότι όλα τα παιδιά, όπως και οι ενήλικες, τοποθετούσαν τους αριθμούς (Έργο 1) ή εντόπιζαν αριθμούς σε συγκεκριμένη θέση (Έργο 2) με τέτοιο τρόπο που έδειχνε ότι γνώριζαν τη γραμμικότητά τους. Για παράδειγμα, τοποθετούσαν το $\frac{2}{8}$ πιο μπροστά (αριστερά) από το $\frac{3}{4}$, αναγνωρίζοντας ότι το πρώτο είναι μικρότερο του δεύτερου. Παρόμοια, όταν ήξεραν πού είναι η θέση για το $\frac{1}{4}$ και τους ζητούνταν να βρουν έναν αριθμό που το βέλος έδειχνε να βρίσκεται πιο δεξιά από το $\frac{1}{4}$, δεν υπήρχε παιδί που να απάντησε αριθμό μικρότερο από το $\frac{1}{4}$. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στις αντίστοιχες δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς, στις οποίες μάλιστα οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων ήταν πολύ καλύτερες. Με άλλα λόγια, τα παιδιά ήταν σε θέση να συγκρίνουν αριθμητικά μεγέθη, όμως δυσκολεύονταν συχνά να αναγνωρίζουν με ακρίβεια τη θέση αυτών των μεγεθών πάνω στην αριθμογραμμή. Έτσι, ενώ φαίνεται να έχουν ήδη μία προσεγγιστική αντίληψη για τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς, δεν έχουν ακόμη κατακτήσει την έννοια της θεσιακής αξίας για αυτούς τους αριθμούς.

Δεύτερον, η κατά προσέγγιση εύρεση της θέσης ενός ρητού αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή ήταν πιο εύκολη από τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τιμής ενός ρητού αριθμού σε συγκεκριμένη θέση της αριθμογραμμής, εύρημα που ίσχυε και για τις δύο ηλικιακές ομάδες. Πιθανότατα αυτές οι διαφορές, οι οποίες έχουν επισημανθεί και σε άλλες έρευνες που εξέταζαν τις εκτιμήσεις των ατόμων με κλάσματα (Iuculano, & Butterworth, 2011) αλλά και με φυσικούς αριθμούς (Slusser, & Barth, 2017; Reinert et al., 2019), να εξηγούνται λόγω της μεγαλύτερης εξοικείωσης με τα έργα εύρεσης της θέσης ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή (έργα NP), τουλάχιστον για τα παιδιά, καθώς συχνότερα φαίνεται αυτά να χρησιμοποιούνται στα πλαίσια της διδασκαλίας. Όπως άλλωστε φάνηκε από την πρόσφατη έρευνα των Dowker και Li (2019), 7χρονα παιδιά από την Αγγλία που ήταν εξοικειωμένα με τη χρήση αριθμογραμμών στο σχολείο βρίσκονταν σε πλεονεκτικότερη θέση και πραγματοποιούσαν περισσότερο ακριβείς επιτυχείς εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή σε σχέση με συνομήλικα παιδιά από την Κίνα όπου η αριθμογραμμή δεν χρησιμοποιείται συχνά στο πλαίσιο της διδασκαλίας τους για τους αριθμούς.

Πέρα από τις διαφορές που επέφερε η διαφορετική μορφή των εκτιμήσεων (έργα NP ή έργα PN) στην επιτυχία αυτών των εκτιμήσεων, διαφορές επίσης εντοπίστηκαν στον τρόπο πραγματοποίησης των εκτιμήσεων ανάμεσα στους συμμετέχοντες. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκαν υπερεκτιμήσεις των μικρότερων τιμών και υποεκτιμήσεις των μεγαλύτερων τιμών από τα παιδιά στις δοκιμασίες οι οποίες ζητούσαν να βάλουν ένα σημάδι πάνω στην αριθμογραμμή που να αντιστοιχεί στη θέση ενός συγκεκριμένου αριθμού που δίνονταν (NP). Αντίθετα, δεν παρατηρήθηκε κάτι ανάλογο στη δεύτερη μορφή έργου (PN). Η τάση αυτή των παιδιών στα έργα NP δεν τα εμπόδισε να παρουσιάσουν σημαντικά υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες του έργου NP σε σχέση με τις δοκιμασίες του έργου PN. Το εύρημα αυτό ενδεχομένως δείχνει αφενός ότι οι εκτιμήσεις που παράγονται στα έργα τύπου PN ακολουθούν γραμμική πορεία χωρίς όμως να είναι πάντα ακριβείς και αφετέρου ότι τα έργα τύπου PN ευνοούν περισσότερο γραμμικές εκτιμήσεις. Οι εκτιμήσεις των ενηλίκων, αν και διέφεραν ως προς την επιτυχία τους μεταξύ των δύο έργων, δεν εμφάνισαν το μοτίβο της υπερεκτίμησης για τις μικρές τιμές και της υποεκτίμησης για τις μεγάλες τιμές, εύρημα που πιθανότατα δικαιολογείται από τον μεγάλο αριθμό επιτυχών εκτιμήσεών τους. Περαιτέρω έρευνα σχετικά με τον ρόλο που διαδραματίζει το είδος των εκτιμήσεων οπωσδήποτε κρίνεται απαραίτητη, προκειμένου να αναζητηθούν οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να βοηθηθούν μικροί και μεγάλοι ώστε να αναπτύξουν σε μεγαλύτερο βαθμό την ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή.

Τρίτον, το είδος και το μέγεθος των αριθμών επηρέασε τις εκτιμήσεις που πραγματοποιήθηκαν στην αριθμογραμμή. Οι εκτιμήσεις όλων των συμμετεχόντων ήταν περισσότερο επιτυχείς όταν αφορούσαν δεκαδικούς αριθμούς παρά όταν αφορούσαν κλάσματα. Ήταν, δηλαδή, πιο εύκολο για τα παιδιά και τους ενήλικες να εκτιμήσουν τη θέση του 0,23 παρά να εκτιμήσουν τη θέση του $\frac{2}{9}$ πάνω στην ίδια αριθμογραμμή. Το εύρημα αυτό, που βρέθηκε να ισχύει και για τα δύο είδη έργων, φανερώνει τον ρόλο που παίζει η εξοικείωση των συμμετεχόντων με τους δεκαδικούς αριθμούς και τα μεγέθη που αντιπροσωπεύουν στην πραγματοποίηση επιτυχών εκτιμήσεων (Dackermann et al., 2015; Ebersbach et al., 2015; Peeters et al., 2017; Siegler et al., 2011). Χρειάζεται, ωστόσο, να επισημανθεί ότι η επιλογή διαχωρισμού των συμμετεχόντων σε δύο υπο-ομάδες, μία εκ των οποίων έλαβε τις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς και η άλλη με κλάσματα, αν και επιτρέπει τη σύγκριση των εκτιμήσεων που πραγματοποίησαν οι συμμετέχοντες για τα ίδια αριθμητικά μεγέθη, αποτελεί περιορισμό της παρούσας εργασίας, καθώς πάντα υπάρχει η πιθανότητα να συμμετέχουν σε κάποια από τις δυο υπο-ομάδες άτομα με καλύτερη επίδοση στο ένα είδος αριθμών σε σχέση με το άλλο. Βέβαια μια τέτοια πιθανότητα είναι ομολογουμένως μικρή, καθώς εν γένει τεκμηριώνεται στη βιβλιογραφία μεγαλύτερη ευχέρεια με τους δεκαδικούς αριθμούς παρά με τα κλάσματα. Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να μελετηθεί περαιτέρω η συγκεκριμένη συνθήκη ώστε να υπάρχει ολοκληρωμένη εικόνα του τρόπου με τον οποίο οι ίδιοι συμμετέχοντες θα διαχειρίζονταν τους αριθμούς με διαφορετικές σημειολογικές εκφράσεις και θα πραγματοποιούσαν τις εκτιμήσεις τους.

Η δυσκολία των συμμετεχόντων μάλιστα να παραγάγουν εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή εντάθηκε όταν αυτές οι εκτιμήσεις αφορούσαν κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς με αξία μεγαλύτερη της μονάδας. Φαίνεται λοιπόν πως οι ενήλικες, αν και είναι αρκετά εξοικειωμένοι με το να πραγματοποιούν εκτιμήσεις με ρητούς αριθμούς που είναι μικρότεροι της μονάδας στην αριθμογραμμή, δυσκολεύονται περισσότερο να εκτιμήσουν ρητούς αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας. Το ίδιο ισχύει και για τα παιδιά της Στ' τάξης, τα οποία παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία στις εκτιμήσεις με ρητούς αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας σε αριθμογραμμή με εύρος 0-5. Σε παρόμοια ευρήματα κατέληξαν οι Siegler et al. (2011) οι οποίοι βρήκαν ότι παιδιά 12 και 14 ετών δυσκολεύονται να εκτιμήσουν ρητούς αριθμούς στην αριθμογραμμή, ειδικά όταν πρόκειται για καταχρηστικά κλάσματα.

Τέταρτον, η παρουσία των σημείων αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή λειτούργησε θετικά για τους ενήλικες, αλλά δεν φάνηκε να επηρεάζει τα παιδιά. Ανεξάρτητα από το αν καλούνταν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις έχοντας τα δύο άκρα (έναρξη και τέλος) ή το ένα άκρο (έναρξη) και ένα ενδιάμεσο σημείο πάνω στην αριθμογραμμή, οι ενήλικες βασίζονταν σε αυτά και οι εκτιμήσεις τους ήταν περισσότερο ακριβείς. Οποσδήποτε οι εκτιμήσεις τους βοηθήθηκαν περαιτέρω, όταν υπήρχε η δυνατότητα στήριξης σε κάποιο επιπλέον σημείο πάνω στην αριθμογραμμή όπως, για παράδειγμα, ένα ενδιάμεσο σημείο, το οποίο μπορούσε να λειτουργήσει ως κεντρικό σημείο αναφοράς. Η πραγματοποίηση των εκτιμήσεων πιθανότατα βασίστηκε σε αναλογικές σχέσεις και η παρουσία των σημείων αναφοράς συνέβαλε θετικά στην ακρίβεια των εκτιμήσεών τους. Κατά συνέπεια, η χρήση σημείων αναφοράς (όπως αρχικό σημείο, τελικό σημείο και ενδιάμεσο σημείο) θεωρείται υψίστης σημασίας για την εύρεση της θέσης ενός αριθμού σε μία αριθμογραμμή. Αν και δεν μελετήθηκαν οι στρατηγικές των συμμετεχόντων, φάνηκε πως ακόμα και στις εκτιμήσεις με τα κλάσματα οι ενήλικες χώριζαν με κάποιο τρόπο την αριθμογραμμή και σκέφτονταν αναλογικά. Με άλλα λόγια, συχνά επινοούσαν και χρησιμοποιούσαν δικά τους σημεία αναφοράς επιμερίζοντας περαιτέρω την αριθμογραμμή. Παρόμοια τάση είχαν επισημάνει οι Peeters, Verschaffel, & Luwel (2017) σε ενήλικες που πραγματοποιούσαν εκτιμήσεις με οριοθετημένες αριθμογραμμές από το 0 έως το 1.000. Σε αντίθεση με τους ενήλικες, τα παιδιά στην παρούσα έρευνα δεν στηρίχτηκαν στα σημεία αναφοράς (ενδιάμεσα και μη), και οι εκτιμήσεις τους δεν επηρεάστηκαν από αυτά. Είναι πιθανόν η περιορισμένη εξοικείωση των παιδιών με τους ρητούς αριθμούς να μην τους επέτρεψε να αξιοποιήσουν τα σημεία αναφοράς που τους δόθηκαν. Με δεδομένο ότι υπάρχουν πρόσφατα ερευνητικά στοιχεία που δείχνουν ότι ούτε και οι ενήλικες στηρίζονται σε σημεία αναφοράς όταν πραγματοποιούν εκτιμήσεις για φυσικούς αριθμούς με τη χρήση μη οριοθετημένων γραμμών (Jung, Roesch, Klein, Dackermann, Heller, & Moeller, 2020), η επίδραση της παρουσίας των σημείων αναφοράς αξίζει να εξεταστεί περαιτέρω αναφορικά με τις εκτιμήσεις για τους ρητούς αριθμούς και τις στρατηγικές που υιοθετούνται.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως αρκετοί είναι οι ερευνητές που θεωρούν ότι η χρήση της αριθμογραμμής είναι αρκετά απαιτητική καθώς επιπρόσθετα περιλαμβάνει την αντιστοίχιση μεταξύ αριθμού και φυσικού χώρου (Barth & Paladino, 2011. Libertus, Odic, Feigenson &

Halberta, 2016) και, ως εκ τούτου, οι εκτιμήσεις σε αυτήν είναι πιθανόν να επηρεάζονται από τη χωρική ικανότητα των ατόμων. Αν και η παρούσα μελέτη ήταν μια μελέτη μικρής κλίμακας, προτείνουμε ότι υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω έρευνα σχετικά με τη σχέση της εκτίμησης σε αριθμογραμμή και τις ευρύτερες μαθηματικές ικανότητες. Τα ευρήματα από την παρούσα εργασία θα μπορούσαν να επεκτείνουν τη βιβλιογραφία για τις αναπαραστάσεις των ατόμων για τους ρητούς αριθμούς και τις εκτιμήσεις για τη θέση τους πάνω σε αριθμογραμμή οι οποίες θεωρούνται θεμελιώδεις και απαραίτητες για μεγάλο εύρος μαθηματικών ικανοτήτων, αλλά και για την προοπτική ένταξης και συστηματικής αξιοποίησης της αριθμογραμμής ως αναπαραστατικού μοντέλου στη διδασκαλία των δεκαδικών και των κλασματικών αριθμών.

Αναφορές

- Barth, H.C., & Paladino, A.M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science*, 14(1), 125-135. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2010.00962.x>
- Bryman, A. (2017). *Μέθοδοι κοινωνικής έρευνας* (Α. Αϊδίνης, Επιστ. επιμ.). Gutenberg.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Dackermann, T., Huber, S., Bahnmüller, J., Nuerk, H-C., & Moeller, K. (2015). An integration of competing accounts on children's number line estimation. *Frontiers in Psychology*, 6-884, 1-7. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00884>
- Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: Είδη και εφαρμογές τους*. Αθήνα: Gutenberg.
- Δεσλή, Δ., & Τριανταφύλλου, Ε. (2019). Εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων από παιδιά Α' και Β' Δημοτικού. *International Journal of Educational Innovation*, 1, 28-36. <https://journal.epek.gr/issue/vol-1-2019>
- Dowker, A., & Li, A.M. (2019). English and Chinese children's performance on numerical tasks. *Frontiers in Psychology*, 9 (Article 2731). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02731>
- Ebersbach, M., Luwel, K., Frick, A., Onghena, P., & Verschaffel, L. (2008). The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5- to 9-year-old children: Evidence from a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology*, 99(1), 1-17. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2007.08.006>
- Ebersbach, M., Luwel, K., & Verschaffel, L. (2015). The relationship between children's familiarity with numbers and their performance in bounded and unbounded number line estimations. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2-3), 136-154. <https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016813>

- Fitzsimmons, C.J., Thompson, C.A., & Sidney, P.G. (2020). Confident or familiar? The role of familiarity ratings in adults' confidence judgments when estimating fraction magnitudes. *Metacognition and Learning*. <https://doi.org/10.1007/s11409-020-09225-9>
- Huber, S., Moeller, K., & Nuerk, H.-C. (2014). Dissociating number line estimations from underlying numerical representations. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67(5), 991-1003. <http://dx.doi.org/10.1080/17470218.2013.838974>
- Iuculano, T., & Butterworth, B. (2011). Understanding the real value of fractions and decimals. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 64(11), 2088–2098. <https://doi.org/10.1080/17470218.2011.604785>
- Libertus, M.E., Odic, D., Feigenson, L., & Halberda, J. (2016). The precision of mapping between number words and the approximate number system predicts children's formal math abilities. *Journal of Experimental Child Psychology*, 150, 207–226. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.06.003>
- Link, T., Huber, S., Nuerk, H.-C., & Moeller, K. (2014). Unbounding the mental number line – new evidence on children's spatial representation of numbers. *Frontiers in Psychology*, 4 (Article 1021). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.01021>
- Jung, S., Roesch, S., Klein, E., Dackermann, T., Heller, J., & Moeller, K. (2020). The strategy matters: Bounded and unbounded number line estimation in secondary school children. *Cognitive Development*, 53 (Article 100839). <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2019.100839>
- Patalano, A.L., Zax, A., Williams, K., Mathias, L., Cordes, S., & Barth, H. (2020). Intuitive symbolic magnitude judgments and decision making under risk in adults. *Cognitive Psychology*, 118 (Article 101273). <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2020.101273>
- Peeters, D., Degrande, T., Ebersbach, M., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2016). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education*, 31(2), 117–134. <https://doi.org/10.1007/s10212-015-0251-z>
- Peeters, D., Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2017). Evaluating the effect of labeled benchmarks on children's number line estimation performance and strategy use. *Frontiers in Psychology*, 8 (Article 1082). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01082>
- Peeters, D., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2017). Benchmark-based strategies in whole number line estimation. *British Journal of Psychology*, 108(4), 668–686. <https://doi.org/10.1111/bjop.12233>
- Reinert, R.M., Hartmann, M., Huber, S., & Moeller, K. (2019). Unbounded number line estimation as a measure of numerical estimation. *PLoS One*, 14(3), e0213102. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0213102>
- Schneider, M., Grabner, R.H., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101(2), 359-372. <https://doi.org/10.1037/a0013840>

- Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. *Child Development, 89*(5), 1467-1484. <https://doi.org/10.1111/cdev.13068>
- Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2019). Measurement, development, and stimulation of computational estimation abilities in kindergarten and primary education: A systematic literature review. *Educational Research Review, 27*(1), 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.01.002>
- Siegler, R.S., & Booth, J.L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development, 75*(2), 428-444. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x>
- Siegler, R.S., & Opfer, J.E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14*(3), 237-243. <https://doi.org/10.1111/1467-9280.02438>
- Siegler, R.S., Thompson, C.A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>
- Σκουμπουρδή, Χ. (2008). Η αναπαράσταση της αριθμογραμμής στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 3*, 67-87. <https://doi.org/10.12681/enedim.18818>
- Slusser, E., & Barth, H. (2017). Intuitive proportion judgement in number-line estimation: Converging evidence from multiple tasks. *Journal of Experimental Child Psychology, 162*, 181-198. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.04.010>
- Slusser, E., Santiago, R., & Barth, H. (2013). Developmental change in numerical estimation. *Journal of Experimental Psychology: General, 142*(1), 193-208. <https://doi.org/10.1037/a0028560>
- Thompson, C.A., & Opfer, J.E. (2010). How 15 hundred is like 15 cherries: Effects of progressive alignment on representational changes in numerical cognition. *Child Development, 81*(6), 1768-1786. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2010.01509.x>
- Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R.S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5-13. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>