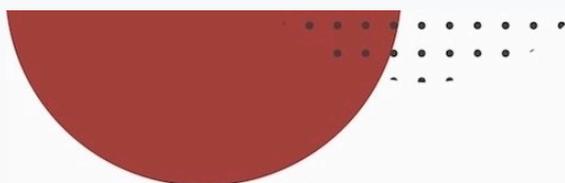


# Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

No 18 & 19 (2025)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ  
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
(ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Τεύχος 18 & 19  
Ιούνιος 2025

**Διερεύνηση της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν Μαθηματικά**

*Κωνσταντίνος Λιθαρής, Χαράλαμπος Σακονίδης*

Copyright © 2025, Κωνσταντίνος Λιθαρής, Χαράλαμπος Σακονίδης



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



## To cite this article:

Λιθαρής Κ., & Σακονίδης Χ. (2025). Διερεύνηση της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν Μαθηματικά. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (18 & 19), 153–176. *извлечено от* <https://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/article/view/36390>

## ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ: ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΠΟΥ ΔΙΔΑΣΚΟΥΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κωνσταντίνος Λιθαρή<sup>1</sup> και Χαράλαμπος Σακονίδης<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, <sup>2</sup> Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης  
<sup>1</sup>[kostasli707@gmail.com](mailto:kostasli707@gmail.com), <sup>2</sup>[xsakonid@eled.duth.gr](mailto:xsakonid@eled.duth.gr)

*Περίληψη:* Η παρούσα εργασία διερευνά τις αντιλήψεις εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν Μαθηματικά για το περιεχόμενο και την οργάνωση της παιδαγωγικής γνώσης τους. Για τους σκοπούς της έρευνας πραγματοποιήθηκαν ημι-δομημένες συνεντεύξεις με δύο εκπαιδευτικούς που διδάσκουν Μαθηματικά σε Γυμνάσια της Βορείου Ελλάδος, καθώς και ημι-δομημένες παρατηρήσεις της διδασκαλίας τους στη σχολική τάξη. Οι δύο συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί διαθέτουν ικανοποιητική διδακτική εμπειρία αλλά έχουν διαφορετικές επαγγελματικές διαδρομές, καθώς η πρώτη είναι μαθηματικός, ενώ ο δεύτερος είναι φυσικός που διδάσκει για πρώτη φορά Μαθηματικά με ανάθεση. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι αντιλήψεις για την παιδαγωγική γνώση των Μαθηματικών του εκπαιδευτικού των Φυσικών Επιστημών είναι περισσότερο ευέλικτες και κονστρουκτιβιστικά προσανατολισμένες, ενώ αυτές της εκπαιδευτικού των Μαθηματικών εμφανίζονται ανελαστικές και ακραιφνώς συμπεριφοριστικές.

*Λέξεις κλειδιά:* Μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών, παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, εκπαιδευτικοί, δευτεροβάθμια εκπαίδευση

*Abstract:* The study presented here examines the conceptions of secondary school teachers who teach Mathematics regarding the content and organization of their pedagogical knowledge. The research involved semi-structured interviews with two teachers teaching Mathematics at lower secondary schools (Gymnasia) in Northern Greece and semi-structured classroom observations of their instructional practices. Although both participants had sufficient teaching experience, their professional backgrounds differed: one is a trained secondary teacher of Mathematics, and the other is a trained secondary Science teacher assigned to teach Mathematics for the first time. The findings indicate that the Science teacher's conceptions of pedagogical knowledge in Mathematics are more flexible and aligned with constructivist principles, whereas the mathematics teacher's conceptions appear more rigid and predominantly behaviorist in nature.

*Keywords:* Learning and teaching Mathematics, pedagogical content knowledge, teachers, secondary education.

## **Εισαγωγικά**

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά έχει ελκύσει το ερευνητικό ενδιαφέρον τις τελευταίες δεκαετίες. Ειδικότερα, η παιδαγωγική γνώση που έχουν αναπτύξει σχετικά με την διδασκαλία των Μαθηματικών, αλλά και η γνώση τους για το περιεχόμενο των σχολικών Μαθηματικών, βρίσκονται τις τελευταίες δεκαετίες στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος. Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για το περιεχόμενο και την οργάνωση της παιδαγωγικής τους γνώσης για τα Μαθηματικά, αλλά και για τους τρόπους που αυτή η γνώση ενεργοποιείται κατά τη διδακτική πράξη.

## **Βιβλιογραφική πλαισίωση**

Οι γνώσεις που χρειάζεται να διαθέτει ένας εκπαιδευτικός ώστε να είναι επαρκώς προετοιμασμένος για να αντιμετωπίσει με αποτελεσματικό τρόπο τις πολλαπλές προκλήσεις που αναδεικνύονται συνεχώς στην τάξη των Μαθηματικών βρέθηκε στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, κυρίως από την δεκαετία του 1990 και έπειτα. Σε συνδυασμό με το ερώτημα του τί συνιστά μια αποτελεσματική διδασκαλία, η σχετική έρευνα οδήγησε στην ανάπτυξη θεωρητικών προσεγγίσεων και εμπειρικών μελετών που οριοθέτησαν το περιεχόμενο και προσδιόρισαν κρίσιμα χαρακτηριστικά της γνώσης των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Μεγάλο μέρος αυτής της ερευνητικής παράδοσης εστίασε ειδικά στην Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου (ΠΓΠ), επιδιώκοντας να την προσδιορίσει και να ανιχνεύσει την σχέση της με την διδακτική πρακτική στα Μαθηματικά.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται με συντομία οι θεωρητικές προσεγγίσεις που κυριάρχησαν για την μελέτη της γνώσης των εκπαιδευτικών για την διδασκαλία των Μαθηματικών, ακολούθως βασικά χαρακτηριστικά της ΠΓΠ και οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για αυτήν και, τέλος, συζητούνται βασικά ερευνητικά δεδομένα για την ποιότητα της διδασκαλίας στα Μαθηματικά και για τη γνώση των εκπαιδευτικών για την αποτελεσματική διδασκαλία στα Μαθηματικά.

### ***Θεωρητικές προσεγγίσεις στη γνώση του εκπαιδευτικού για την διδασκαλία***

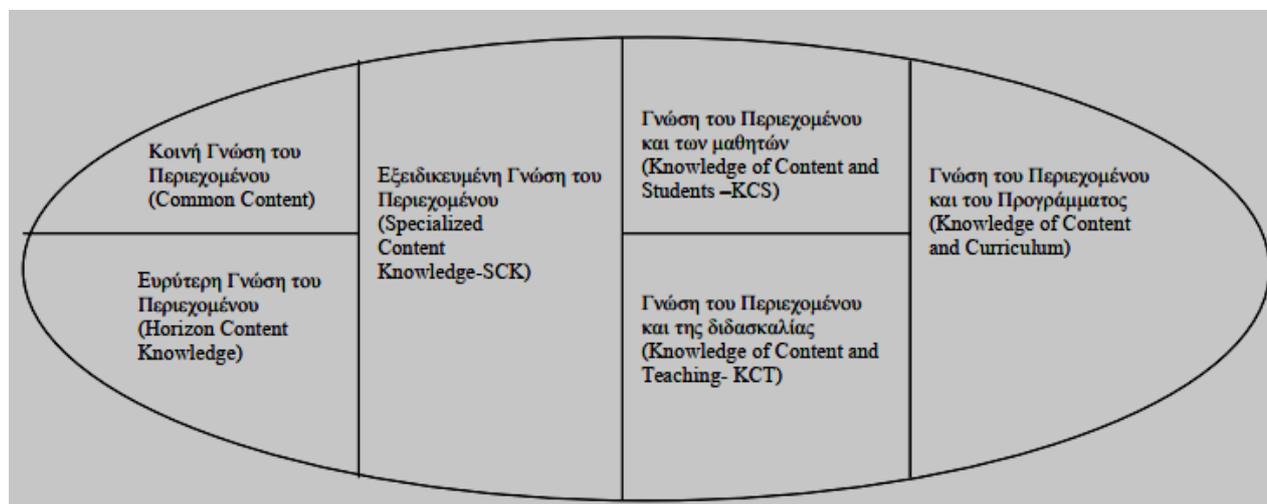
Τρεις είναι οι κυρίαρχες θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μελέτη της γνώσης που χρειάζεται να αναπτύξει ένας εκπαιδευτικός των Μαθηματικών, ώστε να είναι σε θέση να διδάξει αποτελεσματικά: του Shulman, των Rowland και των συνεργατών του και της Ball και των συνεργατών της.

Σημείο εκκίνησης των εν λόγω προσεγγίσεων αποτελεί η παιδαγωγική προσέγγιση του Shulman του 1986, που ήταν ο πρώτος ο οποίος μίλησε για διαχωρισμό της γνώσης αυτής σε παιδαγωγική και γνώση του αντικειμένου διδασκαλίας. Η προσέγγιση του Shulman αποτέλεσε μέχρι τις αρχές του 21ου αιώνα το κυριότερο μοντέλο θεώρησης της παιδαγωγικής συλλογιστικής και δράσης του εκπαιδευτικού. Σύμφωνα με αυτό, ο εκπαιδευτικός αντιμετωπίζει καθημερινά την πρόκληση να καταστήσει το περιεχόμενο του γνωστικού αντικειμένου (subject matter content knowledge) έτοιμο για αποτελεσματική

διδασκαλία. Κρίσιμο ρόλο σε αυτόν τον μετασχηματισμό διαδραματίζει η λειτουργική σύνδεση της γνώσης του περιεχομένου του γνωστικού αντικείμενου με το μαθητή και την διδασκαλία. Έτσι, ο Shulman διέκρινε τις γνώσεις που αναμένεται να διαθέτει ένας εκπαιδευτικός σε τρεις κατηγορίες: α) τη γνώση του γνωστικού αντικείμενου, β) την παιδαγωγική γνώση του γνωστικού αντικείμενου και γ) τη γνώση των αναλυτικών προγραμμάτων.

Στοχεύοντας στην ανάπτυξη ενός αναλυτικού εργαλείου διδακτικής δράσης και αξιολόγησής της, η προσέγγιση του 'Κουαρτέτου της γνώσης' των Rowland κ.ά. (2005) υποστηρίζει ότι η επαγγελματική γνώση ενός εκπαιδευτικού οργανώνεται σε τέσσερις ομάδες που εστιάζουν όχι πλέον στο είδος της γνώσης, αλλά στον αναστοχασμό πάνω στη διδασκαλία, με στόχο τη βελτίωσή της: (α) Θεμελιώδεις Γνώσεις, (β) Μετασχηματισμούς, (γ) Συνδέσεις και (δ) Απροσδόκητες περιστάσεις.

Τέλος, η προσέγγιση των Ball et al. (2009), συνεχίζοντας αυτήν του Shulman, επιχειρεί να εμβαθύνει περισσότερο στην παιδαγωγική γνώση που αφορά την εκπαίδευση στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, η Ball και η ομάδα της προσπάθησαν να διακρίνουν νέες κατηγορίες γνώσης πέραν αυτών που ο Shulman υπέδειξε, επιδιώκοντας τον ορισμό τους με μεγαλύτερη σαφήνεια. Τελικά, η κατηγορία των Θεμελιωδών γνώσεων του Shulman χωρίστηκε σε δυο μεγάλες ομάδες: στη Γνώση του γνωστικού αντικείμενου (subject matter knowledge) και στην Παιδαγωγική γνώση του γνωστικού αντικείμενου (pedagogical content knowledge) και η καθεμιά από αυτές σε επιμέρους υποομάδες όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.



