Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 17 (2023)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Τα διαγράμματα στην επίλυση προβλημάτων: δυσκολίες στη δημιουργία και στη χρήση τους από μαθητές της Δ' Δημοτικού

Άννα Μπακαλίδου, Μαριάννα Τζεκάκη

http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/index

ΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ: ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΣΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Μπακαλίδου Άννα και Τζεκάκη Μαριάννα

Παιδαγωγικό Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, mpakalidou@nured.auth.gr , tzekaki@nured.auth.gr

Περίληψη: Η παρούσα έρευνα εξετάζει τις δυσκολίες με τις οποίες οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι, όταν χρησιμοποιούν ή δημιουργούν διαγράμματα για να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα αθροιστικής δομής μίας πράξης πριν και μετά από μια διδακτική παρέμβαση για τη χρήση διαγραμμάτων. Για τη διερεύνηση των δυσκολιών δόθηκαν δύο τεστ (αρχικό και τελικό) σε 45 μαθητές της Δ' δημοτικού, οι οποίοι κλήθηκαν να επιλύσουν τρία προβλήματα με την παρότρυνση να σχεδιάσουν διαγράμματα και να τα χρησιμοποιήσουν. Οι δυσκολίες ταξινομήθηκαν σε τρεις κατηγορίες αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας, τη δημιουργία και τη χρήση ενός διαγράμματος. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι αρχικά όλοι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια του διαγράμματος κι αντίστοιχα να το χρησιμοποιήσουν. Μετά τη διδακτική παρέμβαση οι δυσκολίες των μαθητών περιορίστηκαν και αφορούσαν κυρίως τη δημιουργία ενός διαγράμματος ως προς τη συμπλήρωση των δεδομένων-ζητούμενου στη σωστή θέση ή τη χρήση του κυρίως σε προβλήματα Σύγκρισης και Αλλαγής.

Λέξεις κλειδιά: επίλυση μαθηματικού προβλήματος, λεκτικό πρόβλημα, διαγράμματα στην ΕΜΠ, δυσκολίες χρήσης διαγραμμάτων

Abstract: The present study examines students' difficulties while generating and using diagrams to solve one-step addition and subtraction word problems before and after a teaching intervention for the use of diagrams. For this purpose, two tests (pretest and posttest) were given to 45 fourth-grade students, who were asked to solve three problems with the prompt to generate and use diagrams. Difficulties were classified into three categories regarding the understanding of the concept of a diagram, the ability to generate and to use one. Results indicated that at the pretest all students experienced difficulty in understanding the concept of a diagram and therefore use it. After the teaching intervention, students' difficulties were limited and mostly related to the generation of a diagram in terms of completing the requested data in the correct place or using it mainly in Comparison and Change problems.

Keywords: problem solving, math word problem, diagrams in problem solving, difficulties in using diagrams

Εισαγωγή

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (ΕΜΠ) θεωρείται ότι αποτελεί κεντρικό σημείο της μαθηματικής εκπαίδευσης, γιατί είναι μία βασική διδακτική πρακτική για την οικοδόμηση μαθηματικών γνώσεων (Τζεκάκη, 2007), αλλά επίσης αποτελεί και μια αναγκαία ικανότητα για τους ανθρώπους, καθώς έχει το σημαντικό μαθησιακό αποτέλεσμα να τους υποστηρίζει στη λύση προβλημάτων στην καθημερινή και επαγγελματική τους ζωή (Jonassen, 2003).

Η επίλυση προβλήματος έχει ερευνηθεί συστηματικά για πολλές δεκαετίες, με τον όρο «μαθηματικό πρόβλημα» να επεξηγείται με διάφορους ορισμούς. Σύμφωνα με τους επικρατέστερους, κάνουμε λόγο για «πρόβλημα» όταν βρισκόμαστε σε μια δεδομένη κατάσταση και επιδιώκουμε να φτάσουμε σε μια κατάσταση-στόχο, αλλά δεν υπάρχει προφανής τρόπος για να μεταφερθούμε από τη μία κατάσταση στην άλλη (Mayer & Hegarty, 1996; Polya, 1957; Schoenfeld, 1985). Υπάρχουν διαφόρων ειδών προβλήματα τα οποία ποικίλουν από αλγοριθμικά μαθηματικά προβλήματα έως πολύπλοκα κοινωνικά προβλήματα (Jonassen, 2003). Ένα πρόβλημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως μαθηματικό πρόβλημα, όταν μια μαθηματική διαδικασία -αριθμητική ή αλγεβρική- απαιτείται για την επίλυσή του.

Ο όρος «λεκτικά προβλήματα» (word problem) αναφέρεται σε περιγραφές προβληματικών καταστάσεων, όπου το πρόβλημα δεν παρουσιάζεται με τη χρήση μαθηματικών συμβόλων αλλά με αφηγηματική μορφή, δηλαδή μέσω ενός κειμένου που περιγράφει μια κατάσταση και μιας ή περισσότερων ερωτήσεων, που πρέπει να απαντηθούν εκτελώντας μαθηματικές πράξεις που προέρχονται από τις περιγραφές στο κείμενο (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000; Verschaffel, Schukajlow, Star, & Van Dooren, 2020). Καθώς τα λεκτικά προβλήματα περιλαμβάνουν κάποιου είδους αφήγηση, συχνά τα συναντάμε και με τον όρο «προβλήματα ιστορίας» (story problems) (Verschaffel et al., 2000). Συνήθως στα κλασικά προγράμματα σπουδών με τον όρο «πρόβλημα» εννοούμε λεκτικά αριθμητικά προβλήματα που επιλύονται από τους μαθητές αφού βρουν και εκτελέσουν σωστά κάποιες αριθμητικές πράξεις (Τζεκάκη, 2007). Αν και τα λεκτικά προβλήματα έχουν «κατηγορηθεί» πολλές φορές ότι αφορούν απλά μια ποσοτική λύση ενσωματωμένη σε ένα ρηχό πλαίσιο ιστορίας και τις περισσότερες φορές οι μαθητές χρησιμοποιούν μια διαδικαστική προσέγγιση για τη λύση τους, μεταφράζοντας απευθείας τις τιμές του προβλήματος σε επιλύσιμους αλγόριθμους, ωστόσο είναι αυτά από τα οποία ξεκινούν οι μαθητές την εμπειρία τους με την επίλυση προβλήματος, συναντούν περισσότερο συχνά στα σχολικά εγχειρίδια και εξυπηρετούν πολλούς σκοπούς στη μαθηματική εκπαίδευση (Jonassen, 2003). Προσφέρουν ποικιλία στην εξάσκηση βασικών μαθηματικών πράξεων και προετοιμάζουν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές δεξιότητες έξω από την τάξη σε καθημερινές καταστάσεις (Pongsakdi et al., 2020). Ο Schoenfeld (1985) χώρισε τα λεκτικά προβλήματα σε αυτά που είναι ρουτίνας (routine problems), για την επίλυση των οποίων απαιτείται η εφαρμογή υπολογισμών και σε αυτά που δεν είναι ρουτίνας (non-routine problems), τα πρωτότυπα, που δεν απαιτούν τυπικούς υπολογισμούς για την επίλυσή τους αλλά την εφαρμογή κάποιας συγκεκριμένης στρατηγικής.

Στο πλαίσιο του σχεδιασμού διδακτικών μεθόδων, που αναπτύσσουν την ικανότητα των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων, προτάθηκαν διάφορα μοντέλα, στρατηγικές και ευρετικές, για να καταστήσουν τους μαθητές επιτυχημένους λύτες λεκτικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Arcavi (2003) η οπτικοποίηση μπορεί να έχει έναν ισχυρό συμπληρωματικό ρόλο κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, καθώς οι αναπαραστάσεις υποστηρίζουν και απεικονίζουν τα βασικά συμβολικά αποτελέσματα, ορίζουν έναν πιθανό τρόπο επίλυσης της σύγκρουσης μεταξύ σωστών και εσφαλμένων συμβολικών λύσεων και λειτουργούν ως ένας βοηθητικός μοχλός για τους μαθητές, ώστε να επανασυνδέσουν και να ανακτήσουν εννοιολογικές βάσεις, που συχνά παρακάμπτονται εύκολα από επίσημες λύσεις. Παρόμοια, και οι van Garderen, Scheuermann και Poch (2014) υποστήριξαν ότι μια στρατηγική που συνιστάται συχνά για την επίλυση των μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων είναι η χρήση οπτικών (εξωτερικών) αναπαραστάσεων, οι οποίες σε διαφορετικό βαθμό η καθεμιά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση. Η χρήση ενός διαγράμματος αποτελεί μία από αυτές τις στρατηγικές, καθώς τα διαγράμματα μπορούν να υποστηρίξουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών, αν και οι ίδιοι συχνά δείχνουν απροθυμία να τα χρησιμοποιήσουν (Diezmann & English, 2001). Η έλλειψη της απαραίτητης εξοικείωσης και γνώσης των μαθητών για τα διαγράμματα κάνει φανερή την ανάγκη υποστήριξης, ώστε να μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν ως ένα αποτελεσματικό μαθηματικό εργαλείο (Diezmann & English, 2001).

