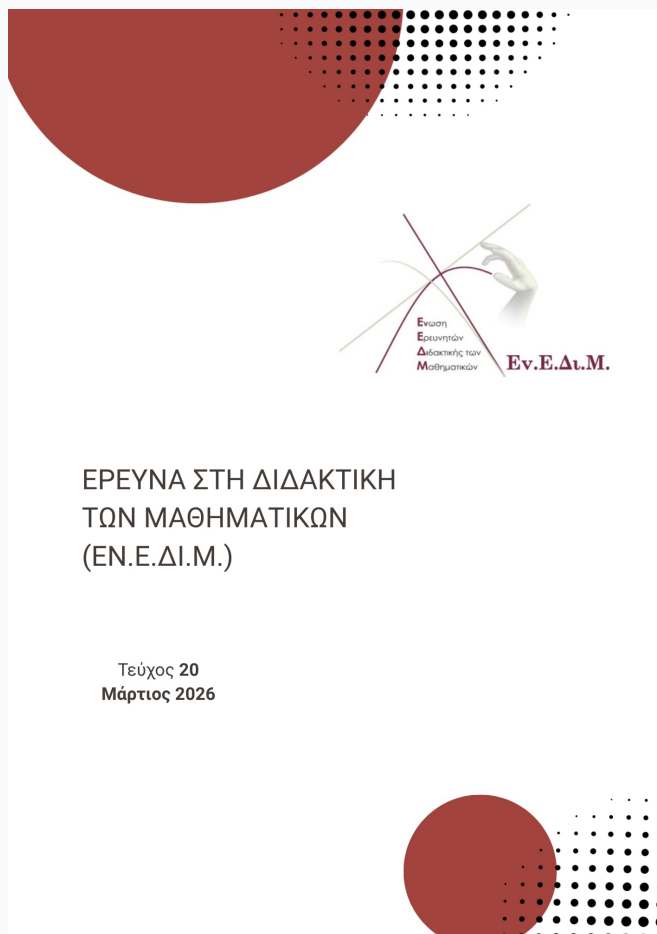


Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Αρ. 20 (2026)

ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΠΙΝΑΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΤΗ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Μαρία Βίλμα Παπαδημητρίου, Χρυσάνθη Σκουμπουρδή

doi: [10.12681/enedim.44688](https://doi.org/10.12681/enedim.44688)

Copyright © 2026, Maria Vilma Papadimitriou, Chrysanthi Skoubourdi



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Βιβλιογραφική αναφορά:

Παπαδημητρίου Μ. Β., & Σκουμπουρδή Χ. (2026). Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΠΙΝΑΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΤΗ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (20), 5-26.
<https://doi.org/10.12681/enedim.44688>

Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΠΙΝΑΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΤΗ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Μαρία Βίλμα Παπαδημητρίου και Χρυσάνθη Σκουμπουρδή

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, psed26001@aegean.gr, kara@aegean.gr

Περίληψη: Η παρούσα εργασία διερευνά τη διδακτική αξιοποίηση του γεωπίνακα ως εργαλείου για την κατανόηση των πολυγώνων, από μαθητές και μαθήτριες της Δ' δημοτικού, με έμφαση στην αναγνώριση, την ταξινόμηση, τη σύγκριση και την κατασκευή τους, καθώς και στη διάκριση των εννοιών του εμβαδού και της περιμέτρου. Στην έρευνα συμμετείχαν δύο τμήματα συνολικά 44 μαθητών και μαθητριών της Δ' Δημοτικού: η πειραματική ομάδα (N=23) διδάχτηκε τα πολύγωνα μέσω διερεύνησης με τη χρήση γεωπίνακα, ενώ η ομάδα ελέγχου (N=21) ακολούθησε τυπική διδασκαλία. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω προ- και μετα-τεστ γνώσεων, καθώς και μέσω δομημένων συνεντεύξεων. Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν σημαντικά μαθησιακά οφέλη για την πειραματική ομάδα, τόσο σε επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης όσο και σε επίπεδο ενεργού συμμετοχής και εμπλοκής των μαθητών και μαθητριών στη μαθησιακή διαδικασία.

Λέξεις κλειδιά: γεωπίνακας, γεωμετρική σκέψη, πολύγωνα, περίμετρος, εμβαδόν, πρωτοβάθμια εκπαίδευση

Abstract: The present study investigates the instructional use of the geoboard as a pedagogical tool for enhancing fourth-grade students' understanding of polygons, with particular emphasis on recognition, classification, comparison, and construction, as well as on distinguishing between the concepts of area and perimeter. The research involved two fourth-grade classes comprising a total of 44 students. The experimental group (N = 23) was taught polygons through an inquiry-based approach utilizing the geoboard, whereas the control group (N = 21) received conventional instruction. Data were collected through pre- and post-intervention knowledge tests, as well as structured interviews. The findings revealed significant learning gains for the experimental group, both in terms of conceptual understanding and in students' active participation and engagement in the learning process.

Keywords: geoboard, geometric thinking, polygons, perimeter, area, primary education

Εισαγωγή

Η γεωμετρία αποτελεί θεμελιώδες πεδίο των μαθηματικών και διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της χωρικής σκέψης και του λογικού συλλογισμού στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Clements & Sarama, 2011). Παρά τη σπουδαιότητά της, η διδασκαλία της συνοδεύεται από προκλήσεις, καθώς βασικές έννοιες, όπως τα πολύγωνα, η περίμετρος και το εμβαδόν, είναι εγγενώς αφηρημένες (Van Hiele, 1986). Οι μαθητές/ριες συχνά

αναπτύσσουν παρανοήσεις, εστιάζοντας σε στερεοτυπικά οπτικά χαρακτηριστικά και δυσκολευόμενοι/ες να διακρίνουν γραμμικά και επιφανειακά μεγέθη (Fischbein, 1993· Clements & Sarama, 2011).

Σύγχρονες θεωρίες υπογραμμίζουν τη σημασία της ενεργητικής εμπλοκής και των πολλαπλών αναπαραστάσεων για την οικοδόμηση γεωμετρικής κατανόησης (Duval, 2017). Ειδικότερα, η θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης (Van Hiele, 1986) και η διάκριση μεταξύ «εικόνας έννοιας» και «ορισμού έννοιας» (Tall & Vinner, 1981) αναδεικνύουν την ανάγκη διδακτικών πρακτικών που υποστηρίζουν τη μετάβαση από τη χειραπτική εμπειρία στην αφηρημένη σκέψη.

Ο γεωπίνακας, ως χειραπτικό εργαλείο, έχει αναδειχθεί στη διεθνή βιβλιογραφία ως αποτελεσματικό μέσο ενίσχυσης της χωρικής αντίληψης, της διερευνητικής μάθησης και της εννοιολογικής κατανόησης (Peñanueva et al., 2023· Trimurtini et al., 2020). Ωστόσο, η υπάρχουσα έρευνα εστιάζει κυρίως στη γενική του αποτελεσματικότητα, χωρίς να διερευνά επαρκώς πώς οι επιμέρους λειτουργίες του (κατασκευή, μετασχηματισμός, οπτικοποίηση, μέτρηση) σχετίζονται με διαφορετικούς τύπους γεωμετρικών εννοιών και εξειδικευμένους διδακτικούς στόχους. Η απουσία αυτής της διαφοροποιημένης προσέγγισης περιορίζει την αξιοποίησή του. Παράλληλα, στο ελληνικό εκπαιδευτικό πλαίσιο απουσιάζουν συστηματικές εμπειρικές μελέτες που να διερευνούν τη χρήση του υπό αυτό το πρίσμα.

Η παρούσα έρευνα αποσκοπεί στην κάλυψη του κενού αυτού: δεν εξετάζει απλώς αν ο γεωπίνακας συμβάλλει στην κατανόηση βασικών γεωμετρικών εννοιών από μαθητές/ριες Δ' Δημοτικού, αλλά εστιάζει στον εντοπισμό των εξειδικευμένων λειτουργιών του σε διαφορετικές χρήσεις, ώστε να αναδειχθεί πώς αυτές μπορούν να υπηρετήσουν συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους (π.χ. διάκριση περιμέτρου-εμβαδού, κατανόηση ιεραρχικών σχέσεων, μετάβαση από την «εικόνα έννοιας» στον τυπικό ορισμό). Με τον τρόπο αυτό, η μελέτη συμβάλλει σε μια πιο λεπτομερή και διδακτικά αξιοποιήσιμη κατανόηση του ρόλου του γεωπίνακα στη διδασκαλία της γεωμετρίας.

Θεωρητικό πλαίσιο

Η παρούσα έρευνα βασίζεται σε σύγχρονες θεωρίες της γεωμετρικής σκέψης, οι οποίες προσεγγίζουν τη μάθηση της γεωμετρίας ως μια αναπτυξιακή, πολυεπίπεδη και δυναμική διαδικασία. Κοινός άξονας των θεωριών αυτών είναι η θέση ότι η κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών δεν επιτυγχάνεται αποκλειστικά μέσω της λεκτικής διδασκαλίας και των τυπικών ορισμών, αλλά απαιτεί ενεργητική εμπλοκή των μαθητών/ριών, αξιοποίηση χειραπτικών και οπτικών αναπαραστάσεων και σταδιακή μετάβαση από τη συγκεκριμένη εμπειρία στην αφηρημένη μαθηματική σκέψη.

Αναπτυξιακές θεωρίες γεωμετρικής σκέψης

Η θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των van Hiele (1986) αποτελεί βασικό πυλώνα του θεωρητικού πλαισίου της έρευνας. Σύμφωνα με τους van Hiele (1986), διακρίνονται τρία βασικά επίπεδα που αφορούν τη σχολική ηλικία: α) το οπτικό επίπεδο, στο οποίο οι μαθητές/ριες αναγνωρίζουν τα σχήματα με βάση τη συνολική τους εμφάνιση, β) το

περιγραφικό επίπεδο, όπου αρχίζουν να εντοπίζουν και να χρησιμοποιούν ιδιότητες για την περιγραφή και τον ορισμό των σχημάτων, και γ) το άτυπα επαγωγικό επίπεδο, στο οποίο οι μαθητές/ριες μπορούν να συνδέουν ιδιότητες μεταξύ τους και να προβαίνουν σε στοιχειώδη λογική συλλογιστική. Κεντρικό στοιχείο της θεωρίας των van Hiele αποτελεί η θέση ότι η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο δεν εξαρτάται από την ηλικία των μαθητών/ριών, αλλά από την ποιότητα και τη δομή της διδασκαλίας. Διδακτικές παρεμβάσεις που αξιοποιούν χειραπτικά υλικά, μπορούν να λειτουργήσουν υποστηρικτικά στη μετάβαση των μαθητών/ριών προς ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης.

Σε μια συμπληρωματική γνωστική προσέγγιση, οι Tall και Vinner (1981) εισάγουν τη διάκριση μεταξύ της «εικόνας έννοιας» (concept image) και του «ορισμού έννοιας» (concept definition). Η εικόνα έννοιας αναφέρεται στο σύνολο των προσωπικών, εμπειρικών και συχνά αποσπασματικών αναπαραστάσεων που διαθέτει ο/η μαθητής/ρια για μια γεωμετρική έννοια, ενώ ο ορισμός έννοιας αντιστοιχεί στον τυπικό, μαθηματικά αποδεκτό ορισμό. Στο πλαίσιο της γεωμετρίας, τα παιδιά τείνουν να αναπτύσσουν αρχικά ισχυρές διαισθητικές εικόνες των σχημάτων, οι οποίες συχνά αποκλίνουν από τους τυπικούς ορισμούς και οδηγούν σε παρανοήσεις. Η θεωρία αυτή αναδεικνύει την ανάγκη για διδακτικές πρακτικές που αξιοποιούν πολυτροπικές αναπαραστάσεις (γλωσσικές, συμβολικές, αναπαραστατικές, κινητικές, ψηφιακές κλπ.), ώστε να γεφυρωθεί το χάσμα ανάμεσα στη βιωματική εμπλοκή και την τυπική μαθηματική γνώση.

