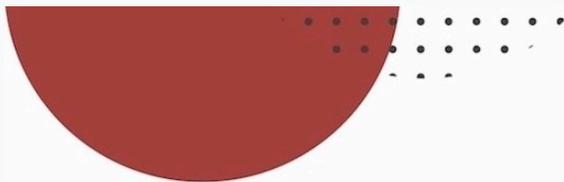


# Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 18 & 19 (2025)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ  
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
(ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Τεύχος 18 & 19  
Ιούνιος 2025



## ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Σταυρούλα Σαπλαμίδου, Χαράλαμπος Σακονίδης

Copyright © 2025, Σταυρούλα Σαπλαμίδου (Stavroula Saplamidou),  
Χαράλαμπος Σακονίδης



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Σαπλαμίδου Σ., & Σακονίδης Χ. (2025). ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (18 & 19), 27–49. ανακτήθηκε από <https://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/article/view/38534>

---

## ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Σταυρούλα Σαπλαμίδου και Χαράλαμπος Σακονίδης

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης,  
[ssaplami@eled.duth.gr](mailto:ssaplami@eled.duth.gr) , [xsakonid@eled.duth.gr](mailto:xsakonid@eled.duth.gr)

*Περίληψη: Η παρούσα εργασία επιχειρεί μια πρώτη αποτίμηση της συμβατότητας του νέου Προγράμματος Σπουδών σχετικά με τα στοχαστικά μαθηματικά για τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου με τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα. Αφού σκιαγραφηθεί το περιεχόμενο που η σύγχρονη βιβλιογραφία προτείνει για τους μαθητές πρώτης σχολικής ηλικίας, παρατίθενται ενδεικτικά ερευνητικά πορίσματα σχετικά με την μάθηση και την διδασκαλία εννοιών και διαδικασιών των στοχαστικών μαθηματικών. Τέλος, παρουσιάζονται διδακτικές πρακτικές που προτείνονται στην βιβλιογραφία ως ωφέλιμες για τη διδασκαλία συναφών με το Πρόγραμμα Σπουδών στοχαστικών ζητημάτων στις μικρές τάξεις του δημοτικού σχολείου.*

*Λέξεις κλειδιά: Στοχαστικά μαθηματικά, Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, Πρόγραμμα σπουδών*

*Abstract: This paper attempts a preliminary assessment of the compatibility of the new Curriculum for stochastic mathematics in the early grades of primary school with contemporary research findings. After outlining the content recommended by modern literature for students in their early years of schooling, key research findings on the learning and teaching of stochastic mathematics concepts and processes are presented. Finally, teaching practices from the literature that are considered beneficial for teaching stochastic topics related to the Curriculum in the early grades of primary school are discussed.*

*Keywords: stochastics, primary education, curriculum*

### Εισαγωγή

Σήμερα αναγνωρίζεται ως προτεραιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης η κατάλληλη προετοιμασία των μαθητών, ώστε να αποκτήσουν ευελιξία σκέψης και να αναπτύξουν ικανότητες διαχείρισης σύνθετων πληροφοριών. Τέτοιες πτυχές νοητικής δράσης θεωρούνται ζωτικής σημασίας για την συγκρότηση ενεργών και υπεύθυνων πολιτών στις σύγχρονες κοινωνίες. Η πληθώρα διαθέσιμων πληροφοριών και η ευκολία πρόσβασης σε αυτές αναδεικνύει τη σημασία όχι μόνο της κατανόησής τους, αλλά και της συνειδητοποίησης του πώς οι πληροφορίες σχηματίζουν μια πραγματικότητα γύρω από ένα ζήτημα (Weiland, 2017).

Αναγνωρίζοντας τη σημασία να μπορούν οι μαθητές, ως μελλοντικοί πολίτες, να διαχειρίζονται κριτικά και αποτελεσματικά μεγάλο όγκο πληροφοριών, γνωστικά αντικείμενα όπως η Στατιστική και οι Πιθανότητες αναβαθμίστηκαν σε περιεχόμενο και δομή. Απέκτησαν, παράλληλα, βαρύνουσα σημασία στα αναλυτικά προγράμματα πολλών εκπαιδευτικών συστημάτων, από την πρωτοβάθμια έως και την τριτοβάθμια εκπαίδευση (Groth, 2018). Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ενθαρρύνεται η ενασχόληση με τα δεδομένα και την τυχαιότητα από μικρή ηλικία, προκειμένου οι μαθητές να προετοιμαστούν για τη ζωή στην κοινωνία της πληροφορίας (Ben-Zvi, 2018). Ασχολούμενοι με τέτοια ζητήματα, αποκτούν νοητικά εργαλεία και στρατηγικές σκέψης για να διαχειριστούν αποτελεσματικά πλήθος πληροφοριών (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Παράλληλα, η ανάπτυξη πιθανοτικής και στατιστικής γνώσης τους βοηθά να προβαίνουν, βάσει δεδομένων, σε διαδικασίες ζωτικής σημασίας για την καθημερινή ζωή, όπως η διατύπωση και η αξιολόγηση προβλέψεων, αποφάσεων και συμπερασμάτων, πάντοτε με την παρουσία αβεβαιότητας.

Στην ελληνική πραγματικότητα, το νέο πρόγραμμα σπουδών (Π.Σ.) για τα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο περιλαμβάνει ζητήματα Στατιστικής, όπως η συλλογή και παρουσίαση δεδομένων από μικρές στατιστικές έρευνες και ζητήματα Πιθανοτήτων, όπως η αβεβαιότητα διάφορων γεγονότων και η πιθανότητα να συμβούν (ΙΕΠ, 2021). Τα ζητήματα Πιθανοτήτων και Στατιστικής εντάσσονται στο θεματικό πεδίο των «στοχαστικών μαθηματικών», όπου οι καταστάσεις που μελετώνται σχετίζονται με τη μεταβλητότητα των δεδομένων. Η μελέτη αυτή επιχειρεί να χαρτογραφήσει το περιεχόμενο των στοχαστικών μαθηματικών και τα χαρακτηριστικά της μάθησης και της διδασκαλίας τους στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, με βάση τα σύγχρονα βιβλιογραφικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, επιχειρείται μια πρώτη συστηματική απάντηση στα εξής ερωτήματα:

1. Σε ποιο βαθμό το περιεχόμενο των στοχαστικών μαθηματικών για μαθητές των Α' έως Γ' τάξεων του δημοτικού σχολείου, σύμφωνα με το νέο Π.Σ., είναι συμβατό με τα σύγχρονα βιβλιογραφικά δεδομένα του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών;
2. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά μάθησης και διδασκαλίας των στοχαστικών μαθηματικών που προτείνουν οι σύγχρονες προσεγγίσεις του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών για τις συγκεκριμένες τάξεις και σε ποιο βαθμό υποστηρίζονται από το νέο Π.Σ.;

Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζεται το περιεχόμενο των στοχαστικών μαθηματικών για τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, με βάση τα σύγχρονα ερευνητικά πορίσματα, τα οποία, στη συνέχεια, αξιοποιούνται για να αποτιμηθεί η συμβατότητα της συγκεκριμένης θεματικής ενότητας του νέου Π.Σ. με αυτά. Ειδικότερα, οι εργασίες που αξιοποιήθηκαν αφορούν μαθητές των τριών πρώτων τάξεων δημοτικού σχολείου, πραγματοποιήθηκαν την τελευταία δεκαετία (2014-2024) και εμπίπτουν σε τέσσερις θεματικές υποενότητες (βλ. Πίνακα 1), οι οποίες αναγνωρίστηκαν ως κυρίαρχες ανάμεσά τους. Για την εύρεση των εργασιών χρησιμοποιήθηκαν πηγές που εστιάζουν σε μαθητές σχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας και ενδιαφέρονται για τη μάθηση στη στατιστική σε συνάρτηση με τη διδακτική πράξη. Τέτοιες πηγές αποτέλεσαν ενδεικτικά

διεθνή περιοδικά (Statistics Education Research Journal, Early Childhood Education, Acta Scientiae), τα πρακτικά διεθνούς συνεδρίου για τη διδασκαλία της Στατιστικής (International Congress on Teaching Statistics (ICOTS)) και ένας πρόσφατος συλλογικός τόμος για τη μάθηση των μαθηματικών από μαθητές προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας (Statistics in Early Childhood and Primary Education). Σε περιπτώσεις που δεν εντοπίστηκαν σχετικές εργασίες στις παραπάνω πηγές, συμπεριλήφθηκαν παλαιότερες συναφείς εργασίες που είτε αναφέρονται συχνά σε εργασίες που έχουν πραγματοποιηθεί την τελευταία δεκαετία είτε συνδέονται ρητά με το νέο Π.Σ. (π.χ., εστίαζαν σε έργα συναφή με τα προτεινόμενα από το νέο Π.Σ.).

### Περιεχόμενο στοχαστικών μαθηματικών για μαθητές των πρώτων τάξεων δημοτικού σχολείου

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται και επεξηγούνται οι ενότητες των στοχαστικών μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου με σημείο αναφοράς το νέο Π.Σ.. Η παρουσίαση των περιεχομένων ακολουθεί τη διάκριση των στοχαστικών μαθηματικών σε θεματικά πεδία και ενότητες, όπως αυτή ορίζεται στο νέο Π.Σ για τα μαθηματικά του 2021 (Σακονίδης κ.ά., 2022). Σε κάθε ενότητα αναφέρονται τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (Π.Μ.Α.) και ενδεικτικές δραστηριότητες (Ε.Δ.) που προτείνονται από το νέο πρόγραμμα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1. Για κάθε Π.Μ.Α., τοποθετείται σε παρένθεση η τάξη των μαθητών στους οποίους αναφέρεται (Α', Β', Γ' δημοτικού, ηλικίες 6-9 ετών). Σε περιπτώσεις που όμοια Π.Μ.Α αναφέρονταν σε περισσότερες από μία τάξεις με μικρές διαφοροποιήσεις, αυτά συγχωνεύτηκαν σε μια κατηγορία για λόγους οικονομίας χώρου.

Στοχαστικά μαθηματικά			
Θεματικό πεδίο	Θεματική ενότητα	Π.Μ.Α.	Ε.Δ.
Στατιστική	Διαχείριση δεδομένων	I. Διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά/ποσοτικά δεδομένα (Α'-Γ')	(I,II) Συλλογή και οργάνωση πραγματικών δεδομένων στην τάξη (προτιμήσεις σε χρώματα, αριθμός μελών οικογένειας)
		II. Συλλογή δεδομένων και οργάνωσή τους με ή χωρίς χειραπτικό υλικό (Α'-Γ')	
		III. Κατασκευή αναπαραστάσεων, διερεύνηση πληροφοριών από αυτές και σχηματισμός συμπερασμάτων (Α'-Γ')	(III) Κατασκευή εικονογράμματος, ραβδογράμματος, σημειογράμματος, μετασχηματισμοί αναπαραστάσεων, διατύπωση ερωτημάτων που αναφέρονται στις πληροφορίες του διαγράμματος
	Μέτρα θέσης	IV. Ζητήματα	(IV) Εύρεση τιμής με τη

	και μεταβλητότητας	μεταβλητότητας δεδομένων: εύρος και επικρατούσες τιμές (Γ')	μεγαλύτερη συχνότητα, συζήτηση της μεταβλητότητας σε έναν πίνακα δεδομένων
Πιθανότητες	Πειράματα τύχης & Πιθανότητες	V. Περιγραφή πειραμάτων τύχης ενός σταδίου (Α')	(V) Διερεύνηση δυνατών αποτελεσμάτων εξέλιξης μιας κατάστασης πραγματοποιώντας πειράματα τύχης με ζάρια, χρώματα, αριθμούς
		VI. Περιγραφή βέβαιων, πιθανών, αδύνατων ενδεχομένων (Α')	(VI) Περιγραφή γεγονότων που συμβαίνουν πάντοτε, ποτέ, μερικές φορές
		VII. Διάκριση δίκαιων/ άδικων πειραμάτων τύχης (Α')	(VII) Πραγματοποίηση πειραμάτων τύχης και πιθανός μετασχηματισμός τους για να είναι δίκαια
		VIII. Διερεύνηση δυνατών συνδυασμών σε δυνατές διατάξεις μικρού αριθμού αντικειμένων (Β')	(VIII) Εύρεση συνδυασμών 2-4 στοιχείων σε καθημερινά προβλήματα
		IX. Σύγκριση πιθανοτήτων εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές (Β'-Γ')	(IX) Πραγματοποίηση πειραμάτων τύχης και πρόβλεψη ενδεχομένων που είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό να συμβούν

**Πίνακας 1.** Ενότητες στοχαστικών μαθηματικών στα νέα Π.Σ. , τάξεις Α'-Γ' (ΙΕΠ, 2021)

### 1. Περιεχόμενο που αφορά έννοιες και διαδικασίες Στατιστικής

Αναφορικά με τις ενότητες της Στατιστικής, στόχος του νέου Π.Σ. είναι η εξοικείωση των μαθητών με διαδικασίες όπως η διατύπωση ερωτημάτων, η συλλογή, οργάνωση και επεξεργασία δεδομένων για την απάντησή τους, καθώς και ο σχηματισμός συμπερασμάτων. Το σύνολο αυτών των διαδικασιών αποδίδεται στη βιβλιογραφία με τον όρο «στατιστική διερεύνηση». Οι στατιστικές διερευνήσεις έχουν λάβει ιδιαίτερη προσοχή διεθνώς (Watson κ.ά., 2018), καθώς στην πραγματική ζωή τα προβλήματα που απαιτούν στατιστικά στοιχεία δεν περιλαμβάνουν απλά δεδομένα (Wild & Pfannkuch, 1999). Γενικά, οι στατιστικές διερευνήσεις περιλαμβάνουν έργα, όπου οι μαθητές εμπλέκονται σε αυθεντικά προβλήματα αναζητώντας λύσεις βασισμένες σε δεδομένα. Για τη μοντελοποίηση των βημάτων μιας διερεύνησης, οι Wild και Pfannkuch (1999) δημιούργησαν τον διερευνητικό στατιστικό κύκλο, ο οποίος περιλαμβάνει τα στάδια: Πρόβλημα (ορισμός προβλήματος), Σχέδιο (δειγματοληψία, διαχείριση δεδομένων), Δεδομένα (συλλογή), Ανάλυση (υποθέσεις, διερευνήσεις) και Συμπεράσματα (ερμηνεία, επικοινωνία). Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τα Π.Μ.Α. της Στατιστικής, τα οποία αρχικά συσχετίζονται με θεωρητικές κατασκευές από την έρευνα στη Στατιστική. Στη συνέχεια αναφέρονται εμπειρικές έρευνες για μαθητές

προσχολικής ή πρώτης σχολικής ηλικίας, που εξετάζουν τα συγκεκριμένα Π.Μ.Α. μέσω Ε.Δ. σχετικών με τον Πίνακα 1.

Π.Μ.Α.	Θεωρητικές κατασκευές	Συναφή ερευνητικά πορίσματα		
		Αναφορά	Μεθοδολογία	Κύρια ευρήματα
Διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά/ποσοτικά δεδομένα.	Στατιστικός κύκλος διερεύνησης, στάδιο: Πρόβλημα (Wild κ.ά., 2018)	Almond & Makar (2010)	Δείγμα: Μαθητές 9 ετών Μέθοδοι-Εργαλεία: έρευνα δράση, σημειώσεις πεδίου και γραπτός αναστοχασμός μαθητών	Οι μαθητές βελτιώνουν τις δεξιότητές τους στη διατύπωση ερωτημάτων μέσα από τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις και την υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό
Συλλογή δεδομένων και οργάνωσή τους με ή χωρίς χειραπτικό υλικό	Στατιστικός κύκλος διερεύνησης, στάδιο: Δεδομένα (Wild κ.ά., 2018)	Leavy & Hourigan (2018)	Δείγμα: μαθητές 5-6 ετών Μέθοδοι-Εργαλεία: παρατήρηση, συνεντεύξεις	Αναπαραστάσεις με διαφορετικά επίπεδα πολυπλοκότητας, προσπάθειες για εντοπισμό μοτίβων ή σχηματισμό ερμηνειών
Κατασκευή αναπαραστάσεων (εικονόγραμμα, ραβδόγραμμα, σημειόγραμμα), ζητήματα μεταβλητότητας δεδομένων: εύρος και επικρατούσες τιμές	Στατιστικός κύκλος διερεύνησης, στάδιο: Ανάλυση (Wild κ.ά., 2018)	English (2014)	Δείγμα: Μαθητές 6-8 ετών Μέθοδοι-Εργαλεία: έρευνα σχεδιασμού, παρατήρηση	Διαφορετικές οπτικές για τα δεδομένα, άτυπες αναφορές τη μεταβλητότητα, ποικιλία αναπαραστάσεων
Διερεύνηση πληροφοριών από αναπαραστάσεις και σχηματισμός συμπερασμάτων	Στατιστικός κύκλος διερεύνησης, στάδιο: Συμπέρασμα (Wild κ.ά., 2018), άτυπη στατιστική συμπερασματολογία (Makar & Rubin, 2009)			

**Πίνακας 2.** Στατιστική στο νέο Π.Σ. και ενδεικτικά ερευνητικά δεδομένα

Όπως προκύπτει και από τον Πίνακα 2, η ενότητα της Στατιστικής περιλαμβάνει Π.Μ.Α. που αναφέρονται σε στάδια στατιστικών διερευνήσεων, όπως προσδιορίστηκαν από τους Wild και Pfannkuch (1999). Ερευνητικά πορίσματα στο πεδίο αναδεικνύουν την ικανότητα των μικρών σε ηλικία μαθητών να εμπλακούν σε στατιστικές διερευνήσεις (Fielding-Wells, 2018). Λόγω των ποικίλων παραγόντων που υπεισέρχονται σε μία διερεύνηση, αρκετές εργασίες εστιάζουν σε συγκεκριμένα στάδια στατιστικών διερευνήσεων, χωρίς βέβαια αυτά να απομονώνονται από τα υπόλοιπα, δεδομένου πως η διερεύνηση συνιστά μια κυκλική, δυναμική διαδικασία. Το περιεχόμενο του Πίνακα 2 οργανώνεται σε τρεις υποενότητες, με

στόχο τη συγκεντρωμένη παρουσίαση συναφών Π.Μ.Α. και των αντίστοιχων διδακτικών δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, η ενότητα «σχηματισμός ερωτημάτων προς διερεύνηση» περιλαμβάνει τα Π.Μ.Α που σχετίζονται με τη διατύπωση ερευνητικών ερωτημάτων, ενώ η υποενότητα «συλλογή, οργάνωση και αναπαράσταση δεδομένων» σχετίζεται με Π.Μ.Α. που αφορούν τη συλλογή δεδομένων και κατασκευή αναπαραστάσεων. Τέλος, η υποενότητα «σχηματισμός συμπερασμάτων από δεδομένα» αναφέρεται σε Π.Μ.Α. που αφορούν τη διατύπωση συμπερασμάτων από δείγματα.

### **A. Σχηματισμός ερωτημάτων προς διερεύνηση**

Όπως παρατηρεί ο Shaughnessy (2007, όπως αναφέρεται στο Allmond & Makar, 2010), η διατύπωση ερωτημάτων από τους μαθητές έχει σημασία, καθώς αν τους δίνονται μόνο προκατασκευασμένα στατιστικά προβλήματα, όπου η διατύπωση, ο σχεδιασμός και η παραγωγή δεδομένων έχουν ήδη καθοριστεί, δεν θα είναι κατάλληλα εξοπλισμένοι να χειριστούν στατιστικά προβλήματα στα πρώιμα στάδια τους.

Αναφορικά με τα χαρακτηριστικά των ερωτημάτων μιας στατιστικής διερεύνησης, έχει επισημανθεί πως πρέπει να είναι στατιστικού χαρακτήρα, δηλαδή να απαντώνται μέσω συλλογής δεδομένων, να είναι ασθενώς δομημένα, ώστε να ευνοούν τη διαπραγμάτευση και τη διερεύνηση, και να είναι ενδιαφέροντα για τους μαθητές (Makar & Fielding-Wells, 2011). Οι Allmond και Makar (2010) μελέτησαν τη διατύπωση ερευνητικών ερωτημάτων σε μαθητές Γ' δημοτικού, καταλήγοντας σε μια ιεραρχία επτά επιπέδων: άσχετα, μη μαθηματικά, μη ερευνητικά, κλειστά, δυνητικά ερευνητικά, ερευνητικά και διερευνητικά (με αναγνώριση αβεβαιότητας). Αρχικά, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να διατυπώσουν ερωτήματα εφικτά προς διερεύνηση, με νόημα και εστίαση σε γενικά φαινόμενα. Με την ενασχόληση και τη συμμετοχή σε σχετικά μαθήματα, διαπίστωσαν πως η χρήση αμφίσημης γλώσσας βοηθούσε να εστιάσουν σε γενικότερα φαινόμενα. Επίσης, η έκθεση σε διαφορετικά ερευνητικά πλαίσια (π.χ. συγκρίσεις, προτιμήσεις) και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους βελτίωσαν τα ερωτήματά τους. Η μελέτη έδειξε ότι η βελτίωση δεν οφειλόταν μόνο στο διερευνητικό περιβάλλον, αλλά και στη σκόπιμη εστίαση στις δεξιότητες διατύπωσης ερωτήσεων. Η γνώση του πλαισίου και το ενδιαφέρον για το υπό διερεύνηση φαινόμενο συνέβαλαν στην εμβάθυνση των ερωτημάτων.

### **B. Συλλογή, οργάνωση και αναπαράσταση δεδομένων**

Η συλλογή δεδομένων βασίζεται στη διαπίστωση ότι προσωπικές εμπειρίες ή αποσπασματικές ενδείξεις δεν επαρκούν για τεκμηριωμένες απαντήσεις (Wild & Pfannkuch, 1999). Αυτό το βήμα περιλαμβάνει την απόκτηση, αποθήκευση και διαχείριση δεδομένων μέσω διαδικασιών, όπως η αναδιοργάνωση, η συγχώνευση από διαφορετικές πηγές και ο καθαρισμός δεδομένων για ανάλυση (Wild κ.ά., 2018). Η ανάλυση δεδομένων περιλαμβάνει τη δημιουργία αναπαραστάσεων για καλύτερη επεξεργασία, καθώς και τη διαχείριση της μεταβλητότητας για την ανίχνευση μοτίβων μέσα στον «θόρυβο» των δεδομένων. Οι Leavy και Hourigan (2018) μελέτησαν πώς οι μαθητές καταγράφουν δεδομένα καθώς τα συλλέγουν. Ζητήθηκε από μαθητές Α' δημοτικού να καταγράφουν τη συχνότητα εμφάνισης ζώων από ένα βίντεο, με όποιον τρόπο επιθυμούσαν. Οι ερευνητές παρατήρησαν πως

χρησιμοποιήθηκαν εικονικές αναπαραστάσεις, όπως γραμμές, «τικς» ή εικόνες, λειτουργώντας ως εργαλεία οργάνωσης και κατανόησης της στατιστικής πληροφορίας. Οι μαθητές επέλεξαν αναπαραστάσεις βάσει προτιμήσεων, χρησιμότητας ή παραγόντων σχετικών με το πρόβλημα. Ορισμένοι επικεντρώθηκαν και σε στοιχεία πέραν της συχνότητας, όπως ο εντοπισμός μοτίβων ή η ερμηνεία δεδομένων με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.

### **Γ. Σχηματισμός συμπερασμάτων από δεδομένα**

Η ενότητα του νέου Π.Σ. που αφορά τη διερεύνηση πληροφοριών από δείγματα και την εξαγωγή συμπερασμάτων συνδέεται με το τελευταίο στάδιο του στατιστικού κύκλου. Η εξαγωγή συμπερασμάτων από δεδομένα είναι γνωστή ως άτυπη στατιστική συμπερασματολογία (informal statistical inference) και εννοιοποιείται ως πιθανοτική γενίκευση από τα δεδομένα (Makar & Rubin, 2009). Ο ισχυρισμός που συνιστά μια συμπερασματολογία πρέπει να εκτείνεται πέρα από τα διαθέσιμα δεδομένα, να υποστηρίζεται από αυτά ως ενδείξεις και να εκφέρεται με αβεβαιότητα (Makar, 2016).

Η English (2014) διερεύνησε τις ικανότητες των μαθητών στην εξαγωγή συμπερασμάτων και την αναπαράσταση δεδομένων. Πραγματοποίησε μια έρευνα σχεδιασμού διάρκειας τριών ετών, σε μαθητές Α' έως Γ' δημοτικού, με δραστηριότητες που στόχευαν στη διερεύνηση δεδομένων, την αναγνώριση της μεταβλητότητας και τη διατύπωση προβλέψεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές υιοθέτησαν διαφορετικές οπτικές στη διαχείριση των δεδομένων: ως περιπτωσιακές τιμές, ταξινομητές ή ως σύνολο. Όταν θεωρούσαν τα δεδομένα ως περιπτωσιακές τιμές, εστίαζαν σε μεμονωμένες τιμές (π.χ. μέγιστες ή ελάχιστες). Ως ταξινομητές, συνδύαζαν παρόμοια δεδομένα σε νέες κατηγορίες. Ως σύνολο, άρχισαν να αντιλαμβάνονται την κατανομή των τιμών ως εννοιολογική οντότητα, αναδεικνύοντας μη προφανή χαρακτηριστικά (Konold κ.ά., 2015). Ορισμένοι μαθητές εναλλάσσονταν με ευκολία μεταξύ αυτών των οπτικών, κατανοώντας άτυπα τη μεταβλητότητα. Επίσης, δημιούργησαν διάφορες αναπαραστάσεις δεδομένων, όπως ραβδογράμματα, κυκλικά διαγράμματα αλλά και δικές τους μορφές. Μέσα από αλληλεπιδράσεις και προηγούμενες εμπειρίες, ανέπτυξαν διαισθητικές κατανοήσεις της έννοιας του ποσοστού.

## **2. Περιεχόμενο που αφορά έννοιες και διαδικασίες Πιθανοτήτων**

Το περιεχόμενο των Πιθανοτήτων μπορεί να προσεγγιστεί όχι μόνο μέσω μαθηματικών υπολογισμών, αλλά και υποκειμενικών διαισθήσεων, καθιστώντας το αντικείμενο συλλογισμού και για μικρούς σε ηλικία μαθητές. Τα παιδιά, μέσω εμπειρίας και πειραματισμού, κατασκευάζουν γνώσεις και αναπτύσσουν διαισθήσεις για πιθανοτικές έννοιες, συναντώντας καταστάσεις αβεβαιότητας και τυχαιότητας. Ο Piaget και ο Fischbein διερεύνησαν πρώτοι τις αρχές του πιθανοτικού συλλογισμού σε μικρούς μαθητές (Batanero κ.ά., 2021), ενώ η έρευνα που ακολούθησε αποκάλυψε τρόπους με τους οποίους οι μαθητές σκέφτονται και δρουν εντός πιθανοτικών πλαισίων. Αναπτυξιακά, παιδιά 4 ετών και άνω μπορούν να εμπλακούν με πιθανοτικές έννοιες, και οι βάσεις για πιθανοτική εγγραμματοσύνη μπορούν να τεθούν μέσω εκπαίδευσης στη στατιστική (Nikiforidou, 2018).

Οι Bryant και Nunes (2012) θεωρούν την πιθανότητα ως πολύπλοκη έννοια που περιλαμβάνει «γνωστικές απαιτήσεις»: (i) Κατανόηση της τυχαιότητας (φύση, συνέπειες και χρήση της στην καθημερινή ζωή), (ii) Εργασία με τον δειγματικό χώρο (αναγνώριση όλων των πιθανών γεγονότων και ακολουθιών), (iii) Σύγκριση και ποσοτικοποίηση πιθανοτήτων (κατανόηση της πιθανότητας ως αναλογίας και υπολογισμοί). Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τα Π.Μ.Α. στην ενότητα των πιθανοτήτων, αρχικά συσχετισμένα με θεωρητικές κατασκευές από τη Στατιστική και ενδεικτικές εμπειρικές έρευνες που αφορούν μαθητές προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας.

Π.Μ.Α.	Θεωρητικές κατασκευές	Συναφή ερευνητικά πορίσματα		
		Αναφορά	Μεθοδολογία	Κύρια ευρήματα
Περιγραφή δυνατών αποτελεσμάτων σε απλά πειράματα ενός σταδίου	Δειγματικός χώρος (Bryant & Nunes, 2012)	Kafoussi (2004)	Δείγμα: Μαθητές 5 ετών Μέθοδοι- εργαλεία: πειραματική διδασκαλία, βιντεοσκόπηση, συνεντεύξεις	Επιτυχία στον σχηματισμό απλών δειγματικών χώρων, απουσία συστηματοκότητας
Περιγραφή βέβαιων, πιθανών, αδύνατων ενδεχομένων	Κατανόηση της τυχαιότητας στην καθημερινή ζωή (Bryant & Nunes, 2012)	Kazak & Leavy (2018)	Δείγμα: Μαθητές Β' δημοτικού Μέθοδοι- Εργαλεία: μελέτη περίπτωσης, παρατήρηση, ημιδομημένες συνεντεύξεις	Χρήση πιθανοτικού λεξιλογίου, μετακίνηση από την χρήση διαισθήσεων στη χρήση δεδομένων για τον σχηματισμό προβλέψεων
Διάκριση δίκαιων/ άδικων πειραμάτων τύχης	Τυχαιότητα (Bryant & Nunes, 2012)	Tatsis κ.ά. (2008)	Δείγμα: μαθητές 5 ετών Μέθοδοι- εργαλεία: πείραμα σχεδιασμού,	Στήριξη σε τεχνικές απαρίθμησης, σημασία πειραματισμού και υποστήριξης από εκπαιδευτικό και συνομηλίκους
Διερεύνηση δυνατών συνδυασμών και διατάξεων μικρού αριθμού αντικειμένων	Δειγματικός χώρος (Bryant & Nunes, 2012)	Zapata-Cardona (2018)	Δείγμα: Μαθητές 6-8 ετών Μέθοδοι- εργαλεία: Μελέτη περίπτωσης, συνεντεύξεις	Απουσία συστηματοκότητας, βελτίωση στρατηγικών με κατάλληλη υποστήριξη
Σύγκριση πιθανοτήτων εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές	Σύγκριση και ποσοτικοποίηση πιθανοτήτων (Bryant & Nunes, 2012)	Vásquez & Alsina (2019)	Δείγμα: Μαθητές 4-6 ετών Μέθοδοι- εργαλεία: μελέτη περίπτωσης, βιντεοσκόπηση	Διάκριση βέβαιων και αδύνατων ενδεχομένων, αναγνωρίζοντας και ενδιάμεσες καταστάσεις

**Πίνακας 3.** Πιθανότητες στο νέο Π.Σ. και ενδεικτικά ερευνητικά δεδομένα

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3, το νέο Π.Σ. στα Στοχαστικά Μαθηματικά ενθαρρύνει την επαφή των μαθητών πρώτης σχολικής ηλικίας με πειράματα τύχης. Εμπλεκόμενοι σε αυτά, αναμένεται οι μαθητές να γνωρίσουν τα πιθανά αποτελέσματα μιας τυχαίας κατάστασης, να ασκηθούν στη χρήση πιθανοτικού λεξιλογίου και να συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους. Το περιεχόμενο του Πίνακα 3 οργανώνεται σε τρεις υποενότητες, με στόχο τη συγκεντρωμένη παρουσίαση συναφών Π.Μ.Α. και των αντίστοιχων διδακτικών δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, η ενότητα «Πειράματα τύχης» συγκεντρώνει τα Π.Μ.Α. που σχετίζονται με την εμπειρική προσέγγιση του τυχαίου μέσα από δραστηριότητες παρατήρησης, καταγραφής και επανάληψης. Η ενότητα «Πιθανοτική γλώσσα» αφορά την ανάπτυξη εννοιών σχετικών με την αβεβαιότητα και την έκφρασή της με λεκτικούς όρους ενώ η ενότητα «Προβλήματα συνδυαστικής» αναφέρεται σε Π.Μ.Α. σχετικά με τη λογική απαρίθμηση ενδεχομένων.

### **A. Πειράματα τύχης**

Η χρήση παιχνιδιών τύχης και πειραμάτων με νομίσματα ή ζάρια αποτελεί αποτελεσματική προσέγγιση στη διδασκαλία πιθανοτικών εννοιών, βοηθώντας τους μαθητές να κατανοήσουν την τύχη και τα ανεξάρτητα και αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα, ενώ παρατηρούν τυχαία γεγονότα (Cañizares κ.ά., 2004, όπως αναφέρεται στο Batista κ.ά., 2022). Οι Bryant και Nunes (2012) υποστηρίζουν ότι η αναγνώριση των πιθανών αποτελεσμάτων μιας τυχαίας κατάστασης, δηλαδή ο σχηματισμός του δειγματικού χώρου, είναι θεμελιώδης για την επίλυση πιθανοτικών προβλημάτων.

Η Kafoussi (2004) πραγματοποίησε πειραματικές διδασκαλίες σε μαθητές 5 ετών σχετικά με την έννοια του δειγματικού χώρου, όπου οι μαθητές περιέγραφαν τα πιθανά αποτελέσματα τυχαίων καταστάσεων. Διαπιστώθηκε ότι αρχικά οι μαθητές μπορούσαν να απαριθμήσουν τα αποτελέσματα απλών πειραμάτων, αλλά δυσκολεύονταν με πιο σύνθετα. Με διδακτικές παρεμβάσεις, βελτίωσαν τις απαντήσεις τους, χωρίς όμως να εμφανίζουν συστηματικότητα.

Η έννοια της «δικαιοσύνης» μεταφράζεται από τα παιδιά ως ίση πιθανότητα για κάθε παίκτη να κερδίσει, συνήθως σε απλά πειράματα τύχης, αλλά ενδέχεται να επεκτείνεται σε όλα τα πιθανά αποτελέσματα (π.χ., θεωρούν ίσης πιθανότητας το να εμφανιστεί «κορώνα» δύο φορές και το να εμφανιστεί «κορώνα» και «γράμματα» με δύο νομίσματα). Η προκατάληψη της ίσης πιθανότητας έχει εκφραστεί από μαθητές διαφόρων ηλικιών, ενώ άλλοι πιστεύουν πως τα αποτελέσματα επηρεάζονται από τις προτιμήσεις τους (Fielding-Wells & Makar, 2015).

Οι Tatsis κ.ά. (2008) εστίασαν στον τρόπο που οι μαθητές 5 ετών αναπτύσσουν την αίσθηση του δίκαιου και πώς οι δάσκαλοι μπορούν να υποστηρίξουν τις διαισθήσεις τους σχετικά με την τυχειότητα. Οι μαθητές στηρίχθηκαν στην απαρίθμηση (π.χ., πόσες φορές εμφανίζεται κάθε χρώμα στον τροχό τύχης) για να συγκρίνουν τα αποτελέσματα από πειράματα τύχης και να αξιολογήσουν τη δικαιοσύνη του παιχνιδιού. Με την υποστήριξη των δασκάλων, εγκατέλειψαν παρανοήσεις, όπως το ότι η τοποθέτηση των χρωμάτων στους τροχούς επηρεάζει τα αποτελέσματα. Η εκπαιδευτικός υποστήριξε τους μαθητές ενισχύοντας τη συζήτηση σε σχέση με έννοιες όπως η τυχειότητα, η δικαιοσύνη, η κατανομή του χώρου και

των γραμμών σε έναν τροχό τύχης. Παράλληλα τους ενθάρρυνε να αιτιολογούν τις απόψεις τους και να λαμβάνουν υποστήριξη από συμμαθητές τους ή τον δάσκαλο.

Στη σύγκριση πιθανοτήτων, οι μαθητές αναπτύσσουν σταδιακά δεξιότητες σύγκρισης, αρχικά επικεντρώνοντας στα ευνοϊκά αποτελέσματα και αργότερα ενσωματώνοντας όλα τα αποτελέσματα για να κατανοήσουν την πιθανότητα ως λόγο (Batanero & Alvarez-Arroyo, 2024). Οι Vázquez και Alsina (2019) μελέτησαν μαθητές 4-6 ετών σε δραστηριότητες σύγκρισης πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας εκφράσεις όπως «περισσότερο» ή «λιγότερο πιθανό», χρησιμοποιώντας ένα ενυδρείο με ψάρια. Οι μαθητές αναγνώρισαν ότι η κατανομή των ψαριών επηρεάζει την πιθανότητα επιλογής ενός συγκεκριμένου χρώματος, βασισμένοι σε χειραπτικό υλικό και συζήτηση με τον εκπαιδευτικό. Μέσα από τέτοιες διαδικασίες, κατάφεραν να διακρίνουν μεταξύ δυνατών και αδύνατων γεγονότων, αναπτύσσοντας μια κατανόηση διαφορετικών βαθμών πιθανότητας, ενώ ανίχνευσαν και ενδιάμεσους βαθμούς πιθανότητας ανάμεσα στο βέβαιο και το απίθανο.

### **B.2. Πιθανοτική γλώσσα**

Τα παιδιά χρησιμοποιούν πιθανοτική γλώσσα στο σχολείο και στην καθημερινή τους ζωή, κυρίως σε παιχνίδια τύχης. Σύμφωνα με τους Batanero κ.ά. (2021), τα παιδιά εκφράζουν τις πιθανοτικές τους διαισθήσεις από 4-5 ετών και από 7-8 ετών κάνουν προβλέψεις, χρησιμοποιώντας όρους όπως «βέβαιο», «πιθανό», και «απίθανο». Οι Kazak και Leavy (2018) ασχολήθηκαν με τον συλλογισμό μαθητών 7-8 ετών σχετικά με την αβεβαιότητα και την υποκειμενική πιθανότητα. Οι συμμετέχοντες εμπλέκονταν σε μια δραστηριότητα όπου επέλεξαν ζελεδάκια δύο διαφορετικών χρωμάτων από ένα διαφανές βάζο χωρίς να κοιτούν και έπειτα προσδιόριζαν την πιθανότητα εμφάνισης ενός χρώματος, βάσει μιας κλίμακας που περιλάμβανε εικόνες και όχι αριθμητικές τιμές. Οι μαθητές εκτιμούσαν την πιθανότητα πριν και αφότου διεξήγαγαν το πείραμα, ενώ σε δεύτερη φάση πραγματοποιούσαν το ίδιο πείραμα επανειλημμένα στο πρόγραμμα προσομοίωσης Tinkerplots. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές χρησιμοποίησαν πιθανοτικό λεξιλόγιο για να εκφράσουν πιθανότητες και μπόρεσαν να τις περιγράψουν με ακρίβεια, αλλά επηρεάζονταν από την χρήση του πιθανοτικού λεξιλογίου στην καθημερινή ζωή, συγχέοντας το «σπάνιο» με το «αδύνατο» και το «συχνό» με το «βέβαιο». Υπήρξαν μαθητές που δήλωσαν αβεβαιότητα, χρησιμοποιώντας ουδέτερες πιθανότητες (50%), αποδίδοντας την αβεβαιότητα με φράσεις όπως «δε γνωρίζω». Ορισμένοι περιέγραψαν με ακρίβεια ισοπίθανα ενδεχόμενα, άλλοι δυσκολεύτηκαν, ενώ οι προβλέψεις που προηγούνταν της εκτέλεσης του πειράματος βασίζονταν περισσότερο στη διαίσθηση. Μετά την εκτέλεση του πειράματος και την αλληλεπίδραση με το λογισμικό προσομοίωσης οι μαθητές φάνηκε να αναπροσαρμόζουν τις αρχικές πιθανοτικές εκτιμήσεις τους βάσει των δεδομένων.

### **B.3. Προβλήματα συνδυαστικής**

Τα παιδιά χρειάζονται συνδυαστικές δεξιότητες για να απαριθμούν τα ενδεχόμενα σε έναν δειγματικό χώρο και να υπολογίζουν πιθανότητες. Ωστόσο, απαιτείται χρόνος για να αναπτυχθούν ικανοποιητικά αυτές οι δεξιότητες, λόγω της σχέσης τους με την πολλαπλασιαστική λογική (Jones & Thornton, 2005, όπως αναφέρεται στο Batanero &

Alvarez-Arroyo, 2024). Τα μικρά παιδιά συχνά χρησιμοποιούν μεθόδους δοκιμής και σφάλματος για απλά προβλήματα απαρίθμησης και χωρίς διδασκαλία οι στρατηγικές τους παρουσιάζουν ελάχιστη βελτίωση. Κατά τους Piaget και Inhelder (1951, όπως αναφέρεται στο Batanero κ.ά., 2021), τα μικρά παιδιά μπορούν να απαριθμήσουν απλούς συνδυασμούς, όπως ζευγάρια ή μεταθέσεις με μικρά σύνολα. Ο Fishbein (1975, όπως αναφέρεται στο Batanero κ.ά., 2021) υποστηρίζει ότι η διδασκαλία μεθόδων, όπως τα δένδροδιαγράμματα, είναι κατάλληλη για παιδιά 8-10 ετών.

Η Zapata-Cardona (2018) εστίασε στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν παιδιά ηλικίας 6-8 ετών για την επίλυση καταστάσεων συνδυαστικής απαρίθμησης. Οι συμμετέχοντες έλυσαν ένα πρόβλημα που αφορούσε συνδυασμούς τεσσάρων μπλουζών και τριών παντελονιών για μια κούκλα. Αρχικά, τα παιδιά χρησιμοποίησαν απλές στρατηγικές, συνδυάζοντας τα στοιχεία ένα προς ένα και παραβλέποντας τα μη συνδυασμένα αντικείμενα, στρατηγική σύμφωνη με το στάδιο των συγκεκριμένων λειτουργιών των Piaget και Inhelder (1951, όπως αναφέρεται στο Batanero κ.ά., 2021), καθώς τα παιδιά δεν εξερεύνησαν περαιτέρω συνδυασμούς. Η έρευνα έδειξε πως οι ερωτήσεις της ερευνήτριας ενθάρρυναν την αναθεώρηση των στρατηγικών τους, αλλά δεν παρατηρήθηκε κάποια συστηματικότητα στις απαντήσεις τους.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως το νέο Π.Σ. στα στοχαστικά μαθηματικά είναι σε μεγάλο βαθμό συμβατό με δεδομένα της σύγχρονης ερευνητικής βιβλιογραφίας, καθώς ενσωματώνει έννοιες και διαδικασίες, όπως οι στατιστικές διερευνήσεις και η τυχαιότητα, οι οποίες θεωρούνται σημαντικές για μαθητές πρώτης σχολικής ηλικίας στη σχετική βιβλιογραφία. Παρατηρείται πως σε ορισμένες περιπτώσεις οι Ε.Δ. που προτείνονται από το Π.Σ., όπως ο πειραματισμός με τροχούς τύχης ή η ενασχόληση με προβλήματα συνδυαστικής, απασχολούν έρευνες που αφορούν μαθητές προσχολικής ηλικίας στα πλαίσια της διεθνούς βιβλιογραφίας.

### **Η διδασκαλία στοχαστικών μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου: προτάσεις από την έρευνα και σύνδεση με το νέο Π.Σ.**

Η ενότητα αυτή επικεντρώνεται στις παιδαγωγικές προεκτάσεις και στις διδακτικές πρακτικές που προτείνονται από την έρευνα και στο βαθμό που αυτές συνάδουν με το περιεχόμενο και τις Ε.Δ. του νέου Π.Σ. για τα στοχαστικά μαθηματικά στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Οι έρευνες σε ζητήματα εκπαίδευσης στη Στατιστική εστιάζουν σε τρόπους ενίσχυσης της ενασχόλησης των μαθητών με στατιστικές διερευνήσεις. Η Makar (2016) επιδίωξε να κατανοήσει και να υποστηρίξει την εξαγωγή συμπερασμάτων από μαθητές Νηπιαγωγείου και πρώτης τάξης δημοτικού σχολείου. Υιοθετώντας μια έρευνα σχεδιασμού, εντόπισε θεμελιώδεις δεξιότητες που ενισχύουν τη συμπερασματολογική σκέψη, όπως η διατύπωση προβλέψεων από την παρατήρηση δεδομένων και η καταγραφή και οργάνωση δεδομένων με προσωπικούς τρόπους από τους μαθητές. Η έρευνα υπογραμμίζει την σημασία της γνώσης του εκπαιδευτικού για τις διαφορετικές οπτικές που διαθέτουν οι μαθητές στα δεδομένα, για την υποστήριξη της μετάβασής τους στην θεώρηση των δεδομένων ως όλων. Αντίστοιχα, οι Leavy και Sloane (2017) μελέτησαν μαθητές πρώτης τάξης του δημοτικού σχολείου, καθώς

συλλογίζονταν πάνω σε δεδομένα που συνέλεξαν. Οι ερευνήτριες σημειώνουν τη σημασία ενός ενδιαφέροντος και σχετικού με τις εμπειρίες των μαθητών πλαισίου για την εμπλοκή τους και την αναζήτηση νοήματος για το πρόβλημα. Οι εκπαιδευτικοί, με τις ερωτήσεις τους, ενίσχυσαν την προσοχή των μαθητών στα διαθέσιμα δεδομένα και ανέδειξαν παρανοήσεις, διευκολύνοντας την ανάπτυξη δεξιοτήτων χειρισμού των δεδομένων. Επιπλέον, η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών αναδείχθηκε κρίσιμη, καθώς, συζητώντας μεταξύ τους, «οικοδομούσαν» πάνω στις ιδέες των συμμαθητών τους, προκειμένου να σχηματίσουν προβλέψεις ή να καταλήξουν σε συμπεράσματα. Τέλος, η έρευνα της Zapata-Cardona (2023) επικεντρώθηκε στο πώς το πλαίσιο επηρεάζει τον πρώιμο στατιστικό συλλογισμό σε έργα αναπαράστασης δεδομένων. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με δύο μαθητές πρώτης τάξης του δημοτικού σχολείου σε περιβάλλον εκτός σχολείου, μέσω συνεντεύξεων. Διαπιστώθηκε ότι η οικειότητα του πλαισίου και οι προσωπικές εμπειρίες με αυτό συνέβαλαν θετικά στην ανάπτυξη στρατηγικών αναπαράστασης δεδομένων, ενισχύοντας τη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως η έρευνα προτείνει την υποστήριξη των στατιστικών διερευνήσεων μέσω της αξιοποίησης οικείων πλαισίων που ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα των μαθητών, της διατύπωσης προβλέψεων, καθώς και της παροχής ευκαιριών για προσωπικές μορφές αναπαράστασης των δεδομένων. Το νέο Π.Σ., με τις Ε.Δ. που προτείνει, όπως η συλλογή πραγματικών δεδομένων από το πλαίσιο της τάξης και η ενθάρρυνση πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης δεδομένων, ευνοεί την ενσωμάτωση των ανωτέρω στη διδακτική πράξη.

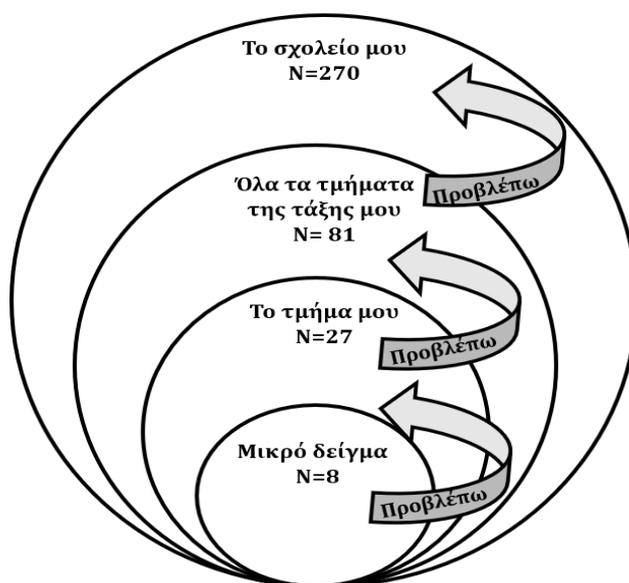
Οι έρευνες που εστιάζουν στην ενίσχυση της πιθανοτικής σκέψης των μαθητών συγκλίνουν αναφορικά με την αξία συγκεκριμένων πρακτικών στην σχολική τάξη. Ειδικότερα, η χρήση οικείων πλαισίων που ενθαρρύνουν τη συμμετοχή των μαθητών, η διατύπωση καλά σχεδιασμένων ερωτήσεων από τους εκπαιδευτικούς που προάγουν τον συλλογισμό και την αιτιολόγηση, καθώς και η δημιουργία μαθησιακού περιβάλλοντος που ενισχύει τον διάλογο και τη χρήση πιθανοτικής γλώσσας, προσφέρουν σημαντικές ευκαιρίες μάθησης στο θεματικό πεδίο των Πιθανοτήτων (Tatsis κ.ά., 2008 · Vásquez & Alsina, 2019). Σχετικά με τα προβλήματα συνδυαστικής, η Zapata-Cardona (2018) προτείνει στρατηγικές για την ενίσχυση των πρώιμων τεχνικών των παιδιών και την ανάπτυξη συστηματικότητας. Ένας βασικός τρόπος είναι η υπενθύμιση στους μαθητές ότι όλα τα στοιχεία μιας κατηγορίας πρέπει να συνδυαστούν με όλα τα στοιχεία μιας άλλης κατηγορίας, ώστε να αποφεύγονται παραλείψεις. Η χρήση πινάκων ή διαγραμμάτων ροής για την καλύτερη οργάνωση των συνδυασμών βοηθά στην αποτελεσματική διαχείριση των μονάδων. Εξίσου σημαντική είναι η διατύπωση ερωτήσεων που ζητούν εξηγήσεις για τις μεθόδους των μαθητών, καθώς και ο σχεδιασμός έργων που σχετίζονται με την καθημερινή τους ζωή. Η χρήση χειραπτικού υλικού ενισχύει την οπτικοποίηση και μοντελοποίηση διαφορετικών στρατηγικών, επιτρέποντας στα παιδιά να κατανοήσουν καλύτερα τις συνδυαστικές διαδικασίες.

Η έρευνα, λοιπόν, αναδεικνύει τη χρήση οικείων πλαισίων, τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στους μαθητές αλλά και τη χρήση χειραπτικού υλικού ως ωφέλιμες προσεγγίσεις κατά τη

διδασκαλία ζητημάτων που σχετίζονται με την πιθανότητα. Και σε αυτήν την περίπτωση, το νέο Π.Σ. στα μαθηματικά φαίνεται να ευθυγραμμίζεται με αυτές τις προτάσεις, εστιάζοντας σε Ε.Δ. που επιτρέπουν στους μαθητές να πειραματιστούν με χειραπτικό ή οικείο σε αυτούς υλικό όπως τα ζάρια και οι τροχοί τύχης.

Αποτελεσματικές διδακτικές πρακτικές, προκειμένου να βοηθηθούν οι μαθητές διαφόρων τάξεων δημοτικού σχολείου στο να αναγνωρίσουν μοτίβα, να αναφερθούν στη μεταβλητότητα ή την τυχειότητα έχουν επίσης προταθεί ή αξιοποιηθεί από πληθώρα ερευνών, ορισμένες από τις οποίες περιγράφονται παρακάτω.

Τα αυξανόμενα δείγματα αποτελούν μια διδακτική ευρετική (Konold & Pollatsek, 2002), η οποία έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε έρευνες για να υποστηρίξει στατιστικές διερευνήσεις (π.χ. Bakker & Gravemeijer, 2004· Ben-Zvi & Amir, 2005 · Ben-Zvi κ.ά., 2012). Στην εικόνα 1 παρουσιάζεται σχηματικά ο τρόπος με τον οποίο τα αυξανόμενα δείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια στατιστική διερεύνηση. Στην διαδικασία αυτή, οι μαθητές εισάγονται σταδιακά σε μεγαλύτερα μεγέθη δειγμάτων που προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό. Πιο συγκεκριμένα, καλούνται να κατανοήσουν τις πληροφορίες που εξάγονται από κάθε δείγμα και να σχηματίσουν μια άτυπη στατιστική συμπερασματολογία, η οποία δεν βασίζεται σε αυστηρούς κανόνες, αλλά προκύπτει από την παρατήρηση και την ανάλυση των δεδομένων. Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να προβλέψουν ποια χαρακτηριστικά του δείγματος θα παραμείνουν ίδια και ποια θα αλλάξουν, καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται. Όπως παρατηρούν οι Braham και Ben-Zvi (2015), μέσω αυτής της διαδικασίας, οι μαθητές αναζητούν και αναλύουν σταθερά χαρακτηριστικά κατανομών και συγκρίνουν τις υποθέσεις τους για τα μεγαλύτερα δείγματα με τις παρατηρήσεις που προκύπτουν από τα δεδομένα. Αυτό τους επιτρέπει να ενισχύσουν τις δεξιότητές τους στη στατιστική σκέψη και να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες της μεταβλητότητας και της σταθερότητας σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος. Ενθαρρύνονται επίσης να σκεφτούν και να αξιολογήσουν το επίπεδο σιγουριάς που έχουν για τα συμπεράσματά τους, αναγνωρίζοντας την αβεβαιότητα και τη σημασία της επανάληψης της διαδικασίας με μεγαλύτερα δείγματα για την εξαγωγή πιο ακριβών συμπερασμάτων.



**Εικόνα 1.** Παράδειγμα εφαρμογής της στρατηγικής αυξανόμενων δειγμάτων σε μια στατιστική διερεύνηση (Ben-Zvi κ.ά., 2012)

Ερχόμενοι σε επαφή με αυξανόμενα δείγματα οι μαθητές ενδέχεται να εστιάσουν και στη δειγματική μεταβλητότητα, δεδομένου πως όσο το μέγεθος ενός δείγματος αυξάνεται, τόσο το σχήμα της δειγματικής κατανομής σταθεροποιείται και προσεγγίζει την κατανομή του πληθυσμού (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Ακόμη, η στρατηγική αυτή δύναται να στρέψει την προσοχή των μαθητών στον ρόλο που διαδραματίζει το μέγεθος δείγματος για το επίπεδο βεβαιότητας των συμπερασμάτων, ή τη σύνδεση ανάμεσα στο μέγεθος δείγματος και τη δειγματική μεταβλητότητα (Braham & Ben-Zvi, 2015). Η ευρετική των αυξανόμενων δειγμάτων συνδυάζεται συχνά με την ενθάρρυνση διατύπωσης εικασιών από τους μαθητές, μέσω ερωτήσεων τύπου «τι θα γινόταν αν ...» (What if questions). Ο Ben-Zvi (2006) επισημαίνει πως οι ερωτήσεις αυτές βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τα διαθέσιμα δεδομένα, υποστηρίζοντας παράλληλα τον άτυπο συμπερασματολογικό συλλογισμό τους μέσω της παρατήρησης συνολικών χαρακτηριστικών των κατανομών, αναγνώρισης του σήματος εντός του θορύβου, και διατύπωσης ισχυρισμών που βασίζονται στα δεδομένα.

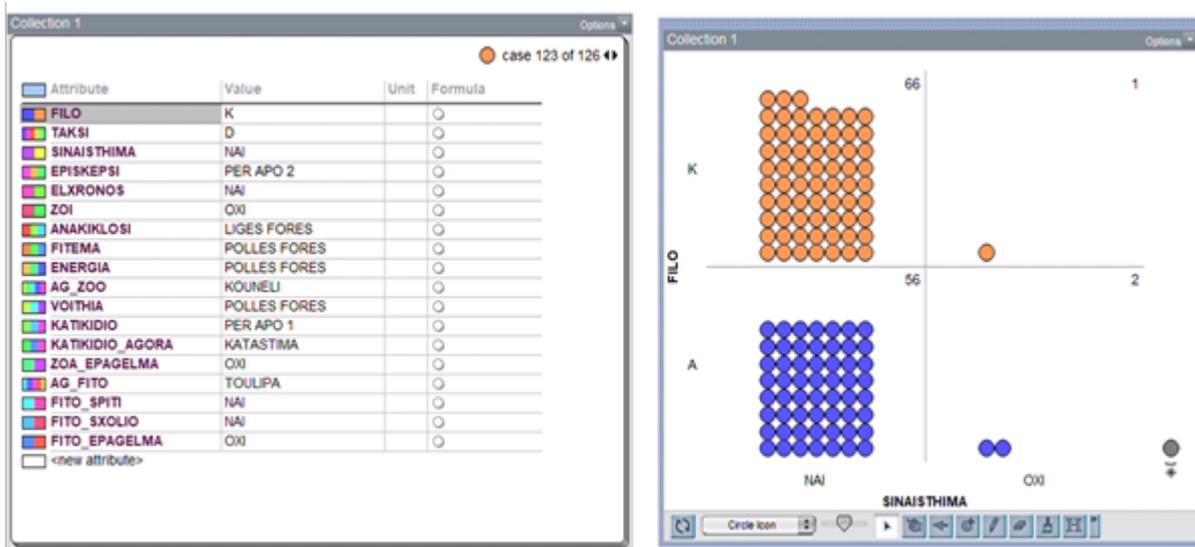
Το νέο Π.Σ. για τα μαθηματικά φαίνεται να δημιουργεί γόνιμο έδαφος για την εφαρμογή της στρατηγικής των αυξανόμενων δειγμάτων, καθώς προωθεί τη διερευνητική προσέγγιση και τη σταδιακή οικοδόμηση της στατιστικής σκέψης. Η έμφαση στη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων από τις πρώτες κιόλας τάξεις, καθώς και η ενσωμάτωση Ε.Δ. με επαναλαμβανόμενα πειράματα και οπτικοποίηση αποτελεσμάτων θεωρούμε πως ευνοεί την υιοθέτηση των αυξανόμενων δειγμάτων σε δραστηριότητες που ενδεχομένως να σχεδιάσουν οι εκπαιδευτικοί για να υποστηρίξουν τα Π.Μ.Α. που αναφέρονται στο Π.Σ..

Τέλος, η τεχνολογία και ειδικά τα προγράμματα προσομοίωσης διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία της Στατιστικής. Σύμφωνα με τους Garfield και Ben-Zvi (2008), η τεχνολογία παρέχει εύκολη πρόσβαση σε πολλαπλές αναπαραστάσεις, καθώς και ευκαιρίες χειρισμού και σύγκρισης αναπαραστάσεων. Προγράμματα όπως το Tinkerplots (Konold & Miller, 2015) έχουν σχεδιαστεί για μαθητές σχολικής εκπαίδευσης παρέχοντας τη δυνατότητα της δυναμικής επεξεργασίας δεδομένων. Μέσα από απλές δράσεις, όπως η οργάνωση δεδομένων βάσει συγκεκριμένων τιμών ή η κατανομή των δεδομένων σε κατηγορίες, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να δημιουργήσουν συμβατικές ή προσωπικές αναπαραστάσεις δεδομένων. Παράλληλα, οργανώνουν τα δεδομένα τους αναλόγως, προκειμένου να απαντήσουν σε δικά τους ερωτήματα ή να ελέγξουν εικασίες τους.

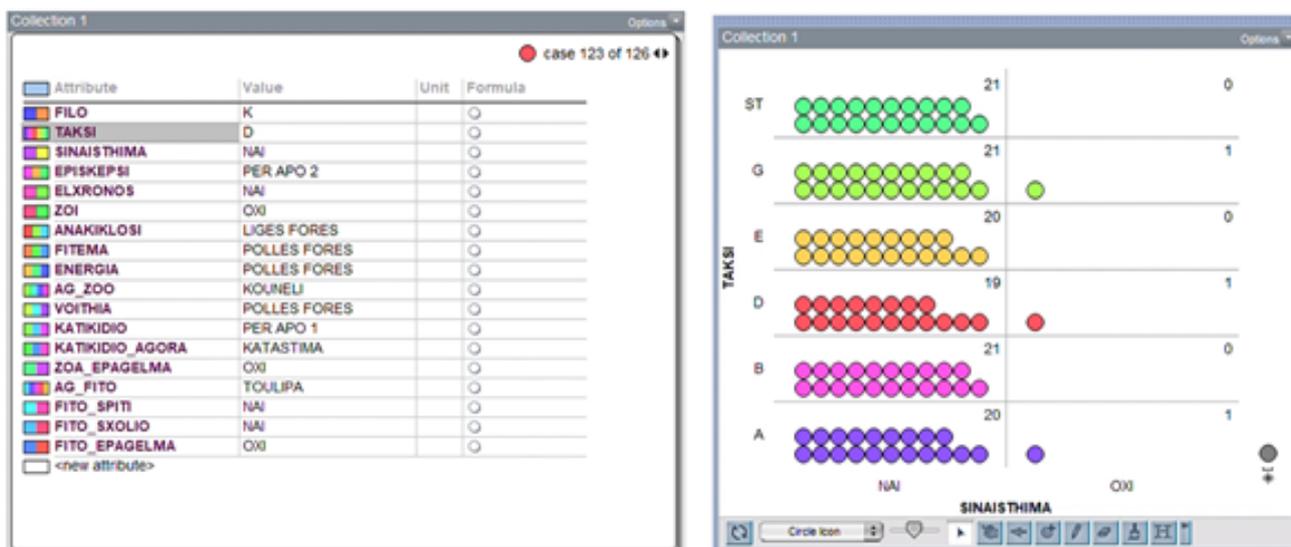
Το νέο Π. Σ. υποστηρίζει τη χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των στοχαστικών μαθηματικών, καθώς περιλαμβάνει δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τη συλλογή και οργάνωση δεδομένων από τον πραγματικό κόσμο, τη χρήση διαγραμμάτων (ραβδογράμματα, πίτες, κ.ά.) και την αναζήτηση μοτίβων μέσα από πειραματικές διαδικασίες. Οι μαθητές καλούνται να καταγράψουν αποτελέσματα από παιχνίδια τύχης ή μικρές έρευνες στο πλαίσιο της τάξης τους, να τα αναπαριστούν και να τα αναλύουν. Σε αυτό το πλαίσιο, η τεχνολογία προσφέρει εργαλεία που μπορούν να εμπλουτίσουν και να διευκολύνουν τέτοιες διαδικασίες. Ακολούθως αναφέρονται δύο ενδεικτικά παραδείγματα

όπου τα Π.Μ.Α. του νέου Π.Σ. θα μπορούσαν να προσεγγιστούν στην τάξη με τη χρήση της τεχνολογίας.

Έστω ότι ο εκπαιδευτικός μιας τάξης Γ' δημοτικού υποστηρίζει την επίτευξη του Π.Μ.Α. «κατασκευή αναπαραστάσεων, διερεύνηση πληροφοριών από αυτές και σχηματισμός συμπερασμάτων» και η τάξη έχει επιλέξει να διερευνήσει τις απόψεις των μαθητών του σχολείου για τη φύση και τα ζώα μέσω ενός ερωτηματολογίου (καθώς το ερώτημα αυτό τους ενδιαφέρει ή έχει προκύψει από συζήτηση). Αν οι μαθητές επέλεγαν να οργανώσουν τα δεδομένα τους στο λογισμικό Tinkerplots, θα συγκέντρωναν τις απαντήσεις κάθε μαθητή, δημιουργώντας κατηγορίες για κάθε ερώτηση, όπως φαίνεται στις εικόνες 2 και 3. Σε περίπτωση μαθητών μικρότερης ηλικίας, οι κατηγορίες θα μπορούσαν να είναι λιγότερες και να δημιουργούνται από τον εκπαιδευτικό. Οι μαθητές θα εισήγαγαν τις τιμές από τα ερωτηματολόγια στις αντίστοιχες κατηγορίες. Έχοντας εισάγει τα δεδομένα, θα μπορούσαν να τα διερευνήσουν με βάση τις παραμέτρους που επιθυμούν. Στις καρτέλες παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση «Αισθάνεσαι όμορφα όταν βρίσκεσαι κοντά στη φύση;», ανά φύλο (Εικόνα 2) και ανά τάξη (Εικόνα 3). Σκοπός αυτής της χρήσης του λογισμικού είναι οι μαθητές να ελέγξουν εικασίες που έχουν σχηματίσει ή να ανιχνεύσουν τάσεις στα δεδομένα.



Εικόνα 2. Κάρτα δεδομένων και απαντήσεις ανά φύλο

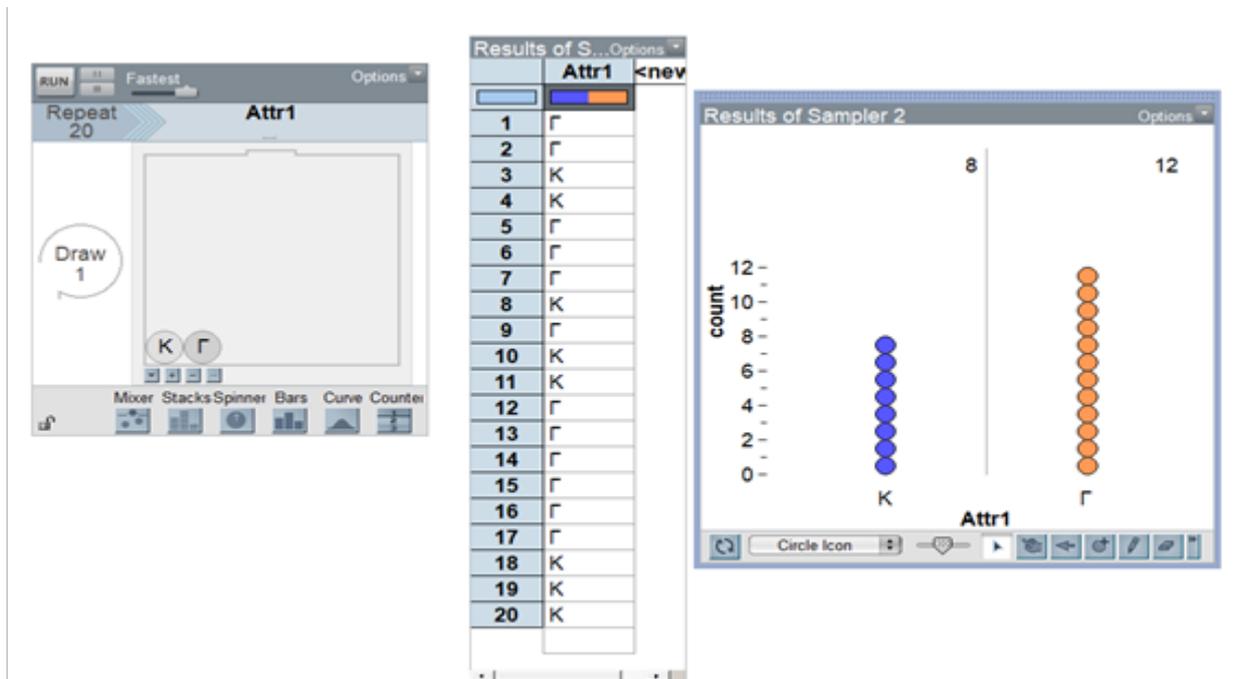


**Εικόνα 3.** Κάρτα δεδομένων και απαντήσεις ανά τάξη

Σημαντικό ρόλο στην διδασκαλία πιθανοτικών εννοιών ή την εκτέλεση πειραμάτων τύχης διαδραματίζει ο sampler στο λογισμικό Tinkerplots. Μέσω αυτού, οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν κατανομές δεδομένων για έναν πληθυσμό και να επιλέξουν τυχαία δείγματα με αναπαραστατικό τρόπο: τα δεδομένα επιλέγονται ένα-ένα από την κατανομή του πληθυσμού στη δειγματική κατανομή (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν αναπαραστάσεις για τα αποτελέσματα μιας τυχαίας επιλογής από τον πληθυσμό. Με τη χρήση του λογισμικού, διερευνούν σχέσεις ανάμεσα στα δεδομένα και την τυχαιότητα (Konold & Kazak, 2008), όπως το ότι δεν πρέπει να συνάγονται βέβαια συμπεράσματα από μικρού μεγέθους δείγματα, καθώς τα μεγάλα δείγματα ευνοούν την εμφάνιση όλων των πιθανών τιμών μιας μεταβλητής. Επίσης, λογισμικά όπως το Tinkerplots, επιτρέπουν στους μαθητές να εκτελέσουν πειράματα τύχης με υψηλό αριθμό επαναλήψεων, να παρατηρήσουν τη συμπεριφορά των αποτελεσμάτων, να παράγουν πολλαπλές αναπαραστάσεις των δεδομένων και να αναστοχαστούν πάνω στις πληροφορίες που αναδεικνύει η καθεμία.