Διεθνείς έρευνες που μελέτησαν τη σχέση της χρήσης των διαγραμμάτων με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων σε μαθητές χωρίς να έχει προηγηθεί κάποια διδασκαλία πάνω στον τομέα αυτό, εντόπισαν σημαντικές δυσκολίες στην πλειοψηφία των μαθητών στην αποκωδικοποίηση αυτής της μορφής αναπαραστάσεων λόγω έλλειψης προηγούμενης εμπειρίας (Diezmann, 2000b; Lowrie & Diezmann, 2005; Pantziara, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004; van Garderen et al., 2014). Από την άλλη πλευρά τα αποτελέσματα ερευνών που αφορούν προγράμματα παρέμβασης είναι ενθαρρυντικά, γιατί έδειξαν ότι η εφαρμογή ενός μοντέλου διδασκαλίας που βασίζεται στη διαγραμματική απεικόνιση των προβλημάτων με στόχο την προώθηση των νοητικών σχημάτων που βοηθούν στην ΕΜΠ μπορεί να έχει πιο θετικά αποτελέσματα από την παραδοσιακή διδασκαλία (Griffin & Jitendra, 2009; Willis & Fuson, 1988; Χαραλάμπους, 2003).

Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, η οποία αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης διδακτορικής έρευνας που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε πάνω στη χρήση διαγραμμάτων κατά την επίλυση και κατασκευή προβλημάτων, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται γύρω από τις δυσκολίες με τις οποίες οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι, όταν χρησιμοποιούν ή δημιουργούν διαγράμματα κατά τη διαδικασία επίλυσης λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων (ρουτίνας), και συγκεκριμένα προβλημάτων αθροιστικής δομής που για την επίλυσή τους απαιτείται η εκτέλεση μίας πράξης (πρόσθεσης ή αφαίρεσης).

Θεωρητικό πλαίσιο

Κατηγοριοποίηση προβλημάτων αθροιστικής δομής

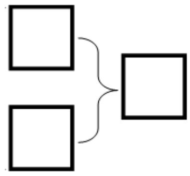
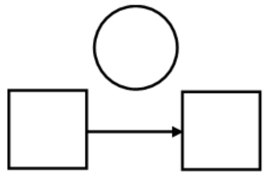
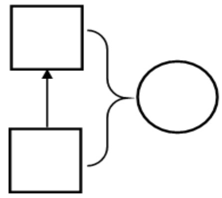
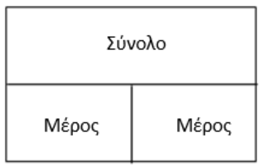
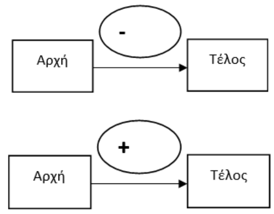
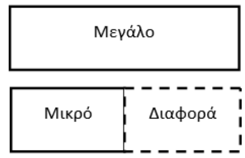
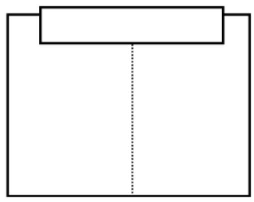
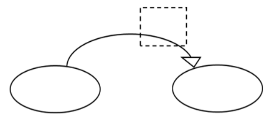
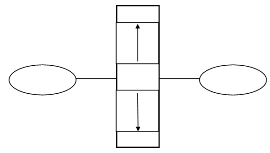
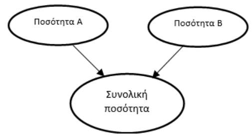
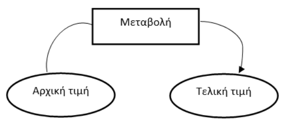
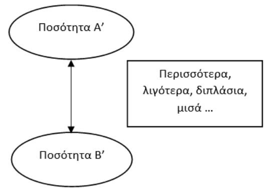
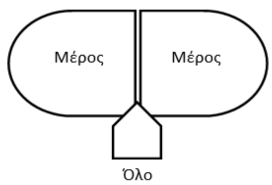
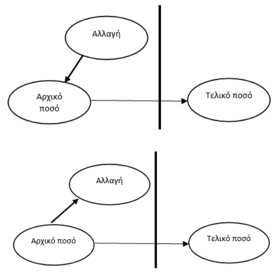
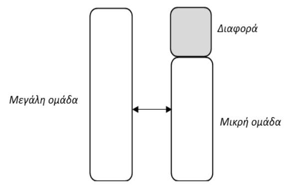
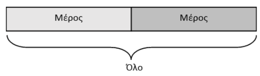
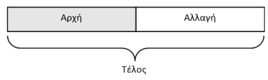
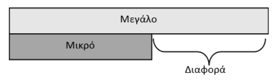
Εκκινώντας από τον Vergnaud (1982), που ανέλυσε λεπτομερώς το είδος των καταστάσεων που μπορούν να εντοπιστούν σε ένα λεκτικό πρόβλημα αθροιστικής δομής και κατέταξε τα προβλήματα σε 6 βασικές κατηγορίες, κι άλλοι ερευνητές (Carpenter, Hiebert, & Moser, 1981; Fuson, 1992; Nesher, 1986; Riley, Greeno, & Heller, 1983; Van de Walle, 2007) μελέτησαν αυτά τα προβλήματα και πρότειναν αντίστοιχες κατηγοριοποιήσεις. Συνοψίζοντας, οι ερευνητές καταλήγουν σε 3 μεγάλες βασικές κατηγορίες: τα προβλήματα Συνδυασμού, τα προβλήματα Αλλαγής και τα προβλήματα Σύγκρισης. Σύμφωνα με κάποιους ερευνητές υπάρχει και μία τέταρτη κατηγορία, που συναντάται πιο σπάνια, τα προβλήματα εξομοίωσης/εξίσωσης (Carpenter, Hiebert, & Moser, 1981; Fuson, 1992), τα οποία δεν χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα. Τα προβλήματα κάθε κατηγορίας μπορούν να διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τις σημασιολογικές σχέσεις (συνδυασμοί, αυξήσεις/μειώσεις, συγκρίσεις μεταξύ των ποσοτήτων) που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή της προβληματικής κατάστασης (Riley, Greeno, & Heller, 1983) αλλά και ως προς τη θέση που κατέχει η άγνωστη ποσότητα (Nesher, Greeno, & Riley, 1982). Με βάση αυτά τα κριτήρια μπορούν να προκύψουν 14 υποκατηγορίες για τα προβλήματα αθροιστικής δομής: δύο στην κατηγορία του Συνδυασμού, έξι στην κατηγορία της Αλλαγής και έξι στην κατηγορία της Σύγκρισης.

Κατηγοριοποίηση διαγραμμάτων

Με τον όρο «διάγραμμα» αναφερόμαστε σε μια οπτική αναπαράσταση που εμφανίζει τις πληροφορίες σε χωρική διάταξη (Diezmann & English, 2001; Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Τα διαγράμματα βασίζονται συνήθως σε συμβάσεις, για να απεικονίσουν τόσο τα στοιχεία της κατάστασης που αναπαρίσταται όσο και την οργάνωσή τους (Pantziara, Gagatsis, & Elia, 2009) και διαφέρουν από τις εικόνες και τα σχέδια, γιατί είναι δομικές αναπαραστάσεις στις οποίες οι επιφανειακές λεπτομέρειες είναι ασήμαντες (Diezmann & English, 2001).

Δύο βασικές κατηγορίες των διαγραμμάτων είναι τα διαγράμματα γενικού σκοπού και τα σχηματικά διαγράμματα. Για τα διαγράμματα γενικού σκοπού οι Novick, Hurley και Francis (1999) πρότειναν τρία διαγράμματα, τα οποία φαίνεται να καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων: τον πίνακα (matrix), το δίκτυο/αραχνόγραμμα (network) και το διάγραμμα ιεράρχησης (hierarchy). Έπειτα σε αυτά προστέθηκε και ένα ακόμα, το διάγραμμα του μέρους – όλου (part-whole). Από την άλλη μεριά, τα σχηματικά διαγράμματα, με πρώτα αυτά του Vergnaud (1982), δίνουν έμφαση στις νοητικές λειτουργίες που λαμβάνουν χώρα, ώστε να ερμηνεύσουν τις σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία ενός προβλήματος. Σε αυτά τα διαγράμματα οι ερευνητές χρησιμοποιούν σχήματα (π.χ. κύκλους, τετράγωνα) μέσα στα οποία δηλώνονται οι γνωστές και οι άγνωστες ποσότητες και βέλη ή/και αγκύλες, για να δηλωθεί η σχέση (συνένωση, αλλαγή, σύγκριση) μεταξύ αυτών των ποσοτήτων.

Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε να γίνει χρήση των σχηματικών διαγραμμάτων, γιατί το καθένα εστιάζει και αναδεικνύει τη δομή των προβλημάτων που αντιπροσωπεύει, ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκει. Έτσι από δω και στο εξής με τον όρο «διαγράμματα» θα αναφερόμαστε στα σχηματικά διαγράμματα. Για κάθε κατηγορία προβλήματος αθροιστικής δομής οι ερευνητές προτείνουν ένα κατάλληλο διάγραμμα, το οποίο αναμένεται να βοηθήσει τους μαθητές στην αναγνώριση της προβληματικής κατάστασης και στην επίλυση του προβλήματος (Πίνακας 1).

Ερευνητές	Προβλήματα Συνδυασμού	Προβλήματα Αλλαγής	Προβλήματα Σύγκρισης
Vergnaud (1982)			
Willis και Fuson (1988)			
Marshall (1995)			
Χαραλάμπους (2003)			
Van de Walle (2007)			
Chan και Kwan (2021)			

Πίνακας 1: Διαγράμματα για κάθε κατηγορία προβλήματος αθροιστικής δομής

Ερευνητικά ευρήματα για τις δυσκολίες των μαθητών με τα διαγράμματα

Οι Diezmann και English (2001) αναφέρουν ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη δημιουργία και χρήση διαγραμμάτων στην ΕΜΠ εξαρτώνται από τρεις παράγοντες: την έλλειψη της κατανόησης της έννοιας του διαγράμματος, την αδυναμία τους να δημιουργήσουν επαρκή διαγράμματα και την αδυναμία τους να τα χρησιμοποιήσουν σωστά, για να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα.

Όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας του διαγράμματος έρευνες έδειξαν ότι οι μικροί μαθητές (6 ως 9 ετών) είτε δεν σχεδιάζουν αυθόρμητα καμία αναπαράσταση, για να επιλύσουν προβλήματα (Fagnant & Vlassis, 2013) είτε δεν αντιλαμβάνονται τα σχέδια ως μέρος της επίλυσης προβλημάτων, πιθανότατα επειδή δεν έχουν εξοικείωση με αυτά (Bakar, Way, & Bobis, 2016). Στην έρευνα των van Garderen et al. (2014) μαθητές από Δ' δημοτικού έως Α' γυμνασίου δεν μπόρεσαν να εξηγήσουν τι είναι ένα διάγραμμα και πώς θα μπορούσε η χρήση του να ωφελήσει στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Εξετάζοντας τα είδη των αναπαραστάσεων που σχεδιάζουν μαθητές της Β' δημοτικού (Saundry & Nicol, 2006) αλλά και μεγαλύτεροι μαθητές της Στ' τάξης (Hegarty & Kozhevnikov, 1999) για την επίλυση ενός προβλήματος εντοπίζουν κυρίως εικονογραφικές παραστάσεις (κάποιες περίτεχνα καλλιτεχνικές) και όχι οπτικο-σχηματικές. Ωστόσο πολλές έρευνες συνδέουν την παραγωγή και χρήση με ακρίβεια οπτικοσχηματικών αναπαραστάσεων με την επιτυχή επίλυση λεκτικών προβλημάτων (Boonen, van Wesel, Jolles, & van der Schoot, 2014; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; van Garderen & Montague, 2003).

Αναφορικά με τις δυσκολίες κατά τη δημιουργία διαγραμμάτων για μαθητές Ε' δημοτικού, η Diezmann (2000a, 2000b) τις απέδωσε περισσότερο στην έλλειψη μιας γερής βάσης μαθηματικών γνώσεων παρά στη δομή των προβλημάτων ή τη δημιουργία ενός συγκεκριμένου τύπου διαγράμματος (Diezmann, 2000a). Στη συνέχεια, η ίδια χώρισε τις δυσκολίες αυτές σε τρεις κατηγορίες: τη μη χρήση διαγραμμάτων (έλλειψη κατανόησης της έννοιας), τις γενικές δυσκολίες με τα κατάλληλα διαγράμματα (εσφαλμένη αναπαράσταση της ποσότητας, μικρό μέγεθος διαγραμμάτων, έλλειψη χώρου γύρω από αυτό, προχειροδουλειά) και τις ατομικές δυσκολίες με αυτά (έλλειψη ακρίβειας των διαγραμμάτων, παράβλεψη των περιορισμών, λανθασμένη επισήμανση των ποσοτήτων, εσφαλμένη σχέση, Diezmann, 2000b). Τα στοιχεία αυτά (διαγράμματα χαμηλότερης ποιότητας, χωρίς ακρίβεια στις πληροφορίες και μη κατάλληλο διάγραμμα για ένα δεδομένο πρόβλημα) εμφανίζουν και μαθητές από Δ' δημοτικού έως Α' γυμνασίου με μαθησιακές δυσκολίες (van Garderen, Scheuermann, & Jackson, 2013; van Garderen et al., 2014). Για παιδιά Β΄ δημοτικού που παρουσίασαν σωστά διαγράμματα για μια δεδομένη κατηγορία αθροιστικού προβλήματος με σωστή εισαγωγή των αριθμών από το πρόβλημα στο διάγραμμα, οι ερευνητές εντόπισαν δυσκολίες κυρίως στις κατηγορίες προβλημάτων που αφορούν σύγκριση (Willis & Fuson, 1988).

Σχετικά με τη χρήση διαγραμμάτων σε μαθητές της Δ' τάξης εντοπίστηκαν δυσκολίες με διάφορες γραφικές παραστάσεις (γραφήματα, διαγράμματα, πίνακες, χάρτες) αλλά και βελτίωση με την πάροδο του χρόνου χωρίς κάποια διδακτική παρέμβαση (Lowrie & Diezmann, 2007). Ο Lowrie (2020) εξηγεί ότι η δυσκολία στη χρήση διαγραμματικής αναπαράστασης των μαθητών της Στ' στα δύσκολα προβλήματα πιθανόν οφείλεται στην αδυναμία τους να δημιουργήσουν ένα νοητικό μοντέλο αναπαράστασης του προβλήματος. Σε έρευνες με μαθητές από Δ' δημοτικού έως Α' γυμνασίου επίσης εντοπίστηκαν αντίστοιχες δυσκολίες που σχετίζονταν με την ικανότητα χρήσης ενός διαγράμματος για την ΕΜΠ (van Garderen et al., 2013; van Garderen et al., 2014). Τέλος, η συχνότητα χρήσης διαγραμμάτων για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων από μαθητές της Στ' δημοτικού φάνηκε ότι επηρεάζεται από την πολυπλοκότητα των προβλημάτων, π.χ. οι μαθητές συνήθως χρησιμοποιούσαν οπτικές μεθόδους, για να λύσουν δύσκολα ή πρωτότυπα προβλήματα (Lowrie & Kay, 2001), ενώ από μαθητές του γυμνασίου φάνηκε πως επηρεάζεται από κοινωνικοπολιτισμικούς παράγοντες, π.χ. σύστημα εκπαίδευσης στη χώρα διαμονής (Manalo & Uesaka, 2006) ενώ η μικρότερη χρήση διαγραμμάτων φάνηκε να συνδέεται με έλλειψη αυτοπεποίθησης και με την αντίληψη ότι η χρήση των διαγραμμάτων ενέχει δυσκολίες (Uesaka, Manalo, & Ichikawa, 2007). Γενικά, ο Lowrie (2020) στην έρευνά του διαπίστωσε ότι η χρήση διαγραμματικών λύσεων από μαθητές της Στ' δημοτικού ήταν πιο πιθανό να οδηγήσει σε σωστές λύσεις σε προβλήματα με μέτριο επίπεδο δυσκολίας.

Στόχος της παρούσας εργασίας

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μικρότερων τάξεων του δημοτικού στη δημιουργία και στη χρήση διαγραμμάτων κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων έχουν ερευνηθεί σχετικά λίγο στο εξωτερικό αλλά καθόλου στην Ελλάδα. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα διάγραμμα μπορεί να είναι ένα ισχυρό εργαλείο δεδομένης της ευελιξίας του και έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να βοηθήσει στην καλή επίδοση στην επίλυση προβλημάτων (van Garderen et al., 2014), σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να αναδείξει τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές της Δ' δημοτικού στη δημιουργία και χρήση διαγραμμάτων κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων αθροιστικής δομής, και τη βελτίωση που μπορούν να παρουσιάσουν μετά από μία διδακτική παρέμβαση προσανατολισμένη προς αυτόν τον σκοπό. Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που θα γίνει προσπάθεια να απαντηθούν είναι: α) Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας του διαγράμματος πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση; β) Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών στη χρήση ενός διαγράμματος στην επίλυση λεκτικού προβλήματος πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση; και γ) Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών στη δημιουργία ενός διαγράμματος λεκτικού προβλήματος και μετά τη διδακτική παρέμβαση;

Μεθοδολογία

Η ευρύτερη έρευνα από την οποία αντλούμε απαντήσεις στα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα για το παρόν άρθρο στηρίχθηκε στη μέθοδο σχεδιασμού (Design based research). Η μέθοδος αυτή αφορά μελέτες κατά τις οποία γίνεται ένας αρχικός σχεδιασμός, πραγματοποιούνται διδακτικές παρεμβάσεις και καταγράφονται τα αποτελέσματα, με στόχο τη σύνδεση θεωρίας και εκπαιδευτικής πρακτικής (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004; Gravemeijer & Cobb, 2006). Η πρώτη φάση της έρευνας περιλάμβανε τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, τη διατύπωση του στόχου και των ερευνητικών ερωτημάτων, τον καθορισμό των συγκεκριμένων διαστάσεων των ικανοτήτων που αποτέλεσαν το αντικείμενο της (ευρύτερης) έρευνας και την κατασκευή εργαλείων αξιολόγησης (αρχικό και τελικό τεστ). Με τα ευρήματα της ερευνητικής βιβλιογραφίας και του αρχικού τεστ σχεδιάστηκε στη συνέχεια η διδακτική παρέμβαση, στη βάση των επιδιωκόμενων στόχων. Η δεύτερη φάση αφορούσε την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης. Το χαρακτηριστικό της μεθόδου σχεδιασμού είναι η κυκλική της φύση, γιατί οι εκπαιδευτικές ιδέες για τη μάθηση μπορούν να αναθεωρηθούν και να προσαρμοστούν κατά τη διάρκεια της εμπειρικής δοκιμής τους μέσα σε αυθεντικά περιβάλλοντα μάθησης. Το αποτέλεσμα είναι μια επαναληπτική διαδικασία σχεδιασμού που περιλαμβάνει κύκλους, οι οποίοι τυπικά αποτελούνται από τις ακόλουθες φάσεις: προετοιμασία και σχεδιασμός, εφαρμογή και αναδρομική ανάλυση (Collins et al., 2004; Gravemeijer & Cobb, 2006). Λεπτομέρειες σχετικές με τη διδακτική παρέμβαση αναλύονται παρακάτω. Τέλος, η τρίτη φάση αφορούσε την ανάλυση των δεδομένων για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων, η απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων και εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 45 μαθητές (21 κορίτσια και 24 αγόρια) της Δ’ τάξης του δημοτικού με μέσο όρο ηλικίας τα 9 έτη και 5 μήνες, από ιδιωτικό δημοτικό σχολείο με ποικιλία στις ακαδημαϊκές επιδόσεις. Οι γνώσεις τους σχετικά με την επίλυση προβλημάτων και τα διαγράμματα περιορίζονταν σε όσα προβλέπονται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά. Η επιλογή τους βασίστηκε στη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας.