Η θεωρία των Clements και Battista (1992) επιχειρεί να συνθέσει και να επεκτείνει προηγούμενες προσεγγίσεις, προτείνοντας ένα αναπτυξιακό μοντέλο τεσσάρων σταδίων: α) το στάδιο της προ-αναγνώρισης, όπου τα παιδιά εστιάζουν σε μη ουσιώδη οπτικά χαρακτηριστικά, β) το στάδιο της ενστικτώδους κατανόησης, στο οποίο αναγνωρίζονται βασικές ιδιότητες, γ) το στάδιο της αναλυτικής αντίληψης, όπου οι ιδιότητες συνδέονται με ταξινομήσεις σχημάτων, και δ) το στάδιο της συστηματικής σκέψης, το οποίο χαρακτηρίζεται από την εφαρμογή κανόνων, ορισμών και σχέσεων. Ιδιαίτερη σημασία αποδίδεται στη χρήση χειραπτικού υλικού και ψηφιακών εργαλείων, τα οποία ενισχύουν τη χωρική συλλογιστική και υποστηρίζουν τη σταδιακή μετάβαση προς την αφηρημένη σκέψη.

Στο ίδιο εξελικτικό πνεύμα, ο Fox (2000) προτείνει ένα μοντέλο τριών σταδίων ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Στο πρώτο στάδιο, οι μαθητές/ριες ταξινομούν τα σχήματα αποκλειστικά βάσει της εξωτερικής τους ομοιότητας, γεγονός που οδηγεί σε εσφαλμένες γενικεύσεις (π.χ. «ένα μακρύ ορθογώνιο δεν είναι ορθογώνιο επειδή δεν μοιάζει με πόρτα»). Στο δεύτερο στάδιο, αρχίζουν να αναγνωρίζουν μεμονωμένες ιδιότητες, όπως ο αριθμός των πλευρών ή των γωνιών. Στο τρίτο στάδιο, οι μαθητές/ριες κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων και μπορούν να διαμορφώσουν ιεραρχικές ταξινομήσεις σχημάτων (π.χ. «κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος, αλλά όχι κάθε ρόμβος τετράγωνο»).

Σε μια πιο σύγχρονη σημειωτική και γνωστική θεώρηση, ο Duval (2017) εστιάζει στον καθοριστικό ρόλο των σημειωτικών αναπαραστάσεων στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Σύμφωνα με τον Duval, η ουσιαστική κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών προϋποθέτει την ικανότητα των μαθητών/ριών να μεταβαίνουν και να συντονίζουν

διαφορετικά σημειωτικά συστήματα, όπως τα σχήματα, τη γλώσσα και τα σύμβολα. Ο ίδιος διακρίνει τρεις θεμελιώδεις γνωστικές διεργασίες: α) την αναγνώριση μορφών, β) τον διαχωρισμό και την ανάδειξη κρίσιμων ιδιοτήτων, και γ) τη συστηματική αναπαράσταση και επεξεργασία των σχημάτων μέσω εργαλείων και συμβολικών συστημάτων. Η θεωρία του Duval αναδεικνύει τη σημασία διδακτικών μέσων που διευκολύνουν τη μετάβαση από τη συγκεκριμένη εμπειρία στην αφηρημένη μαθηματική αναπαράσταση.

Συνοψίζοντας, οι παραπάνω θεωρητικές προσεγγίσεις συγκλίνουν στην άποψη ότι η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης αποτελεί μια δυναμική, πολυεπίπεδη και εξελικτική διαδικασία. Η αποτελεσματική διδασκαλία της γεωμετρίας προϋποθέτει την αξιοποίηση πολυτροπικών αναπαραστάσεων (Duval, 2017), τη σύνδεση της προσωπικής εμπειρίας των μαθητών/ριών με τους τυπικούς μαθηματικούς ορισμούς (Tall & Vinner, 1981) και τη δημιουργία δομημένων μαθησιακών εμπειριών που υποστηρίζουν τη μετάβαση από τη συγκεκριμένη στη αφηρημένη σκέψη (Clements & Sarama, 1999· Fox, 2000· van Hiele, 1986).

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης

Η κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών —μεταξύ των οποίων τα πολύγωνα, το εμβαδόν και η περίμετρος— παρουσιάζει σημαντικές προκλήσεις για τους/ις μαθητές/ριες, καθιστώντας τον ρόλο των αναπαραστάσεων ιδιαίτερα κρίσιμο (Vaitsidi & Skoumpourdi, 2022). Οι αναπαραστάσεις λειτουργούν ως διαμεσολαβητικά εργαλεία ανάμεσα στην εμπειρική αντίληψη των μαθητών/ριών και στις τυπικές μαθηματικές έννοιες, υποστηρίζοντας τη σταδιακή οικοδόμηση βαθύτερης εννοιολογικής κατανόησης και τη διερεύνηση γεωμετρικών σχέσεων.

Πλήθος ερευνών έχει αναδείξει ότι πολλές από τις δυσκολίες των μαθητών/ριών στην κατανόηση των ιεραρχικών σχέσεων μεταξύ των σχημάτων (Fujita & Jones, 2007), καθώς και στον διαχωρισμό των χαρακτηριστικών που ορίζουν ή δεν ορίζουν ένα σχήμα (Monaghan, 2000), συνδέονται άμεσα με περιορισμούς στον τρόπο χρήσης και ερμηνείας των αναπαραστάσεων. Η υπερβολική εξάρτηση από στερεοτυπικές οπτικές αναπαραστάσεις, για παράδειγμα, μπορεί να οδηγήσει σε αποσπασματική ή λανθασμένη κατανόηση της φύσης των γεωμετρικών εννοιών (Bernabeu et al., 2021). Παράλληλα, η απουσία πολυτροπικών αναπαραστάσεων περιορίζει τη δυνατότητα των μαθητών/ριών να αντιληφθούν μεταβατικές και ιεραρχικές σχέσεις μεταξύ εννοιών (Erez & Yerushalmy, 2006).

Αναφορικά με τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου, η βιβλιογραφία επισημαίνει ότι η σύγχυση μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών μεγεθών ενισχύεται όταν δεν αξιοποιούνται κατάλληλες αναπαραστάσεις που να αναδεικνύουν την ποιοτική διαφοροποίησή τους (Clements & Sarama, 2011). Η έλλειψη ουσιαστικών οπτικοποιήσεων και η μονομερής έμφαση σε αλγοριθμικές διαδικασίες συχνά οδηγούν στην παγίωση παρανοήσεων, όπως η εσφαλμένη αντίληψη ότι το εμβαδόν μεταβάλλεται γραμμικά ως προς τις διαστάσεις ενός σχήματος.

Οι θεωρητικές προσεγγίσεις (Clements & Sarama, 1999· Duval, 2017· Fox, 2000· van Hiele, 1986) συγκλίνουν στην άποψη ότι η συνειδητή επιλογή και ο συνδυασμός κατάλληλων αναπαραστάσεων μπορούν να υποστηρίξουν τη μετάβαση των μαθητών/ριών από το

συγκεκριμένο στο αφηρημένο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Η χρήση πολυτροπικών αναπαραστάσεων (γλωσσικών, συμβολικών, απεικονιστικών, κινητικών, ψηφιακών κ.λπ.) για τη διερεύνηση ιδιοτήτων και οι δραστηριότητες μετάβασης μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας θεωρούνται κρίσιμες για την ανάπτυξη εννοιολογικών συνδέσεων. Η αποτελεσματική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της γεωμετρίας μπορεί να συμβάλει στη μείωση παρανοήσεων σχετικά με τις ιεραρχικές σχέσεις των σχημάτων (Erez & Yerushalmy, 2006), στη σαφέστερη διάκριση μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου (Clements & Sarama, 2011) και στην ενίσχυση της αφηρημένης γεωμετρικής σκέψης (van Hiele, 1986).

Ο ρόλος του γεωπίνακα στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης

Σύγχρονες μελέτες συνδέουν τη χρήση χειραπτικού υλικού με αυξημένη μαθητική εμπλοκή, ενεργητική μάθηση και βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση (Bernabeu et al., 2021· Rahmiati, 2016· Ubuz & Erdoğan, 2019). Ο γεωπίνακας επιτρέπει στους/ις μαθητές/ριες να διερευνούν ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων από την προσχολική εκπαίδευση (Σκουμπουρδή, 2021) έως και να αναπτύσσουν δεξιότητες ανάλυσης και γενίκευσης σε μεγαλύτερες βαθμίδες (Jones, 2002).

Στην προσχολική εκπαίδευση, ενισχύει την ενσώματη μάθηση και τη χωρική διερεύνηση, παρά τις δυσκολίες των νηπίων στην ακριβή κατασκευή (Σκουμπουρδή & Κωσσοπούλου, 2011). Έχει επίσης αναδειχθεί η συμβολή του στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων (Zaida et al., 2018), καθώς και ο ψυχαγωγικός και κοινωνικός του χαρακτήρας, που ενισχύει τη μαθησιακή δέσμευση (Σκουμπουρδή & Κτιστάκη, 2019).

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ο γεωπίνακας υποστηρίζει τη χωρική αντίληψη και τη γεωμετρική κατανόηση, ιδιαίτερα όταν εντάσσεται σε πλαίσια βασισμένα στη θεωρία van Hiele. Διευκολύνει τη μετάβαση από το οπτικό στο περιγραφικό επίπεδο (Matengu & Schäfer, 2022) και συμβάλλει στην κατανόηση ιδιοτήτων και σχέσεων τετραπλεύρων (Trimurtini et al., 2020). Προάγει επίσης τη συνεργατική μάθηση και την εννοιολογική κατανόηση θεωρημάτων (Sibiya & Mudaly, 2018), ενώ υποστηρίζει τη μετάβαση από τη συγκεκριμένη στην αφηρημένη σκέψη (Peñanueva et al., 2023).

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ο γεωπίνακας έχει συνδεθεί με ενίσχυση της αυτοαποτελεσματικότητας (Olajide et al., 2020), βελτίωση της συγκρότησης γεωμετρικών εννοιών (Okoye & Onyeka, 2022) και ανάπτυξη δεξιοτήτων ανάλυσης και απόδειξης (Sibiya, 2020). Σύμφωνα με τη θεωρία της πολυτροπικής μάθησης, μειώνει τη γνωστική επιβάρυνση, επιτρέποντας εστίαση σε βασικές γεωμετρικές δομές και σχέσεις (Saidu & Bunyamin, 2016).

Συνοψίζοντας, η βιβλιογραφία συγκλίνει ότι ο γεωπίνακας αποτελεί ισχυρό διδακτικό εργαλείο για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης: διευκολύνει τη μετάβαση από τη συγκεκριμένη στην αφηρημένη γνώση, ενισχύει τη χωρική αντίληψη και την κατανόηση εννοιών (Clements & Sarama, 2011), προάγει τη συνεργατική μάθηση και την αυτοαποτελεσματικότητα (Olajide et al., 2020) και μειώνει τη γνωστική επιβάρυνση (Saidu &

Bunyamin, 2016). Η παιδαγωγική του αποτελεσματικότητας, ωστόσο, εξαρτάται από τον διδακτικό σχεδιασμό και την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού (Rahmiati, 2016).

Ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα μελέτη επιδιώκει να διερευνήσει τη συμβολή του γεωπίνακα στην κατανόηση βασικών γεωμετρικών εννοιών από μαθητές/ριες Δ' Δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα διαμορφώνονται ως εξής:

- 1) Σε ποιο βαθμό η χρήση του γεωπίνακα βελτιώνει την ικανότητά τους για αναγνώριση, ταξινόμηση, σύγκριση και κατασκευή πολυγώνων;
- 2) Κατά πόσο υποστηρίζει την κατανόησή τους για τις ιδιότητες και τις ιεραρχικές σχέσεις μεταξύ τετραπλεύρων;
- 3) Σε ποιον βαθμό συμβάλλει στην ικανότητά τους για σαφέστερη διάκριση μεταξύ των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού;
- 4) Ποιες είναι οι απόψεις τους σχετικά με τη συμβολή του γεωπίνακα στη διαδικασία μάθησης των παραπάνω εννοιών;

Μέθοδος

Ερευνητικός σχεδιασμός

Η έρευνα υιοθετεί ημιπειραματικό σχεδιασμό με ομάδα ελέγχου (ΟΕ) και πειραματική ομάδα (ΠΟ), εντασσόμενη στο πλαίσιο της μικτής μεθοδολογικής προσέγγισης, καθώς συνδυάζει ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα. Ο ημιπειραματικός σχεδιασμός επιλέχθηκε διότι η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε φυσικές συνθήκες σχολικής τάξης, χωρίς δυνατότητα τυχαίας κατανομής των μαθητών/ριών, επιτρέποντας ωστόσο τη σύγκριση δύο διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων. Η αποτίμηση της επίδρασης της διδακτικής παρέμβασης βασίστηκε σε σχεδιασμό προ- και μετα-διδακτικής αξιολόγησης.

Δείγμα

Στην έρευνα συμμετείχαν 44 μαθητές/ριες Δ' Δημοτικού από δύο τμήματα διαφορετικών σχολείων της ίδιας γεωγραφικής περιοχής. Το πρώτο τμήμα (ΟΕ) αποτελούνταν από 21 παιδιά (10 αγόρια, 11 κορίτσια) και το δεύτερο (ΠΟ) από 23 (14 αγόρια, 9 κορίτσια). Η επιλογή έγινε με δειγματοληψία ευκολίας, γεγονός που συνιστά περιορισμό, ωστόσο εξασφαλίζει ομοιομορφία ως προς το κοινωνικοοικονομικό και πολιτισμικό υπόβαθρο, ενισχύοντας τη συγκρισιμότητα των ομάδων.

Η επιλογή της Δ' τάξης τεκμηριώνεται τόσο από το περιεχόμενο του Προγράμματος Σπουδών όσο και από αναπτυξιακούς λόγους. Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003), στη Δ' τάξη εισάγονται συστηματικά τα πολύγωνα, οι ιδιότητες και οι σχέσεις μεταξύ τετραπλεύρων, καθώς και οι έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού, μέσα από δραστηριότητες διερεύνησης και κατασκευής. Αναπτυξιακά, οι μαθητές/ριες αυτής της ηλικίας βρίσκονται σε μεταβατικό στάδιο της γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με τα επίπεδα

van Hiele, μετακινούμενοι από την ολιστική αναγνώριση σχημάτων προς την ανάλυση των ιδιοτήτων τους, γεγονός που καθιστά αναγκαία την αξιοποίηση κατάλληλων διδακτικών μέσων όπως ο γεωπίνακας.

Εργαλεία συλλογής δεδομένων

Διαγνωστικό δοκίμιο/τεστ γεωμετρικών γνώσεων (προ & μετά-τεστ)

Το τεστ (βλ. Παράρτημα) περιλάμβανε δεκατέσσερα έργα, ο σχεδιασμός των οποίων βασίστηκε στους διδακτικούς στόχους του ΑΠΣ (2003), στα σχολικά εγχειρίδια και στη διεθνή βιβλιογραφία (Bernabeu, et al., 2021· Clements & Sarama, 2011· Erez & Yerushalmy, 2006· Fujita & Jones, 2007· Ubuz & Erdoğan, 2019;), διασφαλίζοντας εγκυρότητα περιεχομένου. Τα έργα οργανώθηκαν σε τέσσερις θεματικές ενότητες: (1) αναγνώριση, ταξινόμηση και σύγκριση πολυγώνων (έργα 1, 2, 3, 6, 8), (2) κατασκευή πολυγώνων (έργο 4), (3) ιδιότητες τετραπλεύρων και αναγνώριση ειδικών κατηγοριών (έργα 7, 11, 12), (4) σύγκριση περιμέτρων και εμβαδών (έργα 5, 9, 10, 13, 14). Σε όλα τα έργα ζητούταν αιτιολόγηση. Κάθε απάντηση χαρακτηρίστηκε ως «Σωστή», «Λάθος» ή «Δεν Απαντήθηκε». Ο χρόνος συμπλήρωσης ήταν 30 λεπτά.

Ερωτηματολόγιο συνεντεύξεων

Στην ΠΟ πραγματοποιήθηκαν δομημένες συνεντεύξεις διάρκειας περίπου 10 λεπτών ανά μαθητή/ρια, με ανοιχτού τύπου ερωτήσεις που διερευνούσαν τη συμβολή του γεωπίνακα στην κατανόηση των εννοιών, τις δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν και τις προτιμήσεις των μαθητών/ριών. Οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν, απομαγνητοφωνήθηκαν και αναλύθηκαν με θεματική ανάλυση.

Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η διαδικασία περιλάμβανε τρεις φάσεις. Αρχικά, χορηγήθηκε και στις δύο ομάδες το προ-τεστ για την αποτύπωση της προϋπάρχουσας γνώσης. Ακολούθησαν οι διδακτικές παρεμβάσεις διάρκειας δέκα διδακτικών ωρών (πέντε δίωρα σχέδια μαθήματος) η κάθε μία. Μετά την ολοκλήρωση των παρεμβάσεων, χορηγήθηκε εκ νέου το ίδιο τεστ (μετά-τεστ) και επιπλέον στην ΠΟ πραγματοποιήθηκαν οι συνεντεύξεις.

Διδακτικές παρεμβάσεις

Οι διδακτικές παρεμβάσεις βασίστηκαν στο εγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Δ' Δημοτικού (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων – Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2008), το οποίο ακολουθεί τις κατευθύνσεις του ΑΠΣ (2003). Οι ενότητες που καλύφθηκαν ήταν: 1) Μαθαίνω για τα πολύγωνα, 2) Διακρίνω το περίγραμμα από την επιφάνεια, 3) Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν, 4) Μαθαίνω για τα παραλληλόγραμμα, 5) Υπολογίζω περιμέτρους και εμβαδά. Το περιεχόμενο και ο διδακτικός χρόνος ήταν κοινά και για τις δύο ομάδες.

Ομάδα ελέγχου

Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε από τη δασκάλα της τάξης, ακολουθώντας παραδοσιακές πρακτικές με έμφαση στην αλγοριθμική εφαρμογή τύπων και την ατομική εργασία. Αξιοποιήθηκαν οι δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου και οι προτεινόμενες ασκήσεις. Σημειώνεται ότι στην ομάδα ελέγχου δεν υλοποιήθηκαν όλες οι προτεινόμενες χειραπτικές δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου. Συγκεκριμένα, κατά τη διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού (Κεφάλαιο 30), δεν αξιοποιήθηκε το χειραπτικό υλικό του παραρτήματος που αφορά δραστηριότητες επικάλυψης μονάδων μέτρησης. Η επιλογή αυτή της εκπαιδευτικού βασίστηκε στην εκτίμηση ότι η ακρίβεια στην κοπή και τοποθέτηση των μονάδων από τους/ις μαθητές/ριες ενδέχεται να επηρεάσει την κατανόηση της έννοιας, οδηγώντας σε πιθανές παρανοήσεις. Η απόφαση αυτή αφορά αποκλειστικά την ομάδα ελέγχου και λαμβάνεται υπόψη στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Πειραματική ομάδα

Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια (η οποία ήταν η εκπαιδευτικός του τμήματος) και εντάχθηκε σε μοντέλο διερευνητικής μάθησης επτά σταδίων (Σκουμπουρδή, 2023): (1) Θέμα/Προβληματισμός, (2) Εξερεύνηση, (3) Παρουσίαση, (4) Σύνθεση/Σύνδεση, (5) Γενίκευση/Μαθηματικοποίηση, (6) Μετάφραση, (7) Επέκταση. Ο γεωπίνακας χρησιμοποιήθηκε ως κύριο χειραπτικό εργαλείο. Οι μαθητές/ριες εργάζονταν σε ομάδες, κατασκευάζοντας και μετασχηματίζοντας σχήματα, διερευνώντας ιδιότητες και διατυπώνοντας υποθέσεις. Ο ρόλος της εκπαιδευτικού ήταν καθοδηγητικός και συντονιστικός.

Αντιστοίχιση μαθησιακών έργων μεταξύ των ομάδων

Για να διασφαλιστεί ότι τυχόν διαφορές στα αποτελέσματα οφείλονται στο εργαλείο και όχι στο περιεχόμενο, τα έργα σχεδιάστηκαν ώστε να είναι εννοιολογικά αντιστοιχισμένα. Ενδεικτικά: Πολύγωνα: Οι μαθητές/ριες της ΟΕ αναγνώριζαν και ταξινομούσαν πολύγωνα μέσα από εικόνες του σχολικού εγχειριδίου. Οι μαθητές/ριες της ΠΟ κατασκεύαζαν τα ίδια σχήματα στον γεωπίνακα, μετρώντας πλευρές και κορυφές και συζητώντας τα χαρακτηριστικά τους. Τετράπλευρα: Στην ΟΕ οι μαθητές/ριες μελέτησαν ιδιότητες μέσα από έτοιμα σχήματα και λεκτικές περιγραφές. Στην ΠΟ πειραματίστηκαν με τη μεταβολή σχημάτων στον γεωπίνακα (π.χ. μετασχηματισμός ορθογωνίου σε τετράγωνο) για να ανακαλύψουν δυναμικά τις σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών. Περίμετρος και εμβαδόν: Στην ΟΕ οι μαθητές/ριες υπολόγισαν τιμές από δοσμένα σχήματα εφαρμόζοντας τύπους. Στην ΠΟ κατασκεύασαν διαφορετικά σχήματα ίσης περιμέτρου ή εμβαδού στον γεωπίνακα, μετρώντας μονάδες μήκους και επιφάνειας, και στη συνέχεια οδηγήθηκαν στους τύπους. Με τον τρόπο αυτό, οι δραστηριότητες ήταν εννοιολογικά παράλληλες, ενώ η εμπλοκή των μαθητών/ριών διέφερε ως προς το εργαλείο και τον βαθμό διερεύνησης.

Σύνδεση διδακτικού σχεδιασμού με το θεωρητικό πλαίσιο

Ο σχεδιασμός της παρέμβασης και των εργαλείων αξιοποίησε συστηματικά τρεις θεωρητικές παραδοχές:

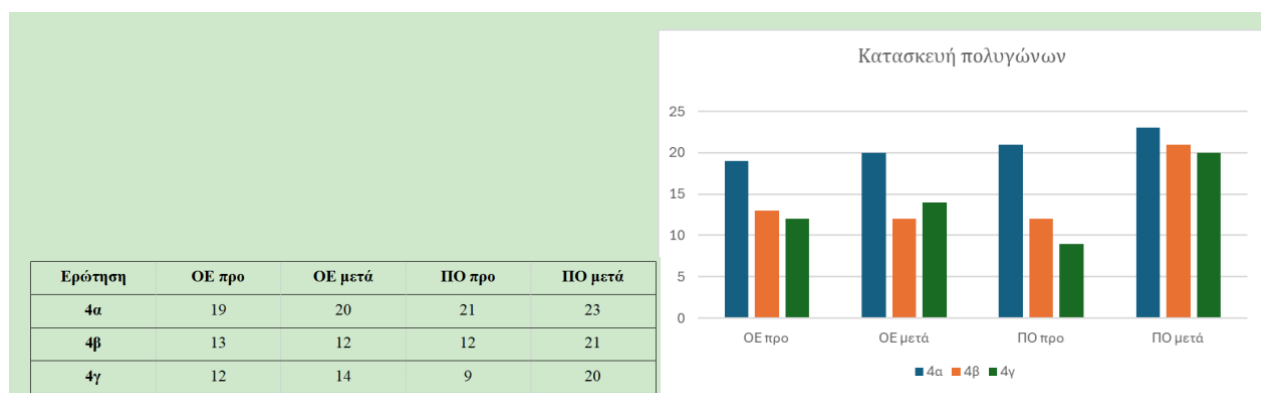
1. *Θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης (van Hiele).* Οι δραστηριότητες οργανώθηκαν ώστε να υποστηρίξουν τη μετάβαση από την οπτική αναγνώριση (επίπεδο 0) στην ανάλυση ιδιοτήτων (επίπεδο 1) και στη συνέχεια στην ταξινόμηση και αιτιολόγηση (επίπεδο 2). Η πορεία αυτή αποτυπώνεται τόσο στη διαδοχή των δραστηριοτήτων όσο και στη δομή του τεστ, που περιλαμβάνει έργα αναγνώρισης, κατασκευής, σύγκρισης και αξιολόγησης δηλώσεων.
2. *Θεωρία σημειωτικών αναπαραστάσεων (Duvall).* Δόθηκε έμφαση στη μεταξύ τους μετάβαση. Στην ΠΟ, ο γεωπίνακας λειτούργησε ως συνδετικός κρίκος μεταξύ χειραπτικής, οπτικής και διαγραμματικής αναπαράστασης. Οι μαθητές/ριες κατασκεύαζαν σχήματα, τα σχεδίαζαν σε πλέγμα και περιέγραφαν προφορικά τις ιδιότητές τους. Το τεστ περιλάμβανε έργα που απαιτούσαν μετασχηματισμούς αναπαραστάσεων (π.χ. από λεκτική περιγραφή σε αναγνώριση σχήματος, από σχήμα σε κατασκευή σε πλέγμα).
3. *Διερευνητική μάθηση.* Η ΠΟ ακολούθησε το μοντέλο επτά σταδίων, το οποίο ενθαρρύνει τη διατύπωση υποθέσεων, τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό. Ο γεωπίνακας, ως εργαλείο που επιτρέπει γρήγορους μετασχηματισμούς, υποστήριξε τον πειραματισμό και την επαλήθευση υποθέσεων, στοιχεία που αποτελούν βασικές αρχές της διερευνητικής προσέγγισης.

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της ομάδας ελέγχου (ΟΕ, N=21) και της πειραματικής ομάδας (ΠΟ, N=23), ανά ερώτημα, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (προ και μετα-τεστ), παρουσιάζονται στους Πίνακες 1, 2, 3 και 4 και στα Γραφήματα 1, 2, 3 και 4, και αναλύονται στη συνέχεια ανά θεματική ενότητα. Τα ποσοτικά δεδομένα συνοδεύονται από ενδεικτικές αυθεντικές φράσεις των μαθητών/ριών, με στόχο την πληρέστερη ερμηνεία των ευρημάτων.

Αναγνώριση, ταξινόμηση και σύγκριση πολυγώνων (Έργα 1, 2, 3, 6, 8)

Στο Γράφημα 1 συνοψίζονται οι απαντήσεις Προ και Μετά τεστ των ΟΕ και ΠΟ στα Έργα 1, 2, 3, 6 και 8.



Γράφημα 1: Απαντήσεις Προ και Μετά τεστ ΟΕ και ΠΟ στα Έργα 1, 2, 3, 6, 8

Στο Έργο 1, πριν τη διδασκαλία δεν καταγράφηκε καμία σωστή απάντηση σε καμία ομάδα (0/21, 0/23). Μετά τη διδασκαλία οι σωστές απαντήσεις παρέμειναν περιορισμένες (2/21 και 1/23). Τα λάθη της ομάδας ελέγχου αφορούσαν ένα ευρύ φάσμα σχημάτων, όπως αυτά με καμπύλες, ανοιχτές γραμμές ή πολλαπλές ακμές σε κοινή κορυφή. Αντίθετα, οι μαθητές/ριες της πειραματικής ομάδας δυσκολεύτηκαν αποκλειστικά με το τελευταίο είδος σχημάτων (πολλαπλές ακμές σε κοινή κορυφή).

Στο Έργο 2, οι σωστές απαντήσεις της ομάδας ελέγχου αυξήθηκαν από 8 σε 12, ενώ της πειραματικής από 11 σε 22. Οι λανθασμένες επιλογές συνοδεύονταν από γενικές κατηγοριοποιήσεις, όπως «όλα είναι τετράπλευρα».

Στο Έργο 3, η ομάδα ελέγχου παρουσίασε μέτριες μεταβολές (3α: 6→15, 3β: 7→8, 3γ: 19→19, 3δ: 12→10), με τα λάθη να σχετίζονται κυρίως με την επιλογή σχημάτων με καμπύλες πλευρές, την προσκόλληση στην οπτική μορφή έναντι της εφαρμογής των αναλυτικών κριτηρίων (ευθείες πλευρές) για τον ορισμό των πολυγώνων. Η πειραματική ομάδα παρουσίασε σημαντική αύξηση των σωστών απαντήσεων (3α:12→21, 3β:2→16, 3γ:12→21, 3δ:12→19). Η διδασκαλία με τη χρήση γεωπίνακα ήταν πολύ πιο αποτελεσματική στη μείωση αυτών των λαθών, υποστηρίζοντας τη δημιουργία πιο σωστών «εικόνων-εννοιών».

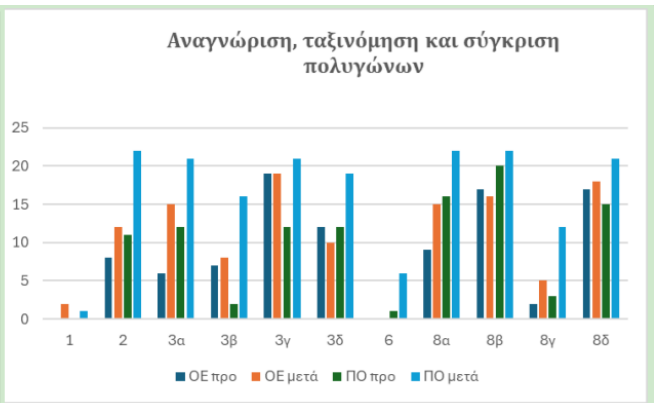
Στο Έργο 6, οι σωστές απαντήσεις της ομάδας ελέγχου παρέμειναν μηδενικές (0→0), ενώ της πειραματικής αυξήθηκαν (1→6). Οι μαθητές/ριες συχνά ταύτιζαν το περιστραμμένο τετράγωνο με ρόμβο. Αιτιολογήσεις μαθητών/ριών της ΠΟ μετά τη διδασκαλία περιλάμβαναν: «Το 4 (ρόμβος) γιατί έχει 4 γωνίες και 4 πλευρές και δεν έχει καθόλου ορθές γωνίες», «Το 4 γιατί είναι όμοια δηλαδή έχουν 4 πλευρές, 4 γωνίες και έχουν 4 ορθές γωνίες». Φαίνεται ότι τόσο πριν όσο και μετά τη διδασκαλία, η οπτική μορφή κυριαρχεί έναντι της εννοιολογικής ανάλυσης. Παρότι οι αιτιολογήσεις της πειραματικής ομάδας έγιναν πιο λεπτομερείς και εστίασαν σε ιδιότητες (πλευρές, γωνίες), η οπτική σύγχυση οδηγεί σε συστηματικά λάθη: είτε στην αδυναμία διατήρησης των ιδιοτήτων υπό περιστροφή, είτε στην εσφαλμένη ανάθεση ιδιοτήτων από το ένα σχήμα στο άλλο.

Στο Έργο 8, η ομάδα ελέγχου παρουσίασε μικρές αυξήσεις 8α: 9→15, 8β:17→16, 8γ: 2→5, 8δ: 17→18 ενώ η πειραματική μεγαλύτερες 8α: 16→22, 8β:20→22, 8γ: 3→12, 8δ:15→21). Μετά τη διδασκαλία οι μαθητές/ριες της πειραματικής ομάδας αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους με χρήση γεωμετρικών ιδιοτήτων (με αναφορές σε πλευρές και γωνίες).

Κατασκευή πολυγώνων (Έργο 4)

Στο Γράφημα 2 συνοψίζονται οι απαντήσεις Προ και Μετά τεστ των ΟΕ και ΠΟ στο Έργο 4.

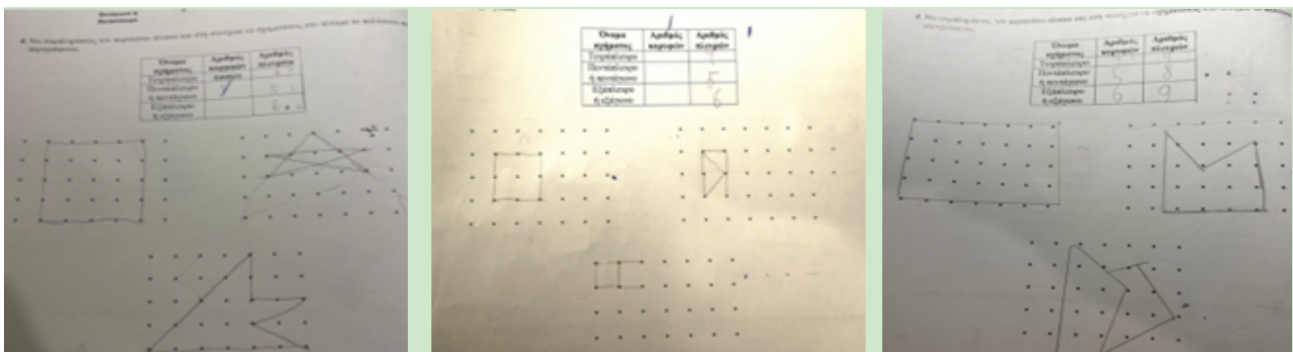
Ερώτηση	ΟΕ προ	ΟΕ μετά	ΠΟ προ	ΠΟ μετά
1	0	2	0	1
2	8	12	11	22
3α	6	15	12	21
3β	7	8	2	16
3γ	19	19	12	21
3δ	12	10	12	19
6	0	0	1	6
8α	9	15	16	22
8β	17	16	20	22
8γ	2	5	3	12
8δ	17	18	15	21



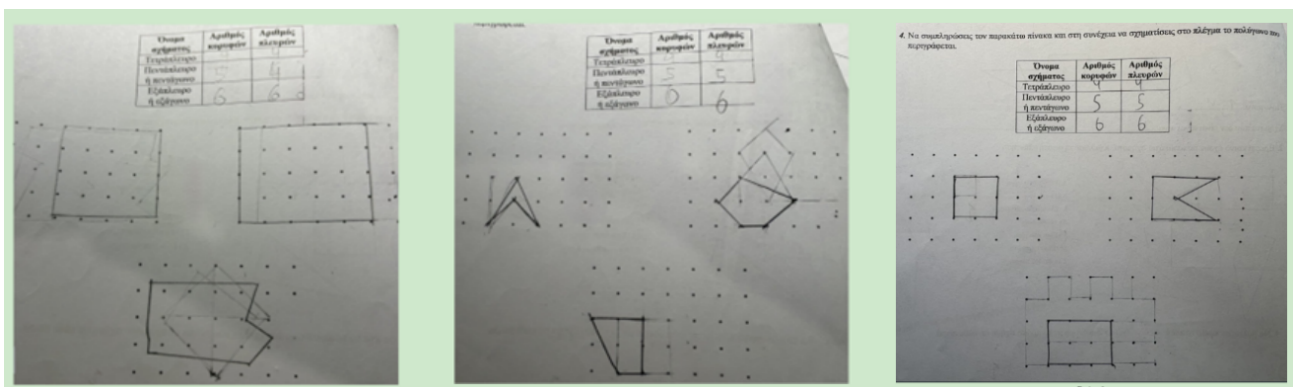
Γράφημα 2: Απαντήσεις Προ και Μετά τεστ ΟΕ και ΠΟ στο Έργο 4

Στην ΟΕ οι σωστές απαντήσεις μεταβλήθηκαν οριακά στο τετράπλευρο 4α (19→20) και στο εξάπλευρο 4γ (12→14), ενώ στο πεντάπλευρο 4β μειώθηκαν ελάχιστα (13→12) (βλ. Γράφημα 2).

Οι κατασκευές πολυγώνων από τους/ις μαθητές/ριες της ΟΕ περιείχαν κάποια από τα συχνά σφάλματα, όπως κατασκευή μη κλειστών σχημάτων και ασυνέπεια μεταξύ του σχεδιασμένου σχήματος και του δηλωθέντος αριθμού πλευρών ή/και γωνιών ακόμα και μετά τη διδασκαλία (Εικόνες 1-3).



Εικόνες 1-3: Ενδεικτικές κατασκευές πολυγώνων από τους/ις μαθητές/ριες της ΟΕ



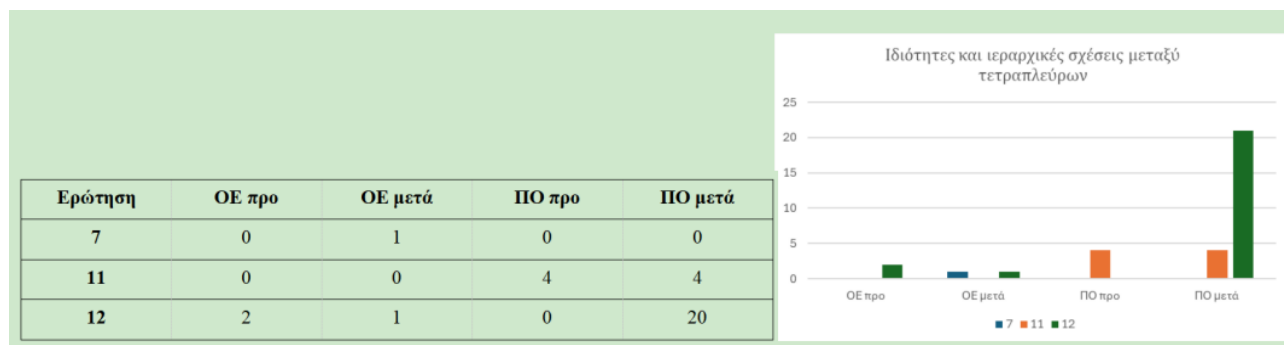
Εικόνες 4-6: Ενδεικτικές κατασκευές πολυγώνων από τους/ις μαθητές/ριες της ΠΟ

Στην ΠΟ καταγράφηκε σημαντική βελτίωση για το τετράπλευρο 4α (21→23), για το πεντάπλευρο 4β (12→21) και για το εξάπλευρο 4γ (9→20). Οι μαθητές/ριες παρήγαγαν

κλειστά σχήματα με ακριβέστερη αντιστοίχιση πλευρών και κορυφών. Και οι κατασκευές πολυγώνων από τους/ις μαθητές/ριες της ΠΟ περιείχαν κάποια από τα συχνά σφάλματα, όπως μη ορθή αντιστοίχιση πλευρών και κορυφών στο κατασκευασμένο πολύγωνο ακόμα και μετά τη διδασκαλία (Εικόνες 4-6).

Ιδιότητες και ιεραρχικές σχέσεις μεταξύ τετραπλεύρων (έργα 7, 11, 12)

Στο Γράφημα 3 συνοψίζονται οι απαντήσεις Προ και Μετά τεστ των ΟΕ και ΠΟ στα Έργα 7, 11 και 12.



Γράφημα 3: Απαντήσεις Προ και Μετά τεστ ΟΕ και ΠΟ στα Έργα 7, 11 και 12

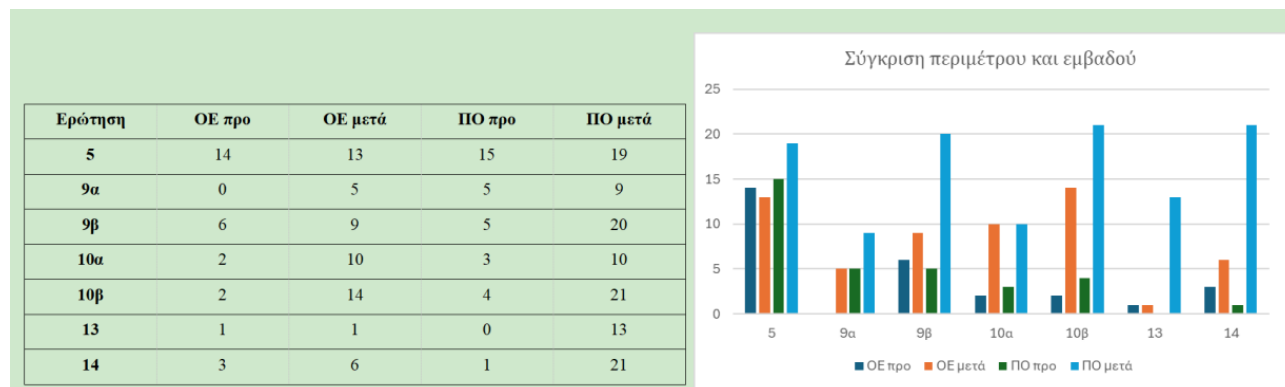
Στο Έργο 7, οι σωστές απαντήσεις παρέμειναν ιδιαίτερα χαμηλές και στις δύο ομάδες (0→1 στην ομάδα ελέγχου, 0→0 στην πειραματική). Συχνά χαρακτηρίζονταν ως ορθογώνια παραλληλόγραμμα σχήματα χωρίς ορθές γωνίες. Ωστόσο στην πειραματική ομάδα, η λογική των λανθασμένων απαντήσεων άλλαξε σημαντικά, αποκαλύπτοντας μια μερική πρόοδο. Σύμφωνα με τα δεδομένα, μετά τη διδασκαλία η πλειοψηφία των μαθητών/ριών δεν θεώρησε τα πλάγια παραλληλόγραμμα ως ορθογώνια, ενώ αρκετοί (17/23) αναγνώρισαν το ορθογώνιο με αριθμό 2 (τετράγωνο με διάταξη ρόμβου) και το ορθογώνιο με αριθμό 7 (μικρό τετράγωνο).

Στο Έργο 11 δεν καταγράφηκε καμία σωστή απάντηση στην ομάδα ελέγχου και στα δύο τεστ, ενώ στην πειραματική, οι σωστές απαντήσεις, παρέμειναν σταθερές (4→4). Οι μαθητές/ριες αιτιολογούσαν με βάση τον αριθμό πλευρών ή την οπτική μορφή. Ενδεικτικά παραδείγματα απαντήσεων μαθητών/ριών της ΟΕ μετά τη διδασκαλία: «Σωστή γιατί το τετράγωνο έχει 4 γωνίες και ο ρόμβος 4», «Είναι λάθος γιατί το τετράγωνο έχει 4 ορθές γωνίες ενώ ο ρόμβος δεν έχει ορθές γωνίες». Παράδειγμα απάντησης μαθητή/ριας της ΠΟ: «Είναι σωστή γιατί άμα το γυρίσεις (το τετράγωνο), θα είναι ρόμβος».

Στο Έργο 12, οι σωστές απαντήσεις της ομάδας ελέγχου παρέμειναν χαμηλές (2→1), ενώ στην πειραματική αυξήθηκαν σημαντικά (0→20). Οι σωστές αιτιολογήσεις περιλάμβαναν αναφορές σε ίσες πλευρές και ιδιότητες παραλληλογράμμου. Οι αιτιολογήσεις των λάθος απαντήσεων αναφέρονταν σε πλευρές, γωνίες ή μέγεθος: «Λάθος, γιατί το παραλληλόγραμμο είναι μεγαλύτερο», «Αν φαρδύνεις τις γραμμές, θα γίνει τετράγωνο», «Λάθος γιατί το ορθογώνιο δεν μπορεί να γίνει τετράγωνο».

Σύγκριση περιμέτρου και εμβαδού (έργα 5, 9, 10, 13, 14)

Στο Γράφημα 4 συνοψίζονται οι απαντήσεις Προ και Μετά τεστ των ΟΕ και ΠΟ στα Έργα 5, 9, 10, 13 και 14.



Γράφημα 3: Απαντήσεις Προ και Μετά τεστ ΟΕ και ΠΟ στα Έργα 5, 9, 10, 13 και 14

Στο Έργο 5, οι επιδόσεις της ομάδας ελέγχου παρέμειναν σχεδόν σταθερές (14→13), ενώ της πειραματικής αυξήθηκαν (15→19). Οι λανθασμένες απαντήσεις βασίζονταν σε οπτική εκτίμηση του «μεγαλύτερου» σχήματος.

Στο Έργο 9, η ομάδα ελέγχου παρουσίασε μικρή αύξηση (9α: 0→5, 9β: 6→9), ενώ η πειραματική μεγαλύτερη (9α: 5→9, 9β: 5→20). Ορισμένοι μαθητές/ριες χρησιμοποίησαν στρατηγικές μέτρησης, όπως καταμέτρηση τετραγωνικών μονάδων.

Στο Έργο 10, και οι δύο ομάδες βελτιώθηκαν (ομάδα ελέγχου: 10α: 2→10 και 10β: 2→14, πειραματική: 10α: 3→10 και 10β: 4→21), με ενδείξεις μέτρησης «τετραγώνων».

Στο Έργο 13, η ομάδα ελέγχου διατήρησε χαμηλή επίδοση (1→1), ενώ η επίδοση της πειραματικής αυξήθηκε (0→13). Ενδεικτικές λανθασμένες αιτιολογήσεις (ΠΟ) ήταν: «πιο μεγάλο σχήμα άρα μεγαλύτερο εμβαδόν», «άμα μεγαλώσει η περίμετρος μεγαλώνει και το εμβαδόν».

Στο Έργο 14, οι σωστές απαντήσεις της ομάδας ελέγχου αυξήθηκαν οριακά (3→6), ενώ της πειραματικής σημαντικά (1→21). Ο υψηλός αριθμός μη απαντήσεων της ομάδας ελέγχου υποδηλώνει έντονη αβεβαιότητα και αδυναμία διαχείρισης της σχέσης των δύο εννοιών. Μετά τη διδασκαλία, η παρανόηση όχι μόνο διατηρείται αλλά και παγιώνεται σε λεκτικό επίπεδο. Οι μαθητές/ριες διατύπωσαν αιτιολογήσεις όπως: «Σωστό, γιατί άμα έχει μεγαλύτερη περίμετρο, θα έχει και μεγάλο εμβαδόν» ή «Σωστό γιατί όσο πιο μεγάλη είναι η περίμετρος, τόσο μεγαλώνει και το εμβαδόν», αποκαλύπτοντας μια γραμμική και αιτιοκρατική σύνδεση των δύο μεγεθών. Άλλες απαντήσεις, όπως «Είναι λάθος. Δεν μπορεί να είναι τα ίδια γιατί το εμβαδόν βγαίνει με πολλαπλασιασμό», δείχνουν προσκόλληση σε διαδικαστικούς κανόνες χωρίς εννοιολογική κατανόηση. Οι σωστές απαντήσεις της πειραματικής ομάδας συνοδεύονταν από διατυπώσεις όπως: «Σωστό, γιατί το εμβαδόν δεν αλλάζει όταν χωρίσω το σχήμα».

Αποτελέσματα των συνεντεύξεων της πειραματικής ομάδας

Η ποσοτική και ποιοτική ανάλυση των συνεντεύξεων με τους 23 μαθητές/ριες της πειραματικής ομάδας αποκάλυψε σημαντικές τάσεις στη γεωμετρική μάθηση.

Ερώτημα 1: Συμβολή του γεωπίνακα στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών

Όλοι/ες οι μαθητές/ριες (23/23) ανέφεραν ότι ο γεωπίνακας συνέβαλε στην κατανόηση των πολυγώνων, της περιμέτρου και του εμβαδού. Η οπτικοποίηση και η κατασκευαστική εμπλοκή αναγνωρίστηκαν ως κρίσιμες: «Τα έβλεπα και τα έφτιαχνα, γι' αυτό τα κατάλαβα καλύτερα» (πολύγωνα), «μετρούσα γύρω-γύρω τις αποστάσεις» (περίμετρος), «μετρούσα τα τετραγωνάκια μέσα στο σχήμα» (εμβαδόν). Η δυνατότητα άμεσης διόρθωσης επίσης επισημάνθηκε: «αν έκανα λάθος, άλλαζα το λάστιχο».

Ερώτημα 2: Δυσκολίες και τρόποι αντιμετώπισης

Εννέα από τους 23 μαθητές/ριες (9/23) δήλωσαν ότι δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία. Μεταξύ των υπολοίπων, οι δυσκολίες εστιάστηκαν κυρίως στη μέτρηση της περιμέτρου (5/23) (π.χ. «στην αρχή μετρούσα τα καρφιά»), στη χρήση των λάστιχων (5/23) και στην κατασκευή σύνθετων σχημάτων όπως ο ρόμβος (3/23). Η υπέρβαση τους αποδόθηκε στην εξάσκηση και στη συνεργασία: «με βοήθησε η ομάδα και το κάναμε μαζί».

Ερώτημα 3: Προθέσεις για μελλοντική χρήση

Η πλειοψηφία των μαθητών/τριών (21/23) εξέφρασε θετική στάση για τη χρήση του γεωπίνακα στο μέλλον. Οι αιτιολογίες τους περιελάμβαναν: (α) τη διασκεδαστική διάσταση (11/23) (π.χ. «τα μαθηματικά έγιναν παιχνίδι»), (β) τη βελτιωμένη κατανόηση (10/23) (π.χ. «τα κατάλαβα πιο εύκολα από ό,τι με το βιβλίο»), και (γ) την ενίσχυση της συγκέντρωσης και της δημιουργικότητας (5/23) (π.χ. «Σκέφτεσαι περισσότερο για να βγει σωστό το σχήμα»).

Συζήτηση

Η παρούσα ενότητα αποσκοπεί στη συγκριτική ανάλυση και ερμηνεία των ερευνητικών αποτελεσμάτων μεταξύ της ομάδας ελέγχου (ΟΕ) και της πειραματικής ομάδας (ΠΟ), οργανωμένα στις τέσσερις κύριες θεματικές κατηγορίες που διερευνήθηκαν.

Αναγνώριση, ταξινόμηση και σύγκριση πολυγώνων

Τα αποτελέσματα στην αναγνώριση και ταξινόμηση διαφοροποιούνται σημαντικά μεταξύ των δύο ομάδων. Η ΟΕ παρουσίασε μικρές ή ασαφείς βελτιώσεις. Στο Έργο 1 (αναγνώριση πολυγώνων), η επίδοση παρέμεινε εξαιρετικά χαμηλή (από 0/21 σε 2/21 σωστά), με τους/ις μαθητές/ριες να επιμένουν στην ταύτιση σχημάτων με βάση την οπτική ομοιότητα και όχι σε κριτήρια κλειστότητας και ευθυγραμμισμένων πλευρών. Αντίστοιχα, στο Έργο 6 (αναγνώριση τετραγώνου σε διάταξη ρόμβου), κανείς/μία μαθητής/ρια της ΟΕ δεν απάντησε σωστά ούτε μετά τη διδασκαλία, αποκαλύπτοντας την απόλυτη κυριαρχία της οπτικής εικόνας-προτύπου έναντι των γωνιακών ιδιοτήτων.

Αντιθέτως, η ΠΟ έδειξε σημαντική πρόοδο σε συγκεκριμένους τομείς, παρά το γεγονός ότι στο Έργο 1 παρέμεινε επίσης χαμηλή (1/23 σωστά). Η πιο εντυπωσιακή βελτίωση

παρατηρήθηκε στο Έργο 2 (ονοματοδοσία), όπου οι σωστές απαντήσεις ανέβηκαν από 11 σε 22. Αυτό δείχνει ότι η ενεργητική χειραπτική εμπειρία με τον γεωπίνακα ενίσχυσε αποτελεσματικά τη σύνδεση μεταξύ οπτικής εικόνας και γεωμετρικού όρου. Επιπλέον, στο Έργο 3β (αναγνώριση τριγώνων), η ΠΟ βελτιώθηκε σημαντικά (από 2 σε 16 σωστές απαντήσεις), υποδεικνύοντας καλύτερη διάκριση του κριτηρίου «ευθείες πλευρές» έναντι της απλής οπτικής μορφής.

Ωστόσο, και στις δύο ομάδες παραμένουν ανθεκτικές παρανοήσεις που αφορούν τις ιεραρχικές σχέσεις και την αμεταβλητότητα ιδιοτήτων (Έργα 6, 7). Οι αιτιολογήσεις των μαθητών/ριών, όπως «Αν το γυρίσεις το τετράγωνο θα γίνει ρόμβος», αποκαλύπτουν μια βαθιά ριζωμένη αντίληψη ότι η γεωμετρική ταυτότητα αλλάζει με τον προσανατολισμό. Αυτό ευθυγραμμίζεται με τη θεωρία της εικόνας-έννοιας (Tall & Vinner, 1981), όπου η διαισθητική οπτική εικόνα υπερκαλύπτει τον τυπικό ορισμό. Η θεωρία των επιπέδων van Hiele (1986) προσφέρει μια περαιτέρω εξήγηση. Οι μαθητές/ριες φαίνεται να παραμένουν κυρίως στο Επίπεδο 1 (Οπτική Αναγνώριση), αναγνωρίζοντας σχήματα βάσει προτύπων αντί ιδιοτήτων. Η συμβατική διδασκαλία δεν επέφερε σημαντική αλλαγή, ενώ η διερευνητική προσέγγιση με τον γεωπίνακα, αν και βελτίωσε την περιγραφική ικανότητα, δεν κατόρθωσε να προωθήσει επαρκώς τους/ις μαθητές/ριες προς το Επίπεδο 3 (Αφηρημένη Σύνδεση), όπου κατανοούνται οι λογικές σχέσεις μεταξύ κατηγοριών.

Κατασκευή πολυγώνων

Κατά την κατασκευή των πολυγώνων (Έργο 4) η ΟΕ η οποία εργάστηκε κυρίως με χάρακα και χαρτί βάσει αλγοριθμικών οδηγιών και δεν είχε πρόσβαση στην άμεση, πειραματική μαθησιακή διαδικασία μέσω γεωπίνακα παρουσίασε μικρές βελτιώσεις ή ακόμη και επιδείνωση σε ορισμένα σημεία (π.χ. εμφάνιση κενών απαντήσεων στο 4β). Αντίθετα, στο Έργο αυτό διακρίνεται η σαφής υπεροχή της ΠΟ, η οποία έφτασε σε σχεδόν τέλεια επίτευξη (τετράπλευρο: 23/23, πεντάγωνο: 21/23, εξάγωνο: 20/23).

Το εύρημα αυτό υποθέτουμε ότι οφείλεται στη διερευνητική διδασκαλία με τη χρήση γεωπίνακα. Ο γεωπίνακας λειτούργησε ως δομημένο χειραπτικό εργαλείο που επέτρεψε στους/ις μαθητές/ριες της ΠΟ να πειραματιστούν ενεργά, να ελέγξουν και να αναθεωρήσουν τις κατασκευές τους μέσω άμεσης ανατροφοδότησης. Τα αποτελέσματα ευθυγραμμίζονται με μελέτες που τεκμηριώνουν τη συμβολή του γεωπίνακα στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης και στην αναγνώριση γεωμετρικών ιδιοτήτων (Peñanueva, et al., 2023· Trimurtini et al., 2020).

Η διαδικασία της φυσικής κατασκευής σχημάτων διευκόλυνε τη συγκρότηση σταθερών νοητικών αναπαραστάσεων και την εμπέδωση των χαρακτηριστικών των πολυγώνων (αριθμός πλευρών, κορυφών, κλειστότητα). Χαρακτηριστικές είναι οι αναφορές μαθητών/ριών ότι «ήταν πιο εύκολο να σκεφτώ το σχήμα γιατί μπορούσα να το αλλάξω με τα χέρια μου», εύρημα που συνάδει με το θεωρητικό πλαίσιο του Bruner και τη σημασία της διερευνητικής μάθησης με χρήση γεωπίνακα (Σκουμπουρδή & Κωσσοπούλου, 2011). Παράλληλα, σύμφωνα με τη θεωρία των σημειωτικών αναπαραστάσεων του Duval (2017), ο

γεωπίνακας λειτούργησε ως ενδιάμεσο σημειωτικό σύστημα, διευκολύνοντας τη μετάβαση από τη διαισθητική αντίληψη στη συστηματική και επαληθεύσιμη γεωμετρική αναπαράσταση.

Ιδιότητες και ιεραρχικές σχέσεις μεταξύ τετραπλεύρων

Τα αποτελέσματα σε αυτή την κατηγορία είναι ανάμεικτα και επιβεβαιώνουν την πολυπλοκότητα της εννοιολογικής αλλαγής. Στο Έργο 12 (ονομασία ορθογωνίου παραλληλογράμμου με ίσες πλευρές ως τετράγωνο), η ΠΟ παρουσίασε εντυπωσιακή βελτίωση (από 0/23 σε 21/23 σωστά), με πλήρη και σωστή αιτιολόγηση. Αυτό δείχνει ότι η διερευνητική εμπειρία με τον γεωπίνακα, όπου οι μαθητές/ριες μπορούσαν να μετασχηματίσουν ένα ορθογώνιο σε τετράγωνο διατηρώντας τις γωνίες, οδήγησε σε βαθιά κατανόηση αυτής της συγκεκριμένης ιδιότητας-ορισμού.

Αντίθετα, στο Έργο 11 (σχέση τετραγώνου-ρόμβου), όπως αναφέρθηκε, και οι δύο ομάδες απέτυχαν. Αυτή η ασυμμετρία στις επιδόσεις είναι πολύ σημαντική. Φαίνεται ότι ο γεωπίνακας είναι πιο αποτελεσματικός στη διευκόλυνση της κατανόησης ιδιοτήτων που μπορούν να παρατηρηθούν και να χειριστούν άμεσα μέσω μετασχηματισμών (π.χ., αλλαγή μήκους πλευρών διατηρώντας παραλληλία). Η κατανόηση των ιεραρχικών σχέσεων συνόλων (ότι το τετράγωνο είναι υποσύνολο του ρόμβου) απαιτεί ένα ανώτερο επίπεδο αφηρημένης λογικής και ταξινομικής σκέψης.

Οι μαθητικές αιτιολογήσεις «αν το γυρίσεις το τετράγωνο θα γίνει ρόμβος» αποκαλύπτουν την κυριαρχία της οπτικής εικόνας έναντι του τυπικού ορισμού, επιβεβαιώνοντας τη διάκριση εικόνας-έννοιας και έννοιας-ορισμού (Tall & Vinner, 1981) και τον ανασταλτικό ρόλο των οπτικών αναπαραστάσεων (Fischbein, 1993). Συνολικά, τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι οι μαθητές/ριες εξακολουθούν να προσεγγίζουν τα γεωμετρικά σχήματα κυρίως με βάση την οπτική τους μορφή και όχι μέσω αναλυτικών ιδιοτήτων, γεγονός που περιορίζει την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ κατηγοριών. Παρά τις επιμέρους βελτιώσεις που παρατηρήθηκαν, ιδιαίτερα στο πλαίσιο της διερευνητικής διδασκαλίας με τον γεωπίνακα, δεν διαφαίνεται μια ουσιαστική μετάβαση σε ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, όπου συγκροτούνται και αξιοποιούνται οι λογικές και ιεραρχικές σχέσεις των σχημάτων, σύμφωνα με τη θεωρία των επιπέδων van Hiele (1986). Το γεγονός ότι καμία από τις δύο διδακτικές προσεγγίσεις δεν επέφερε ουσιαστική πρόοδο υποδηλώνει ότι το συγκεκριμένο εννοιολογικό εμπόδιο απαιτεί μακροπρόθεσμες και στοχευμένες παρεμβάσεις, όπως αυτές που προτείνονται στη διεθνή βιβλιογραφία (Clements & Sarama, 2011· Erez & Yerushalmy, 2006· Fujita & Jones, 2007· Monaghan, 2000).

Διάκριση περιμέτρου και εμβαδού

Η διάκριση μεταξύ γραμμικών και επιφανειακών μεγεθών αποτέλεσε έναν ακόμη τομέα με διαφοροποιημένα αποτελέσματα. Στο Έργο 5 (σύγκριση περιμέτρων), και οι δύο ομάδες παρουσίασαν αρχικά καλές επιδόσεις, με την ΠΟ να εμφανίζει οριακή βελτίωση (από 15 σε 19/23 σωστές απαντήσεις). Ωστόσο, στα Έργα 9 και 10, όπου η σύγκριση πραγματοποιούνταν μεταξύ σχημάτων διαφορετικής μορφής αλλά ίσου μεγέθους, οι διαφοροποιήσεις μεταξύ των ομάδων έγιναν εντονότερες.

Η ΠΟ παρουσίασε ιδιαίτερα σημαντική βελτίωση στις ερωτήσεις που αφορούσαν το εμβαδόν (Έργο 9β: από 5 σε 20/23, Έργο 10β: από 4 σε 21/23, Έργο 14: από 1 σε 21/23). Το εύρημα αυτό αποδίδεται άμεσα στη δυνατότητα του γεωπίνακα να οπτικοποιεί την επιφάνεια ως σύνολο τετραγωνικών μονάδων. Οι μαθητές/ριες είχαν τη δυνατότητα να «γεμίσουν» ένα σχήμα με τετράγωνα, να τα μετρήσουν και να παρατηρήσουν ότι το εμβαδόν διατηρείται ακόμη και όταν το σχήμα διαιρείται ή μετασχηματίζεται. Η χειραπτική αυτή διαδικασία ενίσχυσε την κατανόηση του εμβαδού ως προσθετικού μεγέθους και της αρχής διατήρησής του, όπως προκύπτει και από χαρακτηριστικές αιτιολογήσεις των μαθητών/ριών, όπως: «Δεν αλλάζει κάτι στο εμβαδόν όταν χωρίζω το σχήμα».

Αντίθετα, η κατανόηση της έννοιας της περιμέτρου παρέμεινε πιο προβληματική. Στο Έργο 13, όπου διερευνήθηκε η παρανόηση «μεγαλύτερη περίμετρος = μεγαλύτερο εμβαδόν», η ΟΕ παρουσίασε επιδείνωση (μόλις 1/21 σωστές απαντήσεις), ενώ η ΠΟ εμφάνισε σημαντική βελτίωση (από 0 σε 13/23 σωστές απαντήσεις), χωρίς ωστόσο να υπερβεί πλήρως την παρανόηση. Αρκετές λανθασμένες απαντήσεις στην ΠΟ εξακολουθούσαν να συγχέουν την έννοια της περιμέτρου με το «οπτικό μέγεθος» του σχήματος.

Το εύρημα αυτό υποδηλώνει ότι, ενώ ο γεωπίνακας προσφέρει ιδιαίτερα αποτελεσματική οπτικοποίηση για το εμβαδόν, η περίμετρος - ως γραμμικό μέγεθος - δεν αναπαρίσταται εξίσου διαισθητικά. Η μέτρησή της μέσω των αποστάσεων των καρφιών του γεωπίνακα παραμένει περισσότερο αφηρημένη και λιγότερο «απτή» σε σύγκριση με τη συμπλήρωση μιας επιφάνειας με μονάδες. Η ασύμμετρη αυτή βελτίωση στην κατανόηση του εμβαδού έναντι της περιμέτρου εναρμονίζεται με τα ευρήματα των Clements και Sarama (2011). Η μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στον τομέα του εμβαδού αποδίδεται στη χωρική φύση του γεωπίνακα, η οποία ενισχύει την αντίληψη επιφανειακών μεγεθών (Matengu & Schäfer, 2022). Η απουσία ισχυρής φυσικής αναπαράστασης γραμμικού μήκους για την περίμετρο περιόρισε την εννοιολογική μετάβαση (Trimurtini et al., 2020).

Σημαντικό εύρημα, το οποίο ενδεχομένως αιτιολογεί επιπλέον τα καλύτερα αποτελέσματα της ΠΟ, αποτελεί η ενίσχυση της γεωμετρικής αιτιολόγησης. Η διερευνητική προσέγγιση, βασισμένη σε ένα μοντέλο επτά σταδίων (Σκουμπουρδή, 2023), παρείχε στους/ις μαθητές/ριες ευκαιρίες να ελέγχουν ενεργά τις υποθέσεις τους, να τις συγκρίνουν με τις πραγματικές ιδιότητες των σχημάτων και να τεκμηριώνουν τις απαντήσεις τους. Η δήλωση των μαθητών/ριών της ΠΟ ότι ο γεωπίνακας «τους βοήθησε να δουν αν αυτό που νόμιζαν ήταν σωστό» επιβεβαιώνει την επίδρασή του ως εργαλείου μεταγνωστικής αυτορρύθμισης. Η επίδραση αυτή συμφωνεί με τα ευρήματα των Ubuz και Erdoğan (2019) και των Sibiyā και Mudaly (2018) σχετικά με την υποστήριξη της επιχειρηματολογίας μέσω χειραπτικών μέσων.

Συμπεράσματα

Η μελέτη κατέδειξε ότι η ένταξη του γεωπίνακα σε ένα διερευνητικό διδακτικό πλαίσιο συνέβαλε ουσιαστικά στην εννοιολογική κατανόηση των πολυγώνων, του εμβαδού και της περιμέτρου. Οι μαθητές/ριες της ΠΟ παρουσίασαν σαφώς βελτιωμένη επίδοση στην αναγνώριση, κατασκευή και μετασχηματισμό πολυγώνων, καθώς και στην αιτιολόγηση,

επιβεβαιώνοντας τη δυναμική των χειραπτικών υλικών και της μετάβασης μεταξύ αναπαραστάσεων (Duval, 2017).

Παράλληλα, η έρευνα ανέδειξε την ανθεκτικότητα συγκεκριμένων παρανοήσεων, όπως η σύγχυση μεταξύ τετραγώνου και ρόμβου και η εσφαλμένη σύνδεση περιμέτρου-εμβαδού, υπογραμμίζοντας ότι ο γεωπίνακας, αν και ισχυρό εργαλείο, απαιτεί συστηματική παιδαγωγική εστίαση στις κρίσιμες γεωμετρικές ιδιότητες. Η ανάπτυξη ανώτερων επιπέδων van Hiele προϋποθέτει χρόνο, στοχευμένες παρεμβάσεις και μεταγνωστική εξάσκηση.

Η σύγκριση των δύο ομάδων επιβεβαιώνει ότι η διερευνητική, ενεργητική προσέγγιση με χρήση γεωπίνακα οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση σε σχέση με τη συμβατική διδασκαλία, ενώ τα ποιοτικά δεδομένα αναδεικνύουν τον γεωπίνακα ως μέσο ελέγχου, διόρθωσης και αναστοχασμού.

Παρά τους περιορισμούς της μελέτης (μικρό δείγμα, σύντομη χρονική διάρκεια, διδασκαλία από διαφορετικούς εκπαιδευτικούς στις δύο ομάδες, απουσία βιντεοσκόπησης, πιθανή επίδραση των τεστ), τα ευρήματα παρέχουν ισχυρές ενδείξεις για τη διδακτική αξία του γεωπίνακα. Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να επεκτείνουν τα ευρήματα μέσω μακροχρόνιων παρεμβάσεων, συγκρίσεων μεταξύ χειραπτικού και ψηφιακού γεωπίνακα, καθώς και διερεύνησης της συμβολής του σε συνδυασμό με την τεχνητή νοημοσύνη, τις μεταγνωστικές δεξιότητες και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις.