Έστω ότι ο εκπαιδευτικός μιας τάξης Β'-Γ' δημοτικού υποστηρίζει την επίτευξη του Π.Μ.Α. «Σύγκριση πιθανοτήτων εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές». Στην Εικόνα 4 παρουσιάζεται μία χρήση του sampler για την πραγματοποίηση πολλών δοκιμών σε ένα πείραμα τύχης ενός σταδίου, όπως η ρίψη ενός κέρματος και η καταγραφή του αποτελέσματος, κορώνα (Κ) ή γράμματα (Γ). Ο sampler λειτουργεί ως «κληρωτίδα», όπου βρίσκονται μικρές μπάλες με τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος. Μέσω της εντολής επανάληψης (repeat), το λογισμικό επιλέγει τυχαία μια μπάλα από την κληρωτίδα, όσες φορές του ζητηθεί. Στην Εικόνα 4, ζητείται από το λογισμικό να εκτελέσει το πείραμα 20 φορές, καταγράφοντας τα αποτελέσματα σε πίνακα και παρουσιάζοντάς τα σε γράφημα. Οι μαθητές, αφού εκτελέσουν το πείραμα φυσικά και καταγράψουν τα αποτελέσματά τους, μπορούν να διερευνήσουν τα αποτελέσματα από την ρίψη του κέρματος σε μεγάλο αριθμό φορών (500, 1000...), ή εκτελώντας το πείραμα 20 φορές. Η χρήση του λογισμικού μπορεί να

συνδεθεί με ευρετικές, όπως τα αυξανόμενα δείγματα, ή ερωτήσεις όπως «Τι θα γινόταν αν ρίχναμε το κέρμα 200 φορές; Ελέγξτε την εικασία σας με το λογισμικό».



Εικόνα 4. Χρήση του sampler κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης

Με βάση τα παραπάνω, το νέο Π.Σ. για τα στοχαστικά μαθηματικά υποστηρίζει τη χρήση διδακτικών πρακτικών που η διεθνής βιβλιογραφία υποστηρίζει ως γόνιμες για την ανάπτυξη του στοχαστικού συλλογισμού. Στο πεδίο της Στατιστικής, το νέο Π.Σ., εστιάζοντας στη διατύπωση ερωτημάτων, τη συλλογή, οργάνωση, την αναπαράσταση δεδομένων και την συναγωγή συμπερασμάτων, ευνοεί τη συμμετοχή σε διερευνητικές διαδικασίες, την αξιοποίηση πλαισίων που έχουν νόημα για τους μικρούς μαθητές αλλά και τη χρήση της τεχνολογίας για την οργάνωση των δεδομένων και τη συμπεραματολογία. Στο πεδίο των Πιθανοτήτων, το νέο Π.Σ. προκρίνει τον πειραματισμό και την εκτέλεση πειραμάτων τύχης, ευθυγραμμιζόμενο με τη διεθνή βιβλιογραφία που παρέχει τρόπους για την έκφραση διαισθητικών ιδεών σχετικά με τη τυχαιότητα, τις οποίες οι μαθητές μπορούν να επεκτείνουν μέσω πειραματισμού, οικείων πλαισίων και κατάλληλης υποστήριξης από τον εκπαιδευτικό με ερωτήσεις και εποπτικό υλικό.

### Συζήτηση-Συμπεράσματα

Η παρούσα μελέτη επιχειρήσει να σκιαγραφήσει το περιεχόμενο της στοχαστικής εκπαίδευσης σύμφωνα με το νέο Π.Σ. για τα μαθηματικά στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, συσχετίζοντάς το με σχετικά βιβλιογραφικά δεδομένα του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών. Προσδιορίστηκαν οι θεματικές περιοχές της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων που προτείνονται από το νέο Π.Σ. και συνδυάστηκαν με συναφή ερευνητικά πορίσματα που αφορούν τις δυνατότητες των μαθητών, καθώς και τις δυσκολίες που ενδέχεται να αντιμετωπίσουν ασχολούμενοι με τέτοια ζητήματα. Τέλος, παρουσιάστηκαν τρόποι υποστήριξης των μαθητών κατά την εργασία τους σε δραστηριότητες στοχαστικών

μαθηματικών όπως προτείνονται από την βιβλιογραφία και εξετάστηκε κατά πόσο το νέο Π.Σ. ευνοεί την αξιοποίησή τους στην διδακτική πράξη.

Εστιάζοντας στο περιεχόμενο της στοχαστικής εκπαίδευσης για μαθητές προσχολικής και σχολικής ηλικίας, είναι σημαντικό να αποσαφηνιστεί ότι η ενασχόλησή τους με στοχαστικές έννοιες δεν προεξοφλεί την πλήρη κατανόησή τους. Βασική επιδίωξη είναι οι μαθητές να προσεγγίσουν οργανωμένα τις έννοιες, ώστε να αναπτύξουν προσωπικούς τρόπους διαχείρισης δεδομένων, να συνειδητοποιήσουν την αβεβαιότητα και να πειραματιστούν με την τυχαιότητα. Παράλληλα, να συνεργαστούν, να λάβουν αποφάσεις και να μνηθούν σε τρόπους διερεύνησης μεγάλου όγκου δεδομένων. Η στοχαστική εκπαίδευση υποστηρίζει την ενασχόληση με έννοιες όπως η μεταβλητότητα, η τυχαιότητα και η πιθανότητα, οι οποίες έχουν κεντρικό ρόλο στο νέο Π.Σ. για τα μαθηματικά στο Δημοτικό σχολείο. Ακόμη ενθαρρύνει την εμπλοκή των μαθητών με στοχαστικές διαδικασίες, όπως οι στατιστικές διερευνήσεις, προκειμένου να απαντηθεί ένα ερώτημα ενδιαφέροντος.

Η έρευνα για την ενασχόληση μαθητών πρώτων τάξεων δημοτικού σχολείου με στοχαστικές έννοιες δείχνει πως διαθέτουν γόνιμες ιδέες, τις οποίες, με υποστήριξη, μπορούν να επεκτείνουν. Σχετικά με τα στάδια στατιστικών διερευνήσεων, οι μαθητές διατυπώνουν ερωτήματα προς διερεύνηση, αλλά χρειάζονται υποστήριξη για να διατυπώσουν ερωτήματα που αφορούν ευρύτερα φαινόμενα και απαντώνται με συλλογή δεδομένων (Allmond & Makar, 2010). Διαθέτουν ενδιαφέρον για την αναπαράσταση δεδομένων, υιοθετούν συμβατικούς ή προσωπικούς τρόπους αναπαράστασης και ανιχνεύουν τάσεις (Leavy & Hourigan, 2018). Η εστίαση στα δεδομένα ως σύνολο και η υιοθέτηση της αβεβαιότητας για τα συμπεράσματα δεν είναι αυτονόητη, αν και ορισμένοι αναφέρονται στη μεταβλητότητα και αβεβαιότητα (English, 2014). Σχετικά με τις πιθανότητες, οι μαθητές πρώτης σχολικής ηλικίας φαίνεται πως είναι σε θέση να απαριθμούν τα δυνατά αποτελέσματα σε απλά πειράματα τύχης ενός σταδίου (Kafoussi, 2004). Υιοθετούν πρώιμη πιθανοτική γλώσσα (Kazak & Leavy, 2018) και συγκρίνουν ενδεχόμενα με βάση πειράματα τύχης (Tatsis κ.ά., 2008). Οι περισσότερες έρευνες τονίζουν την ανάγκη διδακτικής υποστήριξης για τη μετάβαση από προσωπικές διαισθήσεις σε προσεγγίσεις που λαμβάνουν υπόψη δεδομένα και ενσωματώνουν την αβεβαιότητα.

Στο νέο Π.Σ. για τα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου, τα στοχαστικά μαθηματικά για τις πρώτες τάξεις προσφέρουν δυνατότητες για ενασχόληση με ζητήματα Στατιστικής και Πιθανοτήτων, με τρόπους που ευθυγραμμίζονται με την σύγχρονη βιβλιογραφία. Με την έμφαση σε βασικές έννοιες όπως οι στατιστικές διερευνήσεις, η τυχαιότητα, ο δειγματικός χώρος, η αναπαράσταση δεδομένων και η άτυπη συμπερασματολογία, το Π.Σ. ευθυγραμμίζεται σε ικανοποιητικό βαθμό με τα βιβλιογραφικά δεδομένα για την πρώιμη εκπαίδευση στη στατιστική. Η σύγχρονη έρευνα υποστηρίζει ότι οι μαθητές προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας είναι σε θέση να αναπτύξουν διαισθητική πιθανολογική σκέψη και θεμελιώδεις στατιστικές δεξιότητες μέσα από κατάλληλες για την ηλικία τους δραστηριότητες που αξιοποιούν οπτικά βοηθήματα, χειραπτικό υλικό και οικεία, ενδιαφέροντα πλαίσια. Τα στοιχεία αυτά αποτυπώνονται στο Π.Σ., το οποίο δίνει προτεραιότητα στη διερευνητική μάθηση και προάγει την κριτική σκέψη μέσω έργων και

δραστηριοτήτων που αναπτύσσονται τόσο ατομικά όσο και συνεργατικά, όπως η διατύπωση ερωτημάτων, η συλλογή και οργάνωση δεδομένων, η εξαγωγή συμπερασμάτων αλλά και η εμπλοκή σε πειράματα τύχης. Ωστόσο, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η σύγχρονη βιβλιογραφία υποστηρίζει ένα ευρύτερο πεδίο στόχων για τις ηλικίες 6-8 ετών μέσω έργων και δραστηριοτήτων συνθετότερων αυτών που προτείνονται στις Ε.Δ. του νέου Π.Σ. Αυτή η διαφοροποίηση ενδεχομένως να οφείλεται στο ότι οι χώρες στις οποίες πραγματοποιήθηκαν οι αντίστοιχες έρευνες (λόγου χάριν η Αυστραλία) έχουν διαμορφώσει προγράμματα σπουδών που μελετούν με συστηματικότητα ζητήματα στοχαστικών μαθηματικών από την προσχολική κιόλας ηλικία (Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2018). Στη χώρα μας, για πρώτη φορά στο νέο Π.Σ. αποδίδεται στην εκπαίδευση στα στοχαστικά μαθηματικά βαρύνουσα σημασία και οργανώνεται με συστηματικό τρόπο από την προσχολική κιόλας βαθμίδα. Επομένως, κρίνεται αναμενόμενη η ύπαρξη ενός μεταβατικού, μακράς ίσως διάρκειας σταδίου ανάπτυξης του στοχαστικού συλλογισμού στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, που ίσως αργότερα οδηγήσει σε πιο προκλητικές διερευνήσεις σχετικών θεμάτων.

Αναφορικά με την παιδαγωγική υποστήριξη του στοχαστικού συλλογισμού των μαθητών, η βιβλιογραφία τονίζει τη σημασία της συμμετοχής τους σε διερευνητικές διαδικασίες με ευκαιρίες πρώιμης ενασχόλησης με στατιστικές έννοιες, σε αυθεντικές καταστάσεις (Leavy & Sloane, 2017·Zapata-Cardona, 2023). Ο αναμενόμενος τρόπος δράσης του εκπαιδευτικού είναι καθοριστικός, κυρίως μέσω ανοιχτών ερωτήσεων που ενθαρρύνουν τον πειραματισμό, αξιοποιούν τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών και καθοδηγούν τον συλλογισμό σε θεμελιώδη στατιστικά ζητήματα (Fielding-Wells, 2018). Ιδιαίτερα ωφέλιμες είναι πρακτικές όπως η διατύπωση προβλέψεων, η παρατήρηση δεδομένων και η οργάνωσή τους με τρόπους που έχουν νόημα για τους μαθητές (Makar, 2016). Διδακτικές πρακτικές όπως τα αυξανόμενα δείγματα και ερωτήσεις τύπου «τι θα γινόταν αν...» βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τη μεταβλητότητα και τη σημασία του μεγέθους δείγματος στην εξαγωγή συμπερασμάτων. Ενισχυτικά σε αυτά λειτουργεί η τεχνολογία, με λογισμικά όπως το Tinkerplots, που επιτρέπουν την κατανόηση ιδεών για μακροπρόθεσμα μοτίβα και τυχαίες διαδικασίες (Garfield κ.ά., 2000, όπως αναφέρεται στο Braham & Ben-Zvi, 2015), ενώ επιτρέπουν στους μαθητές να πειραματιστούν με την τυχαιότητα, να ελέγξουν εικασίες και να εναλλάξουν αναπαραστάσεις. Το νέο Π.Σ. φαίνεται να ενθαρρύνει τη διδασκαλία της Στατιστικής και της τυχειότητας μέσω δραστηριοτήτων σχετικών με την καθημερινότητα των μαθητών, όπως μικρές έρευνες και πειράματα τύχης. Παράλληλα, προωθεί τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, προτείνοντας Ε.Δ. που περιλαμβάνουν συλλογή, οργάνωση και αναπαράσταση δεδομένων από έρευνες ή πειράματα τύχης.

Συνοψίζοντας, τις τελευταίες δεκαετίες, μεγάλο μέρος της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση επικεντρώνεται στη μαθηματική εγγραμματοσύνη του αυριανού πολίτη, ώστε να ανταποκρίνεται στις προκλήσεις της επαγγελματικής και κοινωνικής ζωής. Κρίσιμο ρόλο σε αυτό διαδραματίζουν έννοιες που σχετίζονται με την επεξεργασία δεδομένων, την τυχειότητα, την πρόβλεψη, κ.ά., δηλαδή έννοιες που προωθούν τον στατιστικό συλλογισμό (Garfield & Ben-Zvi, 2008) και ενσωματώνονται στο νέο Π.Σ. για τα μαθηματικά. Η σύγχρονη έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών υποστηρίζει τις επιλογές του νέου Π.Σ., καθώς τα

αποτελέσματα των ερευνών αναδεικνύουν τα οφέλη της ανάπτυξης του στοχαστικού τρόπου σκέψης από την πρώτη σχολική ηλικία.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι έρευνες που αξιοποιούνται στην παρούσα εργασία είναι ενδεικτικές των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (Π.Μ.Α.) για τα στοχαστικά μαθηματικά του νέου Π.Σ. στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί πως συνοψίζουν τα πορίσματα του συνόλου των ερευνών που εστιάζουν στο συγκεκριμένο θεματικό πεδίο. Χρήσιμη κρίνεται η πραγματοποίηση μιας πιο συστηματικής ερευνητικής ανασκόπησης, για να ανιχνευτούν σχετικές εργασίες που τυχόν αναφέρονται σε συναφή ζητήματα και περιλαμβάνονται σε περιοδικά, πρακτικά συνεδρίων ή συλλογικούς τόμους με πιο ευρεία θεματολογία.

Όσον αφορά τη μελλοντική έρευνα, χρήσιμη θα ήταν η διερεύνηση του βαθμού που μαθητές με στοχαστικές εμπειρίες σε προσχολική ή πρώτη σχολική ηλικία είναι σε θέση να μεταφέρουν ή να μετασχηματίσουν επιτυχώς αυτές τις εμπειρίες, καθώς προχωρούν στις επόμενες βαθμίδες εκπαίδευσης και συναντούν την «τυπική διδασκαλία» των στατιστικών εννοιών. Επίσης, δεδομένων των προκλήσεων που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση για το σχεδιασμό και την εφαρμογή στοχαστικών δραστηριοτήτων (Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2018), θα ήταν ωφέλιμη η διερεύνηση της δικής τους επαγγελματικής γνώσης και μάθησης, καθώς και της αντίστοιχης διδακτικής τους πρακτικής, ώστε να εντοπιστούν χαρακτηριστικά και διαδικασίες που υποστηρίζουν την ανάπτυξη του στοχαστικού συλλογισμού των μαθητών.

## Αναφορές

- Allmond, S., & Makar, K. (2010). Developing primary students' ability to pose questions in statistical investigations. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)* (pp. 1–6). International Statistical Institute. [http://icots.info/8/cd/pdfs/invited/ICOTS8\\_8A1\\_ALLMOND.pdf](http://icots.info/8/cd/pdfs/invited/ICOTS8_8A1_ALLMOND.pdf)
- Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147–168). Springer. [https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6\\_7](https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_7)
- Batanero, C., & Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM*, 56(1), 5–17. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5>
- Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A., & Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en la educación infantil [The beginning of probabilistic reasoning in early childhood education]. *PNA*, 15(4), 267–288. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349>
- Batista, R., Borba, R., & Henriques, A. (2022). Fairness in games: A study on children's and adults' understanding of probability. *Statistics Education Research Journal*, 21(1), 1–15. <https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.79>

- Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students' informal inference and argumentation. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics (ICOTS7)* (pp. 1–6). International Statistical Institute. [https://iase-web.org/documents/papers/icots7/2D1\\_BENZ.pdf?1402524964](https://iase-web.org/documents/papers/icots7/2D1_BENZ.pdf?1402524964)
- Ben-Zvi, D. (2018). Foreword. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Papanastasiou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. vii-viii). Springer.
- Ben-Zvi, D., & Amir, Y. (2005). How do primary school students begin to reason about distributions? In *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy (SRTL-4)*. University of Queensland. <https://www.academia.edu/976792/>
- Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM*, 44(7), 913–925. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3>
- Braham, H. M., & Ben-Zvi, D. (2015). Students' articulations of uncertainty in informally exploring sampling distributions. In A. Zieffler & E. Fry (Eds.), *Reasoning about uncertainty: Learning and teaching informal inferential reasoning* (pp. 57–94). Catalyst Press.
- Bryant, P. & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review*. Nuffield Foundation. [http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield\\_CuP\\_FULL\\_REPORTv\\_FINAL.pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf)
- English, L. D. (2014). Establishing statistical foundations early: Data modeling with young learners. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9)* (pp. 1–6). International Statistical Institute.
- Fielding-Wells, J. (2018). Scaffolding statistical inquiries for young children. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Papanastasiou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: Early mathematics learning and development* (pp. 109–127). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7\\_7](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_7)
- Fielding-Wells, J., & Makar, K. (2015). Inferring to a model: Using inquiry-based argumentation to challenge young children's expectations of equally likely outcomes. In A. Zieffler & E. Fry (Eds.), *Reasoning about uncertainty: Learning and teaching informal inferential reasoning* (pp. 1–27). Catalyst Press.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9>
- Groth, R. E. (2018). Unpacking implicit disagreements among early childhood standards for statistics and probability. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Papanastasiou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: Early mathematics learning and development* (pp. 149–162). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7\\_9](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_9)

- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (2021). *Πρόγραμμα σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στο Δημοτικό*. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.
- Kafoussi, S. (2004). Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks? *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 29–39. <https://doi.org/10.52041/serj.v3i1.540>
- Kazak, S., & Leavy, A. M. (2018). Emergent reasoning about uncertainty in primary school children with a focus on subjective probability. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: Early mathematics learning and development* (pp. 34–54). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_3)
- Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J., & Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 305–325. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9529-8>
- Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology Innovations in Statistics Education*, 2(1), 1–37. <https://doi.org/10.5070/T521000032>
- Konold, C., & Miller, C. (2015). *TinkerPlots* (Version 2.3.1) [Computer software]. University of Massachusetts. <http://www.tinkerplots.com>
- Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 259–289. <https://doi.org/10.2307/749741>
- Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M. & Paparistodemou, E. (2018). *Statistics in early childhood and primary education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7>
- Leavy, A., & Hourigan, M. (2018). Inscriptional capacities and representations of young children engaged in data collection during a statistical investigation. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 89–108). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7\\_6](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_6)
- Leavy, A. M., & Sloane, F. (2017). Insights into the approaches of young children when making informal inferences about data. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 788–795). DCU Institute of Education & ERME.
- Makar, K. (2016). Developing Young Children’s Emergent Inferential Practices in Statistics. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(1), 1–24. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107820>
- Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82–105. <https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457>
- Makar, K., & Fielding-Wells, J. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 347–358). Springer.
- Nikiforidou, Z. (2018). Probabilistic thinking and young children: Theory and pedagogy. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary*

*education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking* (pp. 21–35). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_2)

- Paparistodemou, E., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Teachers' reflection on challenges for teaching probability in the early years. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: Early mathematics learning and development* (pp. 201–215). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_12)
- Σακονίδης, Χ., Κασσώτη, Ό., Καφούση, Σ., Κλιάπης, Π., Κλώθου, Α., Λάτση, Μ., & Τριανταφυλλίδης, Τ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Δημοτικού* (2η έκδ.). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.
- Tatsis, K., Kafoussi, S. & Skoumpourdi, C. (2008). Kindergarten children discussing the fairness of probabilistic games: The creation of a primary discursive community. *Early Childhood Education Journal*, 36, 221–226. <https://doi.org/10.1007/s10643-008-0283-y>
- Vásquez, C., & Alsina, Á. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Acta Scientiae*, 21(3), 131–154. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215>
- Watson, J., Fitzallen, N., Fielding-Wells, J., & Madden, S. (2017). The practice of statistics. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 105–137). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_4)
- Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 33–47. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9764-5>
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–248. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>
- Wild, C. J., Utts, J. M., & Horton, N. J. (2018). What is statistics? In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 5–36). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_1)
- Zapata-Cardona, L. (2018). Supporting young children to develop combinatorial reasoning. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 257–272). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7\\_15](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_15)
- Zapata-Cardona, L. (2023). The role of contexts in supporting early statistical reasoning in data modeling. *Statistics Education Research Journal*, 22(2), 5–15. <https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.448>