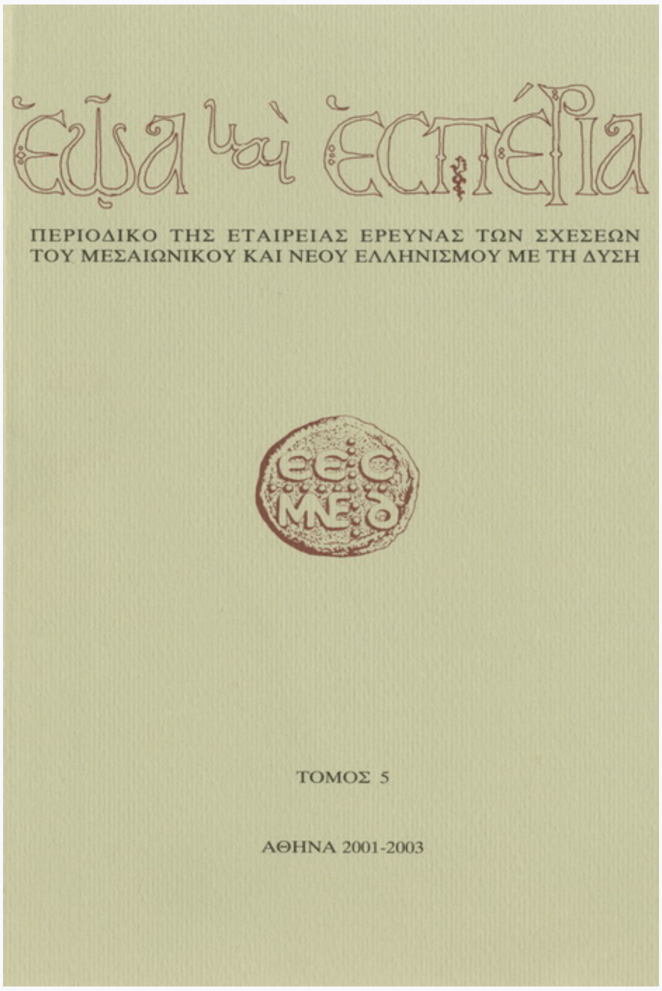
Eoa kai Esperia

Vol 5 (2003)



Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΠΑ ΤΗΣ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΙΕΝΝΑΙΟ ΕΛΛ. ΦΙΛ. ΚΩΔ. 65 (φ. llr-126r)

ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ

doi: 10.12681/eoaesperia.61

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΙΕΝΝΑΙΟ ΕΛΛ. ΦΙΛ. ΚΩΔ. 65 (φ. 11r-126r)

Γνωρίζουμε ὅτι ἐποχὲς ἀκμῆς τῶν μαθηματικῶν στὸ Βυζάντιο ὑπῆρξαν ὁ Ε', ΣΤ', Θ', Ι', ΙΓ' καὶ ΙΔ' αἰώνας[1]. Οἱ μαθηματικοὶ τῶν πρώτων Βυζαντινῶν χρόνων ἤκμασαν στὴν Ἀλεξάνδρεια. Ἐπὶ Ἰουστινιανοῦ ὅμως, λόγῳ τῆς μεγάλης τότε οἰκοδομικῆς δραστηριότητας τὸ κέντρο βάρους μετατοπίστηκε στὴν Κωνσταντινούπολη[2]. Τὸ 726 μ.Χ. ἐνῷ τὸ Πανδιδακτήριο τῆς Κωνσταντινούπολης εἶχε πλέον παρακμάσει δίδασκαν ἀκόμα λογιστικὴ καὶ γεωδαισία[3], ἡ ὁποία θεωρεῖτο κλάδος τῆς λογιστικῆς[4]. Σημειωτέον, ὅτι στὴν ἀρχαία Ἑλλά-

1. H. HUNGER, Die hochsprachliche profane Literatur der Byzantiner, München 1978, σὲ ἑλληνικὴ μετάφραση: H. HUNGER, Βυζαντινὴ Λογοτεχνία, Ἡ λόγια κοσμικὴ γραμματεία τῶν Βυζαντινῶν, τ. Γ', Μαθηματικὰ καὶ Ἀστρονομία, Φυσικὲς Ἐπιστῆμες, Ἰατρική, Πολεμικὴ Τέχνη, Νομικὴ Φιλολογία, Μουσική, μτφρ. Γ.Χ. ΜΑΚΡΗΣ, ΙΩΑΝΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ-ΑΓΟΡΑΣΤΟΥ, Τ. ΚΟΛΙΑ, ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΗ, ΣΠ. ΤΡΩΙΑΝΟΣ, Δ. ΓΙΑΝΝΟΥ, (Μορφωτικὸ Ἵδρυμα Ἐθνικῆς Τραπέζης) Ἀθήνα 1994 (στὸ ἑξῆς: H. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία), σ. 19. Κατὰ τὸ τέλος τοῦ ΙΓ' καὶ στὶς ἀρχὲς τοῦ ΙΔ' αἰ. ἡ Κωνσταντινούπολη ἦταν τὸ κέντρο τῶν ἀνωτέρων ἐπιστημῶν. Βλ. C.N. CONSTANTINIDES, Higher Education in Byzantium, Nicosia 1982 (στὸ ἑξῆς: CONSTANTINIDES, Higher Education), σ. 108.
2. Ὅ.π., σ. 26.
3. *Γεωδαισία ἐστὶν ἐπιστήμη τῶν ἐν τοῖς αἰσθητοῖς σώμασι μεγεθῶν καὶ σχημάτων διαιρετικὴ καὶ συνθετική. Λαμβάνει τὰ σχήματα οὐ τέλεια οὐδ' ἀπηκριβωμένα τῷ σωματικὴν ὕλην ὑποβεβλῆσθαι, καθώσπερ καὶ ἡ λογιστική· μετρεῖ γοῦν καὶ σωρὸν ὡς κῶνον καὶ φρέατα περιφερῆ ὡς κυλινδρικὰ σχήματα... χρῆται δέ, ὡς ἡ γεωμετρία τῇ ἀριθμητικῇ, οὕτω καὶ αὕτη τῇ λογιστικῇ... ὥσπερ ὁ γεωμέτρης τὰς λογικὰς εὐθείας μεταχειρίζεται, οὕτως ὁ γεωδαίτης ταῖς αἰσθηταῖς προσχρῆται... Πόσα μέρη μαθηματικῆς; Τῆς μὲν τιμιωτέρας καὶ πρώτης ὁλοσχερέστερα μέρη δύο, ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρία, τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ ἀσχολουμένης ἕξ, λογιστική, γεωδαισία, ὀπτική, κανονική, μηχανική, ἀστρονομική.* HERONIS ALEXANDRINI, Stereometrica et de mensuris, ed. J. Heiberg, Stutgard 1976, τ. Δ', σ. 100, 164. Βλ. καὶ εἰς: The Cambridge Medieval History, v. IV : The Byzantine Empire, part II: Government, church and civilization, ed. J.M. HUSSEY, Cambridge 1967, σὲ ἑλληνικὴ μετάφραση: Πανεπιστήμιο τοῦ Καίμπριτζ. Ἡ Ἱστορία τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας, τ. Α'-Β', μτφρ. ΝΤΟΥΝΤΟΥ ΣΑΟΥΛ, Πρόλογος Γ. Καραγιαννόπουλος, ἔκδ. Μέλισσα, Ἀθήνα 1979 στὸ: τ. Β', κεφ. XXVIII· K. VOGEL, Ἡ Βυζαντινὴ ἐπιστήμη, (στὸ ἑξῆς: VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη), σ. 808.
4. Ἡ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ ὀνομαζόταν ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνες λογιστική, καὶ δὲν ἀνῆκε στὶς μαθηματικὲς ἐπιστῆμες. Τὸ ἴδιο ἴσχυε καὶ στὸ Βυζάντιο μὲ τὴ μόνη διαφορὰ ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἐκτιμοῦσαν ἰδιαιτέρως τὴ λογιστική, ἐπειδὴ ἐφαρμοζόταν σὲ προβλήματα καθημερινῆς ζωῆς. Βλ. Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτικὴ βυζαντινοῦ βιβλίου Ἀριθμητικῆς, Ἀθήνα 1965, (στὸ ἑξῆς: ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτικὴ βυζ. βιβλίου Ἀριθμ.), σ. 12.

δα ὁ ὅρος «ἀριθμητική» σήμαινε τὴ σημερινὴ «θεωρία ἀριθμῶν». Στὴ λογιστικὴ ὅμως οἱ τύποι χρησιμοποιοῦνταν χωρὶς ἀποδείξεις καὶ οἱ γνώσεις τῶν μαθηματικῶν καὶ τῆς μηχανικῆς μεταδίδονταν ἀπὸ γενιὰ σὲ γενιὰ στὰ μέλη τῶν ὁμάδων τῶν οἰκοδόμων, τῶν ἐμπόρων καὶ τῶν βιοτεχνῶν[5]. Αὐτὸ βέβαια δέν σήμαινε κατ' ἀνάγκην, ὅτι οἱ διδάσκαλοι τῆς λογιστικῆς ἀγνοοῦσαν τὰ θεωρήματα στὰ ὁποῖα στηρίζονταν οἱ πρακτικοὶ κανόνες. Μάλιστα ὁρισμένοι ἀπὸ αὐτοὺς πρέπει νὰ ἦταν καλοὶ γνῶστες τῆς θεωρίας, καθὼς ἔδιναν λύσεις πρωτότυπες καὶ διαφορετικὲς ἀπὸ τοὺς συγχρόνους τους. Ἐπιπλέον εἶναι γνωστὸ ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἔδειχναν προσήλωση στὰ ἀρχαιοελληνικὰ πρότυπα. Διαφύλαξαν ὅλα ὅσα εἶχαν ἐπιτευχθεῖ, τὰ ὁποῖα καὶ παρέδωσαν προκειμένου νὰ συνεχισθεῖ ἡ πρόοδος στὶς θετικὲς ἐπιστῆμες. Οἱ Βυζαντινοὶ ὅμως δὲν διακρίθηκαν γιὰ τὶς γνώσεις τους στὴ θεωρία ἀλλὰ μάλλον γιὰ τὴν πρακτικὴ χρήση καὶ ἐφαρμογὴ τῶν ἐπιστημονικῶν γνώσεων στὴν καθημερινὴ ζωή[6].

Κατὰ τὸν 9ο αἰ. ὁ Λέων ὁ μαθηματικὸς ἦταν αὐτὸς ποὺ ἐπανέφερε τὴν παράδοση τῆς ἀνώτατης κρατικῆς ἐκπαίδευσης καὶ ὁ Πατριάρχης Φώτιος ὁ ὁποῖος ἦταν λάτρης τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς παιδείας «ὁδήγησε τὸ Βυζάντιο στὸν αὐθεντικὸ ἑλληνισμό», μὲ περιορισμένη ὅμως τὴν παρουσία τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν[7]. Σ' αὐτὴ τὴν περίοδο, ἡ παιδεία καὶ ἡ τέχνη εἶχαν πλέον σκοπό τὴν ἀπόκτηση ἐκείνης τῆς νοοτροπίας, ἡ ὁποία θὰ «ἀπομάκρυνε τὸν πολίτη ἀπὸ κάθε τι τὸ ἀνθρώπινο, ὥστε νὰ πραγματοποιηθεῖ ἡ ἐπιθυμητὴ στροφὴ πρὸς τὸ ὑπεράνθρωπο»[8].

Ἀργότερα (1008 μ.Χ.) ἐκδόθηκε μία μαθηματικὴ τετρακτὺς ἀγνώστου συντάκτη, ἡ ὁποία ἂν καὶ δὲν ἦταν ὑψηλοῦ ἐπιπέδου μᾶς προσέφερε ἐντούτοις σημαντικὲς πληροφορίες σχετικὰ μὲ κάποια εἴδη κειμένων, τὰ ὁποῖα παραδίδονταν στὰ πλαίσια τῆς ἐκπαιδευτικῆς πορείας ποὺ ἀκολουθεῖτο[9]. Μεταξὺ ὅσων παρέλαβε ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα τὸ Βυζάντιο, περιλαμβάνονταν

5. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 808, 809.
6. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία, σ. 14, 17, 18, 19.
7. P. LEMERLE, Le premier humanisme byzantin, Notes et remarques sur enseignement et culture à Byzance des origins au Xe siècle, Paris 1971, σὲ ἑλληνικὴ μετάφραση: P. LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός, μτφρ. ΜΑΡΙΑ ΝΥΣΤΑΖΟΠΟΥΛΟΥ-ΠΕΛΕΚΙΔΟΥ, (Μορφωτικὸ Ἵδρυμα Ἐθνικῆς Τραπέζης) Ἀθήνα 1985, (στὸ ἑξῆς: LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός), σ. 280, 281.
8. Ὅ.π., σ. 285. Ἡ ἀρχαία ἑλληνικὴ παιδεία ἀποτελοῦσε ἕνα μέσον γιὰ νὰ κατανοηθεῖ καλύτερα ἡ ὕπαρξη τοῦ Χριστοῦ, ὁ ὁποῖος ἦταν πλέον τὸ κέντρο τοῦ κόσμου. Οἱ ἔννοιες «Χριστιανισμός» καὶ «Παιδεία τοῦ Χριστοῦ» ἦταν ταυτόσημες. Ὁ Πλάτων διδασκόταν καὶ ἦταν ἀρεστός, διότι ἀπομάκρυνε τὸ μυαλὸ ἀπὸ τὰ ὑλικὰ καὶ τὴν πραγματικότητα τῶν αἰσθήσεων καὶ ὁδηγοῦσε τὸν ἄνθρωπο σὲ κόσμους ὅπου κατοικοῦν οἱ ἐκλεκτοὶ νόες τῆς ἀνθρώπινης φυλῆς. W. JEAGER. Early Christianity and Greek Paideia, Harvard 1961, σ. 12, 46.
9. H. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία σ. 39.

γνώσεις τεχνολογίας στοὺς τομεῖς τῆς μηχανικῆς, τῆς πολεμικῆς τέχνης, τῆς φαρμακευτικῆς, καὶ τῆς χημικῆς τεχνολογίας[10]. Στὰ ἀλχημικὰ κείμενα μάλιστα σώζονται συνταγὲς ποὺ παραδίδονταν ἀπὸ γενιὰ σὲ γενιὰ στοὺς μεταλλουργοὺς καὶ στοὺς χρυσοτεχνίτες, καὶ οἱ ὁποῖες περιλάμβαναν ὁδηγίες σχετικὰ μὲ τὴ συγκόλληση μετάλλων, τὴ βαφή, τὴν παρασκευὴ κραμάτων καὶ τὸν ποιοτικό τους ἔλεγχο, ὁ ὁποῖος γινόταν ἀπὸ κρατικοὺς ὑπαλλήλους[11]. Ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τῶν Παλαιολόγων ἔχουν σωθεῖ ἡ πραγματεία *περὶ χρυσοποιΐας* τοῦ Νικολάου Βλεμμύδη, καὶ ἡ *ἑρμηνεία τῆς ἐπιστήμης τῆς χρυσοχοΐας* ἑνὸς μοναχοῦ Κοσμᾶ[12]. Ὅσο καλὰ οἱ χρυσοτεχνίτες γνώριζαν ὅτι δὲν ὑπῆρχε μέθοδος μετατροπῆς ἀγενοῦς μετάλλου σὲ χρυσό, ἄλλο τόσο γνώριζαν μεθόδους ἐπαργύρωσης καὶ ἐπιχρύσωσης, μὲ τὶς ὁποῖες ἔδιναν ὄψη ἀργυροῦ ἢ χρυσοῦ σὲ ἄλλα μέταλλα ἢ σὲ κράματά τους. Ἐπειδὴ δὲ τὰ κράματα τῶν μετάλλων χρησιμοποιοῦνται τόσο στὴν ἀργυροχρυσοχοΐα ὅσο καὶ τὴ νομισματοκοπία, εἶναι ἀναγκαία ἡ γνώση τρόπων ὑπολογισμοῦ τῶν ἀναλογιῶν, ὑπὸ τὶς ὁποῖες εὑρίσκονται τὰ μέταλλα σὲ κράματα. Τέτοιου εἴδους ὑπολογισμοὶ καὶ ὅσοι ἄλλοι σχετίζονταν μὲ τὴ σημερινὴ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ περιλαμβάνονταν στὴν καλουμένη *λογιστική*.

Τὰ μαθηματικὰ καὶ ἡ ἀστρονομία, ἀπὸ τὴν ἐποχὴ ποὺ ὁ Κωνσταντῖνος ὁ Θ΄ (1042-1055)[13] ἀναδιοργάνωσε τὸ Πανδιδακτήριο τῆς Κωνσταντινούπολης, εἶναι οἱ ἐπιστῆμες ποὺ καλλιεργήθηκαν ἐντατικά[14].

Ἐπὶ τῆς βασιλείας τοῦ Μανουὴλ Α΄ Κομνηνοῦ (1143-1180), τὸ Βυζάντιο ἦταν πιὸ προηγμένο σὲ σχέση μὲ τὴ Δύση στὸν τομέα τῶν μαθηματικῶν[15]. Περὶ τὸ 1300 μ.Χ. γίνεται πλέον ὁ διαχωρισμὸς τῶν *ἐμπορικῶν* (πρακτικῶν)[16] ἀπὸ τὰ *ἀκαδημαϊκὰ* (τὰ διδασκόμενα στὶς ἀνώτερες σχολὲς) μαθηματικά.

---

10. Δημιουργικὸς ἀρχιτέκνων καὶ μηχανικὸς θεωρεῖτο ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχοντας ἐντρυφήσει στὶς τέσσερεις μαθηματικὲς ἐπιστῆμες (ἀριθμητική, γεωμετρία, μουσική, ἀστρονομία), μποροῦσε παράλληλα νὰ ἀσκεῖ μὲ ἐπιτυχία τὴν τέχνη τοῦ μεταλλουργοῦ, τοῦ χτίστη, τοῦ μαραγκοῦ, τοῦ ζωγράφου. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 827.
11. Ὅ.π., σ. 828.
12. Ὅ.π., σ. 826
13. Ὑπάρχουν ἐνδείξεις, ὅτι ὁ Κωνσταντίνος ὁ Θ΄ Μονομάχος ἦταν αὐτὸς ποὺ εἰσήγαγε τὴν τεχνικὴ ἐκπαίδευση γιὰ νὰ ἐνισχύσει τὴν ἀνερχόμενη τότε τάξη τῶν ἐμπόρων καὶ τῶν βιοτεχνῶν περιορίζοντας κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο τὴν ἐξουσία τῆς ἀριστοκρατίας· βλ. ΣΤΑΥΡΟΥΛΑ ΧΟΝΔΡΙΔΟΥ, Ὁ Κωνσταντίνος Θ΄ Μονομάχος καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τῆς τεχνικῆς ἐκπαίδευσης, *Α΄ Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (25-27 Σεπτεμβρίου 1998), (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ἰωάννινα 1999, σ. 151.
14. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 807.
15. Ὅ.π., σ. 811.
16. Κατὰ τὸν Μ. Βασίλειο: *Ἡ ἀνθρώπινη σοφία εἶναι ἡ ἐμπειρικὴ γνώση τῶν πραγμάτων τῆς ζωῆς σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία ἀποκαλοῦμε σοφοὺς τοὺς γνῶστες καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ὀφέλιμες τέχνες.* Β.

Μάλιστα ἀπὸ τὸν 14ο αἰ. τὰ πρακτικὰ μαθηματικὰ ὄχι μόνον δὲν περιλαμβάνονταν στὴ διδακτέα ὕλη τῶν ἀνωτάτων σχολῶν[17] ἀλλὰ κατὰ τὴν ἄποψη ὁρισμένων, βρίσκονταν σὲ συνεχὴ ἀνταγωνισμὸ μὲ τὴν ὕλη ποὺ διδασκόταν σ' αὐτές[18], ἀφοῦ τὰ πρακτικὰ μαθηματικὰ ἐνδιέφεραν πλῆθος ἀνθρώπων, καθὼς ἐφαρμόζονταν σὲ προβλήματα καθημερινῆς ζωῆς, καὶ ἦταν χρήσιμα σὲ πολλὰ ἐπαγγέλματα.

Μολονότι οἱ τελευταῖες δεκαετίες πρὶν τὴν ἅλωση τῆς Κωνσταντινούπολης θεωροῦνται ἀσήμαντες σὲ προσφορὰ στὰ μαθηματικά, ἡ ὕπαρξη μεγάλου πλήθους χειρογράφων[19] δείχνει αὐξημένο ἐνδιαφέρον τόσο γιὰ τὶς τέσσαρες μαθηματικὲς ἐπιστῆμες (ἀριθμητική, γεωμετρία, ἀστρονομία, μουσική), ὅσο καὶ γιὰ τὴ λογιστικὴ καὶ τὴ γεωδαισία, οἱ ὁποῖες ἦταν κλάδοι τῶν κατ' ἐξοχὴν *ἐμπορικῶν μαθηματικῶν*[20].

Ἡ βυζαντινὴ ἐποχὴ τελειώνει μὲ ἔργα προορισμένα γιὰ πρακτικὴ χρήση. Αὐτὰ εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον βιβλία ἀριθμητικῆς, δηλαδὴ συλλογὲς προβλημάτων ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ποικίλες καὶ ἐπιλεκτικὲς δημιουργίες κληροδοτημένες ἀπὸ τὴν παράδοση πολλῶν χρόνων καὶ λαῶν. Ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἐπιρροῶν ποὺ δέχθηκαν οἱ συγγραφεῖς αὐτῶν τῶν ἔργων ἀποτελεῖ ἐξαιρετικὰ ἐπίπονη διαδικασία, ἰδιατέρως, ὅταν στὶς περισσότερες περιπτώσεις διαπιστώνονται ἀλληλεπιδράσεις μεταξὺ Κινέζων, Περσῶν, Ἰνδῶν, Δυτικῶν καὶ Βυζαντινῶν. Αὐτὲς οἱ συλλογὲς περιλαμβάνουν ἐκτὸς τῶν ἄλλων καὶ στοιχεῖα πολύτιμα γιὰ τὴν ἐξέλιξη τοῦ πολιτισμοῦ καὶ τῆς γλώσσας, διότι ἀναφέρονται σὲ ζητήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς τῶν ἀνθρώπων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης (μετατροπὲς νομισμάτων, προβλήματα κληρονομιῶν, φορολογικὸ καθεστῶς, κ.ἄ.)[21].

Τὰ σχολεῖα κατὰ τοὺς βυζαντινοὺς χρόνους λειτουργοῦσαν κυρίως σὲ χώρους ἐκκλησιαστικούς. Οἱ μαθητὲς ἔμεναν συνήθως μέσα σὲ αὐτὰ[22] καὶ ἔτσι εἶχαν τὴν δυνατότητα νὰ ἀναπτύξουν στενὲς σχέσεις μεταξὺ τους, οἱ ὁποῖες συνέβαλλαν στὴ δημιουργία κλίματος ποὺ εὐνοοῦσε τὶς ἐπιστημονικὲς συζητήσεις[23] καὶ τὴν πολύωρη ἐνασχόληση μὲ τὰ γράμματα[24]. Βέβαια,

---

ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Βασιλείου Καισαρείας τοῦ Μεγάλου Ἅπαντα τὰ ἔργα, 7 (Ὁμιλίαι καὶ Λόγοι), Θεσσαλονίκη 1973 (στὸ ἑξῆς: ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Μ. Βασιλείου Ἅπαντα), σ. 369.

17. CALINGER, A contextual history of Mathematics to Euler, Prentice Hall 1999, σ. 357, 363.
18. C. B. BOYER - UT.C. MERZBACH, Ἡ Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, Ἀθήνα 1997, σ.284.
19. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 814.
20. Ὅ.π., σ. 814.
21. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτικὴ βυζ. βιβλίου Ἀριθμ., σ. 4, 15.
22. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 160.
23. Ὁ Βασίλειος ὁ Μέγας στὶς Ἐπιστολὲς του πρὸς τοὺς Νέους γράφει ὅτι διὰ τῆς μαθήσεως θὰ κατακτηθεῖ ἡ ἀρετή, καὶ τοὺς προτρέπει νὰ μὴ δέχονται ἄκριτα ὅλα ὅσα οἱ δάσκαλοι τοὺς διδάσκουν. ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Μ. Βασιλείου Ἅπαντα, σ. 369.
24. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 160.

ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸν βιενναῖο ἑλλ. φιλ. κώδ. 65 (15ος αἰ.)[25], φαίνεται νὰ ὑπῆρχαν καὶ μαθητές, οἱ ὁποῖοι γιὰ νὰ σπουδάσουν μετακινοῦνταν σὲ ἄλλη πόλη, ὅπου κατοικοῦσαν πολλοὶ μαζὶ στὸν ἴδιο χῶρο πληρώνοντας ἐνοίκιο.

Σχετικὰ μὲ τὸ εἶδος τῶν μαθητῶν γνωρίζουμε ὅτι παλαιότερα ὑπῆρχαν μαθητὲς κάθε ἡλικίας, οἱ ὁποῖοι μπορεῖ νὰ ἦταν κληρικοί, δημόσιοι ὑπάλληλοι, ἀκόμα καὶ ἀξιωματοῦχοι μαζὶ μὲ τὰ παιδιά τους[26]. Ἡ ὕπαρξη αὐτοῦ τοῦ εἴδους τοῦ ἀκροατηρίου καθόριζε ὡς ἕνα βαθμὸ καὶ τὸ περιεχόμενο τῆς διδακτέας ὕλης, ἡ ὁποία ὅσον ἀφορᾶ στὰ μαθηματικὰ τὶς περισσότερες φορὲς περιλάμβανε ὄχι μόνο κεφάλαια πρακτικῆς ἀριθμητικῆς καὶ γεωδαισίας, ἀλλὰ καὶ ἄλγεβρας. Ἐπειδὴ αὐτὰ τὰ κεφάλαια περιλαμβάνονται στὸ περιεχόμενο τοῦ βιενναίου ἑλλ. φιλ. κώδ. 65, τίθενται ἐρωτήματα σχετικὰ μὲ τὴ σύσταση τοῦ ἀκροατηρίου, στὸ ὁποῖο ἀπευθυνόταν. Τοῦτο διότι τὰ κεφάλαια τῆς λογιστικῆς καὶ τῆς γεωδαισίας ἦταν χρήσιμα κυρίως σὲ ἐμπόρους, χειροτέχνες, διοικητικοὺς ὑπαλλήλους, πρωτομάστορες, τοπογράφους, ἐνῷ τῆς ἄλγεβρας σὲ μαθητὲς σχολείου. Ἐνδεικτικὰ ἀναφέρουμε τὰ κεφάλαια τῆς ἄλγεβρας στὰ ὁποῖα ὁ συγγραφέας προτείνει λύσεις γιὰ τὶς ἐξισώσεις 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ. Οἱ λύσεις αὐτὲς εἶναι ἐσφαλμένες, ἀλλὰ μέχρι τὸ 1615 ποὺ ὁ Vieta ἀνακάλυψε τὴν γενική τους λύση[27] εἶχαν γίνει πολλὲς ἀποτυχημένες ἀπόπειρες πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνση ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς ὅλων τῶν ἐποχῶν. Εἶναι δὲ σαφὲς ὅτι ἕνα τέτοιο θέμα καθαρὰ ἐρευνητικὸ δὲν θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ ἐνδιαφέρει ἀνθρώπους ποὺ ἐπιζητοῦσαν πρακτικὲς γνώσεις, ἀφοῦ μάλιστα ἕως σήμερα οἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ διδάσκονται στοὺς μαθητὲς τῶν τελευταίων τάξεων τῶν Λυκείων.

Παλαιότερα στὰ σχολεῖα αὐτὰ ξεκινοῦσαν συνήθως μὲ ποίηση καὶ ρητορική, καὶ στὸ τέλος μάθαιναν μαθηματικά, ἂν καὶ ἡ σειρὰ δὲν ἦταν ἀπολύτως καθορισμένη. Βέβαια οἱ περισσότεροι μαθητὲς δὲν συνέχιζαν τὶς σπουδές τους στὰ ἀνώτερα μαθηματικά, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν οἱ δάσκαλοι ἦταν λιγοστοί, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπῆρχε ἔλλειψη χειρογράφων βιβλίων[28]. Καθὼς ἡ τυπογραφία ἀνακαλύπτεται πρὸς τὸ τέλος τοῦ 15ου αἰ. μ.Χ. τὰ χειρόγραφα ἀντέγραφαν πολλὲς φορὲς οἱ ἴδιοι οἱ μαθητές. Οἱ περισσότεροι δάσκαλοι (Πλανούδης, Βρυέννιος, Παχυμέρης) εἶχαν δικές τους βιβλιοθῆκες ἀλλὰ τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν ποὺ δέχονταν ἦταν περιορισμένο[29].

---

25. Ἡ μεταγραφὴ καὶ ἡ μελέτη τοῦ μαθηματικοῦ περιεχομένου αὐτοῦ τοῦ χειρογράφου ἀποτελεῖ τὸ θέμα τῆς ὑπὸ ἐκπόνηση διδακτορικῆς διατριβῆς μου.
26. Συνήθως τὸ κράτος ἀναλάμβανε τὴν μόρφωση τῶν λειτουργῶν του, καὶ ἡ ἐκκλησία τῶν κληρικῶν της. LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὑμανισμός, σ. 52, 229.
27. D.E. SMITH, History of Mathematics, τ. Β', Dover/New York 1958, σ. 465.
28. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 155.
29. Ὅ.π., σ. 157.

Ὁ βιενναῖος ἑλλ. φιλ. κώδ. 65 εἶναι χαρτῷος καὶ χρονολογεῖται στὸν 15ο αἰ. Ἀποκτήθηκε ἀπὸ τὸν Augerius von Busbeck, ὅταν αὐτὸς ἦταν πρεσβευτὴς τοῦ αὐτοκράτορα Φερδινάνδου Α′ στὴν αὐλὴ τοῦ σουλτάνου Σουλεϊμὰν Β′ (1555-1562 μ.Χ.)[30]. Περιέχει ἕνα βιβλίο ἀριθμητικῆς μὲ λυμένα προβλήματα (φ. 11r-126r), τὰ ὁποῖα καλύπτουν ἕνα εὐρύτατο πεδίο θεμάτων κατάλληλων γιὰ διδασκαλία τόσο στὸ σημερινὸ δημοτικὸ ὅσο στὸ γυμνάσιο καὶ στὸ λύκειο. Ἡ τεράστια ποικιλία τῶν προβλημάτων καθιστᾶ δύσκολο τὸν καθορισμὸ τοῦ εἴδους τῶν μαθητῶν στοὺς ὁποίους ἀπευθύνεται. Ἂν ἐπρόκειτο γιὰ ὁλοκληρωμένο πρόγραμμα διδασκαλίας, τότε κατὰ τὴν ἄποψή μας θὰ μποροῦσε τὸ ἀκροατήριο νὰ ἀποτελεῖτο ἀπὸ μαθητὲς ὅλων τῶν τάξεων τῆς σημερινῆς πρωτοβάθμιας καὶ δευτεροβάθμιας ἐκπαίδευσης, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ἄτομα τὰ ὁποῖα προορίζονταν νὰ ἀκολουθήσουν τὸ ἐπάγγελμα τοῦ κρατικοῦ λειτουργοῦ. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν προβλημάτων, ἐξαιρετικὸ ἐνδιαφέρον παρουσιάζει καὶ ἡ μαθηματικὴ ὁρολογία, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται καὶ εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἄγνωστη στὸν σύγχρονο μαθηματικό. Μερικὰ παραδείγματα εἶναι τὰ ἑξῆς:

Ὁ συγγραφέας ὀνομάζει τὸν ἀριθμὸ *ψῆφον* καὶ ὁρίζει τὸ μηδὲν ὡς *οὐδέν*· γράφει ὅτι τὸ οὐδὲν *οὐδενὸς ἐστὶ δηλωτικόν*, καὶ τὸ συμβολίζει μὲ τὸ ἀνεστραμένο h. Χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρο *μηλιούρια* ἢ *μιλούνια* ἀντὶ τοῦ ὀρθοῦ ποὺ εἶναι *μιλλιούνια*, προκειμένου νὰ δηλώσει τὰ ἑκατομμύρια. Γιὰ τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιεῖ δύο σχήματα: τὸ *δίπλευρον* (τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστῆ τοποθετοῦνται κατακόρυφα), καὶ τὸ *οἰκὸς* (*διὰ τὸ τετραγωνικῶς λαμβάνειν τοὺς ψήφους*). Γιὰ τὸν πολλαπλασιασμό, ποὺ σήμερα λέμε ὅτι ἐκτελοῦμε χιαστὶ (ὅταν π.χ. θέλουμε νὰ κάνουμε δύο κλάσματα ὁμώνυμα), χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκφραση *πολλαπλασιάζω σταυροειδῶς*. Οἱ ὅροι *ἐπιστρεπτικὸς ἀριθμὸς* καὶ *ἀνυπόστροφος*, χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσει ὁ συγγραφέας τοὺς σύνθετους καὶ τους πρώτους ἀριθμοὺς ἀντίστοιχα. Σημειωτέον, ὅτι ὁ ὅρος *πρῶτος ἀριθμὸς* χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸν ἀριθμό, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς διαιρέτες μόνο τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴ μονάδα, ἐνῶ ὁ ὅρος *σύνθετος ἀριθμὸς* δηλώνει τὸν ἀριθμό, ὁ ὁποῖος ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτες ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴ μονάδα.

Οἱ ἐκφράσεις *ἡ διὰ τῶν τριῶν μεταχείρισις* καὶ *διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν* ἀντιστοιχοῦν στὴ σημερινὴ *μέθοδο τῶν τριῶν*. Μία συνήθης ὀνομασία αὐτοῦ τοῦ κανόνα ἦταν *ἐμπόρων κλείς*, ἡ ὁποία δείχνει τὴ σημασία του στὶς ἐμπορικὲς συναλλαγές. Ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ πολὺ συχνὰ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν, καὶ δὲν παραλείπει κάθε φορά, νὰ τὴν περιγράφει ἀναλυτικά.

30. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτικὴ βυζ. βιβλίου Ἀριθμ., σ. 5.

Ὁ ὅρος *ἀφεξαίρεσις* σημαίνει τὴ σημερινὴ *ἀφαίρεση*.

Σχετικὰ μὲ τὶς ἀριθμητικὲς προόδους ἐπισημαίνουμε, ὅτι μολονότι ὁ ὅρος *ἀριθμητικὴ πρόοδος* δὲν συναντᾶται στὸ χειρόγραφο, ἐντούτοις ὑπάρχουν προβλήματα ὑπολογισμοῦ ἀθροισμάτων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι στὴν πραγματικότητα ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου[31].

Ὁ ὅρος *φυσικὴ ρίζα* χρησιμοποιεῖται γιὰ τὴν ἀκεραία ρίζα (π.χ. τὴν $\sqrt{16}$), καὶ *νόθος ρίζα* γιὰ αὐτὴ ποὺ δὲν δίνει ἀκέραιο ἀποτέλεσμα (π.χ. τὴν $\sqrt{30}$). Ὁ ὅρος *ἐφίμικτος ρίζα* χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν δύο ἀριθμῶν. Σημειωτέον, ὅτι σήμερα δὲν χρησιμοποιοῦνται ἀντίστοιχοι ὁρισμοί. Ἀξίζει νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι ὁ συγγραφέας δίνει ἀξιόλογες μεθόδους ὑπολογισμοῦ ριζῶν δεύτερης καὶ τρίτης τάξης, τὶς ὁποῖες σχολιάζουμε ἐκτενῶς στὴ διδακτορικὴ διατριβή[32].

Στὶς ἐξισώσεις πρώτου ἕως καὶ τετάρτου βαθμοῦ ὁ συγγραφέας ὀνομάζει *ἀριθμὸν* κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸ καὶ *πρᾶγμα* τὸν ἄγνωστο χ. Οἱ ὅροι *τζένσο*, *κοῦβον*, καὶ *κάδρον* χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσουν τὴν δευτέρα (τετράγωνο), τρίτη (κύβο) καὶ τετάρτη δύναμη τοῦ ἀγνώστου χ ἀντίστοιχα. Οἱ γενικὲς λύσεις γιὰ τὶς ἐξισώσεις τρίτου καὶ τέταρτου βαθμοῦ παρουσιάζουν ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον, διότι δείχνουν τὴν προσπάθεια ποὺ κατέβαλλαν τότε γιὰ τὴν εὕρεση γενικῆς λύσης. Σημειώνουμε, ὅτι ὁ σημερινὸς ὅρος *ἰσότητα δύο μελῶν* ἐμφανίζεται στὸ χειρόγραφο, ὡς *ὁμοιότητα*.

Ρομβοειδὲς[33] ὀνομάζεται κάθε πλάγιο παραλληλόγραμμο. Σήμερα βέβαια αὐτὸς ὁ ὅρος δὲν χρησιμοποιεῖται· ἐμεῖς ὀνομάζουμε ρόμβο τὸ παραλληλόγραμμο, τὸ ὁποῖο ἔχει δύο διαδοχικὲς πλευρὲς ἴσες. Τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ὀνομάζονται *τετράγωνα*. Δὲν ὑπάρχουν δὲ οἱ ὅροι τοῦ ἰσοσκελοῦς καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· ὅποτε ὁ συγγραφέας ἀναφέρεται σὲ αὐτὰ τὰ ἀποκαλεῖ *τρίγωνα μὲ δύο ἢ μὲ τρεῖς ἴσες πλευρές*. Παρατηροῦμε, ὅτι σὲ ὁρισμένα προβλήματα τοῦ χειρόγραφου μας χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος *ὕψος τριγώνου* γιὰ νὰ δηλώσει τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας ποὺ κεῖται ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση του.

Ὁ ὅρος *μηνικὸν κέρδος* ἀναφέρεται σὲ προβλήματα τόκου καὶ σημαίνει τὸ κέρδος ἑνὸς μηνός. Ὁ ὅρος *ἐνιαυτὸς* δηλώνει τὴν χρονικὴ διάρκεια ἑνὸς

31. ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ, Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ, διαίρεσης, ἀναλογιῶν καὶ προόδων σὲ βιενναῖο κώδικα τοῦ 15ου αἰ., *Β΄ Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (24-26 Σεπτεμβρίου 1999) (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ἀθήνα 2000, σ. 172.

32. ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ, Περὶ ριζῶν, *Γ΄ Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (22-24 Σεπτεμβρίου 2000) (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ρέθυμνο 2002, σ. 90-93.

33. Ὁ Παχυμέρης ὁρίζει ὡς ρομβοειδὲς *τὸ παρασεσαλευμένον ἑτερόμηκες, τὸ καὶ τὰς πλευρᾶς καὶ τὰς γωνίας ἔχον ἀνίσους* (δὲν πρόκειται ἀκριβῶς περὶ ρόμβου). Βλ. P. TANNERY, Quadrivium de Georges Pachymère, Città del Vaticano 1940, σ. 203.

ἔτους. Λείπει ἐντελῶς ὁ σημερινὸς ὅρος ἐπιτόκιο, ὁ ὁποῖος δηλώνει τὸ ἐτήσιο κέρδος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων.

Ὁ ὅρος *φίνον* (πρβλ. affinage) ἀναφέρεται στὸ καθαρότατο ἀσῆμι τῶν 12 οὐγγιῶν, καὶ *φίνον μάλαγμαν* στὸν χρυσὸ τῶν 24 καρατίων. Ὅταν ὅμως πρόκειται γιὰ παρασκευὴ ἀσημιοῦ μικρότερης καθαρότητας χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος *ἐπιβολὴ χαλκώματος*, ἐνῷ γιὰ τὴν παρασκευὴ καθαροτέρου μετάλλου ὁ ὅρος *λογαρίζω*[34].

Τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα ἀναφέρεται ὡς *κανὼν τῆς σκάδρας*, καὶ διευκρινίζεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ὅτι σκάδρα σημαίνει τετράγωνο.

Ὁ ὅρος *ἄρριζον τζάκισμα κορυφῆς* ἀναφέρεται σὲ κάποιον ἀριθμό, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι κλασματικὸς μὲ *ἄρριζον* (κατὰ τὸν συγγραφέα δὲν μπορεῖς νὰ ὑπολογίσεις τὴ ρίζα) παρανομαστή, ὅπως π.χ. 3/8, 7/14, κ.λπ. Ὁ ὅρος *ἀσχημάτιστον* ἢ *ἄτμητον τζάκισμα* χρησιμοποιεῖται γιὰ κλάσματα (π.χ. 13/14, 7/16), τὰ ὁποῖα –ὅπως ἐξηγεῖ ὁ συγγραφέας– δὲν μποροῦν νὰ λάβουν μετὰ ἀπὸ ἁπλοποίηση μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες μορφές: 1/2 ἢ 1/3 ἢ 1/4. Σύμφωνα μὲ τὸν συγγραφέα ἡ ρίζα αὐτῶν τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθεῖ.

Στὸ κεφάλαιο τῆς στερεομετρίας δὲν ἀναφέρονται κἂν οἱ ὅροι παράπλευρη ἐπιφάνεια ἢ ὁλικὴ ἐπιφάνεια στερεοῦ, καὶ ὅταν ὁ συγγραφέας ζητεῖ τὴν εὕρεση τοῦ *περιεχομένου* τοῦ στερεοῦ αὐτὸ σημαίνει τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὄγκου του.

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ χειρόγραφὸ μας χρησιμοποιεῖται πολὺ συχνὰ ὁ ὅρος *ἀπόδειξη*, ὅταν πρόκειται γιὰ ἁπλὴ ἐπαλήθευση τῆς ὀρθότητας τῶν πράξεων καὶ ὄχι γιὰ κάποια διαδικασία, ἡ ὁποία σχετίζεται μὲ τὴ θεωρία. Συχνὰ μάλιστα αὐτὴ ἡ ἐπαλήθευση πραγματοποιεῖται μὲ τὴν ἀνάπτυξη μίας διαφορετικῆς μεθόδου ἐπίλυσης τοῦ ἰδίου προβλήματος.

Ἡ ὁρολογία, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται στὸ χειρόγραφό μας ἀξιολογήθηκε προσεκτικά, καθὼς τὸ κείμενο εἶναι ἐξαιρετικὰ ἀνορθόγραφο καὶ ἡ γλῶσσα του ἔπρεπε νὰ συγκριθεῖ μὲ τὴ γλῶσσα τῶν βυζαντινῶν κειμένων τῆς ἐποχῆς. Ἡ ὁρολογία συγκρινόμενη μὲ τὴν σημερινή, παρουσιάζει, ὅπως θὰ περίμενε κανείς, ὁμοιότητες ἀλλὰ καὶ σημαντικὲς διαφορές. Ἔτσι ὁρισμένοι ὅροι, ὅπως αὐτὸς τοῦ *τριγώνου* ἢ τῆς *ρίζας* παραμένουν ἀναλλοίωτοι· οἱ περισσότεροι ὅμως δὲν χρησιμοποιοῦνται πλέον σήμερα, ἐνῶ κάποιοι ἄλλοι θεωροῦνται λανθασμένοι. Π.χ. σήμερα θὰ ἦταν σοβαρὸ λάθος νὰ ὀνομάζαμε *τε-*

34. Οἱ χρυσοεψηταὶ ἐξελαγάριζαν τήκοντες τὸν χρυσὸν εἰς μικρὰ ὀστράκινα σκεύη. Βλ. Φ. ΚΟΥΚΟΥΛΕΣ, Βυζαντινῶν βίος καὶ πολιτισμός, τ. Β', Ἀθήνα 1948, σ. 228. *Περὶ τοῦ λαγαρῖσαι τὸ χρυσίον:* βλ. Collection des Anciens Alchimistes Grecs, ed. M. BERTHELOT, τ. Β', Paris 1888, κεφ. 5, σ. 322, 333.

τράγωνο ἕνα τυχὸν ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο· τὸ ἴδιο θὰ ἴσχυε καὶ ἂν ζητούσαμε τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ *ὕψους* ἑνὸς τριγώνου ἐννοώντας τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση του.

Τὰ Βυζαντινὰ κείμενα διακρίνονται γιὰ τὴν ἁρμονία καὶ τὸν ρυθμό τους ποὺ βασίζονται στὴ συμμετρικὴ σχέση τονιζομένων συλλαβῶν καὶ συλλαβικῶν ἑνοτήτων[35]. Τοῦτο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ χειρόγραφό μας. Διαβάζοντάς το ἔχει κανεὶς τὴν αἴσθηση, ὅτι ὁ συγγραφέας του ἐπιδιώκει νὰ τὸ κάνει νὰ μοιάσει μὲ ποίημα. Πιστεύουμε, ὅτι ἡ σκοπιμότητα εἶναι ἀφενὸς μὲν αἰσθητική, διότι ὁ ρυθμὸς προσδίδει κάλλος, ἀφετέρου δὲ παιδαγωγική, διότι τὰ ἀνωτέρω χαρακτηριστικὰ τοῦ λόγου *ποιοῦσιν εὐσχήμονα τὴν ψυχὴν* αὐτῶν ποὺ ἀκούουν[36]. Ἐξ' ἄλλου, ἀναφερόμενοι καὶ στὴν ψυχολογία τῶν μαθηματικῶν, σύμφωνα μὲ σχετικὲς ἔρευνες ἔχει διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ μαθητὴς ἀφομοιώνει εὐκολώτερα τὴν ὕλη ὑπὸ μορφὴ ποιήματος, ἡ ὁποία χαρακτηρίζεται ἀπὸ μία μετρική, ἕνα ρυθμό[37].

Ἐπειδὴ ἡ γλωσσοπλαστικὴ τάση τῶν Βυζαντινῶν ἔχει δημιουργήσει ἕνα τεράστιο λεξικογραφικὸ θησαυρό, γιὰ τὸν ὁποῖο γνωρίζουμε πολὺ λίγα (σὲ κείμενα ρητορικά, ἱστοριογραφικά, νομικά, μαθηματικά), καὶ ἡ κλασσικίζουσα γλῶσσα ἀναμιγνύεται μὲ τὴν ἁπλούστερη τῶν Εὐαγγελίων καὶ τὴ δημώδη, χωρὶς νὰ ὑπάρχει σαφὴς διάκριση μεταξύ τους, οἱ ἴδιοι οἱ συγγραφεῖς (π.χ. Μιχαὴλ Ψελλός, Θεόδωρος Πρόδρομος) παρουσιάζουν διαφορετικὲς γλωσσικὲς τάσεις[38]. Βέβαια ὑπάρχει κάποιος γενικὸς κανόνας σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖο, ὅ,τι ἔχει γραφεῖ ἀπὸ ὑποτιθέμενους ἀγράμματους εἶναι δημῶδες[39]. Αὐτὸ ὅμως κατὰ τὸν Ν. Τωμαδάκη δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἀπόλυτο. Καὶ τοῦτο διότι συνήθως νόθευαν τὸν ἀττικισμὸ μὲ τὴν κοινὴ γλώσσα, ἡ ὁποία εἶχε πάρει πολλὰ στοιχεῖα ἀπὸ τὴν λατινική, ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ κοινὴ ἀκόμα νοθευόταν ἀπὸ δημώδεις τύπους. Ὅμως τὰ πράγματα φαίνεται νὰ περιπλέκονται περισσότερο ἀφοῦ ἀκόμα καὶ ἡ μεσαιωνικὴ δημώδης νοθεύεται συχνὰ ἀπὸ

35. Γ. ΗΛΙΟΥΔΗΣ, Ὁ ρυθμὸς καὶ ἡ ἁρμονία τοῦ λόγου σὲ λειτουργικὰ καὶ ὑμνογραφικὰ κείμενα τῶν Βυζαντινῶν, *Α' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (25-27 Σεπτεμβρίου 1998) (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ἰωάννινα 1999, σ. 150.
36. Ὅ.π., σ. 150.
37. Σύμφωνα μὲ τὴ μορφολογικὴ θεωρία ἡ ἀναγνώριση σημαντικῶν σχέσεων μεταξὺ τῆς παλαιᾶς καὶ τῆς νέας κατάστασης μάθησης εἶναι θεμελιώδης γιὰ τὴ μεταβίβαση τῆς μάθησης. Αὐτὸ συμβαίνει ἀκόμα καὶ ἂν ἕνας ἰδιαίτερος ρυθμὸς ἐπαναλαμβάνεται, παρὰ τὸ ὅτι οἱ στίχοι διαφέρουν κατὰ μῆκος καὶ δὲν ἔχουν καμία λέξη κοινή. Π. ΓΕΩΡΓΟΥΣΗΣ, Παιδαγωγικὴ Ψυχολογία, Ἀθήνα 1981, σ. 378.
38. Θ. ΔΕΤΟΡΑΚΗΣ, Προβλήματα τῆς βυζαντινῆς λεξικογραφίας, *Β' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (24-26 Σεπτεμβρίου 1999) (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ἀθήνα 2000, σ. 153.
39. Ν. ΤΩΜΑΔΑΚΗΣ, Κλεὶς τῆς βυζαντινῆς Φιλολογίας, Θεσσαλονίκη 1963, σ. 27.

τύπους λογιώτερους καὶ ἡ νεοελληνικὴ δημώδης ἀναμειγνύεται μὲ στοιχεῖα συντηρητικώτερα[40].

Ἀπὸ τὸν 12ο αἰ. μ.Χ. ἡ παιδεία εἶχε ὡς σκοπὸ νὰ γράφουν οἱ νέοι τὴν ἀττικὴ διάλεκτο[41], ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ παραγνωρίζουμε τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Βυζαντινός, ὅταν γράφει περὶ διδακτικῶν θεμάτων, ἀγωνίζεται νὰ διακριθεῖ ἀκόμα καὶ μὲ τὸ ὕφος τῆς γραφῆς, ἰδιαίτερα μάλιστα ὅταν καταγίνεται μὲ προβλήματα[42]. Ἡ συγγραφὴ διδακτικῶν θεμάτων συγκρίνεται μὲ αὐτὴν τῶν δοκιμίων ποὺ ἐκθέτουν ἐπιστημονικὲς γνώσεις μὲ τὴν κατάλληλη ἐκλαϊκευτικὴ μορφή. Οἱ Βυζαντινοὶ συγγραφεῖς κατεῖχαν τὴν τέχνη νὰ διδάσκουν λαμβάνοντας ὑπόψη τους τὸ ἐπίπεδο μόρφωσης τοῦ μαθητοῦ καθὼς καὶ τὸν εὐρύτερο κύκλο τῶν ἐνδιαφερόντων του, καὶ προσπαθώντας νὰ κάνουν ζωντανὴ τὴν διδασκαλία τους τὴν ἐμπλούτιζαν καὶ μὲ πνευματώδεις παρατηρήσεις ἀκόμα[43]. Ἐπὶ τῶν Παλαιολόγων ἡ ροπὴ πρὸ τὴν καθαρεύουσα φθάνει στὸ ἀποκορύφωμα καὶ ἔτσι μεγαλώνει τὸ χάσμα μεταξὺ καθομιλουμένης καὶ γραφομένης. Ἐπιπλέον δὲν πρέπει νὰ ἀγνοηθεῖ τὸ ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἔπρεπε σὲ πολλὰ ζητήματα (πολιτικά, στρατιωτικά) νὰ ἐκφράσουν πλῆθος νέων ἰδεῶν καὶ ἔτσι ἦταν πρακτικὰ ἀδύνατο νὰ περιορισθοῦν στὸ κλασσικὸ λεξιλόγιο[44].

Ὅσον ἀφορᾶ στὸ χειρόγραφό μας ἡ χρησιμοποιούμενη γλῶσσα δείχνει τὴν προσπάθεια ποὺ κατέβαλλαν κάποιοι βυζαντινοὶ γιὰ νὰ γράφουν στὴν ἐπιθυμητὴ ἀττικὴ διάλεκτο, ἴσως τεχνητὴ καὶ ἐξεζητημένη, ἴσως ἀκόμη καὶ πολὺ διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν καθομιλουμένη. Ὅμως, βάσει τῆς χρησιμοποιούμενης ἐπιστημονικῆς ὁρολογίας, θὰ μπορούσαμε νὰ χαρακτηρίσουμε τὴ γλῶσσα τοῦ χειρογράφου μας ὡς λογία, μὲ ἐμφανῆ ὅμως τὴ λατινικὴ ἐπιρροή. Βέβαια ἡ λατινικὴ ἐπιρροὴ ἀποδεικνύεται καὶ ἀπὸ ὁρισμένες μεθόδους, τὶς ὁποῖες χρησιμοποιεῖ ὁ συγγραφέας. Ἀναφέρουμε ὡς παράδειγμα τὴ *μέθοδο τῆς ταβλέττας* (τολέττας)[45], τὴν ὁποία χρησιμοποιεῖ σὲ προβλήματα ἐμπορικῶν συναλλαγῶν.

40. Ἐκεῖνο ποὺ μπορεῖ νὰ συμβαίνει εἶναι καὶ τὸ ἀντίστροφο, δηλαδὴ ἕνας λόγιος νὰ χρησιμοποιεῖ τὴν δημώδη γραφὴ καὶ κάποιος ποὺ θεωρεῖται ἀγράμματος τὴν λογία, ἢ ἀκόμα κάποιος μορφωμένος νὰ κάνει σύνθεση λογίας καὶ δημώδους γραφῆς, ὅ.π. (σημ. 39), σ. 27.

41. ΑΓΝΗ ΒΑΣΙΛΙΚΟΠΟΥΛΟΥ-ΙΩΑΝΝΙΔΟΥ, Ἡ ἀναγέννηση τῶν γραμμάτων κατὰ τὸν 12ο αἰ. στὸ Βυζάντιο καὶ ὁ Ὅμηρος, Ἀθήνα 1971, σ. 54.

42. Ν. ΤΩΜΑΔΑΚΗΣ, Βυζαντινὴ ἐπιστολογραφία, Ἀθήνα 1969, σ. 319.

43. Ὅ.π., σ. 320.

44. K. KRUMBACHER, Geschichte der byzantinischen Litteratur, München 1897, σὲ ἑλλ. μετάφρ. Γ. ΣΩΤΗΡΙΑΔΟΥ. Ἱστορία τῆς βυζαντινῆς Λογοτεχνίας, τόμος Α', ἐν Ἀθήναις 1897 [ἀνατύπωση 1974], σ. 51.

45. Ἡ λέξη tolette εἶναι τὸ ὑποκοριστικὸ τῆς λέξης tola ἢ tavola, ἡ ὁποία στὴ βενετικὴ διάλεκτο σημαίνει τράπεζα. G. LORIA. Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, Ἀθήνα 1971, τ. Β', σ. 352.

Σχετικὰ μὲ τὶς μεθόδους ἐπίλυσης προβλημάτων παρατηροῦμε ὅτι κάποιες ἀπὸ αὐτές, ὅπως π.χ. τῆς δοκιμῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς διαίρεσης καὶ τῆς πρόσθεσης πολλῶν ἀριθμῶν, σήμερα εἶναι ἄγνωστες. Μάλιστα ἀξίζει νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι σὲ καμία βαθμίδα τῆς ἐκπαίδευσης δὲν διδάσκουμε σήμερα μέθοδο δοκιμῆς ἀθροισμάτων πολλῶν προσθετέων. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὶς ρίζες τρίτης τάξης[46]· δηλαδή, δὲν διδάσκεται πλέον ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τους.

Ἡ σύγκριση τῆς μαθητικῆς ὁρολογίας καὶ τῶν μεθόδων ἐκείνης τῆς ἐποχῆς μὲ τὶς ἀντίστοιχες σημερινὲς ἀποδεικνύει, ὅτι στὸ πέρασμα τοῦ χρόνου ἄλλοι μὲν τρόποι ἐπίλυσης καὶ ἐπιστημονικοὶ ὅροι ἐξαφανίζονται, ἄλλοι δὲ ἐξελίσσονται, ἐνῶ ἄλλοι παραμένουν ἴδιοι. Αὐτὰ τὰ στοιχεῖα εἶναι σημαντικά, διότι βοηθοῦν στὸ νὰ σχηματίσουμε μία καλύτερη εἰκόνα τῆς ἐξέλιξης τῶν μεθόδων διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν, ὅσον ἀφορᾶ στὴν ἐπινόηση μεθόδων ἐπίλυσης προβλημάτων καὶ τρόπων διδασκαλίας γιὰ τὴν κατὰ τὸ δυνατὸν καλύτερη κατανόησή τους ἀπὸ τοὺς μαθητές.

46. Ὡς ρίζα τρίτης τάξης π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 8 ὁρίζουμε τὸν ἀριθμὸ 2, διότι ἰσχύει ἡ ἰσότητα $2^3 = 8$.

SUMMARY

MATHEMATICAL EDUCATION AND TERMINOLOGY IN BYZANTIUM ACCORDING TO COD. VIND. PHIL. GR. 65 (15^{TH} C.)

In this article we present some few results of our study on the mathematical content of the unpublished part (f. 11r-126r) of Cod. Vind. Phil. gr. 65 (the other part has been published by H. Hunger and K. Vogel), which is the subject of our Dr. thesis (to be submitted). This 15th century Byzantine MS includes the solution of problems of practical arithmetic, geometry and algebra, the roots of which can be traced back to antiquity. Most of them are related to practical human needs and therefore they could be used not only by practical men like merchants, metal workers, builders and other people but also by state employers to calculate taxes. The mathematical terminology used in this MS has been strongly influenced by latin works; nevertheless its comparison with modern Greek mathematical terminology reveals –apart from some differences– many identities and similarities showing the continuity of Greek mathematical tradition through the centuries.

MARIA CHALKOU