Ερευνητικά εργαλεία

Τα ερευνητικά εργαλεία της ευρύτερης μελέτης (από την οποία αντλήθηκαν οι δυσκολίες των μαθητών) ήταν δύο τεστ, ένα αρχικό και ένα τελικό, που χορηγήθηκαν πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση αντίστοιχα. Για τα τεστ χρησιμοποιήθηκαν τρία λεκτικά προβλήματα αθροιστικής δομής μίας πράξης (ρουτίνας). Τα προβλήματα σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια στη βάση αντίστοιχων προβλημάτων που έχουν χρησιμοποιηθεί σε άλλες έρευνες (Christou & Philippou, 1998; Nesher, Greeno, & Riley, 1982), ώστε η ιστορία-πλαίσιο κάθε προβλήματος να περιέχει καταστάσεις που είναι οικείες με τα ενδιαφέροντα των παιδιών, να αναφέρονται στη σύγχρονη καθημερινή ζωή τους ή να κεντρίζουν το ενδιαφέρον τους να ασχοληθούν με αυτά. Δεν δόθηκε έμφαση στη δυσκολία των αριθμητικών πράξεων, για να μην επηρεάσει τη συμπλήρωση των δοκιμίων από τους μαθητές. Το αρχικό τεστ δοκιμάστηκε πιλοτικά σε 25 μαθητές της Δ’ δημοτικού, έτσι ώστε να εντοπιστούν τυχόν αδυναμίες στη διατύπωση των δοκιμίων και να γίνουν οι κατάλληλες διορθώσεις.

Καθένα από τα τρία δοκίμια των τεστ ήταν χωρισμένο σε τέσσερα μέρη, που αντιστοιχούσαν στα τέσσερα στάδια επίλυσης του Polya (1957), και σε κάθε μέρος αναγραφόταν μία οδηγία στην οποία καλούνταν να απαντήσουν οι μαθητές: «*Χώρισε τα δεδομένα από τα ζητούμενα. Κάνε ένα διάγραμμα, αν σε βοηθάει*», «*Περίγραψε τι θα κάνεις για να το λύσεις. Χρησιμοποίησε το διάγραμμά σου, αν έκανες πιο πάνω*», «*Κάνε την πράξη και γράψε την απάντησή σου*» και

«*Εξήγησε πώς έλεγξες ότι είναι σωστό το αποτέλεσμα*». Επιλέχθηκε να γίνει χρήση ενός προβλήματος από κάθε κατηγορία προβλημάτων αθροιστικής δομής που αναφέρθηκαν προηγουμένως, ξεκινώντας από την πιο εύκολη και καταλήγοντας στην πιο απαιτητική, για να υπάρχει ένα διαβαθμισμένο επίπεδο δυσκολίας. Ο βαθμός δυσκολίας των κατηγοριών καθορίστηκε από τα αποτελέσματα ερευνών που έχουν γίνει εξετάζοντας την επίδοση των μαθητών σε προβλήματα κάθε κατηγορίας. Έτσι, το 1ο δοκίμιο ήταν ένα πρόβλημα της κατηγορίας Συνδυασμού, το 2ο δοκίμιο ήταν πρόβλημα Αλλαγής και το 3ο δοκίμιο ήταν πρόβλημα Σύγκρισης (Εικόνα 1).

1. Η Δανάη λατρεύει τους ήρωες της Disney. Έχει 80 στρογγυλά αυτοκόλλητα με ήρωες, 60 τετράγωνα αυτοκόλλητα με ήρωες και 20 μολύβια με ήρωες. Πόσα αυτοκόλλητα έχει η Δανάη συνολικά;

2. Ο Αντώνης και η Έλενα παίζουν μαζί ένα παιχνίδι στον υπολογιστή. Ο Αντώνης χρειάζεται κάποιους πόντους, για να περάσει στο επόμενο επίπεδο. Η Έλενα θα τον βοηθήσει και θα του δώσει κάποιους από τους δικούς της πόντους. Η Έλενα είχε 560 πόντους στην αρχή και τώρα της έμειναν 320 πόντοι. Πόσους πόντους έδωσε στον Αντώνη;

3. Ο Φίλιππος και ο αδερφός του επισκέφθηκαν την παιδίατρο και τους μέτρησε το ύψος. Ο Φίλιππος έχει ύψος 125 εκατοστά και είναι κατά 15 εκατοστά κοντύτερος από τον αδερφό του. Ποιο είναι το ύψος του αδερφού του;

1. Ο Διονύσης αγαπάει πολύ τα γλυκά. Έχει ένα κουτί με 18 σοκολατάκια γάλακτος, 22 σοκολατάκια με μαύρη σοκολάτα και 10 γλειφιτζούρια φράουλα. Πόσα σοκολατάκια έχει συνολικά;

2. Ο Άλεξ και η Μαρίνα πήγαν να ψωνίσουν από το κυλικείο του σχολείου. Η Μαρίνα χρειάζεται κάποια χρήματα, για να αγοράσει αυτό που θέλει. Ο Άλεξ θα τη βοηθήσει και θα της δανείσει από τα δικά του. Ο Άλεξ είχε στην αρχή 150 λεπτά και τώρα του απομένουν 120 λεπτά. Πόσα λεπτά δάνεισε στη Μαρίνα;

3. Δύο φίλες, η Όλγα και η Κατερίνα, μετράνε τα ύψη τους στο μάθημα της Γυμναστικής. Η Όλγα έχει ύψος 145 εκατοστά και είναι κατά 15 εκατοστά ψηλότερη από την Κατερίνα. Ποιο είναι το ύψος της Κατερίνας;

Εικόνα 1: Τα δοκίμια του αρχικού τεστ (αριστερά) και του τελικού τεστ (δεξιά)

Ερευνητική διαδικασία

Η ολοκληρωμένη έρευνα πραγματοποιήθηκε σχεδόν καθ' όλη τη διάρκεια ενός διδακτικού έτους (2021-2022) εντός του ωρολογίου προγράμματος. Τον Νοέμβριο δόθηκε στους μαθητές το αρχικό τεστ. Από τον Δεκέμβριο μέχρι τον Μάρτιο ακολούθησε η διδακτική παρέμβαση που περιλάμβανε 10 διδασκαλίες (μία σχεδόν κάθε εβδομάδα) και τον Μάιο δόθηκε στους μαθητές το τελικό τεστ.

Για τη συμπλήρωση του κάθε τεστ χρειάστηκε μία διδακτική ώρα (45') και σχετικά με τη διδακτική παρέμβαση υπολογίστηκε ότι δαπανήθηκε μία διδακτική ώρα περίπου σε κάθε διδασκαλία, ώστε να διατηρηθεί η προσοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών. Ωστόσο κάποιες διδασκαλίες χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο (60'-90') καθώς αυξανόταν ο βαθμός δυσκολίας των προβλημάτων. Συνολικά αφιερώθηκαν 15 διδακτικές ώρες για την παρέμβαση. Οι μαθητές ενθαρρύνονταν να εξηγούν και να αιτιολογούν τις απαντήσεις τους, να επιχειρούν να κατανοήσουν τις εξηγήσεις που δίνονταν από συμμαθητές τους, να αναφέρουν αν συμφωνούν ή διαφωνούν με τις απαντήσεις άλλων και να προβληματίζονται πάνω σε εναλλακτικές, όταν εμφανίζονταν διάφορες ερμηνείες ή λύσεις.

Διδακτική παρέμβαση

Στο επίκεντρο μιας έρευνας σχεδιασμού βρίσκεται μια κυκλική διαδικασία σχεδιασμού και δοκιμής των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων και άλλων πτυχών της διδακτικής παρέμβασης (Gravemeijer & Cobb, 2006). Έτσι, σε κάθε κύκλο διδασκαλίας η ερευνήτρια διεξήγαγε μια υπόθεση, κάνοντας εικασίες πώς οι προτεινόμενες εκπαιδευτικές δραστηριότητες θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν διαδραστικά από την ίδια και τους μαθητές και τι θα μπορούσαν να μάθουν οι μαθητές καθώς συμμετείχαν σε αυτές στη βάση των επιδιωκόμενων στόχων. Με αυτόν τον τρόπο κάθε διδασκαλία της παρέμβασης θεωρήθηκε ένας μικρο-κύκλος σκέψης, σχεδιασμού, εφαρμογής και αναστοχασμού. Οι ευρύτεροι κύκλοι διδασκαλιών ήταν τρεις: 1ος κύκλος- επίλυση προβλημάτων Συνδυασμού (3 διδασκαλίες), 2ος κύκλος- επίλυση προβλημάτων Αλλαγής (3 διδασκαλίες) και 3ος κύκλος- επίλυση προβλημάτων Σύγκρισης (4 διδασκαλίες). Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων των διδασκαλιών βασίστηκε σε προηγούμενες έρευνες (Χαραλάμπους, 2003) καθώς και στα αποτελέσματα του αρχικού τεστ που έδωσαν σημαντικά στοιχεία για τις ικανότητες που είχαν ήδη τα παιδιά στα διαγράμματα. Οι δραστηριότητες κάθε κύκλου οργανώθηκαν στη βάση των επιδιωκόμενων ικανοτήτων για την ΕΜΠ και τα διαγράμματα και ακολουθούσαν περίπου το ίδιο μοτίβο. Ωστόσο υπήρχαν αναπροσαρμογές στον τρόπο διδασκαλίας τους ως αποτέλεσμα του αναστοχασμού που λάμβανε μέρος σε κάθε διδασκαλία. Οι δραστηριότητες των διδασκαλιών σε κάθε κύκλο επικεντρώνονταν σε διαφορετικές πτυχές των διαγραμμάτων (μορφή, δομή, περιεχόμενο, χρήση) μέσα σε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων.