Εικόνα 1: Τομείς της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία των Ball et al. (2009)

### Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου

Η διδασκαλία υπερβαίνει κατά πολύ την απλή απαγγελία του μαθήματος από τον εκπαιδευτικό και περιλαμβάνει μια σειρά από λιγότερο ορατές και λιγότερο κοινωνικά αναγνωρισμένες δραστηριότητες (Montero, 2001). Οι δραστηριότητες αυτές αφορούν, για παράδειγμα, το σχεδιασμό, την ενορχήστρωση της εργασίας στην τάξη και την αξιολόγηση,

και χρειάζεται να ληφθούν υπόψη κατά την προετοιμασία αλλά και κατά την ανάλυση των γνώσεων των εκπαιδευτικών.

Ο Bucat (2005) υποστηρίζει ότι υπάρχει τεράστια διαφορά μεταξύ της γνώσης ενός θέματος (γνώση περιεχομένου) και της γνώσης για τη διδασκαλία και τη μάθησή του (παιδαγωγική γνώση περιεχομένου). Σήμερα, η διδασκαλία ως επαγγελματική δραστηριότητα συνδέεται με το σύνολο των ενεργειών που δρομολογεί σκόπιμα ο εκπαιδευτικός, προκειμένου να προωθήσει τη μάθηση εννοιών, διαδικασιών και στάσεων των μαθητών στο πλαίσιο του σχολικού περιβάλλοντος, το οποίο επηρεάζει και επηρεάζεται από τη διδακτική δραστηριότητα (Montero, 2001).

Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ) αφορά τη γνώση που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί κατά το σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδασκαλίας στην τάξη (Kind, 2009). Η έννοια της ΠΓΠ έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στη βιβλιογραφία για να περιγράψει τις γνώσεις που χρειάζεται να διαθέτει ένας εκπαιδευτικός, για να είναι 'αποτελεσματικός'. Παρά την κρίσιμη σημασία της, δεν υπάρχει συμφωνία για τον ακριβή προσδιορισμό του περιεχομένου της. Στις σχετικές προσπάθειες εντάσσεται κατά κύριο λόγο η εργασία της Ball και των συνεργατών της στις ΗΠΑ, αλλά και άλλων, όπως των Zazkis & Leikin (2010) στο Ισραήλ.

Συνοψίζοντας, τις τελευταίες δεκαετίες κεντρικό ζήτημα της έρευνας και της πράξης στη μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί ο προσδιορισμός των γνώσεων, των δεξιοτήτων και των ικανοτήτων που επιβάλλεται να αναπτύξει ένας εκπαιδευτικός για να διδάξει αποτελεσματικά τα Μαθηματικά (Knowledge base). Το να 'γνωρίζει Μαθηματικά' ως αναγκαία και ικανή προϋπόθεση ενός επαρκώς εκπαιδευμένου εκπαιδευτικού είναι αντίληψη που έχει πλέον ξεπεραστεί (Kind, 2009). Η σχετική έρευνα – σε θεωρητικό και εμπειρικό επίπεδο – οδήγησε σε έναν γόνιμο προβληματισμό για το περιεχόμενο του όρου Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ). Αν και δεν έχει ακόμη επιτευχθεί κάποια συμφωνία για έναν σαφή ορισμό της ΠΓΠ, είναι αποδεκτό πλέον πως πρόκειται για ένα μοναδικό σύνολο γνώσεων για τη διδασκαλία που χαρακτηρίζει τις γνώσεις που έχουν οι ειδικοί στο γνωστικό τους αντικείμενο (Berliner, 1986).

### **Αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την οργάνωση και το περιεχόμενο της ΠΓΠ**

Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν τη διδασκαλία. Οι εκπαιδευτικοί που θεωρούν τα Μαθηματικά ως ένα σύνολο διαδικασιών μπορεί να εστιάζουν περισσότερο στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και στην επίλυση προβλημάτων, μαθαίνοντας συγκεκριμένες διαδικασίες, ενώ εκείνοι που τα βλέπουν ως μια δυναμική, εννοιολογική επιστήμη μπορεί να δίνουν προτεραιότητα στην εξερεύνηση, την έρευνα και την κατανόηση έναντι της απομνημόνευσης (Siswono, Kohar & Hartono, 2017).

Η αντίληψη και η γνώση είναι δύο σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη διδακτική και μαθησιακή πρακτική. Εμπειρικά, οι ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι η αντίληψη επηρεάζει διαρκώς τη διδακτική πρακτική στην τάξη (Pajares, 1992; Stipek, et al. 2001). Η εργαλειοθήκη

αντίληψη (instrumentalist belief) τείνει να συνδέεται με τις διδακτικές πρακτικές που είναι πιο παραδοσιακές (Stipek, et al. 2001). Ένας δάσκαλος με εργαλειακή αντίληψη λέγεται επίσης ότι επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνούν και να διατηρούν το κοινωνικό πλαίσιο. Από την άλλη πλευρά, οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι υπάρχει ασυνέπεια μεταξύ των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου και της πρακτικής στην τάξη των Μαθηματικών (Barkatsas & Malone, 2005; Beswick, 2003; Raymond, 1997). Ο Raymond (1997) υποστηρίζει ότι η μαθησιακή διαδικασία του εκπαιδευτικού επηρεάζεται πολύ περισσότερο από τις γνώσεις του παρά από τις αντιλήψεις του. Οι Barkatsas & Malone (2005) διαπίστωσαν ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών δεν συνάδουν με τη διδακτική και μαθησιακή τους πρακτική καθώς αυτή εξαρτάται από την κατάσταση της τάξης, την εμπειρία και τους κοινωνικούς κανόνες.

Έρευνες σχετικά με τη σχέση των αντιλήψεων, των γνώσεων, της μάθησης και της διδακτικής πρακτικής έχουν διεξαχθεί από τους Wilkins (2008) και Belbase (2012). Ο Wilkins (2008) μελέτησε 481 εκπαιδευτικούς Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για να διερευνήσει τη σχέση μεταξύ αντιλήψεων, γνώσεων περιεχομένου και στάσεων σχετικά με τη διδακτική πρακτική που βασίζεται στη διερεύνηση. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν με τη χρήση ερωτηματολογίου. Το αποτέλεσμα της έρευνας αναδεικνύει ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών έχουν σημαντική επίδραση στη διδακτική πρακτική, ενώ οι γνώσεις έχουν αρνητική συσχέτιση με τις αντιλήψεις στη διδακτική και μαθησιακή πρακτική στην τάξη. Ο Belbase (2012) εξέτασε και ανέλυσε τις αντιλήψεις, τις γνώσεις και τη διδακτική πρακτική των καθηγητών μαθηματικών μέσω βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Το αποτέλεσμα της έρευνας δείχνει ότι οι αντιλήψεις επηρεάζουν τη διδακτική πρακτική στο πλαίσιο ενός υποστηρικτικού μαθησιακού περιβάλλοντος και ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών επηρεάζουν την επαγγελματική ανάπτυξή τους.

### ***Χαρακτηριστικά και πρακτικές αποτελεσματικής διδασκαλίας στα Μαθηματικά***

Είναι κάθε διδασκαλία αποτελεσματική; Προφανώς όχι, τότε όμως θεωρείται ως τέτοια; Τα τελευταία χρόνια έχουν προταθεί και διερευνηθεί χαρακτηριστικά και διδακτικές πρακτικές που προσδιορίζουν μια αποτελεσματική διδασκαλία στα Μαθηματικά. Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένα από τα πλέον κυρίαρχα από αυτά τα χαρακτηριστικά και κάποιες από τις πλέον αντιπροσωπευτικές από τις αντίστοιχες διδακτικές πρακτικές.

Σύμφωνα με τον Popham (2004), προϋπόθεση για μια καλή διδασκαλία είναι να υπάρχουν σαφώς διατυπωμένοι μαθησιακοί στόχοι, γιατί περιγράφουν τι θα κάνει ο μαθητής και τι πρέπει να μπορεί να κάνει μέχρι το τέλος της διδασκαλίας. Αποτελούν τους θεμέλιους λίθους πάνω στους οποίους μπορεί ο εκπαιδευτικός να διαμορφώσει μια διδασκαλία και να εξετάσει αν τελικά εκπληρώθηκε ο συνολικός στόχος μιας ενότητας (Eisner, 2004).

Σύμφωνα με τους Lloyd, Remillard & Beth (2008), το επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα (Α.Π.) δεν χρησιμοποιείται αυτούσιο κατά τη διδασκαλία. Οι εκπαιδευτικοί διαμορφώνουν τη δομή και τους στόχους της κατά το στάδιο του σχεδιασμού, σύμφωνα με κριτήρια προσωπικά

αλλά και το επίπεδο των μαθητών. Αναζητούν στις προτεινόμενες δραστηριότητες τα κρυμμένα Μαθηματικά νοήματα και τις ενσωματώνουν στη διδασκαλία τους, καθένας με τον δικό του τρόπο. Η διδασκαλία, σύμφωνα με τον Brown (2009), συνιστά μια σχεδιαστική διαδικασία, στην οποία ο εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται και μεταφράζει το υπάρχον υποστηρικτικό υλικό, συνεκτιμώντας ένα σύνολο παραγόντων: τους περιορισμούς που υπάρχουν στην τάξη, τη γνώση των μαθητών του και τις προσωπικές του επιδιώξεις. Χαράσσει στρατηγικές με βασική επιδίωξη την ικανοποίηση των διδακτικών του στόχων. Έτσι, η σχέση μεταξύ του εκπαιδευτικού και των πηγών του αναλυτικού προγράμματος είναι δυναμική και αλληλοεξαρτώμενη, με την έννοια ότι αλληλο-διαμορφώνονται. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος οι εκπαιδευτικοί καλούνται να αξιολογούν άμεσα την κατανόηση των μαθητών, να την συγκρίνουν με την επιθυμητή και να διαμεσολαβούν με τρόπο που θα βοηθά τόσο το μαθητή που ερωτήθηκε όσο και την υπόλοιπη τάξη στην καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου της ερώτησης (Stein & Kim, 2008).

Οι Wilson et al (2005) σε σχετική έρευνα με εκπαιδευτικούς εντόπισαν τρεις κρίσιμες στρατηγικές διδασκαλίας για το μάθημα των Μαθηματικών: (α) τη σύνδεση των Μαθηματικών, (β) την οπτικοποίησή τους και (γ) την αξιολόγηση της κατανόησης των μαθητών. Η σύνδεση των Μαθηματικών αφορά τις μαθηματικές συνδέσεις (π.χ. γραφική/αλγεβρική αναπαράσταση μιας έννοιας), τις ομαλές μεταβάσεις από τη μια μαθηματική έννοια στην άλλη και στη σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινότητα των μαθητών. Η δεύτερη στρατηγική, αυτή της οπτικοποίησης, αναφέρεται στην οπτικοποίηση των Μαθηματικών, χρησιμοποιώντας υπολογιστές, αριθμομηχανές, γραφικές αναπαραστάσεις ή συγκεκριμένα αντικείμενα. Τέλος, σχετικά με την αξιολόγηση της κατανόησης των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι η διαδικασία της αξιολόγησης είναι σημαντική αλλά θα πρέπει να πραγματοποιείται με σύντομες διαδικασίες. Υποστήριξαν δε την ανάγκη για συχνή και γρήγορη αξιολόγηση. Ένα άλλο χαρακτηριστικό μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας που ανέδειξε η έρευνα, ήταν ο εκπαιδευτικός να είναι σε θέση να παρακινήσει τους μαθητές να συμμετέχουν στη διδασκαλία. Σε αυτήν την κατεύθυνση οι μαθητές θα μπορούσαν να εκπονήσουν μια ομαδική εργασία και να ασχοληθούν με πρακτικές δραστηριότητες.

Ο Mann (2014) αναφέρει οκτώ πρακτικές για μια αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών, οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

- Σαφής καθορισμός των στόχων μάθησης των Μαθηματικών
- Αξιοποίηση εργασιών που προωθούν το συλλογισμό και τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος
- Χρήση και σύνδεση Μαθηματικών αναπαραστάσεων
- Διευκόλυνση ουσιαστικού μαθηματικού λόγου (discourse)
- Χρήση στοχευμένων ερωτήσεων
- Ανάπτυξη της διαδικαστικής ευχέρειας και της εννοιολογικής κατανόησης
- Ενίσχυση της εποικοδομητικής προσπάθειας εκμάθησης των Μαθηματικών
- Συλλογή και αξιοποίηση στοιχείων του τρόπου σκέψης των μαθητών

### **Γνώσεις των εκπαιδευτικών για μια αποτελεσματική διδασκαλία**

Οι Herppich et al. (2018) διαπίστωσαν ότι οι καθηγητές με μεγάλη διδακτική εμπειρία, που συμμετείχαν στην έρευνά τους, ήταν λιγότερο διαδραστικοί στους διαλόγους τους σε σύγκριση με τους καθηγητές με μικρή διδακτική εμπειρία. Βασίζονταν κυρίως στην εξήγηση του αντικειμένου μάθησης και παρουσίαζαν λιγότερες συνδέσεις της μιας έννοιας με την άλλη. Το πιο σημαντικό είναι ότι όσο λιγότερο διαδραστικό ήταν το στυλ διδασκαλίας ενός καθηγητή, τόσο λιγότερο μάθαιναν οι μαθητές από την διδασκαλία αυτή.

Οι Lachner & Nuckles (2016) μελέτησαν τις διδακτικές εξηγήσεις ερευνητών των Μαθηματικών, που εργάζονταν στο Πανεπιστήμιο, και εκπαιδευτικών που δίδασκαν σε σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι οι ερευνητές Μαθηματικών παρήγαγαν διδακτικές εξηγήσεις που υποστήριζαν καλύτερα την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών από τις εξηγήσεις των καθηγητών. Το αποτέλεσμα αυτό οφειλόταν κυρίως στο γεγονός ότι οι τελευταίοι είχαν την τάση να παρουσιάζουν μόνο τα Μαθηματικά βήματα επίλυσης, κάτι που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως 'product oriented explanations', ενώ οι ερευνητές Μαθηματικών παρείχαν, επιπλέον, εννοιολογικές πληροφορίες για να υπογραμμίσουν τη λογική που διέπει ένα συγκεκριμένο βήμα επίλυσης ('process-oriented explanations').

Μία από τις πλέον κρίσιμες διαδικασίες σκέψης του εκπαιδευτικού είναι η λήψη μιας 'διδακτικής' απόφασης, δηλαδή, απόφασης σχετική με την ανάπτυξη της μαθησιακής διαδικασίας στην τάξη. Η ποιότητα της μάθησης, που υποστηρίζει ο εκπαιδευτικός, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη διαδικασία σκέψης του κατά τη λήψη αποφάσεων και συνδέεται εν πολλοίς με τον καθορισμό δραστηριοτήτων από μια σειρά εναλλακτικών λύσεων κατά το σχεδιασμό και την ανάπτυξη της μάθησης. Μία από τις αποφάσεις που λαμβάνει ο εκπαιδευτικός κατά το σχεδιασμό και την εφαρμογή της μάθησης των Μαθηματικών είναι οι αποφάσεις σχετικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες (Cai & Lester, 2010).

Στην έρευνα των Amador et al. (2022) οι αρχάριοι εκπαιδευτικοί προγραμματίζαν το μάθημα που επρόκειτο να διδάξουν. Αν και στο πλάνο τους δεν αναφερόταν η χρήση αναπαραστάσεων, παρόλα αυτά η ανάλυση των μαθημάτων που πραγματοποίησαν έδειξε ότι υπήρξε σκέψη για τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων για την πλαισίωση των Μαθηματικών εννοιών. Οι ερευνητές εστίασαν σε μια συγκεκριμένη συνιστώσα της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, την αξιολόγηση. Σύμφωνα με τους Chan & Hume (2019), η αξιολόγηση λαμβάνει ελάχιστη προσοχή στη βιβλιογραφία, ειδικά όσον αφορά τους αρχάριους εκπαιδευτικούς.

Το περιβάλλον της τάξης αποτελεί κρίσιμη συνιστώσα της μαθησιακής διαδικασίας. Βασικό στοιχείο αυτού του περιβάλλοντος είναι η διαχείριση της τάξης, η οποία περιλαμβάνει τους καθημερινούς κανόνες και τις ρουτίνες της τάξης, τις σχέσεις των εκπαιδευτικών με τους μαθητές και τη φυσική οργάνωση της τάξης. Αν και υπάρχουν προτάσεις στη βιβλιογραφία για την ανάπτυξη ενός αποτελεσματικού περιβάλλοντος στην τάξη (Marshall, 2016), κάθε

εκπαιδευτικός υιοθετεί τις προσεγγίσεις που κρίνει κατάλληλες σε αυτήν την κατεύθυνση. Είναι προφανές ότι οι επιλογές διαχείρισης της τάξης επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα του εκπαιδευτικού και κατά συνέπεια της μαθησιακής διαδικασίας.

Η διεθνής βιβλιογραφία σχετικά με την 'αποδοτική' διδασκαλία (responsive teaching) υποστηρίζει ότι η ποιοτική διδασκαλία είναι σε μεγάλο βαθμό αυτοσχεδιαστική, καθώς οι εκπαιδευτικοί θέτουν στους μαθητές ερωτήσεις με βάση τη σκέψη τους "εκείνη τη στιγμή" (thinking in the moment) (Sawyer, 2004). Οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να παρατηρούν και να ανταποκρίνονται εποικοδομητικά στις αντιδράσεις των μαθητών, αντί να αγνοούν ή να απορρίπτουν άκριτα την οποιαδήποτε συμμετοχή ενός μαθητή στη μαθησιακή διαδικασία (Jacobs & Empson, 2016).

Οι έρευνες σχετικά με την ποιότητα της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών τις τελευταίες δύο δεκαετίες τονίζουν τη σημασία της "φιλόδοξης διδασκαλίας", ενός συνόλου διδακτικών πρακτικών που χαρακτηρίζονται ευρέως από την εστίαση στη βαθιά εννοιολογική κατανόηση του περιεχομένου από τους μαθητές, την ανταπόκριση στη σκέψη των μαθητών και την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στη συνδιαμόρφωση της γνώσης. Έχει διαπιστωθεί ότι τόσο οι αρχάριοι όσο και οι έμπειροι εκπαιδευτικοί συχνά δυσκολεύονται με την εφαρμογή αυτών των πρακτικών, με αποτέλεσμα πολλοί να συνεχίζουν να χρησιμοποιούν τα παραδοσιακά μοντέλα διδασκαλίας (Kisa & Correnti, 2015).

Σύμφωνα με τους Anthony et al. (2015), η 'φιλόδοξη' διδασκαλία (ambitious teaching) των Μαθηματικών είναι μια μορφή διδασκαλίας που έχει ως στόχο την υποστήριξη για μάθηση όλων των μαθητών. Σε μια τέτοια διδακτική προσέγγιση, στηριζόμενοι στην πεποίθηση ότι όλοι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν θετικές μαθηματικές ταυτότητες και να γίνουν ισχυροί μαθητές στα Μαθηματικά (powerful mathematical learners), οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν βασιζόμενοι σε αυτά που κάνουν οι μαθητές όταν λύνουν ένα μαθηματικό πρόβλημα. Με μεγαλύτερες προσδοκίες για την εμπλοκή κάθε μαθητή σε σύνθετες μαθηματικές εργασίες, η φιλόδοξη διδασκαλία των Μαθηματικών στοχεύει στο να καταστήσει σαφές το περιεχόμενο και τους τρόπους εκμάθησης των Μαθηματικών. Ωστόσο, αντί να επιδιώκουν να μειώσουν την πολυπλοκότητα της μάθησης των Μαθηματικών στο πλαίσιο μιας εργασίας ή δραστηριότητας, οι 'φιλόδοξοι' εκπαιδευτικοί βρίσκουν τρόπους να κάνουν τις πολύπλοκες πρακτικές προσιτές.

Σύμφωνα με τον Waddel (2014), οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να κατανοούν όχι μόνο τη μαθηματική γνώση στο έργο που επιτελούν, αλλά και τις πολλαπλές ανάγκες των μαθητών τους, καθώς και τη δυναμική της αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών. Το έργο του εκπαιδευτικού είναι να δημιουργήσει ένα περιβάλλον στην τάξη που υποστηρίζει τη μαθηματική γνώση που πρέπει να διδαχθεί, τις κουλτούρες που φέρνουν οι μαθητές και εκείνες τις πρακτικές που αναγνωρίζουν, εξετάζουν και υποστηρίζουν την ανάπτυξη των μαθητών όσον αφορά στα Μαθηματικά. Το να κάνεις Μαθηματικά υψηλού επιπέδου μέσω κριτικής ανάλυσης με τους συμμαθητές σου, να παίρνεις ρίσκα και να κάνεις λάθη ή να συμμετέχεις σε συζητήσεις που αντλούν από διαφορετικές, και μερικές φορές 'άβολες',

κοσμοθεωρίες, απαιτεί οι μαθητές να βρίσκονται σε έναν χώρο όπου αισθάνονται ασφάλεια και μέριμνα.

Έχοντας σκιαγραφήσει την έννοια της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου και την σημασία για μια αποτελεσματική γνώση στα Μαθηματικά, η έρευνα που παρουσιάζεται σε αυτήν την εργασία αποσκοπεί στη διερεύνηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών οι οποίοι διδάσκουν Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Για τους σκοπούς της έρευνας επιλέχθηκαν δυο εκπαιδευτικοί με ικανοποιητική διδακτική εμπειρία και διακριτή επαγγελματική πορεία, που διδάσκουν Μαθηματικά σε Γυμνάσια αστικών περιοχών της Βορείου Ελλάδος, και αξιοποιήθηκαν δυο ερευνητικά εργαλεία για να αντληθούν δεδομένα που θα επέτρεπαν την ανίχνευση των αντιλήψεών τους για την ΠΓΠ.

### **Μεθοδολογία της έρευνας**

Η παρούσα έρευνα στοχεύει στη διερεύνηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για το περιεχόμενο και την οργάνωση της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου με βάση τόσο τον λόγο που αρθρώνουν για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών όσο και τις διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν στην τάξη. Ειδικότερα, τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης διατυπώνονται ως ακολούθως:

*Ερευνητικό Ερώτημα 1:* Ποιες είναι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά στο Γυμνάσιο για το περιεχόμενο και την οργάνωση της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου;

*Ερευνητικό Ερώτημα 2:* Πώς ο τρόπος που αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευτικοί το περιεχόμενο και την οργάνωση της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (ΠΓΠ) διαφοροποιούνται με βάση τα επαγγελματικά τους χαρακτηριστικά;

*Συμμετέχοντες:* Οι συμμετέχοντες στην έρευνα, ένας άντρας και μια γυναίκα, διδάσκουν Μαθηματικά σε δημόσια Γυμνάσια νομού της Βόρειας Ελλάδας. Ο εκπαιδευτικός, ο Αντώνης, είναι μόνιμος φυσικός που, ενώ έχει αρκετά χρόνια διδακτικής εμπειρίας στο αντικείμενό του και στη δημόσια εκπαίδευση, είναι μόλις η πρώτη χρονιά που διδάσκει Μαθηματικά. Αντίστοιχα η εκπαιδευτικός, η Ελένη, είναι μαθηματικός με μικρότερη διδακτική εμπειρία σε σχολική τάξη, ενώ δίδασκε για χρόνια σε φροντιστηριακές τάξεις. Η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στην ερευνητική διαδικασία ήταν εθελοντική και οι σχολικές μονάδες επιλέχθηκαν με βάση την ευκολία πρόσβασης σε αυτές.

Πιο συγκεκριμένα, η Ελένη διαθέτει δεκαετή προϋπηρεσία σε φροντιστήρια του νομού Θεσσαλονίκης. Τα τελευταία 6 χρόνια εργάζεται σε γυμνάσια νομού της Βορείου Ελλάδος, τρία από τα οποία στο ίδιο Γυμνάσιο μέχρι σήμερα. Πρόκειται για σχολική μονάδα στην πρωτεύουσα νομού της Βόρειας Ελλάδας με 90 μαθητές και 18 εκπαιδευτικούς εκ των οποίων οι δύο είναι μαθηματικοί. Οι επιδόσεις των μαθητών στα Μαθηματικά είναι χαμηλές για τους περισσότερους μαθητές, με κάποιες εξαιρέσεις καλών μαθητών. Το μορφωτικό

επίπεδο των γονέων των μαθητών είναι κατά το πλείστον αποφοίτων υποχρεωτικής εκπαίδευσης, με ελάχιστους να έχουν πτυχίο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Πέρα από το πτυχίο του Μαθηματικού Τμήματος, η Ελένη διαθέτει μεταπτυχιακό τίτλο στη Διοίκηση Εκπαιδευτικών Μονάδων. Με τους συναδέλφους της δηλώνει πως έχει καλές-φιλικές σχέσεις και συζητούν συχνά για θέματα που αφορούν τη διδασκαλία των Μαθηματικών και την πρόοδο -συμπεριφορά των μαθητών.

Ο Αντώνης κατέχει πτυχίο Φυσικής. Πριν διοριστεί δίδασκε σε φροντιστήρια για 10 χρόνια τα μαθήματα της Φυσικής και της Χημείας. Διδάσκει περισσότερα από 15 χρόνια το μάθημα της Φυσικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, κυρίως σε Γυμνάσιο. Η χρονιά της έρευνας ήταν η πρώτη που του ανατέθηκε να διδάξει Μαθηματικά (για λόγους συμπλήρωσης ωραρίου). Αν και αρχικά δυσκολεύτηκε, δηλώνει πως του αρέσει, καθώς το μάθημα είναι τέσσερις ώρες την εβδομάδα και έχει χρόνο να γνωρίσει τους μαθητές και να κάνει ουσιαστική δουλειά, σε αντίθεση με τη Φυσική που είναι μόλις 1 ώρα στην Α' τάξη του Γυμνασίου. Το σχολείο που υπηρετεί είναι κεντρικό σχολείο της πρωτεύουσας του ίδιου νομού με αυτόν της Ελένης, με 270 μαθητές και 30 καθηγητές εκ των οποίων 4 μαθηματικοί, δύο μόνιμοι και δύο που διατίθενται από άλλα σχολεία για κάποιες ώρες. Οι σχολικές επιδόσεις των μαθητών ποικίλουν, ενώ οι γονείς πολλών είναι πτυχιούχοι της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Ωστόσο, υπάρχουν και μαθητές των οποίων οι γονείς έχουν τελειώσει την υποχρεωτική εκπαίδευση, δεν εργάζονται και έχουν οικονομικά προβλήματα. Ο Αντώνης χαρακτηρίζει τη σχέση με τους μαθητές και τους συναδέλφους του ως καλή και δηλώνει πως συμμετέχει σε επιμορφωτικές συναντήσεις που συνδέονται με την διδασκαλία.

*Ερευνητικά εργαλεία και δεδομένα:* Τα δεδομένα της έρευνας προέρχονται από δύο παρατηρήσεις διδασκαλιών των συμμετεχόντων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και ημιδομημένες συνεντεύξεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν μετά τις παρατηρήσεις και περιλάμβαναν ερωτήσεις που διατυπώνονταν με βάση την σχετική βιβλιογραφία και τα δεδομένα των παρατηρήσεων. Οι πρώτες παρατηρήσεις είχαν χαρακτήρα ανίχνευσης των αντιλήψεων των συμμετεχόντων, ενώ οι δεύτερες παρατηρήσεις εστίαζαν σε τρεις άξονες: (α) ζητήματα που συνδέονται με τη γνώση για το μαθηματικό περιεχόμενο, (β) τρόπους διαχείρισης της μαθησιακής διαδικασίας και (γ) κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές. Οι ημιδομημένες συνεντεύξεις περιλάμβαναν ερωτήσεις ανοικτού τύπου που είχαν ως στόχο την διερεύνηση του πώς αντιλαμβάνονται οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί την ΠΓΠ με αναφορά σε τρεις τύπους γνώσεων: (α) γνώσεις μαθηματικού περιεχομένου/αναλυτικό πρόγραμμα, (β) γνώσεις για τη μάθηση και (γ) γνώσεις για τη διδασκαλία.

*Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων:* Για καθέναν από τους δύο συμμετέχοντες πραγματοποιήθηκαν δύο παρατηρήσεις της διδασκαλίας τους, η μία τον μήνα Νοέμβριο (2022) και η δεύτερη τον μήνα Ιανουάριο (2023). Αμέσως μετά την πρώτη παρατήρηση, που είχε ανιχνευτικό χαρακτήρα, ακολούθησε η πρώτη συνέντευξη που επιδίωκε να αποτυπώσει καταρχήν το πώς αντιλαμβάνονταν οι συμμετέχοντες την ΠΓΠ με αναφορά στη διδακτική πράξη. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης της πρώτης παρατήρησης και της συνέντευξης που ακολούθησε, τα οποία συζητήθηκαν σε αρκετές άτυπες συναντήσεις του πρώτου συγγραφέα της εργασίας με τους συμμετέχοντες, συνδυαστικά με την βιβλιογραφία, τροφοδότησαν την

οργάνωση και το περιεχόμενο της δεύτερης παρατήρησης, η ανάλυση της οποίας, στη συνέχεια, συνέβαλε στην διαμόρφωση των ερωτήσεων της δεύτερης συνέντευξης. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν διαδικτυακά μετά από συνεννόηση με τους εκπαιδευτικούς και προφορική συμφωνία για την τήρηση της ανωνυμίας τους, καθώς και την ηχογράφησή τους. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει το χρονοδιάγραμμα πραγματοποίησης των παρατηρήσεων και των συνεντεύξεων.

**Πίνακας 1:** Χρονοδιάγραμμα συλλογής δεδομένων

Εκπαιδευτικοί	Παρατήρηση		Συνέντευξη	
	1η	2η	1η	2η
Ελένη	7/11/2022	23/1/2023	12/11/2022	29/1/2023
Αντώνης	11/11/2022	20/1/2023	15/11/2022	25/1/2023

*Διαδικασία Ανάλυσης Δεδομένων:* Για την ανάλυση των δεδομένων, τόσο από τις παρατηρήσεις όσο και από τις συνεντεύξεις, χρησιμοποιήθηκε ένα συνδυασμός τεχνικών ανάλυσης περιεχομένου (αναγνώριση κατηγοριών που προτείνονται από την βιβλιογραφία) και θεματικής ανάλυσης (συστηματική αναγνώριση, οργάνωση και κατανόηση επαναλαμβανόμενων μοτίβων νοήματος). Συγκεκριμένα, τα δεδομένα της συνέντευξης που αξιοποιούνται στην παρούσα εργασία αναγνώστηκαν καταρχήν προσεκτικά και επανειλημμένα και από τους δυο συγγραφείς και εντοπίστηκαν χωρία/επεισόδια που συνδέονται με αντιλήψεις σχετικές με γνώσεις για το περιεχόμενο, τη μάθηση και την διδασκαλία των Μαθηματικών, κρίσιμες συνιστώσες της ΠΓΠ, σύμφωνα με την βιβλιογραφία. Στη συνέχεια, στα δεδομένα καθεμιάς από τις τρεις κατηγορίες, με συνεργασία των δύο συγγραφέων, ανιχνεύθηκαν 'μοτίβα νοήματος' στην επιχειρηματολογία κάθε συμμετέχοντος, κωδικοποιήθηκαν και ομαδοποιήθηκαν, αναδεικνύοντας συγκεκριμένες όψεις των αντιλήψεών του για καθέναν από τους τρεις τύπους γνώσεων που εντάσσονται στην ΠΓΠ, όπως φαίνονται στον Πίνακα 2 στην επόμενη ενότητα.

## **Αποτελέσματα**

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης αρχικά της πρώτης συνέντευξης (κοινής και για τους δύο) και στη συνέχεια της δεύτερης (διαφοροποιημένα πρωτόκολλα) οργανωμένα κατά συμμετέχοντα και άξονα του ερευνητικού εργαλείου (της συνέντευξης).

### ***Ανάλυση της πρώτης συνέντευξης***

*Πρώτη συνέντευξη της Ελένης*

**Άξονας 1** (Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο): Η Ελένη, ενώ αναφέρει αρχικά ότι ακολουθεί συστηματικά το Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) και βασίζεται στις σχετικές οδηγίες

διδασκαλίας του υπουργείου, στην αμέσως επόμενη τοποθέτησή της υποστηρίζει πως 'οδηγός' της διδασκαλίας της είναι 'να μάθουν να σκέφτονται οι μαθητές'.

Στη συνέχεια, αναφέρει μια σειρά από στοιχεία που παραπέμπουν σε μια ιδιαίτερα 'συμβατική' διδακτική προσέγγιση με έντονα συμπεριφοριστικά χαρακτηριστικά, όπου η έμφαση βρίσκεται στο αποτέλεσμα, την εξάσκηση και τη μάλλον παθητική εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης. Παραδίδει το μάθημα με μορφή διάλεξης, ακολουθώντας γραμμικά το σχολικό εγχειρίδιο ('σύνδεση με προηγούμενα') και περιμένει από τους μαθητές 'να μάθουν τη θεωρία' και 'να επιλύουν τις ασκήσεις όπως τους έδειξε', έτσι ώστε να ασκηθούν και αυτοματοποιημένα να επιλύουν τις ασκήσεις όχι μόνο του σχολικού εγχειριδίου αλλά και των φυλλαδίων που ετοιμάζει ενίοτε γι' αυτούς, έχοντας κατά νου την 'κάλυψη όσο γίνεται περισσότερων μαθητών'.

Όσον αφορά το επίπεδο κατανόησης της ύλης από τους μαθητές η εκπαιδευτικός, αν και δηλώνει πως θα φροντίσει οι περισσότεροι να την καταλάβουν, επισημαίνει πως θα υπάρχουν και αυτοί που θα αδυνατούν να ανταποκριθούν και στα πλέον βασικά: «*θα φροντίσω να καλυφθεί όλη η ύλη και οι περισσότεροι μαθητές να καταλάβουν την ύλη, να μπορούν να κάνουν τα βασικά τουλάχιστον. Βέβαια θα υπάρχουν και μαθητές που δεν θα έχουν μάθει ακόμα ούτε την προπαίδεια*».

**Άξονας 2 (Γνώσεις για τη μάθηση):** Η Ελένη υποστηρίζει ότι στο Δημοτικό Σχολείο οι μαθητές 'μαθαίνουν τυποποιημένα', χωρίς να καταλαβαίνουν τις έννοιες. Προσφέρεται, επίσης, πληθώρα διαφορετικών μεθόδων εκμάθησης της ίδιας μαθηματικής διαδικασίας, προσέγγιση που καθιστά τελικά τη μάθηση δυσκολότερη κατά την άποψή της. «*Είναι πολύ δύσκολο για τους μαθητές να μάθουν τις μαθηματικές έννοιες γιατί έχουν μάθει να παπαγαλίζουν και να μαθαίνουν τυποποιημένα πράγματα. Από το Δημοτικό ξεκινάει αυτό, δεν γίνεται βιωματικά η διδασκαλία, τα Μαθηματικά πρέπει να γίνονται με άλλον τρόπο. Δεν γίνεται στο Δημοτικό να είναι αυτό το 'εκτιμώ' και να μαθαίνουμε με πάρα πολλούς τρόπους τον πολλαπλασιασμό. Πρέπει το κάθε παιδί να τον μάθει με τον δικό του τρόπο γιατί όλα τα παιδιά δεν μπορούν να μάθουν πέντε τρόπους*».

Σε άλλο σημείο της συνέντευξης η εκπαιδευτικός επισημαίνει ότι οι μαθητές στο Δημοτικό Σχολείο δεν ασχολούνται όπως θα έπρεπε επαρκώς με τη Γεωμετρία εξαιτίας 'των περιορισμένων μαθηματικών γνώσεων των δασκάλων' και προτιμούν ασκήσεις Άλγεβρας διαδικαστικού τύπου που δεν απαιτούν αναλυτικο-συνθετική σκέψη.

Μοιράζει σε όλους τους μαθητές τα ίδια φυλλάδια ασκήσεων, οι οποίες είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας. Θέτει ερωτήματα στους αδύνατους μαθητές που ξέρει ότι γνωρίζουν να απαντήσουν, γιατί πιστεύει ότι έτσι τους προσφέρει κίνητρο συμμετοχής στο μάθημα. Από την άλλη, ωστόσο, η στήριξη που τους προσφέρει είναι μάλλον χαμηλού επιπέδου, καθώς αφορά στην επανάληψη των ίδιων ασκήσεων, χωρίς επιπλέον καθοδήγηση-υποστήριξη ώστε να υπερβούν οι ίδιοι τις δυσκολίες τους. Αντίθετα, στους δυνατούς μαθητές, για να διατηρήσει το ενδιαφέρον τους για το μάθημα, αναθέτει απλώς επιπλέον ασκήσεις. Γενικά, η Ελένη μοιάζει να έχει διαμορφώσει μια απλοϊκή κατανόηση του όρου 'διαφοροποιημένη

διδασκαλία στα Μαθηματικά' και μάλλον θεωρεί ανέφικτη την υιοθέτησή της στην πράξη πέραν της προσέγγισης 'επανάληψη για όλους και ανάλογα με τις δυνατότητές τους'.

**Άξονας 3 (Γνώσεις για τη διδασκαλία):** Σύμφωνα με τα όσα υποστηρίζει η Ελένη, η εκμάθηση της θεωρίας από τους μαθητές γίνεται με τη μέθοδο της αποστήθισης, ώστε 'να μην χάσουν μονάδες στις τελικές εξετάσεις', ενώ για την εμπέδωσή της είναι απαραίτητη η επίλυση πολλών ασκήσεων.

Στους πολύ αδύνατους μαθητές, όπως αυτοί 'που δεν γνωρίζουν ούτε την προπαίδεια', δίνει ένα είδος βοηθήματος/ εργαλείου, όπως τον 'πίνακα της προπαίδειας', ορίζοντας και συγκεκριμένο χρονικό διάστημα χρήσης του, κατά το οποίο τους αφήνει να το διαχειριστούν μόνοι τους χωρίς κάποια επιπλέον βοήθεια από την ίδια. «...υπάρχουν μαθητές με πολύ διαφορετικό επίπεδο, κάποιοι με καλή μαθηματική σκέψη αλλά με προβλήματα στην ορθογραφία, υπάρχουν μαθητές στην Α' Γυμνασίου που δεν ξέρουν ούτε την προπαίδεια στους οποίους έχω δώσει ένα σκονάκι προπαίδειας για να το έχουν δίπλα τους και να το χρησιμοποιούν μέχρι το τέλος του τετραμήνου ... αν δεν την μάθουν μέχρι τότε θα το πάρω. Πρέπει να βάλουμε ένα deadline για να την μάθουν, δεν μπορούν να δουλεύουν σε όλο το Γυμνάσιο με σκονάκι. Αυτό, δεν κάνω κάτι διαφορετικό».

Πρώτη συνέντευξη του Αντώνη

**Άξονας 1 (Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο):** Για την προετοιμασία της διδασκαλίας ο Αντώνης δηλώνει ότι συμβουλευεται «πρωτίστως τα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και άλλες πηγές. Όσο πιο καλά θέλει να είναι προετοιμασμένος ο εκπαιδευτικός τόσο περισσότερες πηγές πρέπει να συμβουλευεται. Γίνεται έτσι πιο καταρτισμένος και πιο έτοιμος για το μάθημα». Συνεχίζει λέγοντας ότι, όταν κρίνει το σχολικό εγχειρίδιο κατάλληλο, τότε το χρησιμοποιεί κατ' αποκλειστικότητα. Αλλά δεν βρίσκει όλα τα σχολικά εγχειρίδια κατάλληλα για τη διδασκαλία, καθώς θεωρεί ότι εμφανίζουν ασυνέχειες το ένα με το άλλο και ότι είναι αντιπαιδαγωγικά.

Επίσης τονίζει ότι η διάρκεια μιας διδακτικής ώρας δεν είναι αρκετή, καθώς και ότι η προβλεπόμενη ύλη σε ορισμένες τάξεις είναι υπερβολική με αποτέλεσμα να αναγκάζονται οι εκπαιδευτικοί να διδάσκουν επιλεκτικά κάποια κεφάλαια που θεωρούν περισσότερο σημαντικά από τα υπόλοιπα. Ως λύση αυτού του προβλήματος υποστηρίζει 'την ελάττωση της διδακτέας ύλης ή αύξηση των ωρών διδασκαλίας των Μαθηματικών'.

**Άξονας 2 (Γνώσεις για τη μάθηση):** Για να ενθαρρύνει την ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών στο μάθημα, ο εκπαιδευτικός αναθέτει στους δυνατούς μαθητές την επίλυση των αποριών των συμμαθητών τους. Υποστηρίζει έτσι ότι μέσω της επικοινωνίας που αναπτύσσεται μεταξύ τους διευκολύνεται και η διαδικασία της μάθησης. «Εγώ εδώ και καιρό προσπαθώ από την αρχή της χρονιάς κάποιες απορίες των αδύναμων μαθητών να τις επιλύσω σηκώνοντας στον πίνακα ή δίνοντας τον λόγο σε μέτριους ή καλούς μαθητές. Κάνοντας έτσι τους καλούς μαθητές δασκάλους των αδύναμων. Με αποτέλεσμα να νοιώθουν και οι καλοί μαθητές ότι κάτι κάνουν, να νοιώθουν αυτήν την καταξίωση και από την άλλη μεριά οι

αδύνατοι μαθητές να καταλαβαίνουν ίσως καλύτερα αυτό που ρώτησα γιατί μεταβιβάζεται από έναν συνομήλικό τους. Αυτό μου αρέσει και είναι κάτι πολύπλευρο, παίρνουν κάτι περισσότερο από απλές γνώσεις Μαθηματικών ή Φυσικής μέσω της συνδιαλλαγής μεταξύ τους. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνεται κάθε φορά, δεν μπορεί να γίνει πανάκεια, ούτε μπορεί να γίνεται για όλες τις ερωτήσεις. Δεν μπορούμε να κάνουμε τους καλούς μαθητές δασκάλους σε όλα τα μαθήματα, τι θα μάθουν τότε; Πρέπει και οι ίδιοι να διδαχτούν».

Αναφερόμενος στα πιο συχνά λάθη των μαθητών του στα κλάσματα, ο Αντώνης υποστηρίζει ότι δυσκολεύονται στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Επίσης, αναφέρει ότι τα λάθη διαφοροποιούνται από μαθητή σε μαθητή, έχοντας ως κοινή βάση την αντιμετώπιση των Μαθηματικών ως «ξερούς αριθμούς» αποκομμένους από την πραγματικότητα. Αυτήν τη ψυχρή εικόνα που έχουν οι μαθητές για τα Μαθηματικά την προσδίδει στον πολύ περιορισμένο χρόνο διδασκαλίας που δεν επιτρέπει στους μαθητές να εμπεδώσουν την καινούρια γνώση. Καταλήγει λέγοντας ότι λόγω περιορισμένου χρόνου επιλέγει με ποιους μαθητές θα κάνει μάθημα και ποιους θα αφήσει στην τύχη τους (!).

**Άξονας 3 (Γνώσεις για τη διδασκαλία):** Σχετικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες και τον τρόπο που τις επιλέγει, ο Αντώνης αναφέρει ότι πιο συχνά επιλέγει από το σχολικό εγχειρίδιο παρά από άλλες πηγές. Αρχικά αναφέρει τη σύντομη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας ως παράγοντα αυτής της επιλογής, ενώ αργότερα κάνει λόγο για αδιαφορία και κούραση των μαθητών κατά την αξιολόγησή τους. Ωστόσο, οι δραστηριότητες που επιλέγει εκτός του σχολικού εγχειριδίου φροντίζει να είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας και να συνδέουν την επιστήμη των Μαθηματικών με την καθημερινότητα των μαθητών.

Ο Αντώνης υποστηρίζει ότι πρέπει να διπλασιαστούν οι ώρες διδασκαλίας των Μαθηματικών καθώς δεν του αρκούν οι ήδη υπάρχουσες για την επίλυση των αποριών που έχουν οι μαθητές και τη διδασκαλία καινούριων εννοιών. Επίσης, αναφέρει ότι πρέπει να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση απ'ότι δίνεται στην 'πράξη', στην επίλυση ασκήσεων δηλαδή, και να υπάρχει ωστόσο συνδυασμός θεωρίας και ασκήσεων.

### **Ανάλυση της δεύτερης συνέντευξης**

*Δεύτερη συνέντευξη της Ελένης*

**Άξονας 1 (Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο):** Η εκπαιδευτικός, θέλοντας να εξηγήσει τί είδους ευελιξία υιοθετεί στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αναφέρει ότι μερικές φορές διδάσκει κάποιες έννοιες νωρίτερα ή αργότερα από ό,τι προτείνουν οι επίσημες οδηγίες διδασκαλίας. Αυτό το κάνει καθώς υποστηρίζει ότι οι γνώσεις των μαθητών δεν είναι πάντα επαρκείς για την επίλυση των δραστηριοτήτων του σχολικού εγχειριδίου, αν πρώτα δεν διδαχθούν έννοιες που εμφανίζονται νωρίτερα σε αυτό. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι εξισώσεις στην Α' Γυμνασίου και οι τετραγωνικές ρίζες στη Β' Γυμνασίου.

Η Ελένη εξηγεί ότι είναι σίγουρη ότι θα καλύψει την ύλη μέχρι το τέλος της χρονιάς καθώς δεν ακολουθάει τον προτεινόμενο, από τις επίσημες οδηγίες, χρόνο διδασκαλίας του κάθε κεφαλαίου του σχολικού εγχειριδίου και αφιερώνει όσο χρόνο θεωρεί η ίδια κατάλληλο για τη διδασκαλία μιας έννοιας. Επίσης, ενώ αναφέρει ότι θεωρεί όλη την 'ύλη' σημαντική και

απαραίτητη για την πορεία του μαθητή, αναφέρει χαρακτηριστικά ότι δεν επιδιώκει όλοι οι μαθητές να φτάσουν στο επιθυμητό επίπεδο γνώσεων και αφήνει κάποιους να ανταπεξέλθουν μόνοι τους.

**Άξονας 2 (Γνώσεις για τη μάθηση):** Η εκπαιδευτικός υποστηρίζει ότι για να τα καταφέρει στα Μαθηματικά ένας μαθητής του Γυμνασίου και να γίνει 'άριστος' χρειάζεται να ακολουθήσει κάποια προκαθορισμένα 'βήματα' που αντανakλούν ένα ισχυρά συμπεριφοριστικό πρότυπο μάθησης των Μαθηματικών. Αρχικά, πρέπει να μάθει θεωρία, να λύσει τις ήδη λυμένες ασκήσεις που έχει καταγράψει στο τετράδιό του κατά τη διδασκαλία και τέλος να ασχοληθεί με αυτές που έχει προς επίλυση για το επόμενο μάθημα. «Γιατί αν δεν μάθει πώς λύνονται, τότε όσες ασκήσεις και να λύσει δεν θα κάνει καμία σωστά. Με αυτόν τον τρόπο ένας μαθητής θα γίνει άριστος, το βασικό είναι να ξαναλύνει το λυμένο.»

**Άξονας 3 (Γνώσεις για τη διδασκαλία):** Όσον αφορά τις μαθηματικές δραστηριότητες που επιλέγει, η Ελένη αναφέρει ότι συμβουλευεται εξωσχολικά βιβλία και ιστοσελίδες για να βρει τις δραστηριότητες που θεωρεί κατάλληλες για την κατανόηση της θεωρίας. Επίσης, πέρα από αυτές του σχολικού εγχειριδίου αξιοποιεί και άλλες δραστηριότητες κυρίως υπολογιστικού- διαδικαστικού τύπου για μεγαλύτερη εξάσκηση των μαθητών.

Η Ελένη υποστηρίζει ότι όλοι οι μαθητές σηκώνονται στον πίνακα και συνήθως η επιλογή είναι αλφαβητική. Διαχωρίζει τα ερωτήματα-δραστηριότητες που αναθέτει στους μαθητές ανάλογα με τις επιδόσεις τους στα Μαθηματικά και φροντίζει ο βαθμός δυσκολίας να είναι αντίστοιχος με τις επιδόσεις του μαθητή, αποσκοπώντας βέβαια ο καθένας να είναι σε θέση να επιλύσει δυσκολότερες δραστηριότητες στο μέλλον.

Για να μπορέσει η διδασκαλία των Μαθηματικών να είναι αποτελεσματική για τους μαθητές, η εκπαιδευτικός υποστηρίζει ότι πρέπει να ελαττωθεί η διδακτέα ύλη. Επίσης, ο εκπαιδευτικός δεν θα πρέπει να κάνει διάλεξη αλλά να συμβουλευεται εργαλεία που οπτικοποιούν τις διάφορες μαθηματικές έννοιες και τις κάνουν πιο προσιτές στον μαθητή. Παρόλα αυτά στο τέλος καταλήγει στο μοτίβο 'θεωρία-ασκήσεις-φύλλο εργασίας' ως προτεινόμενο τρόπο διδασκαλίας.

#### Δεύτερη συνέντευξη του Αντώνη

**Άξονας 1 (Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο):** Ο Αντώνης αναφέρει ότι η κύρια πηγή που συμβουλευεται για τη διδασκαλία του είναι το σχολικό εγχειρίδιο. Θέτει διαφορετικά κριτήρια για να κρίνει αν ένα σχολικό ή ένα εξωσχολικό εγχειρίδιο είναι κατάλληλα για τη διδασκαλία του. Το σχολικό εγχειρίδιο πρέπει να είναι 'διδασκτικό', δηλαδή ένας μαθητής που το διαβάζει να κατανοεί από μόνος του τις μαθηματικές έννοιες που διαπραγματεύεται και τις δραστηριότητες που περιλαμβάνει. Αντίθετα, το εξωσχολικό εγχειρίδιο υποστηρίζει ότι αναφέρεται μόνο στον εκπαιδευτικό, και ότι θα πρέπει να αποτελεί συμπλήρωμα του σχολικού εγχειριδίου που θα εμβαθύνει τη γνώση και θα προτείνει διαφορετικούς τρόπους

προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών, υποβοηθώντας τον εκπαιδευτικό στη διδασκαλία του.

Ο Αντώνης αποδίδει τις αστοχίες που επισήμανε ότι υπάρχουν στις οδηγίες διδασκαλίας στα Μαθηματικά του Γυμνασίου στην έλλειψη σύνδεσης των οδηγιών αυτών με την πραγματικότητα της τάξης. Αναφέρει ότι οι οδηγίες θα πρέπει να συντάσσονται από εκπαιδευτικούς που έχουν διδάξει σε σχολική τάξη, γιατί αυτοί είναι που γνωρίζουν εκ των έσω το σχολικό περιβάλλον. Ως παράδειγμα αστοχίας αναφέρει ότι στη φυσική της Α΄ Γυμνασίου οι οδηγίες διδασκαλίας προτείνουν την εισαγωγή των μαθητών στον νόμο του Χουκ μέσω της έννοιας των ανάλογων ποσών, κάτι το οποίο δεν έχουν ακόμα διδαχθεί οι μαθητές στα Μαθηματικά.

Ο Αντώνης αναφέρει ότι «το Γυμνάσιο είναι δευτεροβάθμια υποχρεωτική εκπαίδευση και στόχος της θα έπρεπε να είναι να βγάλει ολοκληρωμένους πολίτες». Οπότε σύμφωνα με αυτό, οι μαθητές που αποφοιτούν από το Γυμνάσιο, δηλαδή από την υποχρεωτική εκπαίδευση, θα πρέπει να έχουν όλες εκείνες τις γνώσεις που θα τους καταστήσουν αυριανούς σκεπτόμενους πολίτες. Κάποια παραδείγματα τέτοιας γνώσης σημειώνει ότι είναι η έννοια του ποσοστού και πώς αυτό εντάσσεται σε ρεαλιστικά προβλήματα, και η έννοια και σημασία του τετραγωνικού μέτρου και κατ' επέκταση του εμβαδού.

**Άξονας 2 (Γνώσεις για τη μάθηση):** Ο εκπαιδευτικός εξηγεί ότι κάνοντας τους καλούς μαθητές 'δασκάλους' των αδύνατων με το σωστό τρόπο, δηλαδή χωρίς να επισημαίνει ποιός είναι καλός και ποιος αδύνατος, τότε οι αδύνατοι δέχονται χωρίς πρόβλημα τη βοήθεια των συμμαθητών τους. Αυτό το αποδίδει στο γεγονός ότι τα παιδιά έχουν 'κοινό λεξιλόγιο' και, ακόμα κι αν είναι φτωχότερο από εκείνο του εκπαιδευτικού, τα βοηθάει να κάνουν μια πρώτη προσέγγιση στην καινούρια έννοια.

Ο Αντώνης αναφέρει ότι ο 'καλός μαθητής' στα Μαθηματικά «φαίνεται από το ενδιαφέρον που δείχνει για το μάθημα και τον τρόπο που παρακολουθεί και προσέχει αυτά που λέει ο καθηγητής και οι συμμαθητές του». Σύμφωνα με τα όσα λέει, ένας αδύνατος μαθητής για να βελτιωθεί η επίδοσή του εξαρτάται μόνο από τον ίδιο και το αν προσέχει στη διδασκαλία. Εκφράζει ακόμα την αδυναμία του να εμπλέξει όλους τους μαθητές στην εκπαιδευτική διαδικασία. Παρά την προσπάθειά του να εμπλέξει όλους τους μαθητές, ο περιορισμένος διδακτικός χρόνος δεν του το επιτρέπει.

Ο Αντώνης υποστηρίζει ότι για την αδιαφορία των μαθητών για το σχολείο δεν φταίει μόνο η ασυνέχεια μεταξύ των εκπαιδευτικών βαθμίδων. Δεν γνωρίζει και ο ίδιος με σιγουριά τα αίτια αυτής της αδιαφορίας, αλλά ένας άλλος λόγος είναι ότι έχουν να ασχοληθούν με πολλά μαθήματα. Επίσης σύμφωνα με τον ίδιο, οι μαθητές θεωρούν το σχολείο βαρετό και ότι αυτήν την εικόνα φέρνουν στο μυαλό τους στην αρχή κάθε σχολικής χρονιάς, με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν το σχολείο εκ νέου με τον ίδιο τρόπο. Δεν εξηγεί ωστόσο τον λόγο που πιστεύει ότι συμβαίνει αυτό.

**Άξονας 3 (Γνώσεις για τη διδασκαλία):** Ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι οι ερωτήσεις των μαθητών είναι προβλέψιμες και ότι σπάνια ένας εκπαιδευτικός πιάνεται απροετοίμαστος σε ερώτηση μαθητή. Παρόλα αυτά μερικές φορές υπάρχουν και ερωτήσεις που όχι μόνο δεν

είναι προβλέψιμες, αλλά και ο εκπαιδευτικός αδυνατεί να τις απαντήσει. Ο Αντώνης αυτές τις τελευταίες ερωτήσεις τις διαχειρίζεται βάζοντας όλη την τάξη στη διαδικασία να σκεφτούν τον τρόπο που θα μπορούσαν να απαντήσουν, ακόμα και αν δεν γνωρίζουν εξ αρχής την απάντηση. Δίνει, επίσης, ένα παράδειγμα από τη διδασκαλία της φυσικής για τον τρόπο που διαχειρίστηκε την κατάσταση όταν ένας μαθητής τον ρώτησε ποια είναι η μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ της μικρότερης και της μεγαλύτερης διάρκειας της ημέρας κατά τη διάρκεια του έτους και δε γνώριζε την απάντηση. Ο Αντώνης αναφέρει ότι είναι εξίσου σημαντικές και η γραπτή και η προφορική εξέταση των μαθητών. Εξηγεί ότι η προφορική εξέταση χαρακτηρίζεται από την αμεσότητά της και ο εκπαιδευτικός μπορεί να δίνει κάποιου είδους βοήθεια στον μαθητή που βλέπει ότι δυσκολεύεται να απαντήσει. Αντίθετα, στη γραπτή εξέταση το ερώτημα είναι διατυπωμένο γραπτά και ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει να δώσει περαιτέρω εξηγήσεις. Τα πλεονεκτήματα της γραπτής εξέτασης είναι ότι φαίνεται αν ο μαθητής καταλαβαίνει τον γραπτό λόγο, ο τρόπος έκφρασής του που είναι πολύ σημαντικός στα Μαθηματικά και ο τρόπος σκέψης του.

Ο πίνακας 2 που ακολουθεί αποτυπώνει τα βασικά δομικά στοιχεία των απαντήσεων των δύο συνεντεύξεων του Αντώνη (Α) και της Ελένης (Ε) ανά ερευνητικό άξονα.

