Epistēmēs Metron Logos Journal No 2 (2019)
ISSN: 2585-2973

Λογική και Γεωμετρία: Προσέγγιση της εξέλιξής τους

Χρήστος Π. Κίτσος
Ομότιμος Καθηγητής Στατιστικής, Παν. Δυτικής Αττικής
xkitsos@uniwa.gr

Περίληψη

Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι να διερευνήσει την εξέλιξη της Φιλοσοφίας, της Λογικής και της Γεωμετρίας και να εξετάσει τον τρόπο που η Γεωμετρία τελικά επηρεάστηκε και επηρέασε την εξέλιξη της Φιλοσοφίας και της Λογικής. Στην Λογική δεν υπήρξαν σημαντικές αλλαγές από την εποχή του Αριστοτέλη, μέχρι την ανατροπή των ιδεών του. Στην Γεωμετρία υπήρχε μια συνεχής προσπάθεια να αποδείξουν το 5ο Ευκλείδειο αίτημα, μέχρι την απόφαση του Gauss ότι είναι δυνατόν να δημιουργηθούν μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Η εξέλιξη της Φιλοσοφίας ήταν σταθερή, και τροφοδοτούσε με τις ιδέες την Επιστήμη.

Abstract

The aim of this paper is to investigate the evolution of Philosophy, Logic and Geometry and to see how Geometry was eventually influenced and influences the evolution of Philosophy and Logic. In Logic there were not significant changes, since the time of Aristotle, until the complete change of his ideas. In Geometry there was a continuous attempt to prove the 5th Euclidean postulate, until Gauss decided that it was possible to create non-Euclidean Geometries. The evolution of Philosophy was stable, and it fed Science with new ideas.

Λέξεις κλειδιά: Λογική, Ευκλείδεια Γεωμετρία, Αναλυτική Φιλοσοφία, Russell, Frege

1. Εισαγωγή

Με ένα εξαίρετο τρόπο ο Bertrand Russell (1946) περιγράφει την ιστορία της Δυτικής Φιλοσοφίας και αποδίδει τα εύσημα σε όλους τους αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους. Βέβαια ιδιαίτερη έμφαση αποδίδεται στους γνωστούς δύο φιλοσόφους της οικουμένης, τον Πλάτωνα (428-347) και τον μαθητή του, Αριστοτέλη (384-322). Η αναφορά σε όλες τις δραστηριότητες του Αριστοτέλη είναι ενδελεχής, μα στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρει η ανάλυση που πραγματοποιεί για τα της Λογικής του Αριστοτέλη, που ίσχυσε για αιώνες σε όλη τη Δύση. Οι Έλληνες Μαθηματικοί καταγράφησαν πλήρως από τον Heath (1981), τον Guomo (2001), ανάμεσα σε άλλους, ενώ οι κύριες μορφές των Μαθηματικών στην ιστορία παρουσιάζονται από τον Bell (1986). Η έμφαση στην Γεωμετρία και την εξέλιξη της, προϊόν ανάπτυξης του τρόπου σκέψης του Ανθρώπου, αναπτύσσεται διεξοδικά στον Greenberg (1980).

Όμως, τόσο ο Πλάτων, όσο και ο Αριστοτέλης είχαν μια ευαισθησία απέναντι στα Μαθηματικά της εποχής τους, βλ. και Fowler (2003), Heath (1949), όπου γίνεται αναφορά στο «αγεωμέτρητος μηδείς εισίτω» και στην «αρμονική».

Η λογική δομή στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη εντυπωσιάζει. Η δομή και η ανάπτυξη στηρίζεται σε μια πρωτοποριακή για την εποχή λογική. Ο Fowler (2003 p. 385) είναι σαφής: “Euclid’s Elements has been an almost universal reputation, even among historians of mathematics, for its relentlessly logical arrangement”. Η αναφορά στα «Στοιχεία» πραγματοποιείται ήδη από τα πρώτα χρόνια εμφάνισής τους – ο Αριστοτέλης τα μνημονεύει τόσο στα Φυσικά (έρευνα για τις βασικές αρχές της ερμηνείας της Φυσικής) και στα μετά τα Φυσικά (ανάπτυξη θεωρίας για τις αρχές του Όντος, 14 βιβλία).

Ένα από τα χαρακτηριστικά σημεία της Αριστοτελικής σκέψης, είναι το *αίτιον*. Η επιστημονική σύλληψη και αντίληψη των αιτιών, υπερνικά τη δεισιδαιμονία και ενισχύει τη λογική.

Τα «Αναλυτικά Πρότερα» πραγματεύονται τη θεωρία του συλλογισμού, ενώ τα «Αναλυτικά Ύστερα» αναφέρονται στη θεωρία της απόδειξης, έννοιες πρωταρχικές, εκείνη την εποχή, μα μέχρι σήμερα, άρρηκτα συνδεδεμένες με τη Μαθηματική Λογική, τον τρόπο ανάπτυξης και κατανόησης ενός προβλήματος. Ο ίδιος όμως ασχολήθηκε ελάχιστα με τα Μαθηματικά και εξηγεί ρητά ότι πρέπει κάποιος να στηρίζεται στα συμπεράσματα των ιδεών.

Η λογική απετέλεσε το κύριο και αναπόσπαστα συνδεδεμένο μέρος της αξιωματικής μεθόδου: Οι Έλληνες στην προσπάθειά τους να αναπτύξουν τη Γεωμετρία πάνω σε σταθερά θεμέλια, μη επιδεχόμενα ιδιόρρυθμων παραδόξων, όπως εκείνο του Ζήνωνα (490-425) και να αντιμετωπίσουν επιπλέον το πρόβλημα της ασυμμετρίας, χρησιμοποίησαν την αξιωματική μέθοδο στη Γεωμετρία, με την κορύφωση της προσπάθειας αυτής με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (323-285). Η Λογική ως αναπόσπαστο μέρος της αξιωματικής μεθόδου απετέλεσε τελικά την πρωτεύουσα θέση στα Μαθηματικά, ώστε ο Bertrand Russell το 1903 να πει «καθαρά μαθηματικά είναι η κλάση όλων των προτάσεων της μορφής "p συνεπάγεται q", όπου p και q προτάσεις».

Όμως η αξιωματική μέθοδος υιοθετήθηκε τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα, από κοινωνικές και φιλοσοφικές θεωρίες. Τυπικό παράδειγμα είναι η «Ηθική» (1667) του Spinoza. Όντως, μετά από οκτώ ορισμούς και επτά αξιώματα στην μαθηματικοποιημένη «Ηθική» αποδεικνύονται διάφορα θεωρήματα και το $11^{ο}$ αναφέρει: «Ο Θεός, δηλαδή η υπόσταση που αποτελείται από απειρία κατηγορημάτων, που το καθένα τους εκφράζει μια αιώνια και άπειρη ουσία, υπάρχει αναγκαία». Το θεώρημα αυτό βέβαια αποδεικνύεται.

Με την απόδειξη της αναγκαίας ύπαρξης του Θεού ο Spinoza κτίζει με έναν μαθηματικό τρόπο, αποδεικνύοντας τα πάντα όσα δηλώνει στην «Ηθική» του, π.χ. θεώρημα 34: «η δύναμη του Θεού είναι αυτή η ίδια του η ουσία». Με τρόπο περίτεχνο στο περί Δουλείας τμήμα αποδεικνύει για τα δύο θεωρήματα ότι «Μόνοι οι ελεύθεροι άνθρωποι είναι πολύ ευγνώμονες ο ένας απέναντι στον άλλο» – κάτι που συναντά ο μελετητής ανάμεσα σε περισπούδαστους Μαθηματικούς (και όχι μόνο) όπου ο ένας εκτιμά την εργασία του άλλου – και ότι «ο ελεύθερος άνθρωπος ποτέ δεν ενεργεί δόλια, αλλά πάντοτε με καλή πίστη» – κάτι που συναντά ο μελετητής σε όσους αναζητούν τη γνώση και τη σοφία: έχουν το σθένος της γνώμης με οποιοδήποτε τίμημα. Άμεσα με αυτόν τον τρόπο σκέψης και ηθικής είναι το γεγονός ότι όταν οι Γάλλοι κατέλαβαν το Gottingen, ο μεν Ναπολέων έσπευσε να πληροφορηθεί αν ο Gauss ήταν καλά (μην τυχόν συμβεί κάτι ανάλογο με τον Αρχιμήδη) και οι Γάλλοι Μαθηματικοί, εκείνης της εποχής, δήλωσαν στον Gauss πρόθυμοι να πληρώσουν γι' αυτόν τους βαρύτατους φόρους του – ο Gauss τους ευχαρίστησε και αρνήθηκε.

Η ώθηση στην εξελικτική πορεία στηρίζεται σε διάφορους παράγοντες με πρωτεύοντες, για εμάς, τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και τη Φιλοσοφία. Αν και είναι δύσκολος ο διαχωρισμός των εξελικτικών δυνάμεων φαίνεται ότι αυτοί η δύο παράγοντες συνετέλεσαν αποφασιστικά στην επινόηση «νέας Λογικής» πέρα από τον Αριστοτέλη και «νέας Γεωμετρίας» πέρα από τον Ευκλείδη.

Στην εργασία αυτή διερευνάται ο σύνδεσμος που υπάρχει μεταξύ Λογικής και Γεωμετρίας και αναπτύσσεται ο τρόπος άλληλο-επηρεασμού στην εξελικτική τους πορεία, προς την παρούσα κατάσταση. Μια σύντομη καταγραφή της πορείας της Λογικής και της Γεωμετρίας κρίνεται απαραίτητη.

2. Η ανάπτυξη της Λογικής

Ο όρος, αυτός καθ' εαυτός, λογική, είναι ασαφής, καλύπτει έννοιες που εμφανίζονται να είναι διαφορετικές μεταξύ τους, όπως είναι η υπερβατική λογική του Immanuel Kant (1724-1804), η επαγωγική λογική του John Stuart Mill (1806-1873), η λογική της επιστήμης, εισηγητή της Αναλυτικής Φιλοσοφίας, του Georg Wilhem Friedrich Hegel (1770-1831) κ.α. Παράλληλα εμφανίζεται, εξ ορισμού, να αναζητά την αλήθεια σε διάφορα σημασιολογικά περιβάλλοντα, κυρίως σε μια φυσική γλώσσα, σε μια μαθηματική γλώσσα (ή ένα κώδικα επικοινωνίας γενικότερα). Η Λογική αναζητά την αλήθεια στη δομή διαρθρωμένων συστημάτων. Προφανώς, ετυμολογικά, συνδέεται με την λέξη λόγος και άρα ο μη έχων λογική είναι άλογος.

Το «Όργανον» αποτελεί την συλλογή των λογικών πραγματειών του οικουμενικού πολυπράγμονα Αριστοτέλη (384-322), «συμμαθητή» του περίφημου Μαθηματικού Ευδόξου του Κνίδιου (407-335) στην Ακαδημία του Πλάτωνος. Από τον τίτλο «Όργανον» συμπεραίνουμε ότι ο Αριστοτέλης, υπό την σύγχρονη έννοια, θεωρούσε τη λογική ως ένα μέσο όξυνσης του νου. Ότι τυπικά θεωρείται λογική από τον Αριστοτέλη, αναφέρονται στα βιβλία «Περί Ερμηνείας» και «Αναλυτικά Πρότερα». Στο πρώτο από τα δύο βιβλία εισάγει την έννοια της εναντιότητας και στο δεύτερο τη θεωρία της αντιστροφής. Η θαυμαστή εργασία του Εύδοξου στις «αναλογίες» συμπεριλαμβάνεται στο 5ο βιβλίο του Ευκλείδη στα «Στοιχεία».

Η θεωρία της εναντιότητας εξετάζει τις λογικές σχέσεις που ισχύουν μεταξύ των 4 τύπων προτάσεων που σχηματίζονται από την κατάφαση και την απόφαση των καθολικών και των μερικών:

Τυποποιημένες εκφράσεις της μορφής:

«κάθε…»

«κανένα δεν…»

«μερικά…»

«μερικά δεν…»

που στον μεσαίωνα συμβόλιζαν με A, E, I, O αντίστοιχα ενώ ένας σύγχρονος συμβολισμός είναι p, q, r, s απασχόλησαν τον Αριστοτέλη.

1. Οι προτάσεις p και s είναι προτάσεις αντιφατικές [δηλαδή: αν η μια αυτών αληθής (Α) η άλλη πρέπει να είναι ψευδής (Ψ)].
2. Οι 2 και r είναι προτάσεις αντιφατικές.
3. Αν p και 2 είναι ενάντιες (δεν επαληθεύονται συγχρόνως), ενώ μπορεί και οι δύο να είναι Ψ.
4. Οι r και s δεν είναι δυνατόν να είναι ταυτόχρονα Ψ.
5. Αν και η (iv) δεν διατυπώθηκε σαφώς από τον Αριστοτέλη, γνώριζε ότι (από τα «Τοπικά», ως φαίνεται, ότι)
6. p ⇨ r, q ⇨ s, δηλαδή οι προτάσεις r, s είναι υποκείμενες των p, q αντίστοιχα.

Τον συλλογισμό όριζε ο Αριστοτέλης στα «Αναλυτικά Πρότερα» ως την προτασιακή εκείνη έκφραση όπου η αλληλεξάρτηση δεδομένων και υποθέσεων που διατυπώνονται αρχικώς, ακολουθεί, αναγκαστικά, κάτι διαφορετικό από το αρχικό.

Στον σημερινό συμβολισμό περιληπτικά, αν p και q τότε r.

Το κατηγορούμενο και το υποκείμενο έπαιξαν σημαντικό ρόλο, ως μείζων και ελάσσων όρος αντίστοιχα, στην Αριστοτελική Λογική, αφού η διαφορετική τους θέση απέδιδε σχήματα συλλογισμών. Ο μαθητής (και διάδοχος του στην Περιπατητική Σχολή, πατέρας της Βοτανικής) του Αριστοτέλη Θεόφραστος (371-287) είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε σύστημα υποθετικών συλλογισμών – ένα σύστημα προτάσεων.

Ο Μεγαρικός Φίλων ήταν ο πρώτος που ερεύνησε την αληθο-συναρτησιακή (Α ή Ψ) φύση της λογικής, στην Σχολή των Μεγάρων, όπου μετέβη ο Ευκλείδης και δημιουργήθηκε η γνωστή και ως Μεγαρική Σχολή, περί το 399 π.Χ. Ως φιλόσοφος ο Ευκλείδης πίστευε ότι το Ον είναι ένα και ταυτίζεται με το «Αγαθόν», και το ταύτισε με το «Εν» των Ελεατών. Στην Μεγαρική Σχολή θήτευσε και ο Ευβουλίδης δημιουργός πολλών λογικών σοφισμάτων π.χ. κάποιος παραδέχεται ότι αυτή τη στιγμή ψεύδεται, αυτό που λέει είναι αλήθεια ή ψέμα; Ο Στωικός Χρύσιππος (280-206) διερεύνησε την σύζευξη και την άρνηση των λογικών αρχών, διατηρώντας ακλόνητη τη δομή της Αριστοτελικής Λογικής. Ο Ζήνων ο Ελεάτης, γεννήθηκε το 488 π.Χ. στην Κάτω Ιταλία, μέλος της Ελεατικής σχολής, που ίδρυσε ο Παρμενίδης. Ο Αριστοτέλης τον αποκαλούσε εφευρέτη της διαλεκτικής μεθόδου. Είναι γνωστά τα τέσσερα παράδοξά του, τα οποία ο Russell (1903) περιέγραψε ως ασύγκριτα διακριτικά. Το γνωστότερο είναι ο Αχιλλέας και η χελώνα. Η θαυμαστή συμβολή τους είναι τόσο στην Λογική όσο και τα Μαθηματικά, και για πρώτη φορά συνδέονται Λογική και Μαθηματικά τόσο περίτεχνα.

Τόσο κατά τον μεσαίωνα με τη θεωρία των λογικών επακολουθημάτων (consequential), όσο και κατά την αναγέννηση η Αριστοτελική Λογική παρέμεινε σταθερή, με την κίνηση Port-Royal, γύρω στα 1660, αφενός του Θεολόγου- Φιλόσοφου-Μαθηματικού Antoine Arnauld (1612-1694) και αφετέρου του Pierre Nicole (1625-1695), να συνεισφέρουν με μια συστηματική έκθεση του όλου έργου της Λογικής, με βάση μεν τον Αριστοτέλη, μα με την τότε σύγχρονη αντίληψη που διαμορφώθηκε από τον Pascal ή, κυρίως, τον Descartes. Ένα όμως σημείο αξίζει ιδιαίτερης προσοχής: προβάλλεται ως έργο-πρότυπο επιστημονικής μεθόδου και λογικής τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Η σύνδεση με τα Μαθηματικά και δη τη Γεωμετρία αρχίζει. Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στο σημείο αυτό – η Λογική στρέφεται προς τη Γεωμετρία περίπου δύο αιώνες αργότερα, το 1829, ο Nikolay Lobachevsky (1792-1856) εκφράζοντας την αντίθεσή του στον υπερβατικό ιδεαλισμό του Emmanuelle Kant (1724-1804) απέδειξε ότι μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν λογικά δυνατή. Ο Lobachevsky πίστευε ότι ο χώρος είναι μια έννοια *a posteriori*, που παράγεται από τον ανθρώπινο νου, βάσει των εξωτερικών εμπειριών, ενώ ο Kant πίστευε ότι ο χώρος, χρόνος και η έκταση είναι *a priori* δεδομένες έννοιες και ότι ο νους επιβάλλει λογική τάξη στις εμπειρίες των αισθήσεων.

3. Η εξέλιξη της Γεωμετρίας

Σημαντικός σταθμός στην εξέλιξη της Γεωμετρίας ήταν, προφανώς, η αρχή της. Η μέτρηση της Γης, στην Αίγυπτο καταρχήν, έδωσε το έναυσμα στην Γεω-μετρία. Στον Θαλή (624 ή 623 με 548 ή 54) φαίνεται ότι «άστραψε ένα φως στο μυαλό του», κατά τον Johann Wolfgang Goethe (1749-1832) και απέδειξε το θεώρημά του. Ο σταθμός αυτός στην Γνώση ήταν τέτοιου μεγέθους που η «Δυτική Φιλοσοφία αρχίζει με τον Θαλή» κατά τον B. Russell (1979), πρώτη έκδοση το 1946. Η τότε «απόδειξη» από τον Θαλή, δεν έχει σχέση με ό,τι καλείται απόδειξη στις μέρες μας. Όταν ο Ευκλείδης (323-285) χάρισε στην ανθρωπότητα, από την Αλεξάνδρεια, τα «Στοιχεία» του, προσέφερε μια έκφραση ολοκληρωμένης λογικής ενότητας και οντότητας. Χρειάστηκαν αιώνες για να αμφισβητηθούν και να ερευνηθούν οι πιθανές λύσεις. Ενώ τα «Στοιχεία» είχαν άμεσο πεδίο εφαρμογής, τα περίφημα «Κωνικά» για να χρησιμοποιηθούν οι κωνικές τομές, (η παραβολή, η υπερβολή, ο κύκλος και η έλλειψη) του Απολλώνιου του Περγαίου (262-192) στην Αστρονομία, από τον J. Kepler, πέρασαν περί τα 1000 χρόνια. Ο γνωστός Ιταλός μαθηματικός (και φιλόσοφος) Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) δεν μπόρεσε να απαλλαγεί, και αυτός, από τη μη ανεξαρτησία του γνωστού 5^{ου} Ευκλειδείου αιτήματος των παραλλήλων, όμως ο Gauss δεν υπέπεσε στο ίδιο σφάλμα και πρώτος αυτός προσέγγισε τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ο Saccheri είχε κάνει πολλά και σημαντικά βήματα προόδου στο να αποδείξει το 5^{ο} Ευκλείδειο αίτημα, μα ο Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) έδωσε την σωστή κατεύθυνση: μπορούν να υπάρξουν Γεωμετρίες *χωρίς* το 5^{ο} Ευκλείδειο αίτημα – μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Οι Janos Bolyai (1802-1860) και N. I. Lobachevsky (1792-1856) οδηγήθηκαν σε ό,τι καλείται σήμερα υπερβολική Γεωμετρία. Ο πρώτος δημοσίευσε το έργο του, τελικά, το 1832, ενώ ο δεύτερος (γνωστός και ως ο Κοπέρνικος της Γεωμετρίας) το 1829. Ο Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), περίπου 20 χρόνια αργότερα οδηγήθηκε στην Ελλειπτική Γεωμετρία (βλ. π.χ. Fravel and Gray, 1986). Όμως όλα αυτά δεν έγιναν ξαφνικά. Υπήρξε δρόμος δύσβατος και οι βασικές αρχές της Αριστοτέλειας Λογικής, στάθηκαν αρωγοί σε αυτή την ανάπτυξη. Μόνο στις αρχές του 20^{ού} αιώνα, άρχισαν να τρίζουν τα θεμέλια της Λογικής και παράλληλα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, άρχισε κατά πολλούς με τον Απολλώνιο, βρίσκει εξαίρετη καταγραφή στην αρχή της και από του Ιησουίτες (παρ.II, σελ.161), με παραδείγματα-προβλήματα της μορφής (βλ. Ιησουίτες σελ.193, για λεπτομέρειες):

Για τα χ, y μεταβλητές και με τα α, β δεδομένα θεωρούμε ότι $\alpha\chi+\beta y=\lambda$, με λ πραγματικός αριθμός, τότε το μέγιστο του γινόμενου χy συμβαίνει όταν:

$$\frac{\chi}{\beta} = \frac{y}{\alpha}$$

Επί πλέον το ελάχιστο του αθροίσματος $\chi^2 + y^2$ ισχύει όταν:

$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$$

Μια άλλη χρήσιμη υπολογιστική εφαρμογή, από το ίδιο έργο, το πρόβλημα 640, είναι ο υπολογισμός του Εμβαδού Ε του «Σταυρού της Μάλτας» εγγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς 2α, που υπολογίζεται ως $Ε=2α^2\ (4-π)$.

Τα υπολογιστικά θέματα βρήκαν την άριστη έκφραση του στο πρόβλημα της χρυσής τομής και στα κανονικά πολύεδρα, στους Έλληνες Μαθηματικούς, που επέμεναν ότι η κατασκευή επιτυγχάνεται μόνο με τον κανόνα και τον διαβήτη (Μπρίκας 1970). Δίνουμε έμφαση στα κανονικά πολύεδρα, τα οποία συνεισέφεραν στον φιλοσοφικό στοχασμό του Πλάτωνος (Fowler 2003):

Αν παραστήσουμε με Ε το πλήθος των εδρών ενός κανονικού πολυγώνου, Κ το πλήθος των κορυφών (άρα και των αντίστοιχων στερεών γωνιών στο υπό μελέτη κανονικό πολύγωνο) και Α το πλήθος των ακμών του. Προφανώς οι έδρες του είναι κανονικά ν-γωνα και οι στερεές γωνίες κανονικές n-έδρες. Τότε ισχύουν:

$$\frac{1}{ν} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$νΕ=2Α \qquad (2)$$

$$nΚ=2Α \qquad (3)$$

$$Κ+Ε=Α+2 \qquad (4)$$

Από την (1) υπάρχουν μόνο οι 5 επιλογές για τον προσδιορισμό των ν, n:

$$(ν, n)=(3, 3) \text{ ή } (3, 4) \text{ ή } (4, 3) \text{ ή } (3, 5) \text{ ή } (5, 3).$$

Από την (2) συμπεραίνεται ότι κάθε ακμή ανήκει σε 2 έδρες, από την (3) ότι κάθε ακμή ανήκει σε δύο στερεές γωνίες και το (4) είναι γνωστό ως Θεώρημα του Euler. Όμως, το σημαντικό είναι, ότι από την παραπάνω σύντομη αναφορά τα γνωστά ως «5 Πλατωνικά στερεά», άμεσα συνδεδεμένα με την φιλοσοφική διάθεση και ανάπτυξη του Πλάτωνα είναι (βλ. Fowler 2003):

1. Με ν=3=n τότε: Α=6, Ε=4=Κ: κανονικό τετράεδρο
2. Με ν=3, n=4 τότε: Α=12, Ε=8, Κ=6: κανονικό 8-εδρο
3. Με ν=4, n=3 τότε: Α=12, Ε=6, Κ=8: κανονικό 6-εδρο
4. Με ν=3, n=5 τότε: Α=30, Ε=20, Κ=Γ2: κανονικό 20-εδρο
5. Με ν=5, n=3 τότε: Α=30, Ε=12, Κ=20: κανονικό 12-εδρο

Η συμμετρία είναι θαυμαστή και τονίζεται εδώ ότι ο Πλάτων χρησιμοποίησε την «πρώτη γραμμή πυρός της έρευνας» στο μοντέλο του κόσμου που κατασκεύασε, κυρίως στο έργο του «Τίμαιος».

Εδώ σημειώνεται ότι η έννοια της τομής δύο γεωμετρικών τόπων, προϋπήρχε την «λογικής» τομής δύο συνόλων. Η επικοινωνία των Μαθηματικών με την Λογική είναι προφανής.

Πέρα από την Αναλυτική Γεωμετρία που με τόση μεθοδικότητα ανέπτυξε ο Rene Descartes (1596-1650) – ή άλλως Καρτέσιος – η αλγεβροποίηση υπήρχε και στους μετασχηματισμούς. Μέσω του διανυσματικού λογισμού επιδιώχθηκε κατ᾽ αρχή να υπάρχουν μετασχηματισμοί που να απεικονίζουν περιφέρειες και ευθείες αντίστοιχα σε περιφέρειες και ευθείες. Η έννοια του σημειακού μετασχηματισμού γενικεύθηκε με τον γραμμικό μετασχηματισμό της Γραμμικής Άλγεβρας, που διατηρεί αναλλοίωτο, υπό την έννοια της διατήρησης του μέτρου, το μετασχηματιζόμενο (βλ. Κίτσος 2015).

Οι πρωτοποριακοί σημειακοί μετασχηματισμοί στην Γεωμετρία είναι: (i) Μεταφορά (ii) Επίπεδη Στροφή (iii) Αξονική συμμετρία (iv) Ομοιοθεσία (v) Επίπεδη (ομόρροπη) ομοιότητα (vi) Αντιστροφή.

Η έννοια της ομάδας χρησιμοποιήθηκε στους σημειακούς μετασχηματισμούς, όπως και αργότερα π.χ. στην συσχετισμένη Γεωμετρία (affine Geometry – Prakash 1981). Πεδία εφαρμογών υπήρξαν διάφορα π.χ. ο Fraser (1968) ανέπτυξε το θεωρητικό υπόβαθρο της Στατιστικής με χρήση αρχών της συσχετισμένης Γεωμετρίας, ο Kitsos (2011) στην κατασκευή αναλλοίωτου (invariant) μετασχηματισμού για το Logit μοντέλο, που εφαρμόζεται πολλαπλώς (Kitsos 2006).

Η επέκταση των εννοιών της Γεωμετρίας, κυρίως, είναι συνυφασμένη με την εξέλιξη της Λογικής στις αρχές του 20^{ού} αιώνα, συνυφασμένη με την πρόοδο της Φιλοσοφίας.

Το έργο του Friedrich Ludwing Gottlob Frege (1848-1925) οδηγεί την Λογική στη σύγχρονη εποχή. Κινήθηκε στα όρια Φιλοσοφίας, Λογικής και Μαθηματικών (κυρίως Αριθμητικής, όχι τόσο με τη Γεωμετρία) και έτσι έθεσε τα θεμέλια της σύγχρονης Μαθηματικής Λογικής και της Αναλυτικής Φιλοσοφίας.

Η κύρια άποψη του ότι «κάθε καλός μαθηματικός είναι τουλάχιστον κατά το ήμισυ φιλόσοφος και κάθε καλός φιλόσοφος κατά το ήμισυ τουλάχιστον μαθηματικός» οριοθέτησε το έργο της ζωής του – που όμως δεν έτυχε της αναγνώρισης που άρμοζε κατά τη ζωή του. Ο Bernard Russell

(1872-1970) ήταν από τους λίγους που έδειξε σεβασμό και εκτίμηση στο έργο του Frege. To 1879 ο Frege δημοσίευσε το Begrifts Schrift (ιδεογραφία) και ανέπτυξε το πρώτο σύστημα Μαθηματικής Λογικής. Ακολούθησε το 1884 το Die Grundlagen der Arithmetik (Οι βάσεις της Αριθμητικής) που το καταδίκασε ο Georg Cantor (1845-1918)!

Επανήλθε το 1893 με νέο αριστούργημα στην Μαθηματική Λογική, το Grundgesetze der Arithmetik (Θεμελιώδεις νόμοι της Αριθμητικής), όπου παρουσίασε μια αυστηρή ανάπτυξη της θεωρίας της Αριθμητικής. Μόνο ο Giuseppe Peano (1858-1932), άλλος πρωτοπόρος της Μαθηματικής Λογικής, αντέδρασε θετικά. Ο Peano συνάντησε τον Russell στο Παγκόσμιο Συνέδριο Μαθηματικών, ο οποίος ενθουσιάσθηκε με το έργο του Peano. Μα το χειρότερο για τον Frege ήρθε στις 16 Ιουλίου του 1902, ενώ ο δεύτερος τόμος του έργου του ήταν υπό έκδοση, ο Bertrand Russell του υποδείκνυε ότι υπάρχει αντίφαση στο λογικό σύστημά του. Η περίφημη αντίφαση του Russell, (δες πχ website βιβλιογραφία 26). Παρόλη την τροποποίηση που πραγματοποίησε το σύστημα του Frege περιείχε αντίφαση όπως κατέγραψε ο Πολωνός φιλόσοφος και Μαθηματικός Stanislaw Lesniewski (1886-1939). Έτσι ο Frege ουδέποτε δημοσίευσε το τρίτο τόμο του έργου του. Το έργο του Frege έγινε γνωστό χάρις στον Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951) ο οποίος τον επισκέφθηκε το 1914, ενώ το 1971 συνάντησε τον B. Russell. O Wittgenstein δίδαξε στο Cambridge, τα πρώτα χρόνια της σταδιοδρομίας του, όπου και δημοσίευσε το *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), το μόνο που δημοσιεύθηκε κατά την διάρκεια της ζωής του. Στόχος του βιβλίου ήταν να διερευνήσει την σχέση γλώσσας και πραγματικότητας σε σχέση με την Επιστήμη. Το πρόβλημα της γλώσσας είχε μελετηθεί και από τον Frege, μα ο Wittgenstein του έδωσε οντότητα πληρέστερη και ακρίβεια σαφέστερη.

Ο Frenge ήταν εκείνος που εισήγαγε τη συμπλήρωση ενός επιχειρήματος με μια μεταβλητή πχ «για κάθε χ», «υπάρχει χ» κ.λπ.

Ο Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) συνέβαλε τα μέγιστα στην Μαθηματική Λογική, αν όχι την ίδρυσή της. Αν ο Frege γκρέμισε την Αριστοτελική Λογική, ο Russell εγκατέστησε το νέο σύστημα Λογικής με το Principia Mathematica (1910, 1912, 1913). Ο Russell ανέλυσε τη γλώσσα στα ελάχιστα θεμελιώδη στοιχεία της. Στόχος ήταν η αποφυγή άχρηστων αξιωμάτων, για την ύπαρξη των αντικειμένων που σημαίνονται από περιγραφικές φράσεις – ό,τι κάλεσε θεωρία των περιγραφών. Βασική του άποψη ήταν ότι ο νους και η ύλη αποτελούν διαφορετικές δομές των ίδιων ουδέτερων στοιχείων. Απέρριψε τον Leibnitz και άρχισε ναι οικοδομεί το δικό του σύστημα με αποκορύφωμα το Principia Mathematica.

Από την άλλη μεριά του λόφου της Γνώσης, στη Γεωμετρία συνεχιζόταν η κριτική στο 5ο Ευκλείδειο αίτημα που είχε μια αποκορύφωση με τον νεοπλατωνικό Πρόκλο (410-485) που προσπάθησε να το αποδείξει. Το ίδιο έπραξε και ο Πέρσης Nasireddin (1201-1274). Η όλη λογική προσπάθεια έγκειτο στο ότι πρέπει να αποδειχτεί το 5ο αίτημα, με τελευταίο μελετητή τον Lambert (1728-1777). Ο πρώτος που ξέφυγε από τον συλλογισμό αυτό ήταν ο Gauss που από το 1815 απέφυγε τον σκόπελο του 5ου Ευκλείδειου αιτήματος και ανέφερε ότι είναι «δυνατόν να αναπτυχθεί αξιωματικά μια μη "Ευκλείδεια Γεωμετρία", στην οποία θα ισχύουν τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, πλην εκείνου των παραλλήλων και μια άρνηση του αξιώματος αυτού».

Ο Ισουίτης, Φιλόσοφος και Μαθηματικός Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) παρουσίασε ένα έργο, λίγο πριν πεθάνει, παρόμοιο με του εκείνο του Πέρση Αστρονόμου, Ποιητή και Μαθηματικού Omar Khayyam (1048-131) για τον έλεγχο του 5ου αξιώματος του Ευκλείδη. Ο Moritz Pasch (1843-1930) κινήθηκε και αυτός στην πρώτη αυστηρή ανάπτυξη γεωμετρικών ιδεών, με την δημοσίευσή του το 1882, για να συμβάλουν στο πρόβλημα του 5ου αιτήματος και τη συσχέτισή του με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, αναπτύσσοντας και το θέμα «μεταξύ δυο σημείων» (betweenness). Ο Adrien-Marie Legendre (1752-1833) στις 12 διαδοχικές εκδόσεις του βιβλίου του «Στοιχεία της Γεωμετρίας» αρχίζοντας το 1794 και τελειώνοντας το 1823, ανέπτυξε πολλά θέματα σε σχέση με το αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, που είναι 180 μοίρες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Αυτά τελικά οδήγησαν στην απόδειξη του «Αν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές, τότε ισχύει το 5ο αίτημα». Αυτό είναι κρίσιμο γιατί στις Γεωμετρίες που είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από 2 ορθές δεν είναι Ευκλείδειες.

Το φιλοσοφικό περιβάλλον ήταν κατάλληλο για την ανάπτυξη της αξιωματικής θεμελίωσης κατά David Hilbert (1862-1943). Όπως βεβαίως ήταν κατάλληλο και για την παρουσίαση του έργου «Στοιχεία» από τον Ευκλείδη στην Αλεξάνδρεια. Το 1899 ο Hilbert παρουσίασε 20 υποθέσεις ως προϋπόθεση μιας σύγχρονης παρουσίασης της ισχύος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Ο φορμαλιστής Hilbert δεν όρισε τις πρωταρχικές έννοιες σημείο, ευθεία κ.λπ. Δεν προϋποθέτει την «οντολογική» ανάλυση αυτών των θεμελιακών εννοιών. Οι έννοιες σημείο, ευθεία απέχουν πολύ από τις συνήθεις έννοιες. Ο Hilbert απορρίπτει κατηγορηματικά την εποπτεία και διακρίνει 5 ομάδες αξιωμάτων: *Συμπτώσεις – μεταξύ – συμφωνίας – συνέχειας – παραλλήλων*. Τα αξιωματικά αυτά συστήματα αναπτύσσονται χάρις στις «πρωτοβάθμιες γλώσσες» και αναπτύσσονται στα πλαίσια της σύγχρονης Λογικής. Ο Hilbert δημοσιοποίησε τις απόψεις του στο δίτομο έργο του *Grundlagen der Mathematik*. Ένα από τα δύο προβλήματα είναι η ύπαρξη σημείων τομής και το άλλο η έννοια του εμβαδού. Η άψογη εργασία του Hilbert δεν ευδόκησε για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Γύρω στο 1920 υπήρχε η άποψη ανάπτυξης «κατηγοριών θεωριών», δηλαδή θεωριών που όλα τα μοντέλα είναι ισόμορφα μεταξύ τους. Βάσει όμως του έργου του Kurt Friedrich Gödel (1906-1978) και δη του «θεωρήματος της πληρότητας», τούτο δεν ισχύει. Ο Gödel στην Λογική, ήταν αντίστοιχος του Αριστοτέλη και του Russel, και το θεώρημα του (που ουσιαστικά είναι δυο Θεωρήματα) δηλώνει ότι ακόμα και με τα αξιώματα που τίθενται, σε ένα λογικό σύστημα, θα υπάρχουν λογικές προτάσεις που δεν θα μπορούν να αποδειχθούν με βάσει τα αξιώματα που ετέθησαν! Άρα το υπέροχο δημιούργημα του Hilbert δεν είχε έννοια, ως τούτο ετέθη. Απέδειξε ότι ούτε το «αξίωμα της επιλογής» (στην θεωρία συνόλων: το Καρτεσιανό γινόμενο δυο μη κενών συνόλων είναι μη κενό σύνολο), ούτε η «υπόθεση της συνεχείας» (δεν υπάρχει σύνολο που ο πληθικός του αριθμός είναι μεταξύ του πληθικού αριθμού των ακεραίων και του πληθικού των πραγματικών αριθμών) έχουν σχέση με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Η Λογική επηρέασε αποφασιστικά την περίοδο εκείνη την γενικότερη εξέλιξη των Μαθηματικών του 20^{ού} αιώνα.

4. Η δύση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, της Αριστοτελικής Λογικής

Ο θρίαμβος της Αριστοτελικής Λογικής και γενικότερα του όλου οικοδομήματος του Αριστοτέλη πολλές φορές αμφισβητήθηκε. Και όμως άντεξε αιώνες. Δεν είχε όμως αυτή την εμφανή και συνεχή αμφισβήτηση του 5^{ου} Ευκλείδειου αιτήματος. Όμως το οικοδόμημα που ανέπτυξε ο Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) είχε μια ασυνήθιστη δυναμική και η Λογική του είχε καινοτόμα στοιχεία. Είχε μια πλήρη σύλληψη του έργου τόσο του Πλάτωνα, όσο και του Αριστοτέλη. Παρέμεινε πάντα συνεπής και εκπληκτική, ακόμη και όταν *ανακαταλήφθηκε* και η Σχολή της συρρικνώθηκε. Η συνένωση του ιδεαλισμού και του ρεαλισμού είναι άριστη. Το τρίπτυχο «θέσις, σύνθεσις, αντίθεσις» αποτελεί κεντρικό πυρήνα των θέσεών του. Απέδωσε τα εύσημα στον Ηράκλειτο, από αυτόν πίστευε αρχίζει η φιλοσοφία. Το Wissenschaft der Logik δηλαδή η Επιστήμη της Λογικής, συνοψίζει τις απόψεις του για την Λογική, στηριζόμενη στην διαλεκτική. Βέβαια διατύπωσε και το υπερβολικό «Λογική είναι η Σκέψη του Θεού»! Το 1831 λίγο πριν πεθάνει αναθεώρησε το έργο του «Επιστήμη της Λογικής» που πρωτοδημοσίευσε το 1812 και ολοκληρώθηκε το 1816 με το «Υποκειμενική Λογική» (Die Subjective Logik). Η εκτίμηση που έτρεφε στον Ελεάτη Παρμενίδη (6^{ος} αι. π.Χ.) συμπίπτει με την άποψη του B. Russell. Ο Παρμενίδης ήταν ο πρώτος που διατύπωσε ότι οι αισθήσεις, από μόνες τους, δεν οδηγούν σε γνώση μα σε πλάνη. Τα θεμέλια της Λογικής του Αριστοτέλη άρχισαν να τρίζουν με το οικοδόμημα του Hegel – το αναμφισβήτητο του Αριστοτέλη κλονίζεται. Το έργο του Hegel κλονίστηκε από τον George E. Moore (1873-1958), φίλο του Russell, εισηγητές και πρωτοπόροι αμφότεροι της Αναλυτικής Φιλοσοφίας. Η θέση του Moore έναντι του «κοινού νου» είναι ότι αντίθεση με τον κοινό νου συνιστά πλάνη. Ως εκ τούτου η φιλοσοφία δεν είναι δυνατόν να υποκαταστήσει πεποιθήσεις του κοινού νου.

Η αναλυτική φιλοσοφία αποτελεί ισχυρό φιλοσοφικό ρεύμα του 20^{ού} αιώνα και αντιτίθεται στον δυσνόητο και ασαφή τρόπο με τον οποίο διατυπώνουν απόψεις οι εκπρόσωποι του εγελιανισμού. Η σαφήνεια επιτυγχάνεται, κατά τους Moore και Russell μέσα από την ανάλυση των εννοιών, των κρίσεων ή προτάσεων.

Στη Γεωμετρία δεν ήταν έτσι ξεκάθαρα: Από τον Ευκλείδη αμφισβητείτο μόνο το 5^{ο} αίτημα και επιδίωκαν να «συμφιλιωθεί» με το όλο οικοδόμημα. Άλλωστε, φαίνεται, ότι και ο ίδιος ο Ευκλείδης προβληματίστηκε με αυτό.

Η Προβολική Γεωμετρία του Girard Desargues (1591-1661) και η συμβολή στην ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας (και των Πιθανοτήτων!) από τον δικηγόρο (!) Pierre de Fermat (1607-1665) έδωσαν νέα δυναμική ώθηση στα Μαθηματικά. Το βιβλίο του το 1636 (με υλικό του γνωστό 5-6 χρόνια νωρίτερα) για την Αναλυτική Γεωμετρία, προετοίμασε το La Geometrie του Desargues to 1637. Η αλγεβροποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ήταν πλέον γεγονός. Μια άλλη λογική αντιμετώπιση της Γεωμετρίας. Όμως η Λογική «εισήλθε» αποφασιστικά με την «αξιωματική μέθοδο» (γνωστή και ως «γεωμετρία»). O Gottfried Wilhelm (von) Leibnitz (1646-1716) πιστεύω υπήρξε ο συνδετικός κρίκος των δύο. Ως φιλόσοφος εργάσθηκε στην Αναλυτική Φιλοσοφία και Λογική και ως Μαθηματικός υιοθέτησε συμβολισμούς που έγιναν αποδεκτοί στους Μαθηματικούς της εποχής του. Είναι οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται σήμερα. Άλλωστε το ευρύτατο πεδίο ερευνών του προσέφεραν την δυνατότητα αυτή. Υπήρξε ο ιδιαίτερος εκείνος μελετητής της Λογικής μεταξύ του Αριστοτέλη και των Frege και Russell, εισάγοντας πλείστες όσες έννοιες π.χ. ταυτοποίηση, κενό σύνολο κ.α.

5. Συζήτηση

Στη φιλοσοφία αναπτύχθηκε μια φυσική μετάβαση από τη μεταφυσική μέσω των θεμάτων της γνωσιολογίας, στη φιλοσοφία της γλώσσας. Οι διαλογισμοί του Μαθηματικού Frege (1848-1925) για τη γλώσσα συνδυάστηκαν με την έρευνά του στα θεμέλια της Λογικής των Μαθηματικών. Θεωρώ ευνόητο ότι οι Μαθηματικοί της εποχής του, τον αγνόησαν. Χαμένοι στον συμβολισμό και στα θεωρήματα ύπαρξης λύσης π.χ. των Διαφορικών Εξισώσεων (Κίτσος, 2009). Όμως ο Frege μπορεί να θεωρηθεί ως ο πρώτος αναλυτικός φιλόσοφος. Είχε απόλυτο δίκιο στην πίστη του ότι κάθε Μαθηματικός είναι και Φιλόσοφος και κάθε Φιλόσοφος πρέπει να είναι Μαθηματικός. Οι μεγάλες μορφές του Ευκλείδη, του Leibnitz, toy Russell πείθουν, μα υπάρχουν οι φωτεινές εξαιρέσεις του Gauss, toy Hegel κα. Ο Frege έτυχε άλλωστε της εκτίμησης του Russell, με τον οποίο συνδέθηκαν και αλληλο-επηρέασε ο ένας το έργο του άλλου, εργαζόμενοι για την πληρότητα της θεμελίωσης της Λογικής και της εφαρμογής της στα Μαθηματικά, αφού για αιώνες απασχόλησε τους επιστήμονες κυρίως η Γεωμετρία. Το έργο του Frege, Begriffsschrift, το 1879, για το οποίο δούλεψε σκληρά πέντε χρόνια, μετασχηματίζει τις ιδέες του παρελθόντος, γύρω από τον Leibnitz και Kant και προσφέρει ένα τέλος στην Λογική του Αριστοτέλη. Η Λογική του Αριστοτέλη κυριαρχούσε επί 20 αιώνες, παρόλο που δεχόταν κριτικές και αμφισβητήσεις – ο Frege προσέφερε το νέο ολοκληρωμένο, που κανείς μέχρι τότε δεν τόλμησε. *Ο Russell (που εργάστηκε για την επιστήμη – μέσω και του πειράματος – έτσι αναγνώρισε, επιβεβαίωσε το έργο του Albert Einstein (1879-1955) – αναγνώρισε την αξία στο έργο του*

Frege. Ίσως πρώτος αυτός, παρά τη σκληρή κριτική που δεχόταν ο εριστικός Frege από περίφημους Μαθηματικούς, στο περιβάλλον του, όπως από τον Cantor (1845-1915) τον Weistrass (1815-1897), τον Detekind (1831-1916). Ο Cantor, ανάμεσα στα πολλά άλλα δημιουργήματά του, εισήγαγε τα σύνολα, πάνω στα οποία στηρίχθηκε ο George Boole (1815-1864) ώστε να εισαγάγει την Άλγεβρα του. Όμως παρά την πρόσκαιρη επιτυχία της συμβολικής Λογικής, με το έργο του *The Laws of Thought* (1854), που εισήγαγε με την Άλγεβρα Boole και τα πιθανοθεωρητικά του αποτελέσματα, δεν μπόρεσε να πείσει ότι μπορεί να συμβάλλει στην Λογική αποφασιστικά.

Όμως την παραμονή της έκδοσης του 2ου τόμου του βιβλίου του Frege του, το 1902, ο Russell διατύπωσε την «αντίφαση Russell», στην επιστολή του την 16η Ιουνίου 1902. «Έστω w το κατηγόρημα του να είναι κάτι κατηγόρημα, το οποίο δεν μπορεί να κατηγορηθεί στον εαυτό του. Μπορεί το w να κατηγορηθεί στον εαυτό του; Κάθε απάντηση συνεπάγεται την αντίθεσή της. Επομένως οφείλει να συμπεράνει κανείς ότι το w δεν αποτελεί κατηγόρημα. Για τον ίδιο λόγο δεν υπάρχει κλάση (ως ολότητα) των κλάσεων εκείνων οι οποίες, ως ολότητες, δεν περιέχουν τον εαυτό τους. Από αυτό συμπεραίνω ότι υπό ορισμένες συνθήκες ένα σύνολο το οποίο είναι δυνατό να οριστεί, δεν σχηματίζει μια ολότητα» (Russell, 1956 σελ. 528).

Οι Moore και Russell είναι μια γενιά νεότεροι του Frege, ο οποίος ανδρώθηκε σε ένα φιλοσοφικό κλίμα στη Γερμανία του τέλους του 19ου αιώνα. Άρα και οι δύο είναι μάλλον απαλλαγμένοι από τον έντονο προσανατολισμό της επίδρασης του Hegel. Έτσι οι Moore και Russell έφεραν προς επιλογή προτάσεις (γνωσεολογικές ιδέες και Λογική θεμελίωση) επηρεασμένες από τις Βρετανικές παραδόσεις «περί κοινού νου» και επιμερισμού.

Ο Wittgenstein οδηγήθηκε στη σύνδεση των απόψεων του Russell και του Frege και είναι ο κύριος πυρήνας της αναλυτικής φιλοσοφίας. Η Λογική βρήκε ένα Φιλοσοφικό υπόβαθρο, πέρα από την Μαθηματικοποίηση της με τον Russell.

Ο Russell παίρνοντας ερεθίσματα και από τον Peano, στο Διεθνές Συνέδριο Φιλοσοφίας στο Παρίσι το 1900, πείστηκε ότι τα Μαθηματικά δεν ήταν παρά μια προέκταση της Λογικής, άρχισε να εργάζεται στο θέμα, και το 1903 παρουσίασε το Principles of Mathematics. Η χρυσή εποχή της χαραυγής του 20ού αιώνα είχε τις κοσμοθεωρητικές μετατροπές στη Λογική, τα Μαθηματικά, τη Φυσική κ.λπ.

Μάλιστα ο σύνδεσμος Μαθηματικών και Φυσικής απέδιδε στα Μαθηματικά νέες ιδέες π.χ. η έννοια του πίνακα, και τα πεδία χρήσης των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών π.χ. η Γεωμετρία του Riemann στο Κοσμολογικό μοντέλο.

Η Λογική αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της αξιωματικής μεθόδου και ο Frege καυτηρίασε κάποιες απόψεις του Hilbert, ο οποίος τελικά συμφώνησε ότι τα αξιώματα δεν προσδιορίζουν μοναδικά τις έννοιες που λέγεται ότι ορίζονται από αυτά. Η αλληλογραφία Hilbert-Frege δεικνύει το χάσμα που έπρεπε να γεφυρωθεί μεταξύ Λογικής και Μαθηματικών. Κάτι που έγινε σταδιακά, και όχι με τον εριστικό Frege. Κατά τον Wittgenstein (2008, σελ.121, 134): η Λογική-μπορεί κανείς να πει-δείχνει τι εννοούμε με τους όρους «πρόταση» και «γλώσσα».

Βασικός στόχος του Αριστοτέλη, όσο αργότερα και του Boole είναι ο σχηματισμός εννοιών, ενώ ο Frege αρχίζει με τις κρίσεις και όχι με τις έννοιες. Ενώ οι μαθηματικοί ορίζουν ότι οι αριθμοί προκύπτουν μέσω «αφαίρεσης» από κλάση, τα σύνολα δεν παρουσιάζουν την ερμηνεία του όρου αφαίρεσης. Έτσι η διελκυστίνδα μεταξύ Μαθηματικών και Λογικής, έδωσε ώθηση και στις δύο επιστήμες και αποχαιρέτισαν την Ευκλείδεια Γεωμετρία και την Αριστοτέλεια Λογική, που τους συντρόφευσαν αιώνες, και αποτέλεσαν την βάση της ανάπτυξής τους.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Bell, E.T. (1986). Οι Μαθηματικοί. Παν. Εκδ. Κρήτης, Ηράκλειο Κρήτης, 1997.

Bridgam, P.W. (1927). The Logic of Modern Physics. MacMilan, New York.

F.G. M EXERCICES DE GEOMETRIE, μτφρ της 5ης Γαλλικής έκδοσης υπό Δ. Γκιόκα, των Ασκήσεων Γεωμετρίας των Ιησουιτών Εκδ. Καραβία.

Fauvel, J, Gray, J. (1987, Eds). The History of Mathematics, A Reacher. Open University.

Fowler, D. (2003). The Mathematics of Plato's Academy. Clarendon Press, Oxford.

Frasser, D.A.S. (1968). The structure of Inference John Wiley and sons, Toronto.

Frege, G. (1884). Die Grundlangen der Arithetik. Wilherm Koelener, Breslan.

Greenberg, M.J. (1980). Euclidean and Non-Euclidean Geometries. W.H. Freeman and company.

Guomo, S. (2001). Αρχαία Μαθηματικά Εκδ. ΕΝΑΛΙΟΣ, Αθήνα, 2007.

Heath, T. (1981). A History of Greek Mathematics. Dover, N. York.

Heath, T. (1949). Mathematics in Aristotle. Clarendon Press, Oxford.

Kitsos, C. (2006). On the Logit Methods for Ca Problems.

In: Statistical Methods for Biomedical and Technical Systems, by F. Vonta (Ed)

Limassol, Cyprus, pg 335-340.

Kitsos, C. P. (2011). Invariant Canonical Form for the Multiple Logistic Regression. *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA), Vol 2(3), pg 267-275.*

Prakash, N. (1981). Differential Geometry. Tata McGraw-Hill, New Delhi.

RussellL,J. (1989). Catholic Astronomers of Copernican System after the Condemnation of Galileo. Ann of Science, 46, 365-386.

Russel, B. (1903). The principles of Methematics. London, 1956.

Russel, B. (1979). A History of Western Philosophy. Counterpoint. London,

Shuga, Hans (2009). Gottlob Frege μτφρ Μ.Μ. Θεοδοσίου. Παν. Εκδ. Κρήτης, 2009, Ηράκλειο Κρήτης.

Spinoza B (1667). Ηθική. μτφρ Μ. Ζωγράφου. Εκδ.Πέλλα, 1970, Αθήνα

Wittgenstein, L. (2008). Παρατηρήσεις για την θεμελίωση των Μαθηματικών. Ηράκλειο, Παν.Εκδ.Κρήτης.

Zarikas, V., Kitsos, C. P. (2015). Risk Analysis with Reference Class Forecasting Adopting Tolerance Regions. In: Theory and Practice of Risk Assessment, by Kitsos, C. P., Oliveira, T. A., Rigas, A., Gulati, S. (Eds), pg 235-247. Spinger.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης. Γ., Μαρκάτης, Σ., Σίδερης, Π. (2016). Ευκλείδεια Γεωμετρία, τεύχος Α, ΥΠΕΘ/ΙΕΠ, Αθήνα.

Κίτσος, Χ. (2009). Τεχνολογικά Μαθηματικά και Στατιστική. Τόμος Ι. Εκδ. Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

Κίτσος, Χ. (2015). Τεχνολογικά Μαθηματικά και Στατιστική. Τόμος ΙΙ. Εκδ. Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

Μπρίκας, Μ.Α. (1970). Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας, Α.Α. Παπασπύρου, Αθήνα.
https://en.wikipedia.org/wiki/Russell%27s_paradox