Ανάλυση των δεδομένων

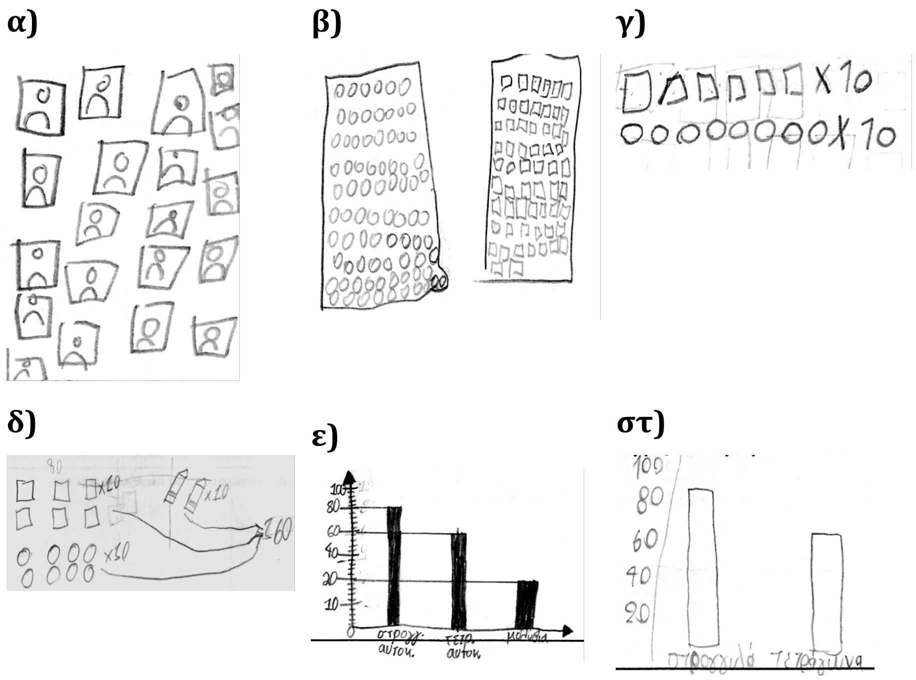
Στην παρούσα έρευνα έγινε συλλογή ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων από τα τεστ και συμπληρωματικά από την καταγραφή ημερολογίου (σημειώσεις και παρατηρήσεις σχετικά με την εξέλιξη των διδασκαλιών) και τα φύλλα εργασίας, με τα οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές στη διδακτική παρέμβαση. Για την ανάλυση των δεδομένων αξιοποιήθηκε κυρίως η τεχνική της Περιγραφικής Στατιστικής (για τα τεστ και τα φύλλα εργασίας) συμπληρωματικά με την Ανάλυση Περιεχομένου (για το ημερολόγιο). Τα αποτελέσματα των τεστ επεξεργάστηκαν με το πρόγραμμα SPSS, οργανώθηκαν ποσοτικά και ακολούθησε η ανάλυσή τους στα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους. Τα δεδομένα που προέκυψαν από το ημερολόγιο και τα φύλλα εργασίας βοήθησαν για να σημειωθεί η εξέλιξη των ικανοτήτων των μαθητών στα διαγράμματα κατά τη διδακτική παρέμβαση.

Οι δυσκολίες των μαθητών με τα διαγράμματα ταξινομήθηκαν σε τρεις κατηγορίες, σύμφωνα με τους Diezmann και English (2001). Οι δείκτες που ορίστηκαν για τη μέτρηση των συγκεκριμένων δυσκολιών προέκυψαν από τα ευρήματα άλλων ερευνών σχετικά με τις ικανότητες και τις δυσκολίες των μαθητών με τα διαγράμματα (Diezmann, 1999, 2000b; Diezmann & English, 2001; Manalo & Uesaka, 2006; van Garderen et al., 2014) και προσαρμόστηκαν αναλόγως για τα δεδομένα που προέκυψαν από την παρούσα έρευνα. Η πρώτη κατηγορία δυσκολιών (Δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του διαγράμματος) περιλαμβάνει τους δείκτες: «*Δεν κάνει καμία προσπάθεια αναπαράστασης*», «*Κατασκευάζει εικονικές αναπαραστάσεις*» και «*Κατασκευάζει γραφήματα* (π.χ. ραβδόγραμμα)». Η δεύτερη κατηγορία (Δυσκολία στη χρήση διαγραμμάτων για την ΕΜΠ) περιλαμβάνει τους δείκτες: «*Δημιουργεί σωστό διάγραμμα αλλά έχει λανθασμένο σχέδιο επίλυσης*» και «*Σχεδιάζει διάγραμμα με λάθος δομή ή περιεχόμενο και έχει σωστό σχέδιο επίλυσης*». Η τρίτη κατηγορία (Δυσκολία στη δημιουργία διαγραμμάτων) περιλαμβάνει τους δείκτες: «*Σχεδιάζει διάγραμμα λάθος δομής (δεν αντιπροσωπεύει την κατηγορία του δοθέντος προβλήματος)*», «*Συμβολίζει* *λάθος τη συνθήκη*», «*Χρησιμοποιεί λάθος ή καθόλου δεδομένα – ζητούμενο στο διάγραμμα*» και «*Συμπληρώνει σε λάθος θέση τα δεδομένα – ζητούμενο*».

Αποτελέσματα

Αρχικό τεστ

Κατά το αρχικό τεστ το 100% (45 μαθητές) αντιμετώπισαν δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του διαγράμματος και στα τρία δοκίμια (Πίνακας 2). Όπως κατέδειξαν οι απαντήσεις, οι περισσότεροι δεν έκαναν καμία προσπάθεια για διάγραμμα (22, 33 και 30 μαθητές αντίστοιχα για τα τρία δοκίμια) ή κατασκεύασαν εικονογραφικές αναπαραστάσεις χωρίς νόημα (15, 5 και 7 μαθητές αντίστοιχα), για παράδειγμα κύκλους ή/και τετράγωνα που συμβόλιζαν τα αυτοκόλλητα για το 1ο δοκίμιο, χωρίς όμως να δηλώνονται οι μεταξύ τους σχέσεις (Εικόνα 2α, 2β). Πιο λίγοι μαθητές (3, 3 και 3 μαθητές αντίστοιχα) προσπάθησαν να σχεδιάσουν μια πιο αφηρημένη εικόνα χρησιμοποιώντας σύμβολα που έδειχναν τις σχέσεις μεταξύ των δεδομένων ή μεταξύ των δεδομένων-ζητούμενου (Εικόνα 2γ, 2δ) ενώ λίγοι (5, 4 και 5 μαθητές αντίστοιχα) σχεδίασαν ένα ραβδόγραμμα στην προσπάθειά τους να αναπαραστήσουν τα δεδομένα (Εικόνα 2ε, 2στ). Στο αρχικό τεστ δεν κατέστη δυνατό να εξεταστούν οι δυσκολίες στη χρήση και στη δημιουργία των διαγραμμάτων, αφού κανένας μαθητής δεν είχε σχεδιάσει κάποιο διάγραμμα.