**Πίνακας 2:** Περιεχόμενο και δομικά στοιχεία των συνεντεύξεων του Αντώνη & της Ελένης

Άξονες εστίασης	Συνιστώσες	Χαρακτηριστικά στοιχεία	
1 <sup>ος</sup> Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο	Προετοιμασία της διδασκαλίας	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Πρόγραμμα σπουδών (Ε) (Α)</li> <li>• Οδηγίες διδασκαλίας (Ε) (Α)</li> <li>• Σχολικό εγχειρίδιο (Ε) (Α)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Φυλλάδια ασκήσεων (Ε) (Α)</li> <li>• Διαδίκτυο (Α)</li> </ul>
	Ευελιξία στη διδασκαλία	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Διδασκαλία μιας έννοιας σε άλλο χρόνο από τον προτεινόμενο από το ΑΠ (Ε)</li> <li>• Ελεύθερη κατανομή του χρόνου διδασκαλίας μιας ενότητας (Ε)</li> </ul>	
	Κριτήρια καταλληλότητας εγχειριδίων	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αυτόνομη ανάγνωση με (Α)</li> <li>• Τα εξωσχολικά βιβλία ως συμπληρωματικοί πόροι (Α)</li> </ul>	
	Σημασία της προπαίδειας στο Γυμνάσιο	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αναγνώριση πως δεν συνιστά αυτοσκοπό (Α)</li> <li>• Η εκμάθηση των Μαθηματικών απαιτεί ενασχόληση με αυτά (Α)</li> </ul>	
	Μαθηματικές γνώσεις τελειόφοιτων Γυμνασίου	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Πράξεις με ρητούς αριθμούς (Ε)</li> <li>• Εξισώσεις α' και β' βαθμού (Ε)</li> <li>• Μονώνυμα/πολυώνυμα (Ε)</li> <li>• Οποσδήποτε ταυτότητες (Ε)</li> </ul>	
	Κάλυψη της επίσημης 'ύλης' και κατανόηση από τους μαθητές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Προβλεπόμενη- διδασκόμενη 'ύλη' (Ε) (Α)</li> <li>• Αδυναμία κατανόησης από όλους τους μαθητές (Ε) (Α)</li> <li>• Ευελιξία στο τι θα διδαχθεί (Ε) (Α)</li> </ul>	
	Πρωταρχικές γνώσεις για το κλάσμα και την εξίσωση	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 'Γνώση της πίτσας' (Ε)</li> <li>• 'Έννοια του κομματιού' (Ε)</li> <li>• Έννοια μεταβλητής (Ε)</li> <li>• Έννοια παραμέτρου (Ε)</li> <li>• Έννοια 'ζυγαριάς' (Ε)</li> </ul>	

	Συχνότερες δυσκολίες-λάθη των μαθητών	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Κατασκευή γεωμετρικών οντοτήτων (E)</li> <li>• Αδυναμία κατανόησης της εκφώνησης (E) (A)</li> <li>• Έλλειψη συνδυαστικής σκέψης (E) (A)</li> <li>• Ανεπαρκής μελέτη της θεωρίας (E)</li> <li>• Αδυναμία εννοιολογικής κατανόησης του κλάσματος (A)</li> <li>• Προβληματική πορεία μετάβασης από Δημοτικό στο Γυμνάσιο (A)</li> </ul>
<b>2ος</b> <i>Γνώσεις για τη μάθηση</i>	Εμπλοκή μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Διαφοροποίηση των στόχων για κάθε μαθητή (E)</li> <li>• Φυλλάδια διαβαθμισμένης δυσκολίας (E)</li> <li>• Αδύνατοι μαθητές: ερωτήσεις που μπορούν να απαντήσουν (E) (A)</li> <li>• Επιπλέον ασκήσεις στους αδύνατους μαθητές (E)</li> <li>• Προφορικές ερωτήσεις (A)</li> <li>• Ανάθεση ρόλου του δασκάλου στους δυνατούς μαθητές, για να επιλύσουν απορίες αδύνατων (A)</li> </ul>
	Τρόπος σκέψης στα μαθηματικά του Γυμνασίου	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Εκμάθηση θεωρίας (E)</li> <li>• Επίλυση ήδη λυμένων ασκήσεων (E)</li> <li>• Επίλυση άλυτων ασκήσεων (E)</li> </ul>
	Πρωταρχικές γνώσεις για την έννοια του κλάσματος	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 'Γνώση της πίτσας' (A)</li> <li>• "Έννοια του κομματιού" (A)</li> </ul>
	Ενθάρρυνση των μαθητών για ενεργή συμμετοχή	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Διάλογος (E) (A)</li> <li>• Προφορικές ερωτήσεις (E) (A)</li> <li>• Μαθητές στον πίνακα (E) (A)</li> <li>• Επίλυση ασκήσεων στο τετράδιο (E) (A)</li> </ul>
<b>3ος</b> <i>Γνώσεις για τη διδασκαλία</i>	Τρόπος επιλογής δραστηριοτήτων	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Από Α.Π. / επίσημες οδηγίες (E) (A)</li> <li>• Υπολογιστικές ασκήσεις για εξάσκηση (E)</li> <li>• Σχολικό εγχειρίδιο κατά κύριο λόγο, εξαιτίας σύντομης διάρκειας διδακτικής ώρας (A)</li> <li>• Εξωσχολικές δραστηριότητες διαβαθμισμένης δυσκολίας που συνδέουν μαθηματικά με καθημερινότητα μαθητών (A)</li> </ul>
	Διδακτικές πρακτικές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Εκμάθηση θεωρίας με τη μέθοδο της αποστήθισης (E)</li> <li>• Συνδυασμός θεωρίας-ασκήσεων (A)</li> <li>• Κοινή μέθοδο διδασκαλίας σε όλους (E)</li> <li>• Επιλογή των μαθητών που θα εμπλακούν (A)</li> <li>• Ειδική βοήθεια στους αδύνατους (E)</li> <li>• Ενθάρρυνση συμμετοχής (E)</li> <li>• Ελάττωση διδακτέας ύλης (E)</li> <li>• Έμφαση στην επίλυση ασκήσεων παρά στη θεωρία (E) (A)</li> </ul>
	Έλεγχος της κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Συμμετοχή στο μάθημα (E) (A)</li> <li>• Γραπτές επιδόσεις (E)</li> <li>• Γραπτές και προφορικές επιδόσεις (A)</li> <li>• Μόνο προειδοποιημένη γραπτή εξέταση (E)</li> <li>• Κλασικό μοντέλο αξιολόγησης (διαγώνισμα, τεστ, προφορικές ερωτήσεις) (A)</li> <li>• Αδύνατοι μαθητές στον πίνακα (E)</li> </ul>
	Συμβουλές στον νέο εκπαιδευτικό	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Υπομονή, καθώς είναι μια δύσκολη δουλειά (A)</li> <li>• Δράση πάντα με σκοπό το καλό των μαθητών (A)</li> <li>• Ευέλικτη εφαρμογή των οδηγιών διδασκαλίας</li> <li>• Θετικό πρότυπο για τους μαθητές (A)</li> </ul>
	Διαχείριση του	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αναδιτύπωση της αρχικής ερώτησης με άλλον τρόπο (A)</li> </ul>

	λάθους	<ul style="list-style-type: none"><li>• Συμβουλή για περισσότερη μελέτη σε 'τυχαίες' απαντήσεις (Α)</li><li>• Εξήγηση 'πώς θα σκεφτόμουν για να απαντήσω' (Α)</li></ul>
--	--------	---

## Συζήτηση και συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της έρευνας και η ανάλυση των δεδομένων αποτέλεσαν τη βάση της συζήτησης των ερευνητικών ερωτημάτων. Μέσω της συζήτησης επιχειρείται η σκιαγράφηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών αναφορικά με τα χαρακτηριστικά της ΠΓΠ (1<sup>ο</sup> Ερευνητικό Ερώτημα), καθώς και των μεταξύ τους διαφορών (2<sup>ο</sup> Ερευνητικό Ερώτημα). Ακολουθεί η συζήτηση των αποτελεσμάτων ανά ερευνητικό ερώτημα.

**1<sup>ο</sup> Ερευνητικό Ερώτημα:** Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα επιδιώκει να διερευνήσει τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά στο Γυμνάσιο για τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου και της οργάνωσης της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου, έτσι όπως αναδεικνύονται μέσα από τον λόγο που αρθρώνουν και τις διδακτικές τους πρακτικές στην τάξη.

Καταρχάς, η μη δεσμευτικότητα του ΑΠ που υποστηρίζουν οι εκπαιδευτικοί του δείγματος, συμφωνεί με την άποψη των Lloyd, Remillard & Beth (2008), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι το αναλυτικό πρόγραμμα δεν χρησιμοποιείται αυτούσιο κατά τη διδασκαλία αλλά οι εκπαιδευτικοί είναι εκείνοι που διαμορφώνουν τη δομή της διδασκαλίας κατά την σχεδίασή της. Επίσης, τα ευρήματα συμφωνούν και με τον Brown (2009) σχετικά με τη διδασκαλία ως μιας σχεδιαστική διαδικασία στην οποία ο εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται και μεταφράζει το υπάρχον υποστηρικτικό υλικό συνεκτιμώντας ένα σύνολο παραγόντων: τους περιορισμούς που υπάρχουν στην τάξη του, τη γνώση των μαθητών του και τις προσωπικές του επιδιώξεις. Τα ευρήματα συμφωνούν με τον Brown (2009), ο οποίος υποστηρίζει ότι ο τρόπος σκέψης και η απόκριση των μαθητών αναπροσαρμόζουν το έργο του εκπαιδευτικού, πχ τη στρατηγική προσέγγισης που είχε αρχικά επιλέξει ή ακόμα και το είδος των δραστηριοτήτων που επιλέγει.

Όσον αφορά τη μάθηση και κατανόηση των Μαθηματικών, ο Maher (2004) και ο Wilson et al. (2015) προτείνουν τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών και τη γραπτή εξήγηση της επίλυσης της δραστηριότητας που τους ανατίθεται με ελάχιστη παρέμβαση από τον εκπαιδευτικό. Κάτι τέτοιο δεν διακρίνεται στη διδασκαλία της Ελένης, αλλά ο Αντώνης ανέφερε ότι αναθέτει τον ρόλο του 'δασκάλου' στους δυνατούς μαθητές για να βοηθήσουν και να εξηγήσουν, με τον δικό τους τρόπο, τις μαθηματικές έννοιες στους συμμαθητές τους. Τόσο ο Shulman (1986) όσο και οι Magnusson et al (1999) υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν τις πρωταρχικές γνώσεις των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκουν, καθώς και τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών αυτών. Η Ελένη και ο Αντώνης αναφέρουν κάποιες δυσκολίες/λάθη των μαθητών στην έννοια των κλασμάτων και στη γεωμετρία.

Η αξιολόγηση της κατανόησης των μαθητών διενεργείται από τους δύο εκπαιδευτικούς προφορικώς αλλά και γραπτώς. Η προφορική είναι 'αξιολόγηση εκείνης της στιγμής' (in the moment), κατά την οποία ο εκπαιδευτικός με ερωτήσεις προσπαθεί να διαπιστώσει αν και πόσοι από τους μαθητές έχουν κατανοήσει τα όσα έχει πει. Οι Chan & Hume (2019) αναφέρονται σε αυτόν τον τρόπο αξιολόγησης όπως και μέσω φύλλων εργασίας-δραστηριοτήτων, πρακτική που υποστηρίζει ότι υιοθετεί και η Ελένη.

Σύμφωνα με τους Cai & Lester (2010), οι εργασίες καλό είναι να έχουν τη μορφή προβλημάτων, δηλαδή ερωτήσεων που δεν επιδέχονται απαντήσεις ρουτίνας, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τις επιθυμητές δεξιότητες. Στην έρευνά μας οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν κυρίως κλειστές μαθηματικές δραστηριότητες διαδικαστικού τύπου. Ωστόσο, ο Αντώνης σχολιάζει στη συνέντευξη δυο παραδείγματα προβλημάτων με πραγματικό πλαίσιο αναφοράς, οικείο στους μαθητές, καθώς υποστηρίζει ότι η σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινότητα των μαθητών θα τους βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών ιδεών που διαπραγματεύονται στη σχολική τάξη (Wilson et al., 2005).

**2ο Ερευνητικό Ερώτημα:** Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αφορά τους παράγοντες που καθορίζουν την ΠΓΠ και το πώς αυτή διαφοροποιείται με βάση το προφίλ των εκπαιδευτικών. Ο Αντώνης εστιάζει σε προβλήματα με πραγματικό πλαίσιο, ενώ η Ελένη δείχνει να έχει μικρότερη ευελιξία στο τί θα διδάξει. Σύμφωνα με τους Wasilatul Murtafiah et al. (2020), οι εκπαιδευτικοί με εμπειρία που συμμετείχαν στην έρευνά τους έτειναν να χρησιμοποιούν προβλήματα με πραγματικό πλαίσιο, σε αντίθεση με τους αρχάριους που αναφέρονταν σε πλαίσια λιγότερο οικεία.