Αναφορές

- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2021). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 251–270. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1>
- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2024). Polygon class learning opportunities: Interplay between teacher's moves, children's geometrical thinking, and geometrical task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 1381–1403. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10425-3>
- Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. Di Biase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education* (pp. 267–298). Lawrence Erlbaum.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420–464). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192–212. <https://doi.org/10.2307/749610>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>
- Erez, M. & Yerushalmy, M. (2006). If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle: Young students' experience with the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 271–299. <https://doi.org/10.1007/s10758-006-9106-7>
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Fox, T. (2000). Research, Reflection, Practice: Implications of Research on Children's Understanding of Geometry. *Teaching Children Mathematics*, 6(9), 572–576. <https://doi.org/10.5951/tcm.6.9.0572>
- Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3–20. <https://doi.org/10.1080/14794800008520167>
- Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121–139). Routledge Falmer.
- Matengu, G. K., & Schäfer, M. (2022). Revisiting geoboards to teach quadrilaterals within the Van Hiele teaching framework. In K. R. Langenhoven & C. H. Stevenson-Milln (Eds.), *Book of proceedings of the 30th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education* (pp. 62–74). SAARMSTE. https://www.researchgate.net/publication/361664181_CONFERENCE_THEME_Embracing_Change_and_Transformation_in_a_Technologically_Enhanced_Environment_through_Mathematics_Science_and_Technology_Education_MSTE_Research_Hosted_by_a_consortium_of_Western_Cape
- Mkhwane, F.F. (2017). *An investigation of teachers' experiences of a Geoboard intervention program in area and perimeter in selected Grade 9 classes: A case study* (Doctoral dissertation, RHODES UNIVERSITY).
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179–196. <https://doi.org/10.1023/A:1004175020394>
- Okoye, G., & Onyeka, E. (2022). Application of geotrigmetric set and geoboard on students' retention in mathematics in Rivers State, Nigeria. *African Journal of Educational Management, Teaching and Entrepreneurship Studies*, 7(2), 82–97. <https://www.ajemates.org/index.php/ajemates/article/view/178>
- Olajide, D., Ekwueme, C.O., & Ndioho, O.F. (2020). Geoboard application on geometry teaching and senior secondary school students' academic performance in Degema Local Government Area, Rivers State. *EPRA International Journal of Multidisciplinary Research (IJMR)*, 6(3), 262–268. <https://doi.org/10.36713/epra2336>

- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο – ΥΠ.Ε.Π.Θ. (2003). Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. (ΦΕΚ 303B/13-03-2003, ΦΕΚ 304B/13-03-2003). <http://www.pi-schools.gr/programs/depps/>
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο – ΥΠ.Ε.Π.Θ. (2006). *Μαθηματικά Α', Β', Γ', Δ', Ε', ΣΤ' Δημοτικού*. Αθήνα: ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. <http://ebooks.edu.gr/ebooks/v2/allmaterial.jsp>
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο – ΥΠ.Ε.Π.Θ. (2006). *Μαθηματικά Α', Β', Γ', Δ', Ε', ΣΤ' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών α', β', γ' και δ' τεύχος*. Αθήνα: ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. <http://ebooks.edu.gr/ebooks/v2/allmaterial.jsp>
- Peñanueva, N.A., Cautivo, R.G., & Pingot, L.P.S. (2023). The use of geoboard to improve the mathematical performance of the Grade III pupils in Cateel Central Elementary School. *International Journal of Advanced Research and Innovative Ideas in Education (IJARIIE)*, 9(3). 4848–4855. <https://ijariie.com/AdminUploadPdf/The Use of Geoboard to Improve the Mathematical Performance of the Grade III Pupils in Cateel Central Elementary School ijariie20947.pdf?srsId=AfmBOoqzOZSn53sRLRPVYKZWcBSi-pN6g86hZwWI7k|v0e8ADRCaUdZ>
- Rahmiati, M. (2016). The attempt to improve mathematics learning motivation using the geoboard Spiked Board) Among Grade II Elementary School Students. *Global Journal of Business and Social Science Review*, 4(3), 74–78. [https://doi.org/10.35609/gjbsr.2016.4.3\(11\)](https://doi.org/10.35609/gjbsr.2016.4.3(11))
- Σκουμπουρδή, Χ. (2021). *Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Πατάκη.
- Σκουμπουρδή, Χ. (2023). *Διερευνητική προσέγγιση των μαθηματικών της πρώτης σχολικής ηλικίας: Κριτήρια σχεδιασμού δραστηριοτήτων και αξιολόγησης υλικών* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <https://dx.doi.org/10.57713/kallipos-125>
- Σκουμπουρδή, Χ., & Κτιστάκη, Σ. (2019). Ο γεωπίνακας ως μέσο κατασκευής επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων. Στο Ε. Θεοδωροπούλου & Α. Τσιμπιδάκη (Επ.), *Πρακτικά 1^{ου} Edutopia* (σελ. 855–869). ΤΕΠΑΕΣ – Πανεπιστήμιο Αιγαίου. https://edutopia.aegean.gr/wp-content/uploads/2019/11/praktika-EduTopia2017_2018_new.pdf
- Σκουμπουρδή, Χ. & Κωσσοπούλου, Α. (2011). Ο γεωπίνακας ως εργαλείο για την κατασκευή σχημάτων από νήπια. Στο Μ. Καλδρυμίδου & Ξ. Βαμβακούση (Επ.), *4^ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (ΕνΕΔιΜ): Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας* (σελ. 441–447). ΕΝΕΔΙΜ. – Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. https://www.enedim.gr/images/praktika_synedrion/praktika4.zip
- Saidu, S. & Bunyamin, S. (2016). Effects of geoboard and geographical globe on senior secondary school students' performance in mathematics in Kaduna State. *ATBU Journal of Science, Technology & Education (JOSTE)*, 4(1). 140–148. https://www.academia.edu/105874134/Effects_of_Geoboard_and_Geographical_Globe_on_Senior_Secondary_School_Students%27_Performance_in_Mathematics_in_Kaduna_State

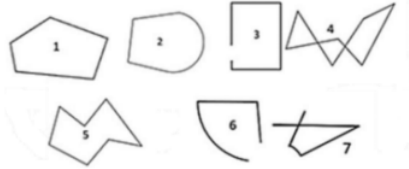
- Sibiya, M.R. & Mudaly, V. (2018). The effects of the geoboard on learner understanding of geometry theorems. *Ponte International Journal*, 74(11). <https://doi.org/10.21506/j.ponte.2018.11.8>
- Sibiya, M.R. (2020). A reconsideration of the effectiveness of using geoboard in teaching Euclidean geometry. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(9), em1876. <https://doi.org/10.29333/ejmste/8360>
- Tall, D.O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Trimurtini, T., Safitri, T. R., Sari, E. F., & Nugraheni, N. (2020). The effectivity of contextual teaching and learning (CTL) approach with Geoboard media on mathematics learning for four-grade elementary students. *Journal of Physics: Conference Series*, 1663(1), 012050. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1663/1/012050>
- Ubuz, B., & Erdoğan, B. (2019). Effects of physical manipulative instructions with or without explicit metacognitive questions on geometrical knowledge acquisition. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 129-151. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9852-0>
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Vaitsidi, G., & Skoumpourdi, C. (2022). Area Measurement of Flat Rectangular Surfaces by Students 10-11 Years Old: Traditional vs Inquiry-Based Teaching Intervention. *Universal Journal of Educational Research*, 10(9), 523-540. <https://doi.org/10.13189/ujer.2022.100902>
- Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) για το Δημοτικό Σχολείο*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
- Zaida, N. A. (2018). Improving the understanding of geometric shapes through geoboard (Classroom action research in Group B TK Al-Wafa, Sawangan, Kota Depok, 2017). *Jurnal Indria (Jurnal Ilmiah Pendidikan Prasekolah Dan Sekolah Awal)*, 3(2), 116-128. <https://doi.org/10.24269/jin.v3n2.2018.pp116-128>

Παράρτημα

Προ και μετα τεστ γνώσεων γεωμετρίας

Όνομα: _____

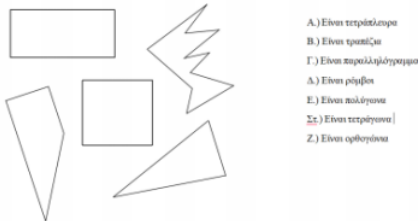
1. Να αναγνωρίσεις τα πολύγωνα και τα μη πολύγωνα (σχήματα που δεν είναι πολύγωνα).



Πολύγωνα:

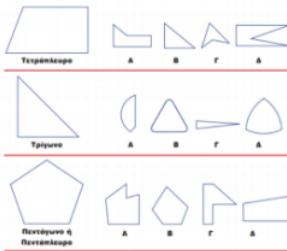
Σχήματα που δεν είναι πολύγωνα:

2. Βρες τι κοινό έχουν τα παρακάτω σχήματα. Κύκλωσε τη σωστή απάντηση.

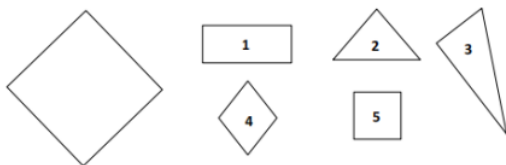


- A.) Είναι τετράπλευρο
- B.) Είναι τριώνυμο
- Γ.) Είναι παραλληλόγραμμο
- Δ.) Είναι ρόμβος
- E.) Είναι πολύγωνα
- Στ.) Είναι τετράγωνο
- Z.) Είναι ορθόγωνα

3. Να βάλεις σε κύκλο το πολύγωνο που έχει το ίδιο όνομα με το πρώτο σχήμα σε κάθε σειρά.

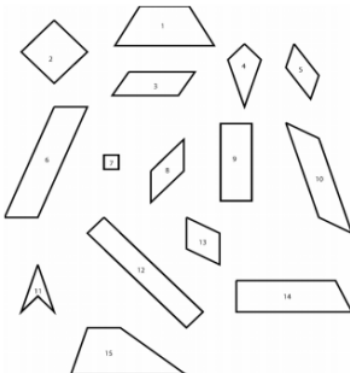


6. Ποιο από τα παρακάτω αριθμημένα σχήματα έχει το ίδιο όνομα με το πρώτο σχήμα; Κύκλωσε τη σωστή απάντηση και αιτιολόγησε την επιλογή σου.



- A.) To 1 B.) To 2 Γ.) To 3 Δ.) To 4 E.) To 5

7. Σημείωσε τα ορθόγωνα παραλληλόγραμπα.



Ορθόγωνα παραλληλόγραμπα:

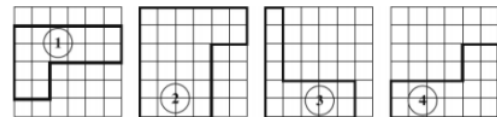


4. Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα και στη συνέχεια να σχηματίσεις στο πλέγμα το πολύγωνο που περιγράφεται.

Όνομα σχήματος	Αριθμός κορυφών	Αριθμός πλευρών
Τετράπλευρο		
Πεντάπλευρο ή πεντάγωνο		
Εξάπλευρο ή εξάγωνο		



5. Ποια από τα παρακάτω αριθμημένα πολύγωνα είναι όμοια;



- A) 1 και 2 B) 1 και 3 Γ) 1 και 4 Δ) 3 και 4

11. «Εάν ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, τότε είναι και ρόμβος».

Η παραπάνω υπόθεση είναι Σωστή ή Λανθασμένη και γιατί;

12. «Εάν σε ένα ορθόγωνο παραλληλόγραμμο το πλάτος είναι ίσο με το μήκος του, τότε το παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο».

Η παραπάνω υπόθεση είναι Σωστή ή Λανθασμένη και γιατί;

13. «Εάν ένα τετράπλευρο έχει μεγαλύτερη περίμετρο από ένα άλλο, τότε έχει και μεγαλύτερο εμβαδόν».

Η παραπάνω υπόθεση είναι Σωστή ή Λανθασμένη και γιατί;

14. «Εάν ένα τετράπλευρο χωρίζεται σε δύο μέρη, τότε το άθροισμα των εμβαδόν των δύο μερών είναι ίσο με το εμβαδόν του αρχικού τετραπλεύρου».

Η παραπάνω υπόθεση είναι Σωστή ή Λανθασμένη και γιατί;

Ευχαριστώ πολύ!!!