Εικόνα 2: Παραδείγματα από αναπαραστάσεις μαθητών για το 1ο δοκίμιο (πρόβλημα Συνδυασμού) στο αρχικό τεστ

		Δοκίμιο (αρχικό τεστ)			Δοκίμιο (τελικό τεστ)		
		1ο	2ο	3ο	1ο	2ο	3ο
Δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του διαγράμματος	Καμία προσπάθεια αναπαράστασης	48,9% (22)	73,3% (33)	66,7% (30)	13,3% (6)	17,8% (8)	17,8% (8)
	Κατασκευή εικονικών αναπαραστάσεων	40% (18)	17,8% (8)	22,2% (10)	2,2% (1)	2,2% (1)	4,4% (2)
	Κατασκευή γραφημάτων (π.χ. ραβδόγραμμα)	11,1% (5)	8,9% (4)	11,1% (5)	-	-	-
Δυσκολία στη χρήση διαγραμμάτων για την ΕΜΠ	Σωστό διάγραμμα και λανθασμένο σχέδιο επίλυσης	-	-	-	-	-	-
	Διάγραμμα με λάθος δομή ή περιεχόμενο και σωστό σχέδιο επίλυσης	-	-	-	2,2% (1)	24,5% (11)	55,6% (25)
Δυσκολία στη δημιουργία διαγραμμάτων	Δημιουργία διαγράμματος λάθος δομής	-	-	-	2,2% (1)	-	6,7% (3)
	Λάθος συμβολισμός συνθήκης	-	-	-	-	4,4% (2)	-
	Χρήση λάθος ή καθόλου δεδομένων – ζητούμενου	-	-	-	13,3% (6)	2,2% (1)	-
	Συμπλήρωση δεδομένων-ζητούμενου σε λάθος θέση	-	-	-	-	22,2% (10)	51,1% (23)

Πίνακας 2: Ποσοστά (και συχνότητες) για τις κατηγορίες των δυσκολιών στα διαγράμματα για κάθε δοκίμιο στο αρχικό και τελικό τεστ

Διδακτική παρέμβαση

Στην πρώτη διδασκαλία κάθε κύκλου δινόταν έμφαση κυρίως στην κατανόηση της έννοιας του διαγράμματος για κάθε κατηγορία προβλήματος. Οι μαθητές σε συνεργασία με τον διπλανό τους καλούνταν να αναπαραστήσουν ένα πρόβλημα χωρίς να χρησιμοποιήσουν οποιεσδήποτε λέξεις, μόνο αριθμούς, σύμβολα και ζωγραφιές. Κατά την προσπάθεια αναπαράστασης, αρκετοί αντιμετώπισαν δυσκολίες στα προβλήματα Συνδυασμού σχετικά με τον τρόπο που θα συμβόλιζαν τη σχέση που υπήρχε ανάμεσα στα δεδομένα και στο ζητούμενο, μιας που ήταν η πρώτη φορά που έκαναν κάτι αντίστοιχο και η απαγόρευση στη χρήση λέξεων τους δυσκόλευε. Αντίστοιχα σε αυτό το στάδιο για το πρόβλημα Αλλαγής εντοπίστηκαν δυσκολίες που αφορούσαν τη σωστή τοποθέτηση του αρχικού ποσού πάνω στο σχέδιο και για το πρόβλημα Σύγκρισης τον τρόπο αποτύπωσης της σχέσης σύγκρισης μεταξύ των συγκρινόμενων ποσοτήτων. Μέσα από καθοδηγούμενη συζήτηση με την ερευνήτρια αλλά και με τη συνεργασία που είχαν μεταξύ τους ο καθένας ολοκλήρωνε την αναπαράσταση. Ακολουθούσε η παρουσίασή τους στην ολομέλεια της τάξης. Οι μαθητές καλούνταν να εντοπίσουν τυχόν ομοιότητες στις αναπαραστάσεις που είχαν φτιάξει και να επιλέξουν τις πιο «πετυχημένες» προσπάθειες. Στοιχεία όπως βελάκια ή τόξα φάνηκε ότι ήταν καθοριστικής σημασίας για μια «πετυχημένη» αναπαράσταση σύμφωνα με κάποιους, επειδή συμβόλιζαν τη συνένωση των δύο ποσών ή τη χρονική εξέλιξη ενός ποσού ή τη σύγκριση μεταξύ δύο ποσοτήτων για τα προβλήματα Συνδυασμού, Αλλαγής και Σύγκρισης αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο ξεπεράστηκαν οι δυσκολίες που είχαν προκύψει στο στάδιο αυτό. Έπειτα, γινόταν προσπάθεια να απλοποιηθούν αυτές οι ζωγραφιές, ώστε να παρουσιάζουν μόνο τα δομικά στοιχεία του προβλήματος και τις μεταξύ τους σχέσεις με τη χρήση απλών σχημάτων (τετράγωνα, κύκλοι) και βοηθητικών στοιχείων (γραμμές, βελάκια, αγκύλες). Αυτό το στάδιο, δηλαδή η μετάβαση από τη ζωγραφιά στο διάγραμμα, ήταν και το πιο χρονοβόρο για τους μαθητές στον 1ο κύκλο της παρέμβασης, γιατί δεν είχαν χρησιμοποιήσει ξανά διαγράμματα στο παρελθόν. Στον 2ο και 3ο κύκλο οι μαθητές πέρασαν πιο γρήγορα από τις ρεαλιστικές εικονικές αναπαραστάσεις στα διαγράμματα στο αντίστοιχο στάδιο.

Στη δεύτερη διδασκαλία κάθε κύκλου δινόταν περισσότερη έμφαση στη δημιουργία σωστών διαγραμμάτων από άποψη δομής και περιεχομένου. Οι μαθητές καλούνταν να συνεργαστούν, για να τοποθετήσουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα προβλημάτων στη σωστή θέση έτοιμων διαγραμμάτων που τους δίνονταν και στη συνέχεια να σχεδιάσουν ένα δικό τους διάγραμμα για την επίλυση ενός άλλου προβλήματος. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν αντιμετώπισε δυσκολίες στη δημιουργία διαγράμματος σωστής δομής για κάθε κατηγορία προβλημάτων. Επίσης, δεν αντιμετώπισε δυσκολίες στη συμπλήρωση του περιεχομένου των διαγραμμάτων (έτοιμων και δικών τους) για τα προβλήματα Συνδυασμού και Σύγκρισης. Ωστόσο αρκετοί αναρωτήθηκαν σε ποια θέση των διαγραμμάτων για τα προβλήματα Σύγκρισης θα έπρεπε να τοποθετήσουν το μεγαλύτερο και σε ποιο το μικρότερο ποσό (για αυτά που περιελάμβαναν κύκλους για τις δύο συγκρινόμενες ποσότητες). Μέσα από τη συζήτηση καταλήξαμε ότι δεν χρειαζόταν να δίνεται έμφαση στην τοποθέτηση της μεγαλύτερης και της μικρότερης ποσότητας σε συγκεκριμένη θέση του διαγράμματος (πάνω ή κάτω) αλλά στη σωστή διατύπωση της μεταξύ τους σχέσης. Στα προβλήματα Αλλαγής εντοπίστηκαν περισσότερες δυσκολίες, αφού αρκετοί μαθητές είχαν τοποθετήσει σε αντίθετες θέσεις το αρχικό και το τελικό ποσό. Η παρανόηση φάνηκε να πηγάζει από το γεγονός ότι είχαν εξάγει ήδη από τα δεδομένα την πράξη (αφαίρεση) που έπρεπε να εκτελέσουν για την επίλυση και θεώρησαν ότι με παρόμοια σειρά έπρεπε να τοποθετήσουν και τα δεδομένα στα διαγράμματα. Για να ξεπεραστεί αυτή η παρανόηση, έγιναν μεγάλα διαγράμματα στον πίνακα της τάξης και ζητήθηκε από τους μαθητές να τοποθετήσουν σε αυτά τα γεγονότα της ιστορίας του προβλήματος, όπως εξελίσσονταν χρονικά.

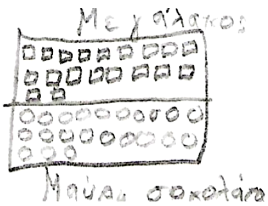
Στην τρίτη διδασκαλία κάθε κύκλου (και τέταρτη για την κατηγορία της Σύγκρισης) δινόταν περισσότερη έμφαση στη σωστή χρήση των διαγραμμάτων για την επίλυση των προβλημάτων και τον έλεγχο της λύσης. Οι μαθητές καλούνταν να επιλύσουν προβλήματα σχεδιάζοντας και χρησιμοποιώντας δικά τους διαγράμματα. Παρατηρήθηκε ότι στα προβλήματα Αλλαγής οι περισσότεροι μαθητές από αυτούς που δεν είχαν σχεδιάσει σωστό διάγραμμα, εξέφρασαν σωστή σκέψη σχετικά με τη λύση του προβλήματος και εκτέλεσαν την απαιτούμενη αριθμητική πράξη. Αναλόγως και στα προβλήματα Σύγκρισης λίγοι από τους μαθητές που έκαναν λανθασμένα το διάγραμμα διατύπωσαν σωστά τη σκέψη τους. Μέσα από συζήτηση προέκυψε ότι αυτοί οι μαθητές δεν είχαν χρησιμοποιήσει το διάγραμμα σωστά ή καθόλου για την εξαγωγή της λύσης. Για να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες που αφορούσαν τη χρήση των διαγραμμάτων, συζητήσαμε σχετικά με τις τιμές που τοποθετούμε σε κάθε θέση πάνω στα διαγράμματα, για να δηλωθεί σωστά η χρονική μεταβολή μιας ποσότητας ή η σύγκριση δύο ποσοτήτων αντίστοιχα αλλά και τι συμβαίνει με την πράξη που απαιτείται για την επίλυση των προβλημάτων στις διάφορες περιπτώσεις που προκύπτουν, όταν η άγνωστη ποσότητα αλλάζει θέση πάνω στο διάγραμμα. Στο τέλος κάθε κύκλου, οι μαθητές καλούνταν να ελέγξουν περιπτώσεις (σωστές και λάθος) έτοιμων διαγραμμάτων και λύσεων που δίνονταν για το πρόβλημα που είχαν προηγουμένως επιλύσει και μέσω αυτής της δραστηριότητας επιχειρούνταν ένας αναστοχασμός πάνω στα διαγράμματα που είχαν σχεδιάσει προηγουμένως οι ίδιοι, για να εξηγηθούν οι αδυναμίες και τα λάθη στη χρήση τους.