Ο Αντώνης εμφανίζεται να ακολουθεί ένα αρκετά διαδραστικό στυλ διδασκαλίας με περισσότερο διάλογο μεταξύ εκπαιδευτικού-μαθητή και μεταξύ των μαθητών και δείχνει να προσπαθεί να αλλάξει τις στρατηγικές διδασκαλίας του, όταν αυτές που χρησιμοποιεί δεν έχουν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Σύμφωνα με τους Pressley et al. (2020) οι συμμετέχοντες στη μελέτη τους εκπαιδευτικοί που εστίαζαν τη διδασκαλία στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών και προσπαθούσαν να δημιουργήσουν ένα καλό κλίμα μέσα στην τάξη που βοηθούσε στη μάθηση, είχαν ως αποτέλεσμα μια περισσότερο αποτελεσματική διδασκαλία

Τα παραπάνω ευρήματα οδηγούν στα ακόλουθα **συμπεράσματα** ανά ερευνητικό ερώτημα:

**Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα**, τα αποτελέσματα της ανάλυσης δεδομένων δείχνουν ότι η ΠΓΠ των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών είναι αρκετά περιορισμένη, κατά κανόνα ανελαστική, διαδικαστικού τύπου και διακρίνεται για το χαμηλό επίπεδο οργάνωσης, συνοχής και δημιουργικής αξιοποίησης στην πράξη. Δεν τροφοδοτείται από το Α.Π. αλλά οριοθετείται από το σχολικό εγχειρίδιο. Οι αντιλήψεις για τη μάθηση και τους μαθητές βασίζονται στην εμπειρία, είναι ανεπεξέργαστες, αποκλειστικά γνωστικού προσανατολισμού και ασαφείς σε ό,τι αφορά ζητήματα συλλογικής μάθησης των Μαθηματικών. Αναφορικά με τη διδασκαλία, οι αντιλήψεις συνδέονται με το κλασικό δασκαλοκεντρικό μοντέλο, ενώ η αξιολογική διαδικασία γίνεται κατανοητή εν πολλοίς με όρους ποσοτικής αποτίμησης των

επιτευγμάτων των μαθητών, με τη διαμορφωτική εκδοχή της να εμφανίζεται επιθυμητή αλλά άγνωστη σε θεωρητικό και εμπειρικό επίπεδο.

**Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα**, ένας από τους πλέον κρίσιμους παράγοντες που καθορίζουν την ΠΓΠ των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών με την τόσο διαφορετική πορεία επαγγελματικής ανάπτυξης είναι η διδακτική τους εμπειρία. Η Ελένη, με αρκετά χρόνια εμπειρίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε φροντιστήρια και στην προετοιμασία των μαθητών για τις πανελλήνιες εξετάσεις, δίνει ιδιαίτερη σημασία στην εκμάθηση των ορισμών και της 'θεωρίας' του σχολικού εγχειριδίου από όλους τους μαθητές. Και στις δύο παρακολούθησεις επισήμανε στους μαθητές ότι η γνώση της θεωρίας είναι πολύ σημαντική και αυτό γιατί τόσο στις γραπτές εξετάσεις όσο και στα γραπτά διαγωνίσματα στο σχολείο υπάρχουν θεωρητικές ασκήσεις που αντιστοιχούν σε σημαντικό αριθμό μονάδων. Επίσης, η διδασκαλία της Ελένης είναι δασκαλοκεντρική και ο τρόπος επίλυσης και εκμάθησης των Μαθηματικών στους μαθητές γίνεται με διαδικαστικό τρόπο, ακολουθώντας συγκεκριμένα βήματα. Αντίθετα, ο Αντώνης που διδάσκει για πρώτη φορά Μαθηματικά φαίνεται να προσπαθεί να συνδέσει τη μαθηματική γνώση με την καθημερινότητα των μαθητών. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι είναι φυσικός, η Φυσική στηρίζεται στο πείραμα και στην παρατήρηση και όχι σε διαδικαστικές μεθόδους. Επίσης, επειδή διδάσκει για πρώτη φορά τα Μαθηματικά, αρχικά δυσκολεύτηκε, ανέτρεξε στο Α.Π. αλλά και συμβουλευτήκε συναδέλφους μαθηματικούς με αποτέλεσμα να μοιάζει να έχει διαμορφώσει μια πιο ευέλικτη αντίληψη για τους στόχους και τον τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών. Όσον αφορά στις δυσκολίες των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος, η Ελένη εξηγούσε είτε διαδικαστικά την επίλυση μιας δραστηριότητας είτε λέγοντας η ίδια τη σωστή απάντηση. Ο Αντώνης από την άλλη μεριά εστίαζε περισσότερο στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές. Σε απροσδόκητες ερωτήσεις ο Αντώνης ανταποκρίθηκε με αυτοσχδιασμό και επέδειξε ανοιχτό πνεύμα στο να ακούει ερμηνευτικά τους μαθητές και επέτρεψε στις ιδέες και στις απαντήσεις τους να κατευθύνουν την πορεία του μαθήματος. Επίσης, όταν κάποιος μαθητής δεν καταλάβαινε μια έννοια, μέσω διαδοχικών ερωτήσεων και ακολουθώντας την σκέψη του, του έδειχνε τον δρόμο για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας αυτής.

Η ανάλυση των συνεντεύξεων που πραγματοποιήθηκαν με τους δύο εκπαιδευτικούς επέτρεψαν την χαρτογράφηση του πώς αντιλαμβάνονται το περιεχόμενο, την οργάνωση αλλά και την διαχείριση της ΠΓΠ που σχετίζεται με τα Μαθηματικά. Επίσης, την ανίχνευση του ρόλου που διαδραματίζει το διαφορετικό επαγγελματικό τους υπόβαθρο στη συγκρότηση αυτών των αντιλήψεων, οδηγώντας σε ένα ενδιαφέρον εύρημα. Δηλαδή, ότι τα σύγχρονα προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης οφείλουν να είναι ευέλικτα και διεπιστημονικά και να προσφέρουν πολλαπλές διαδρομές για την ανάπτυξη της μαθηματικής ταυτότητας του εκπαιδευτικού των Μαθηματικών. Χρειάζεται συστηματική έρευνα σε αυτήν την κατεύθυνση που θα επιτρέψει πληρέστερες κατανοήσεις του πώς αντιλαμβάνονται και πώς αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου. Η έρευνα που παρουσιάστηκε εδώ αποτελεί μια μικρής κλίμακας μελέτη που μπορεί να θεωρηθεί

ενδεικτική της ερευνητικής προσπάθειας σε αυτήν την κατεύθυνση. Θα είχε ενδιαφέρον να επαναληφθεί με περισσότερους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς, με διαφορετικές πορείες επαγγελματικής ανάπτυξης, με περισσότερες παρατηρήσεις διδασκαλιών από διαφορετικές θεματικές ενότητες του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών, αλλά και με πιο συχνές συνεντεύξεις στην διάρκεια της συνεργασίας με τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς.

## Αναφορές

- Amador, J. M., Rogers, M. A. P., Hudson, R., Phillips, A., Carter, I., Galindo, E., & Akerson, V. L. (2022). Novice teachers' pedagogical content knowledge for planning and implementing mathematics and science lessons. *Teaching and Teacher Education*, 115, 103736.
- Anthony, G., Hunter, R., Anderson, D., Averill, R., Drake, M., Hunter, J., & Rawlins, P. (2015). Learning the work of ambitious mathematics teaching. *Wellington: New Zealand Council of Educational Research*.
- Ball, D., Thames, M.H., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J. & Phelps, G. (2009). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1), 95-98. Thessaloniki, Greece: PME
- Barkatsas, A., & Malone, J. (2005). A typology of mathematics teachers' beliefs about teaching and learning mathematics and instructional practices. *Mathematics Education Research Journal*, 17(2), 69-90.
- Belbase, S. (2012). Teacher Belief, Knowledge, and Practice: A Trichotomy of Mathematics Teacher Education. *Online Submission*.
- Berliner, D. C. (1986). In pursuit of the expert pedagogue. *Educational researcher*, 15(7), 5-13.
- Beswick, C. L., Schulman, J. M., & Stiefel, E. I. (2003). Structures and structural trends in homoleptic dithiolene complexes. *Dithiolene Chemistry: Synthesis, Properties, and Applications*, 52, 55-110.
- Brown, M. W. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17-36). Routledge.
- Bucat, R. (2005). Implications of chemistry education research for teaching practice: Pedagogical content knowledge as a way forward. *Chemistry Education International*, 6 (1), 1-2.
- Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. *National Council of Teachers of Mathematics*, 13(12), 1-6.
- Chan, K. K. H., & Hume, A. (2019). Towards a consensus model: Literature review of how science teachers' pedagogical content knowledge is investigated. In A. Hume, R. Cooper, & A. Borowski (Eds.), *Repositioning PCK in teachers' professional knowledge* (pp. 3-76). Springer.

- Eisner, E. W. (2004). Educational Objectives—Help or Hindrance? In D. J. Flinders, & S. J. Thornton, *The curriculum studies reader* (pp. 85-92). Routledge.
- Herppich, S., Praetorius, A. K., Förster, N., Glogger-Frey, I., Karst, K., Leutner, D., ... & Südkamp, A. (2018). Teachers' assessment competence: Integrating knowledge-, process-, and product-oriented approaches into a competence-oriented conceptual model. *Teaching and Teacher Education*, 76, 181-193.
- Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (2016). Responding to children's mathematical thinking in the moment: An emerging framework of teaching moves. *ZDM*, 48, 185-197.
- Kind, V. (2009). pedagogical content knowledge in science education: perspectives and potential for progress. *Studies in Science Education*, 45 (2), 169-204.
- Kisa, Z., & Correnti, R. (2015). Examining implementation fidelity in America's choice schools: A longitudinal analysis of changes in professional development associated with changes in teacher practice. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 37(4), 437-457.
- Lachner, A., & Nückles, M. (2016). Tell me why! Content knowledge predicts process orientation of math researchers' and math teachers' explanations. *Instructional Science*, 44(3), 221-242.
- Lloyd, G. M., Remillard, J. T., & Beth, A. (2008). Teachers' Use of Curriculum Materials. Στο J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd, *Mathematics Teachers at Work* (pp. 24-33). Routledge
- Mann, E. L. (2014). *Review of Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. *Mathematics Teacher*, 108 (4), 319.
- Marshall, J. C. (2016). *The highly effective teacher: 7 classroom-tested practices that foster student success*. ASCD.
- Montero, L. (2001). La construcción del conocimiento en la enseñanza. In: Marcelo, C. (Ed.) *La función docente (The teaching role)*. Madrid: Ed. Síntesis, 47-83.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.
- Popham, W. J. (2004). Objectives. In D. J. Flinders, & S. J. Thornton (Eds), *The Curriculum Studies Reader* (pp. 71-85). Great Britain: Routledge.
- Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for research in mathematics education*, 28(5), 550-576.
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 255-281.
- Sawyer, R. K. (2004). Creative teaching: Collaborative discussion as disciplined improvisation. *Educational Researcher*, 33(2), 12-20.

- Shulman, L., S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 75(2), 4-14.
- Siswono, T.Y.E., Kohar, A.W., & Hartono, S. (2017). Secondary teachers' mathematics-related beliefs and knowledge about mathematical problem-solving. *Journal of Physics: Conference Series*, 812(1), 012046. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/812/1/012046>.
- Stein, M. K., & Kim, G. (2008). The Role of Mathematics Curriculum Materials in Large-Scale Urban Reform. Στο J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd, *Mathematics Teachers at Work*. Routledge, Taylor and Francis.
- Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and teacher education*, 17(2), 213-226.
- Waddell, L. R. (2014). Using culturally ambitious teaching practices to support urban mathematics teaching and learning. *Journal of Praxis in Multicultural Education*, 8(2),2.
- Wilkins, J. L. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 139-164.
- Wilson, P. S., Cooney, T. J., & Stinson, D. W. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2), 83-111.
- Witherspoon, E. B., Ferrer, N. B., Correnti, R. R., Stein, M. K., & Schunn, C. D. (2021). Coaching that supports teachers' learning to enact ambitious instruction. *Instructional Science*, 49(6), 877-898.
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 263-281.