Τελικό τεστ

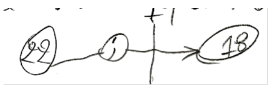
Στο τελικό τεστ οι περισσότεροι μαθητές μπορούσαν να διακρίνουν τη διαφορά της έννοιας «διάγραμμα» από τις εικόνες-ζωγραφιές, μιας που συνολικά 15,5% (7 μαθητές) για το 1ο δοκίμιο, 20% (9 μαθητές) για το 2ο δοκίμιο και 22,2% (10 μαθητές) για το 3ο δοκίμιο αντιμετώπισαν δυσκολίες σε αυτό το στάδιο (Πίνακας 2). Πιο αναλυτικά, τα ποσοστά αυτά περιλαμβάνουν όσους δεν είχαν κάνει καμία προσπάθεια αναπαράστασης (6, 8 και 8 μαθητές αντίστοιχα για τα τρία δοκίμια), όσους είχαν κατασκευάσει μια εικόνα χρησιμοποιώντας σύμβολα, για να αναπαραστήσουν τη σχέση μεταξύ των δεδομένων-ζητούμενου (1 μαθητής και στα τρία δοκίμια, Εικόνα 3α) και όσους είχαν σχεδιάσει μια εικονογραφική αναπαράσταση χωρίς νόημα (1 μαθητής για το 3ο δοκίμιο).

Αναφορικά με την ικανότητα χρήσης των διαγραμμάτων από τους μαθητές στο τελικό τεστ διαπιστώθηκε ότι όσοι μαθητές είχαν σχεδιάσει ένα σωστό διάγραμμα από άποψη δομής και περιεχομένου είχαν επιλύσει σωστά και το πρόβλημα (31, 25 και 9 μαθητές αντίστοιχα για τα τρία δοκίμια). Επίσης, αρκετοί από όσους είχαν επιλύσει λάθος το πρόβλημα στο 1ο δοκίμιο (6 μαθητές) και στο 3ο (1 μαθητής) είχαν σχεδιάσει και λάθος διάγραμμα. Ωστόσο 2,2% των μαθητών για το 1ο δοκίμιο, 24,5% για το 2ο και 55,6% για το 3ο αντιμετώπισαν δυσκολίες στη χρήση των διαγραμμάτων που είχαν σχεδιάσει, μιας που είχαν επιλύσει σωστά το πρόβλημα αν και είχαν δημιουργήσει λάθος διάγραμμα, είτε από άποψη δομής είτε από άποψη περιεχομένου (Πίνακας 2). Οι δυσκολίες εντοπίστηκαν κυρίως στο 2ο δοκίμιο (11 μαθητές), γιατί η λανθασμένη τοποθέτηση του τελικού ποσού που είχαν σημειώσει αρκετοί, υποδείκνυε άλλη πράξη από αυτή που έκαναν οι μαθητές, ενώ στο 3ο δοκίμιο η πλειοψηφία (25 μαθητές) είχε τοποθετήσει λανθασμένα στη θέση της μικρότερης συγκρινόμενης ποσότητας τη διαφορά, οπότε η εξαγόμενη πράξη για την επίλυση ήταν η ίδια ακόμα και με αυτό το λάθος στο διάγραμμα.

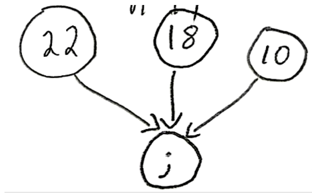
α)



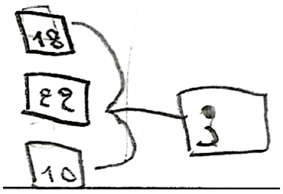
β)



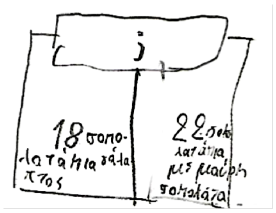
γ)



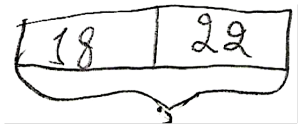
δ)



ε)



στ)



Εικόνα 3: Παραδείγματα από αναπαραστάσεις μαθητών για το 1ο δοκίμιο (πρόβλημα Συνδυασμού) στο τελικό τεστ

Εξετάζοντας συνολικά την ικανότητα δημιουργίας διαγραμμάτων των μαθητών στο τελικό τεστ 15,5% (7 μαθητές) των μαθητών αντιμετώπισαν δυσκολίες στο 1ο δοκίμιο, 28,9% (13 μαθητές) στο 2ο και 57,8% (26 μαθητές) στο 3ο (Πίνακας 2). Πιο αναλυτικά οι δυσκολίες αυτές ερευνήθηκαν ως προς τη δομή και το περιεχόμενο των διαγραμμάτων που είχαν σχεδιάσει οι μαθητές. Αρχικά, εντοπίστηκαν λίγες δυσκολίες που είχαν να κάνουν με τη δομή. Λίγοι μαθητές (1 στο 1ο δοκίμιο, Εικόνα 3β και 3 στο 3ο δοκίμιο) αντιμετώπισαν δυσκολία στον σχεδιασμό διαγράμματος κατάλληλης δομής για τη δεδομένη κατηγορία κάθε προβλήματος ενώ λίγοι (2 μαθητές) είχαν σχεδιάσει το κατάλληλο διάγραμμα, αλλά δυσκολεύτηκαν στον σωστό συμβολισμό της συνθήκης στο 2ο δοκίμιο. Περισσότερες δυσκολίες εντοπίστηκαν πάνω στο περιεχόμενο των διαγραμμάτων, κυρίως στο 3ο δοκίμιο, στο οποίο οι μισοί σχεδόν (23 μαθητές) δεν συμπλήρωσαν τα δεδομένα-ζητούμενο στην κατάλληλη θέση του διαγράμματος. Αντίστοιχα, το ίδιο παρατηρήθηκε για λιγότερους (10 μαθητές) στο 2ο δοκίμιο. Στο 2ο δοκίμιο, επίσης, 1 μαθητής συμπλήρωσε λάθος αριθμητικά δεδομένα στο διάγραμμα. Τέλος, στο 1ο δοκίμιο οι δυσκολίες στο περιεχόμενο των διαγραμμάτων σχετίζονταν με τη συμπλήρωση πάνω στο διάγραμμα και της περιττής πληροφορίας που υπήρχε στην εκφώνηση του προβλήματος από 6 μαθητές (Εικόνα 3γ, 3δ). Συνολικά οι μαθητές που δεν είχαν αντιμετωπίσει καμία δυσκολία στη δημιουργία διαγράμματος (κατάλληλη δομή και περιεχόμενο διαγράμματος) ήταν 31 (Εικόνα 3ε, 3στ), 25 και 9 αντίστοιχα για κάθε δοκίμιο.

Συζήτηση-Συμπεράσματα

Επιχειρώντας να απαντήσουμε στο 1ο ερευνητικό μας ερώτημα (Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας του διαγράμματος πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση;) στο αρχικό τεστ όλοι οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του διαγράμματος, αφού οι περισσότεροι δεν έκαναν καμία προσπάθεια για αναπαράσταση ή όσοι έκαναν, κατασκεύασαν εικονογραφικές αναπαραστάσεις χωρίς νόημα (Πίνακας 2). Αυτό συμφωνεί με το εύρημα των van Garderen et al. (2014) και των Saundry και Nicol (2006). Ελάχιστοι προσπάθησαν να σχεδιάσουν μια εικόνα χρησιμοποιώντας σύμβολα ή ένα γράφημα (Πίνακας 2). Ωστόσο να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο, ότι εξετάζοντας τις λύσεις των μαθητών που είχαν σχεδιάσει μια ανακριβή εικονογραφική αναπαράσταση, η πλειοψηφία τους είχε επιλύσει σωστά το πρόβλημα. Αυτό δεν επιβεβαιώνει το εύρημα ότι οι ανακριβείς εικονογραφικές απεικονίσεις δεν συνδέονται με επιτυχή επίλυση προβλημάτων (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Van Garderen και Montague, 2003; Boonen et al., 2014), ίσως επειδή στην περίπτωσή μας οι μαθητές κατασκεύασαν την αναπαράσταση, για να απαντήσουν στο «διαδικαστικό» κομμάτι της εκφώνησης, αλλά δεν βασίστηκαν σε αυτή για την επίλυση του προβλήματος. Στο τελικό τεστ οι περισσότεροι μαθητές μπορούσαν να διακρίνουν τη διαφορά της έννοιας του όρου «διάγραμμα» από τις εικονογραφικές αναπαραστάσεις και τα γραφήματα (Πίνακας 2). Οι αναπαραστάσεις τους εξελίχθηκαν μετά το πρόγραμμα παρέμβασης από εικόνες, που αρχικά συνήθως δεν περιείχαν σύμβολα, σε διαγραμματικές απεικονίσεις των βασικών στοιχείων του προβλήματος με τη χρήση των απαραίτητων συμβόλων.

Σχετικά με το 2ο ερώτημα της έρευνας (Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών στη χρήση ενός διαγράμματος στην επίλυση λεκτικού προβλήματος πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση;) πριν τη διδακτική παρέμβαση δεν κατέστη δυνατό να εξεταστούν οι δυσκολίες, γιατί οι μαθητές δεν είχαν σχεδιάσει διαγράμματα. Στο τελικό τεστ οι περισσότερες δυσκολίες στη χρήση εντοπίστηκαν στο 3ο δοκίμιο και λιγότερες στο 2ο (Πίνακας 2). Είναι αξιοσημείωτο ότι οι μαθητές που είχαν δημιουργήσει εσφαλμένο διάγραμμα για αυτά τα δοκίμια, είτε από άποψη δομής είτε από άποψη περιεχομένου, επιλύσανε σωστά το πρόβλημα, γεγονός που καταδεικνύει δυσκολίες στη συλλογιστική τους με αυτό ή μη χρήση των διαγραμμάτων. Στο πρόβλημα Σύγκρισης η πλειοψηφία είχε τοποθετήσει λανθασμένα στη θέση της μικρότερης συγκρινόμενης ποσότητας τη διαφορά. Ακόμη και με αυτό το λάθος στη θέση του διαγράμματος η εξαγόμενη πράξη για την επίλυση ήταν η ίδια, επομένως οι μαθητές παρόλο το «κατασκευαστικό» λάθος που έκαναν πιθανώς να χρησιμοποίησαν το διάγραμμα για την επίλυση. Ωστόσο, στο πρόβλημα Αλλαγής η λανθασμένη τοποθέτηση του τελικού ποσού που είχαν σημειώσει αρκετοί, υποδείκνυε άλλη πράξη από αυτή που έκαναν οι μαθητές άρα πιθανώς το διάγραμμα δεν έπαιξε κάποιο ρόλο για τον σχεδιασμό και την εξαγωγή της λύσης τους. Σε αυτό το σημείο δεν μας επιτρέπεται η εξαγωγή ακριβέστερων συμπερασμάτων σχετικά με τη χρήση των διαγραμμάτων, γιατί τα αποτελέσματα προήλθαν μόνο από τη συλλογή των γραπτών απαντήσεων των μαθητών.

Τέλος, σχετικά με το 3ο ερευνητικό ερώτημα (Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών στη δημιουργία ενός διαγράμματος λεκτικού προβλήματος πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση;) πριν τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές δεν είχαν σχεδιάσει διαγράμματα. Για τα διαγράμματα που κατασκευάστηκαν μετά την παρέμβαση δεν εντοπίστηκαν ιδιαίτερες δυσκολίες, όσον αφορά τη δομή τους για κάθε κατηγορία προβλήματος. Ελάχιστοι μαθητές σχεδίασαν διάγραμμα λάθος δομής (1ο και 3ο δοκίμιο) ή συμβόλισαν λάθος τη συνθήκη (2ο δοκίμιο) (Πίνακας 2). Αυτό συμφωνεί με το εύρημα των Willis και Fuson (1988), οι οποίοι εντόπισαν ότι οι μαθητές στην έρευνά τους συνήθως μπορούσαν να κάνουν το σωστό διάγραμμα για μια δεδομένη κατηγορία αθροιστικού προβλήματος. Περισσότερες δυσκολίες εντοπίστηκαν όσον αφορά τη σωστή συμπλήρωση του περιεχομένου των διαγραμμάτων. Οι περισσότεροι μαθητές συμπλήρωσαν σε λάθος θέση του διαγράμματος τα δεδομένα-ζητούμενο στο πρόβλημα Σύγκρισης και λιγότεροι στο πρόβλημα Αλλαγής. Στο πρόβλημα Συνδυασμού το λάθος περιεχόμενο εντοπίστηκε στην ένταξη της περιττής πληροφορίας στα δεδομένα του διαγράμματος, που όμως παρατηρήθηκε για μια μικρή μερίδα μαθητών (Πίνακας 2). Το εύρημα για το πρόβλημα Σύγκρισης είναι στην ίδια κατεύθυνση με αυτό των Willis και Fuson (1988). Ο μεγάλος αριθμός δυσκολιών σε αυτή την κατηγορία προβλήματος πιθανόν να οφείλεται στην έλλειψη μιας γερής βάσης μαθηματικών γνώσεων, η οποία αφορά τη δημιουργία νοημάτων σε αντίστοιχες μαθηματικές καταστάσεις, όπως υποστήριξε η Diezmann (2000a).

Συμπερασματικά, οι μαθητές ακόμα και μικρής ηλικίας με την κατάλληλη εξάσκηση μπορούν να μάθουν να αντιμετωπίζουν βαθμιαία τις δυσκολίες που αφορούν τη δημιουργία και χρήση διαγραμμάτων, ώστε να τα χρησιμοποιούν για να διευκολύνουν τη διαδικασία επίλυσης λεκτικών προβλημάτων. Υποστηρίζεται ότι οι δυσκολίες που εντοπίστηκαν σχετικά με τη δημιουργία και χρήση διαγραμμάτων για συγκεκριμένες κατηγορίες προβλημάτων μπορούν να ξεπεραστούν, εάν υπάρχει μια μεγαλύτερης διάρκειας ή προτιμότερο μια διαχρονική διδασκαλία πάνω σε αυτά, που θα ξεκινάει σταδιακά από μικρές τάξεις του δημοτικού και θα συνεχίζεται και σε μεγαλύτερες ηλικίες.

Αναφορές (References)

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Bakar, K., Way, J., & Bobis, J. (2016). Young Children's Drawings in Problem Solving. In B. White, M. Chinnappan, & S. Trenholm (Eds.), *Opening up Mathematics Education Research (Proceedings of the 39th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 86-93). Adelaide: MERGA.

Boonen, A., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, *68*, 15-26.

Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (1981). Problem Structure and First-Grade Children's Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(1), 27-39.

Chan, W. W. L., & Kwan, J. L. Y. (2021). Pathways to word problem solving: The mediating roles of schema construction and mathematical vocabulary. *Contemporary Educational Psychology, 65*, 1-12.

Christou, C., & Philippou, G. (1998). The Developmental Nature of Ability to Solve One-Step Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 436-442.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Diezmann, C. (1999). Assessing diagram quality: Making a difference to representation. *Proceedings of the 22nd Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 185-191). Adelaide.

Diezmann, C. (2000). Making Sense with Diagrams: Students’ Difficulties with Feature-Similar Problems. *Proceedings of the 23rd Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 228-234). Freemantle.

Diezmann, C. (2000). The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. In T. Nakahara, & M. Koyama (Eds.), *Proceedings 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 241-248). Hiroshima, Japan.

Diezmann, C., & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco (Ed.), *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook* (pp. 77-89). National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, USA.

Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 149-168.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 243-275). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design Research from the Learning Design Perspective. In J. van den Akker, B. Bannan, A. E. Kelly, N. Nieveen, & T. Plomp (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 73-112). Enschede, Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Griffin, C., & Jitendra, A. (2009). Word Problem-Solving Instruction in Inclusive Third-Grade Mathematics Classrooms. *The Journal of Educational Research, 102*(3), 187-202.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of Visual-Spatial Representations and Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

Jonassen, D. (2003). Designing Research-Based Instruction for Story Problems. *Educational Psychology Review, 15*(3), 267-296.

Lowrie, T. (2020). The utility of diagrams in elementary problem solving. *Cognitive Development, 55*, 1-12.

Lowrie, T., & Diezmann, C. (2005). Fourth-grade students' performance on graphical languages in Mathematics. In H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings 30th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3*, (pp. 265-272). Melbourne: PME.

Lowrie, T., & Diezmann, C. (2007). Solving Graphics Problems: Student Performance in Junior Grades. *The Journal of Educational Research, 100*(6), 369-378.

Lowrie, T., & Kay, R. (2001). Relationship Between Visual and Nonvisual Solution Methods and Difficulty in Elementary Mathematics. *The Journal of Educational Research, 94*(4), 248-255.

Manalo, E., & Uesaka, Y. (2006). Quantity and quality of diagrams used in math word problem solving: A comparison between New Zealand and Japanese students. *Refereed papers of the NZARE (New Zealand Association for Research in Education) National Conference 2006.* New Zealand: Wellington.

Marshall, S. (1995). *Schemas in Problem Solving.* New York: Cambridge.

Mayer, R., & Hegarty, M. (1996). The Process of Understanding Mathematical Problems. In R. Stenberg, & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp. 29-53). Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.

Nesher, P., Greeno, J., & Riley, M. (1982). The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 13*(4), 373-394.

Nesher, P. (1986). Learning Mathematics: A Cognitive Perspective. *American Psychologist, 41*(10), 1114–1122.

Novick, L., Hurley, S., & Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition, 27*(2), 288-308.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). The use of diagrams in solving non routine problems. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*: Vol. *3,* (pp. 489-496). Bergen, Norway .

Polya, G. (1957). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pongsakdi, N., Kajamies, A., Veermans, K., Lertola, K., Vauras, M., & Lehtinen , E. (2020). What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. *ZDM Mathematics Education, 52*, 33-44.

Riley, M., Greeno, J., & Heller, J. (1983). Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Saundry, C., & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 5*, (pp. 57-63). Prague: PME.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press.

Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction, 17*, 322-335.

Van de Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά.* Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(4), 246–254.

van Garderen, D., Scheuermann, A., & Jackson, C. (2013). Examining How Students With Diverse Abilities Use Diagrams to Solve Mathematics Word Problems. *Learning Disability Quarterly, 36*(3), 145-160.

van Garderen, D., Scheuermann, A., & Poch, A. (2014). Challenges students identified with a learning disability and as high-achieving experience when using diagrams as a visualization tool to solve mathematics word problems, *ZDM Mathematics Education*, 46(1), 135-149.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: Some Theoretical and Methodological Issues. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 31-41.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse: Swets and Zeitlinger.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey, *ZDM Mathematics Education, 52*, 1-16.

Willis, G., & Fuson, K. (1988). Teaching Children to Use Schematic Drawings to Solve Addition and Subtraction Word Problems. *Journal of Educational Psychology, 80*(2), 192-201.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα.* Αθήνα: Gutenberg.

Χαραλάμπους, Χ. (2003). *Επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με βάση τη Θεωρία Σχήματος: Εμβαθύνοντας στην εφαρμογή μιας καινοτομίας* (Ανέκδοτη μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία.