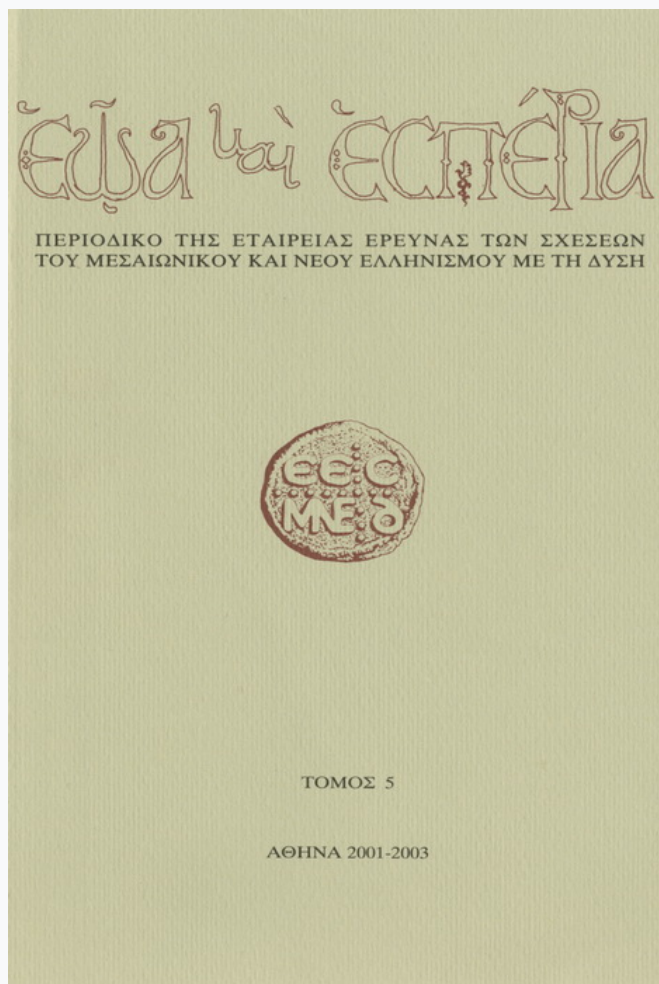


Eoa kai Esperia

Vol 5 (2003)



Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΠΑ ΤΗΣ
ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΙΕΝΝΑΙΟ ΕΛΛ. ΦΙΛ.
ΚΩΔ. 65 (φ. llr-126r)

ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ

doi: [10.12681/eaesperia.61](https://doi.org/10.12681/eaesperia.61)

To cite this article:

ΧΑΛΚΟΥ Μ. (2003). Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΠΑ ΤΗΣ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΙΕΝΝΑΙΟ ΕΛΛ. ΦΙΛ. ΚΩΔ. 65 (φ. llr-126r). *Eoa Kai Esperia*, 5, 51–62. <https://doi.org/10.12681/eaesperia.61>

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΣΤΟ BYZANTIO ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΙΕΝΝΑΙΟ ΕΛΛ. ΦΙΛ. ΚΩΔ. 65 (φ. 11r-126r)

Γνωρίζουμε ότι έποχές άκμης τών μαθηματικών στό Βυζάντιο ύπῆρξαν ό Ε', ΣΤ', Θ', Γ', ΙΓ' καί ΙΔ' αιώνας¹. Οί μαθηματικοί τών πρώτων Βυζαντινών χρόνων ήκμασαν στήν Άλεξάνδρεια. Έπί Ίουστινιανού όμως, λόγω τής μεγάλης τότε οίκοδομικής δραστηριότητας τό κέντρο βάρους μετατοπίστηκε στήν Κωνσταντινούπολη². Τό 726 μ.Χ. ένῳ τό Πανδιδακτήριο τής Κωνσταντινούπολης είχε πλέον παρακμάσει δίδασκαν άκόμα λογιστική καί γεωδαισία³, ή όποία θεωρείτο κλάδος τής λογιστικής⁴. Σημειωτέον, ότι στήν άρχαία Έλλά-

1. H. HUNGER, Die hochsprachliche profane Literatur der Byzantiner, München 1978, σέ έλληνική μετάφραση: Η. HUNGER, Βυζαντινή Λογοτεχνία, Ή λόγια κοσμική γραμματεία τών Βυζαντινών, τ. Γ', Μαθηματικά καί Άστρονομία, Φυσικές Έπιστήμες, Ίατρική, Πολεμική Τέχνη, Νομική Φιλολογία, Μουσική, μτφρ. Γ.Χ. ΜΑΚΡΗΣ, ΙΩΑΝΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ-ΑΓΟΡΑΣΤΟΥ, Τ. ΚΟΛΙΑ, ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΗ, ΣΠ. ΤΡΩΙΑΝΟΣ, Δ. ΓΙΑΝΝΟΥ, (Μορφωτικό Ίδρυμα Έθνικής Τραπέζης) Άθήνα 1994 (στό έξῆς: Η. HUNGER, Βυζ., Λογοτεχνία), σ. 19. Κατά τό τέλος τοῦ ΙΓ' καί στίς άρχές τοῦ ΙΔ' αἰ. ή Κωνσταντινούπολη ήταν τό κέντρο τών άνωτέρων έπιστημών. Βλ. C.N. CONSTANTINIDES, Higher Education in Byzantium, Nicosia 1982 (στό έξῆς: CONSTANTINIDES, Higher Education), σ. 108.
2. "Ο. π., σ. 26.
3. Γεωδαισία έστιν έπιστήμη τών έν τοῖς αἰσθητοῖς σώμασι μεγεθών καί σχημάτων διαιρετική καί συνθετική. Λαμβάνει τά σχήματα οὔ τέλεια οὔδ' άπληκρωμένα τῷ σωματικῇ ὕλην ὑποβεβλήσθαι, καθόσπερ καί ή λογιστική μετρεῖ γοῦν καί σωρὸν ὡς κῶνον καί φρέατα περιφερῇ ὡς κυλινδρικά σχήματα... χρῆται δέ, ὡς ή γεωμετρία τῇ αριθμητικῇ, οὕτω καί αὕτη τῇ λογιστικῇ... ὥσπερ ό γεωμέτρης τās λογικάς εὐθείας μεταχειρίζεται, οὕτως ό γεωδαίτης ταῖς αἰσθηταῖς προσχωρεῖται... Πόσα μέρη μαθηματικῆς; Τῆς μὲν τιμωτέρας καί πρώτης ὀλοσχερέστερα μέρη δύο, αριθμητική καί γεωμετρία, τῆς δέ περὶ τά αἰσθητὰ ασχολουμένης ἑξ, λογιστική, γεωδαισία, ὀπτική, κανονική, μηχανική, άστρονομική. HERONIS ALEXANDRINI, Stereometrica et de mensuris, ed. J. Heiberg, Stuttgart 1976, τ. Δ', σ. 100, 164. Βλ. καί εἰς: The Cambridge Medieval History, v. IV : The Byzantine Empire, part II: Government, church and civilization, ed. J.M. HUSSEY, Cambridge 1967, σέ έλληνική μετάφραση: Πανεπιστήμιο τοῦ Καμπριτζ, Ή Ίστορία τής Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας, τ. Α'-Β', μτφρ. ΝΤΟΥΝΤΟΥ ΣΑΟΥΛ, Πρόλογος Γ. Καραγιαννόπουλος, ἑκδ. Μέλισσα, Άθήνα 1979 στό: τ. Β', κεφ. XXVIII· K. VOGEL, Ή Βυζαντινή έπιστήμη, (στό έξῆς: VOGEL, Ή βυζαντινή έπιστήμη), σ. 808.
4. Ή πρακτική αριθμητική όνομαζόταν άπό τοὺς άρχαίους "Έλληνες λογιστική, καί δέν άνήκε στίς μαθηματικές έπιστήμες. Τό ἴδιο ἴσχυε καί στό Βυζάντιο μέ τή μόνη διαφορά ότι οί Βυζαντινοί έκτιμούσαν ιδιαίτερος τή λογιστική, έπειδή εφαρμοζόταν σέ προβλήματα καθημερινῆς ζωῆς. Βλ. Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτική βυζαντινοῦ βιβλίου Άριθμητικῆς, Άθήνα 1965, (στό έξῆς: ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτική βυζ., βιβλίου Άριθμ.), σ. 12.

δα ὁ ὅρος «ἀριθμητική» σήμαινε τὴ σημερινή «θεωρία ἀριθμῶν». Στὴ λογιστική ὅμως οἱ τύποι χρησιμοποιοῦνταν χωρὶς ἀποδείξεις καὶ οἱ γνώσεις τῶν μαθηματικῶν καὶ τῆς μηχανικῆς μεταδίδονταν ἀπὸ γενιὰ σὲ γενιὰ στὰ μέλη τῶν ομάδων τῶν οἰκοδόμων, τῶν ἐμπόρων καὶ τῶν βιοτεχνῶν⁵. Αὐτὸ βέβαια δὲν σήμαινε κατ' ἀνάγκην, ὅτι οἱ διδάσκαλοι τῆς λογιστικῆς ἀγνοοῦσαν τὰ θεωρήματα στὰ ὁποῖα στηρίζονταν οἱ πρακτικοὶ κανόνες. Μάλιστα ὀρισμένοι ἀπὸ αὐτοὺς πρέπει νὰ ἦταν καλοὶ γνώστες τῆς θεωρίας, καθὼς ἔδιναν λύσεις πρωτότυπες καὶ διαφορετικὲς ἀπὸ τοὺς συγχρόνους τους. Ἐπιπλέον εἶναι γνωστὸ ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἔδειχναν προσήλωση στὰ ἀρχαιοελληνικὰ πρότυπα. Διαφύλαξαν ὅλα ὅσα εἶχαν ἐπιτευχθεῖ, τὰ ὁποῖα καὶ παρέδωσαν προκειμένου νὰ συνεχισθεῖ ἡ πρόοδος στὶς θετικὲς ἐπιστῆμες. Οἱ Βυζαντινοὶ ὅμως δὲν διακρίθηκαν γιὰ τὶς γνώσεις τους στὴ θεωρία ἀλλὰ μάλλον γιὰ τὴν πρακτικὴ χρῆση καὶ ἐφαρμογὴ τῶν ἐπιστημονικῶν γνώσεων στὴν καθημερινή ζωή⁶.

Κατὰ τὸν 9ο αἰ. ὁ Λέων ὁ μαθηματικὸς ἦταν αὐτὸς ποὺ ἐπανάφερε τὴν παράδοση τῆς ἀνώτατης κρατικῆς ἐκπαίδευσης καὶ ὁ Πατριάρχης Φώτιος ὁ ὁποῖος ἦταν λάτρης τῆς ἀρχαίας ἐλληνικῆς παιδείας «ὁδήγησε τὸ Βυζάντιο στὸν αὐθεντικὸ ἐλληνισμό», μὲ περιορισμένη ὅμως τὴν παρουσία τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν⁷. Σ' αὐτὴ τὴν περίοδο, ἡ παιδεία καὶ ἡ τέχνη εἶχαν πλέον σκοπὸ τὴν ἀπόκτηση ἐκείνης τῆς νοοτροπίας, ἡ ὁποία θὰ «ἀπομάκρυνε τὸν πολίτη ἀπὸ κάθε τι τὸ ἀνθρώπινο, ὥστε νὰ πραγματοποιηθεῖ ἡ ἐπιθυμητὴ στροφὴ πρὸς τὸ ὑπεράνθρωπο»⁸.

Ἀργότερα (1008 μ.Χ.) ἐκδόθηκε μία μαθηματικὴ τετρακτὺς ἀγνώστου συντάκτη, ἡ ὁποία ἂν καὶ δὲν ἦταν ὑψηλοῦ ἐπιπέδου μᾶς προσέφερε ἐντούτοις σημαντικὲς πληροφορίες σχετικὰ μὲ κάποια εἶδη κεμένων, τὰ ὁποῖα παραδίδονταν στὰ πλαίσια τῆς ἐκπαιδευτικῆς πορείας ποὺ ἀκολοθεῖτο⁹. Μεταξὺ ὧν παρελάβε ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα τὸ Βυζάντιο, περιλαμβάνονταν

5. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 808, 809.

6. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία, σ. 14, 17, 18, 19.

7. P. LEMERLE, *Le premier humanisme byzantin*, Notes et remarques sur enseignement et culture à Byzance des origines au Xe siècle, Paris 1971, σὲ ἐλληνικὴ μετάφραση: P. LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός, μτφρ. ΜΑΡΙΑ ΝΥΣΤΑΖΟΠΟΥΛΟΥ-ΠΕΛΕΚΙΔΟΥ, (Μορφωτικό Ἰδρυμα Ἑθνικῆς Τραπέζης) Ἀθήνα 1985, (στὸ ἔξῃς: LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός), σ. 280, 281.

8. Ὁ.π., σ. 285. Ἡ ἀρχαία ἐλληνικὴ παιδεία ἀποτελοῦσε ἓνα μέσον γιὰ νὰ κατανοηθεῖ καλύτερα ἡ ὑπαρξὴ τοῦ Χριστοῦ, ὁ ὁποῖος ἦταν πλέον τὸ κέντρο τοῦ κόσμου. Οἱ ἔννοιες «Χριστιανισμός» καὶ «Παιδεία τοῦ Χριστοῦ» ἦταν ταυτόσημες. Ὁ Πλάτων διδασκόταν καὶ ἦταν ἀρεστός, διότι ἀπομάκρυνε τὸ μυαλὸ ἀπὸ τὰ ὑλικά καὶ τὴν πραγματικότητά τῶν αἰσθήσεων καὶ ὁδηγοῦσε τὸν ἄνθρωπο σὲ κόσμους ὅπου κατοικοῦν οἱ ἐκλεκτοὶ νόες τῆς ἀνθρώπινης φυλῆς. W. JEAUER. *Early Christianity and Greek Paideia*, Harvard 1961, σ. 12, 46.

9. H. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία σ. 39.

γνώσεις τεχνολογίας στους τομείς της μηχανικής, της πολεμικής τέχνης, της φαρμακευτικής, και της χημικής τεχνολογίας¹⁰. Στα αλχημικά κείμενα μάλιστα σώζονται συνταγές που παραδίδονταν από γενιά σε γενιά στους μεταλλουργούς και στους χρυσοτεχνίτες, και οι όποιες περιλάμβαναν οδηγίες σχετικά με τη συγκόλληση μετάλλων, τη βαφή, την παρασκευή κραμάτων και τον ποιοτικό τους έλεγχο, ό όποιος γινόταν από κρατικούς υπαλλήλους¹¹. Από την εποχή των Παλαιολόγων έχουν σωθεί ή πραγματεία *περί χρυσοποιίας* του Νικολάου Βλεμμύδη, και ή *έρμηνεία της έπιστήμης της χρυσοχοΐας* ενός μοναχού Κοσμά¹². Όσο καλά οι χρυσοτεχνίτες γνώριζαν ότι δέν υπήρχε μέθοδος μετατροπής άγενοϋς μετάλλου σε χρυσό, άλλο τόσο γνώριζαν μεθόδους έπαργύρωσης και έπιχρύσωσης, με τις όποιες έδιναν όψη άργυρου ή χρυσοϋ σε άλλα μέταλλα ή σε κράματά τους. Έπειδή δέ τα κράματα των μετάλλων χρησιμοποιούνται τόσο στην άργυροχρυσοχοΐα όσο και τη νομισματοκοπία, είναι αναγκαία ή γνώση τρόπων ύπολογισμού των αναλογιών, ύπό τις όποιες εύρίσκονται τα μέταλλα σε κράματα. Τέτοιου είδους ύπολογισμοί και όσοι άλλοι σχετίζονταν με τη σημερινή πρακτική άριθμητική περιλαμβάνονταν στην καλουμένη *λογιστική*.

Τα μαθηματικά και ή άστρονομία, από την εποχή που ό Κωνσταντίνος ό Θ' (1042-1055)¹³ άναδιοργάνωσε τό Πανδιδακτήριο της Κωνσταντινούπολης, είναι οι έπιστήμες που καλλιεργήθηκαν έντατικά¹⁴.

Έπί της βασιλείας του Μανουήλ Α' Κομνηνού (1143-1180), τό Βυζάντιο ήταν πιο προηγμένο σε σχέση με τη Δύση στον τομέα των μαθηματικών¹⁵. Περί τό 1300 μ.Χ. γίνεται πλέον ό διαχωρισμός των *έμπορικων* (πρακτικών)¹⁶ από τα *άκαδημαϊκά* (τά διδασκόμενα στις άνώτερες σχολές) μαθηματικά.

10. Δημιουργικός άρχιτέκτων και μηχανικός θεωρείτο εκείνος, ό όποιος έχοντας έντρύφησει στις τέσσερεις μαθηματικές έπιστήμες (άριθμητική, γεωμετρία, μουσική, άστρονομία), μπορούσε παράλληλα νά άσχει με έπιτυχία την τέχνη του μεταλλουργού, του χτίστη, του μαραγκού, του ζωγράφου. VOGEL, 'Η βυζαντινή έπιστήμη, σ. 827.

11. 'Ο.π., σ. 828.

12. 'Ο.π., σ. 826.

13. 'Υπάρχουν ένδείξεις, ότι ό Κωνσταντίνος ό Θ' Μονομάχος ήταν αυτός που εισήγαγε την τεχνική εκπαίδευση γιά νά ένισχύσει την άνερχόμενη τότε τάξη των έμπόρων και των βιοτεχνών περιορίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο την έξουσία της άριστοκρατίας· βλ. ΣΤΑΥΡΟΥΛΑ ΧΟΝΔΡΙΔΟΥ, 'Ο Κωνσταντίνος Θ' Μονομάχος και ή εισαγωγή της τεχνικής εκπαίδευσης, Α' *Συνάντηση Βυζαντινολόγων Έλλάδος και Κύπρου* (25-27 Σεπτεμβρίου 1998), (περίληψη ανακοίνωσης), 'Ιωάννινα 1999, σ. 151.

14. VOGEL, 'Η βυζαντινή έπιστήμη, σ. 807.

15. 'Ο.π., σ. 811.

16. Κατά τον Μ. Βασιλείο: 'Η ανθρώπινη σοφία είναι ή έμπειρική γνώση των πραγμάτων της ζωής σύμφωνα με την όποία αποκαλούμε σοφούς τους γνώστες καθεμιάς από τις όφέλιμες τέχνες. Β.

Μάλιστα από τον 14ο αϊ. τα πρακτικά μαθηματικά όχι μόνον δέν περιλαμβάνονταν στη διδακτέα ύλη των ανωτάτων σχολών¹⁷ αλλά κατά την άποψη όρισμένων, βρίσκονταν σέ συνεχή ανταγωνισμό με την ύλη που διδασκόταν σ' αὐτές¹⁸, άφοῦ τα πρακτικά μαθηματικά ένδιέφεραν πλῆθος ανθρώπων, καθώς εφαρμόζονταν σέ προβλήματα καθημερινής ζωής, καί ήταν χρήσιμα σέ πολλά επαγγέλματα.

Μολονότι οί τελευταίες δεκαετίες πριν την άλωση τῆς Κωνσταντινούπολης θεωροῦνται άσήμαντες σέ προσφορά στά μαθηματικά, ή ύπαρξη μεγάλου πλήθους χειρογράφων¹⁹ δείχνει αύξημένο ένδιαφέρον τόσο για τίς τέσσαρες μαθηματικές έπιστήμες (άριθμητική, γεωμετρία, άστρονομία, μουσική), όσο καί για τῆ λογιστική καί τῆ γεωδαισία, οί όποίες ήταν κλάδοι των κατ' έξοχήν *έμπορικων μαθηματικῶν*²⁰.

Η βυζαντινή έποχή τελειώνει με έργα προορισμένα για πρακτική χρήση. Αὐτά εἶναι ως επί τὸ πλείστον βιβλία άριθμητικῆς, δηλαδή συλλογές προβλημάτων που άποτελοῦνται από ποικίλες καί έπιλεκτικές δημιουργίες κληροδοτημένες από την παράδοση πολλών χρόνων καί λαών. Ο προσδιορισμός των έπιρροών που δέχθηκαν οί συγγραφείς αὐτών των έργων άποτελεῖ έξαιρετικά έπίπονη διαδικασία, ιδιαιτέρως, όταν στίς περισσότερες περιπτώσεις διαπιστώνονται άλληλεπιδράσεις μεταξύ Κινέζων, Περσών, Ίνδων, Δυτικῶν καί Βυζαντινῶν. Αὐτές οί συλλογές περιλαμβάνουν εκτός των άλλων καί στοιχεία πολύτιμα για τῆν εξέλιξη του πολιτισμοῦ καί τῆς γλώσσας, διότι αναφέρονται σέ ζητήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς των ανθρώπων τῆς έποχῆς εκείνης (μετατροπές νομισμάτων, προβλήματα κληρονομῶν, φορολογικό καθεστῶς, κ.ά.)²¹.

Τά σχολεία κατά τούς βυζαντινοὺς χρόνους λειτουργοῦσαν κυρίως σέ χώρους εκκλησιαστικούς. Οί μαθητές έμεναν συνήθως μέσα σέ αὐτά²² καί έτσι είχαν τῆν δυνατότητα νά αναπτύξουν στενές σχέσεις μεταξύ τους, οί όποίες συνέβαλλαν στή δημιουργία κλίματος που εὔνοοῦσε τίς έπιστημονικές συζητήσεις²³ καί τῆν πολύωρη ένασχόληση με τὰ γράμματα²⁴. Βέβαια,

ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Βασιλείου Καισαρείας του Μεγάλου Ἐπαντα τὰ έργα, 7 (Ἑομιλία καί Λόγοι), Θεσσαλονίκη 1973 (στό έξῆς: ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Μ. Βασιλείου Ἐπαντα), σ. 369.

17. CALINGER, A contextual history of Mathematics to Euler, Prentice Hall 1999, σ. 357, 363.

18. C. B. BOYER - UT.C. MERZBACH, Ἡ Ἱστορία των Μαθηματικῶν, Ἀθήνα 1997, σ.284.

19. VOGEL, Ἡ βυζαντινή έπιστήμη, σ. 814.

20. Ὁ.π., σ. 814.

21. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτική βυζ. βιβλίον Ἀριθμ., σ. 4, 15.

22. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 160.

23. Ὁ Βασίλειος ὁ Μέγας στίς Ἐπιστολές του πρὸς τούς Νέους γράφει ὅτι διὰ τῆς μαθησεως θά κατακτηθεῖ ή άρετή, καί τούς προτρέπει νά μή δέχονται άκριτα όλα ὅσα οί δάσκαλοι τούς διδάσκουν. ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Μ. Βασιλείου Ἐπαντα, σ. 369.

24. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 160.

ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸν βιενναῖο ἐλλ. φιλ. κώδ. 65 (15ος αἰ.)²⁵, φαίνεται νὰ ὑπῆρχαν καὶ μαθητές, οἱ ὁποῖοι γιὰ νὰ σπουδάσουν μετακινουῦνταν σὲ ἄλλη πόλη, ὅπου κατοικοῦσαν πολλοὶ μαζί στὸν ἴδιο χῶρο πληρώνοντας ἐνοίκιο.

Σχετικὰ μὲ τὸ εἶδος τῶν μαθητῶν γνωρίζουμε ὅτι παλαιότερα ὑπῆρχαν μαθητὲς κάθε ἡλικίας, οἱ ὁποῖοι μπορεῖ νὰ ἦταν κληρικοί, δημόσιοι ὑπάλληλοι, ἀκόμα καὶ ἀξιωματοῦχοι μαζί μὲ τὰ παιδιὰ τους²⁶. Ἡ ὑπαρξὴ αὐτοῦ τοῦ εἶδους τοῦ ἀκροατηρίου καθόριζε ὡς ἓνα βαθμὸ καὶ τὸ περιεχόμενο τῆς διδασκτέας ὕλης, ἡ ὁποία ὅσον ἀφορᾷ στὰ μαθηματικά τις περισσότερες φορὲς περιλάμβανε ὅχι μόνον κεφάλαια πρακτικῆς ἀριθμητικῆς καὶ γεωδαισίας, ἀλλὰ καὶ ἄλγεβρας. Ἐπειδὴ αὐτὰ τὰ κεφάλαια περιλαμβάνονται στὸ περιεχόμενο τοῦ βιενναίου ἐλλ. φιλ. κώδ. 65, τίθενται ἐρωτήματα σχετικὰ μὲ τὴ σύσταση τοῦ ἀκροατηρίου, στὸ ὁποῖο ἀπευθυνόταν. Τοῦτο διότι τὰ κεφάλαια τῆς λογιστικῆς καὶ τῆς γεωδαισίας ἦταν χρήσιμα κυρίως σὲ ἐμπόρους, χειροτέχνες, διοικητικούς ὑπαλλήλους, πρωτομάστορες, τοπογράφους, ἐνῶ τῆς ἄλγεβρας σὲ μαθητὲς σχολείου. Ἐνδεικτικὰ ἀναφέρουμε τὰ κεφάλαια τῆς ἄλγεβρας στὰ ὁποῖα ὁ συγγραφέας προτείνει λύσεις γιὰ τις ἐξιιώσεις 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ. Οἱ λύσεις αὐτὲς εἶναι ἐσφαλμένες, ἀλλὰ μέχρι τὸ 1615 πού ὁ Vieta ἀνακάλυψε τὴν γενικὴ τους λύση²⁷ εἶχαν γίνει πολλὲς ἀποτυχημένες ἀποπειρὲς πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνση ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς ὄλων τῶν ἐποχῶν. Εἶναι δὲ σαφὲς ὅτι ἓνα τέτοιο θέμα καθαρὰ ἐρευνητικὸ δὲν θὰ ἦταν δυνατόν νὰ ἐνδιαφέρει ἀνθρώπους πού ἐπιζητοῦσαν πρακτικὲς γνώσεις, ἀφοῦ μάλιστα ἕως σήμερα οἱ λύσεις τῶν ἐξιιώσεων 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ διδάσκονται στοὺς μαθητὲς τῶν τελευταίων τάξεων τῶν Λυκείων.

Παλαιότερα στὰ σχολεῖα αὐτὰ ξεκινούσαν συνήθως μὲ ποίηση καὶ ρητορική, καὶ στὸ τέλος μάθαιναν μαθηματικά, ἂν καὶ ἡ σειρὰ δὲν ἦταν ἀπολύτως καθορισμένη. Βέβαια οἱ περισσότεροι μαθητὲς δὲν συνέχιζαν τις σπουδὲς τους στὰ ἀνώτερα μαθηματικά, διότι ἀφ' ἐνὸς μὲν οἱ δάσκαλοι ἦταν λιγοστοί, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπῆρχε ἔλλειψη χειρογράφων βιβλίων²⁸. Καθὼς ἡ τυπογραφία ἀνακαλύπτεται πρὸς τὸ τέλος τοῦ 15ου αἰ. μ.Χ. τὰ χειρόγραφα ἀντέγραφαν πολλὲς φορὲς οἱ ἴδιοι οἱ μαθητὲς. Οἱ περισσότεροι δάσκαλοι (Πλανούδης, Βρυνένιος, Παχυμέρης) εἶχαν δικές τους βιβλιοθήκες ἀλλὰ τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν πού δέχονταν ἦταν περιορισμένο²⁹.

25. Ἡ μεταγραφὴ καὶ ἡ μελέτῃ τοῦ μαθηματικοῦ περιεχομένου αὐτοῦ τοῦ χειρογράφου ἀποτελεῖ τὸ θέμα τῆς ὑπὸ ἐκπόνηση διδακτορικῆς διατριβῆς μου.

26. Συνήθως τὸ κράτος ἀναλάμβανε τὴν μόρφωση τῶν λειτουργῶν του, καὶ ἡ ἐκκλησία τῶν κληρικῶν τῆς. LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός, σ. 52, 229.

27. D.E. SMITH, History of Mathematics, τ. Β', Dover/New York 1958, σ. 465.

28. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 155.

29. Ὁ.π., σ. 157.

Ὁ βιενναῖος ἑλλ. φιλ. κώδ. 65 εἶναι χαρτῶς καὶ χρονολογεῖται στὸν 15ο αἰ. Ἀποκτήθηκε ἀπὸ τὸν Augerius von Busbeck, ὅταν αὐτὸς ἦταν πρεσβευτῆς τοῦ αὐτοκράτορα Φερδινάνδου Α' στὴν αὐλὴ τοῦ σουλτάνου Σουλεϊμάν Β' (1555-1562 μ.Χ.)³⁰. Περιέχει ἓνα βιβλίο ἀριθμητικῆς μὲ λυμένα προβλήματα (φ. 11r-126r), τὰ ὁποῖα καλύπτουν ἓνα εὐρύτατο πεδίο θεμάτων κατάλληλων γιὰ διδασκαλία τόσο στὸ σημερινὸ δημοτικὸ ὅσο στὸ γυμνάσιο καὶ στὸ λύκειο. Ἡ τεράστια ποικιλία τῶν προβλημάτων καθιστᾷ δύσκολο τὸν καθορισμὸ τοῦ εἴδους τῶν μαθητῶν στοὺς ὁποίους ἀπευθύνεται. Ἄν ἐπρόκειτο γιὰ ὀλοκληρωμένο πρόγραμμα διδασκαλίας, τότε κατὰ τὴν ἀποψή μας θὰ μπορούσε τὸ ἀκροατήριο νὰ ἀποτελεῖτο ἀπὸ μαθητὲς ὅλων τῶν τάξεων τῆς σημερινῆς πρωτοβάθμιας καὶ δευτεροβάθμιας ἐκπαίδευσης, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ἄτομα τὰ ὁποῖα προορίζονταν νὰ ἀκολουθήσουν τὸ ἐπάγγελμα τοῦ κρατικοῦ λειτουργοῦ. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν προβλημάτων, ἐξαιρετικὸ ἐνδιαφέρον παρουσιάζει καὶ ἡ μαθηματικὴ ὁρολογία, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται καὶ εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἄγνωστη στὸν σύγχρονο μαθηματικὸ. Μερικὰ παραδείγματα εἶναι τὰ ἑξῆς:

Ὁ συγγραφέας ὀνομάζει τὸν ἀριθμὸ *ψηφον* καὶ ὀρίζει τὸ μηδὲν ὡς *οὐδέν*· γράφει ὅτι τὸ οὐδέν *οὐδενὸς ἐστὶ δηλωτικόν*, καὶ τὸ συμβολίζει μὲ τὸ ἀνέστραμμένο h. Χρησιμοποιεῖ τὸν ὄρο *μηλιούρια* ἢ *μιλούνια* ἀντὶ τοῦ ὀρθοῦ ποῦ εἶναι *μυλλιονία*, προκειμένου νὰ δηλώσει τὰ ἑκατομμύρια. Γιὰ τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιεῖ δύο σχήματα: τὸ *δίπλευρον* (τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοποθετοῦνται κατακόρυφα), καὶ τὸ *οἶκος* (διὰ τὸ τετραγωνικῶς λαμβάνειν τοὺς *ψηφους*). Γιὰ τὸν πολλαπλασιασμό, ποῦ σήμερα λέμε ὅτι ἐκτελοῦμε χιαστί (ὅταν π.χ. θέλουμε νὰ κάνουμε δύο κλάσματα ὁμόνυμα), χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκφραση *πολλαπλασιάζω στανροειδῶς*. Οἱ ὄροι *ἐπιστρεπτικός ἀριθμὸς* καὶ *ἀνυπόστροφος*, χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσει ὁ συγγραφέας τοὺς σύνθετους καὶ τοὺς πρῶτους ἀριθμοὺς ἀντίστοιχα. Σημειωτέον, ὅτι ὁ ὄρος *πρῶτος ἀριθμὸς* χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸν ἀριθμὸ, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς διαιρέτες μόνον τὸν ἑαυτὸν του καὶ τὴ μονάδα, ἐνῶ ὁ ὄρος *σύνθετος ἀριθμὸς* δηλώνει τὸν ἀριθμὸ, ὁ ὁποῖος ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτες ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἑαυτὸν του καὶ τὴ μονάδα.

Οἱ ἐκφράσεις ἡ *διὰ τῶν τριῶν μεταχείρισις* καὶ *διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν* ἀντιστοιχοῦν στὴ σημερινή *μέθοδο τῶν τριῶν*. Μία συνήθης ὀνομασία αὐτοῦ τοῦ κανόνα ἦταν *ἐμπόρων κλείς*, ἡ ὁποία δείχνει τὴ σημασία του στὶς ἐμπορικὲς συναλλαγές. Ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ πολὺ συχνὰ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν, καὶ δὲν παραλείπει κάθε φορὰ, νὰ τὴν περιγράψει ἀναλυτικά.

30. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτικὴ βυζ. βιβλίου Ἀριθμ., σ. 5.

Ὁ ὅρος *ἀφεξαίρεσις* σημαίνει τὴ σημερινή *ἀφαίρεση*.

Σχετικά μὲ τὶς ἀριθμητικὰς προόδους ἐπισημαίνουμε, ὅτι μολονότι ὁ ὅρος *ἀριθμητικὴ πρόοδος* δὲν συναντᾶται στὸ χειρόγραφο, ἐντούτοις ὑπάρχουν προβλήματα ὑπολογισμοῦ ἀθροισμάτων ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι εἶναι στὴν πραγματικότητα ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου³¹.

Ὁ ὅρος *φυσικὴ ρίζα* χρησιμοποιεῖται γιὰ τὴν ἀκεραία ρίζα (π.χ. τὴν $\sqrt{16}$), καὶ *νόθος ρίζα* γιὰ αὐτὴ πού δὲν δίνει ἀκέραιο ἀποτέλεσμα (π.χ. τὴν $\sqrt{30}$). Ὁ ὅρος *ἐφύμκτος ρίζα* χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸ ἀθροισμα τῶν ριζῶν δύο ἀριθμῶν. Σημειωτέον, ὅτι σήμερα δὲν χρησιμοποιοῦνται ἀντίστοιχοι ὅροι. Ἀξίζει νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι ὁ συγγραφέας δίνει ἀξιόλογες μεθόδους ὑπολογισμοῦ ριζῶν δευτέρης καὶ τρίτης τάξης, τὶς ὁποῖες σχολιάζουμε ἐκτενῶς στὴ διδακτορικὴ διατριβή³².

Στὶς ἐξιιώσεις πρώτου ἕως καὶ τετάρτου βαθμοῦ ὁ συγγραφέας ὀνομάζει *ἀριθμὸν* κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸ καὶ *πρᾶγμα* τὸν ἄγνωστο x . Οἱ ὅροι *τζένσο*, *κοῦβον*, καὶ *κάδρον* χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσουν τὴν δευτέρα (τετράγωνο), τρίτη (κύβο) καὶ τετάρτη δύναμη τοῦ ἀγνώστου x ἀντίστοιχα. Οἱ γενικὲς λύσεις γιὰ τὶς ἐξιιώσεις τρίτου καὶ τέταρτου βαθμοῦ παρουσιάζουν ἰδιαιτέρο ἐνδιαφέρον, διότι δείχνουν τὴν προσπάθεια πού κατέβαλλαν τότε γιὰ τὴν εὕρεση γενικῆς λύσης. Σημειώνουμε, ὅτι ὁ σημερινὸς ὅρος *ισότητα* *δύο μελῶν* ἐμφανίζεται στὸ χειρόγραφο, ὡς *ὁμοιότητα*.

*Ρομβοειδὲς*³³ ὀνομάζεται κάθε πλάγιο παραλληλόγραμμο. Σήμερα βέβαια αὐτὸς ὁ ὅρος δὲν χρησιμοποιεῖται· ἐμεῖς ὀνομάζουμε ρόμβο τὸ παραλληλόγραμμο, τὸ ὁποῖο ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσες. Τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ὀνομάζονται *τετράγωνα*. Δὲν ὑπάρχουν δὲ οἱ ὅροι τοῦ ἰσοσκελοῦς καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· ὅποτε ὁ συγγραφέας ἀναφέρεται σὲ αὐτὰ τὰ ἀποκαλεῖ *τρίγωνα μὲ δύο ἢ μὲ τρεῖς ἴσες πλευρὰς*. Παρατηροῦμε, ὅτι σὲ ὀρισμένα προβλήματα τοῦ χειρόγραφου μας χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος *ὑψος τριγώνου* γιὰ νὰ δηλώσει τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας πού κεῖται ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση του.

Ὁ ὅρος *μηνικὸν κέρδος* ἀναφέρεται σὲ προβλήματα τόκου καὶ σημαίνει τὸ κέρδος ἐνὸς μηνός. Ὁ ὅρος *ἐνιαυτὸς* δηλώνει τὴν χρονικὴ διάρκεια ἐνὸς

31. ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ, Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ, διαίρεσης, ἀναλογιῶν καὶ προόδων σὲ βιενναῖο κώδικα τοῦ 15ου αἰ., *Β' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (24-26 Σεπτεμβρίου 1999) (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ἀθήνα 2000, σ. 172.

32. ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ, Περί ριζῶν, *Γ' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (22-24 Σεπτεμβρίου 2000) (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ρέθυμνο 2002, σ. 90-93.

33. Ὁ Παχυμέρης ὀρίζει ὡς ρομβοειδὲς τὸ *παρασεσαλευμένον ἐτερόμηκες, τὸ καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἔχον ἀνίσους* (δὲν πρόκειται ἀκριβῶς περὶ ρόμβου). Βλ. P. TANNERY, *Quadrivium de Georges Pachymère*, Città del Vaticano 1940, σ. 203.

έτους. Λείπει έντελῶς ὁ σημερινὸς ὄρος ἐπιτόκιο, ὁ ὁποῖος δηλώνει τὸ ἐτήσιο κέρδος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων.

Ὁ ὄρος *φίνον* (πρβλ. *affinage*) ἀναφέρεται στὸ καθαρότατο ἀσημι τῶν 12 οὐγγιών, καὶ *φίνον μάλαγμαν* στὸν χρυσὸ τῶν 24 καρατίων. Ὅταν ὁμως πρόκειται γιὰ παρασκευὴ ἀσημοῦ μικρότερης καθαρότητος χρησιμοποιεῖται ὁ ὄρος *ἐπιβολὴ χαλκώματος*, ἐνῶ γιὰ τὴν παρασκευὴ καθαρότερου μετάλλου ὁ ὄρος *λογαρίζω*³⁴.

Τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα ἀναφέρεται ὡς *κανὼν τῆς σκάδρας*, καὶ διευκρινίζεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ὅτι σκάδρα σημαίνει τετράγωνο.

Ὁ ὄρος *ἄρριζον τζάκισμα κορυφῆς* ἀναφέρεται σὲ κάποιον ἀριθμὸ, τοῦ ὁποῖου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι κλασματικὸς μὲ *ἄρριζον* (κατὰ τὸν συγγραφέα δὲν μπορεῖς νὰ ὑπολογίσῃς τὴ ρίζα) παρανομαστή, ὅπως π.χ. $3/8$, $7/14$, κ.λπ. Ὁ ὄρος *ἀσχημάτιστον ἢ ἄτμητον τζάκισμα* χρησιμοποιεῖται γιὰ κλάσματα (π.χ. $13/14$, $7/16$), τὰ ὁποῖα –ὅπως ἐξηγεῖ ὁ συγγραφέας– δὲν μποροῦν νὰ λάβουν μετὰ ἀπὸ ἀπλοποίηση μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες μορφές: $1/2$ ἢ $1/3$ ἢ $1/4$. Σύμφωνα μὲ τὸν συγγραφέα ἡ ρίζα αὐτῶν τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ὑπολογισθεῖ.

Στὸ κεφάλαιο τῆς στερεομετρίας δὲν ἀναφέρονται κἂν οἱ ὄροι παράπλευρη ἐπιφάνεια ἢ ὀλικὴ ἐπιφάνεια στερεοῦ, καὶ ὅταν ὁ συγγραφέας ζητεῖ τὴν εὗρεση τοῦ *περιεχομένου* τοῦ στερεοῦ αὐτὸ σημαίνει τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὄγκου του.

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ χειρόγραφό μας χρησιμοποιεῖται πολὺ συχνὰ ὁ ὄρος *ἀπόδειξη*, ὅταν πρόκειται γιὰ ἀπλὴ ἐπαλήθευση τῆς ὀρθότητος τῶν πράξεων καὶ ὄχι γιὰ κάποια διαδικασία, ἡ ὁποία σχετίζεται μὲ τὴ θεωρία. Συχνὰ μάλιστα αὐτὴ ἡ ἐπαλήθευση πραγματοποιεῖται μὲ τὴν ἀνάπτυξη μίας διαφορετικῆς μεθόδου ἐπίλυσης τοῦ ἰδίου προβλήματος.

Ἡ ὀρολογία, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται στὸ χειρόγραφό μας ἀξιολογήθηκε προσεκτικὰ, καθὼς τὸ κείμενο εἶναι ἐξαιρετικὰ ἀνορθόγραφο καὶ ἡ γλῶσσα του ἔπρεπε νὰ συγκριθεῖ μὲ τὴ γλῶσσα τῶν βυζαντινῶν κειμένων τῆς ἐποχῆς. Ἡ ὀρολογία συγκρινόμενη μὲ τὴν σημερινή, παρουσιάζει, ὅπως θὰ περιέμενε κανεῖς, ὁμοιότητες ἀλλὰ καὶ σημαντικὲς διαφορές. Ἐτσι ὀρισμένοι ὄροι, ὅπως αὐτὸς τοῦ *τριγώνου* ἢ τῆς *ρίζας* παραμένουν ἀναλλοίωτοι· οἱ περισσότεροι ὁμως δὲν χρησιμοποιοῦνται πλέον σήμερα, ἐνῶ κάποιοι ἄλλοι θεωροῦνται λανθασμένοι. Π.χ. σήμερα θὰ ἦταν σοβαρὸ λάθος νὰ ὀνομάζαμε τε-

34. Οἱ χρυσοεπὴται ἐξελαγάριζαν τήκοντες τὸν χρυσὸν εἰς μικρὰ ὀστράκινα σκεύη. Βλ. Φ. ΚΟΥΚΟΥΛΕΣ, Βυζαντινὸν βίος καὶ πολιτισμὸς, τ. Β', Ἀθήνα 1948, σ. 228. *Περὶ τοῦ λαγαρίσαι τὸ χρυσοῖον*: βλ. Collection des Anciens Alchimistes Grecs, ed. M. BERTHELOT, τ. Β', Paris 1888, κεφ. 5, σ. 322, 333.

τράγωνο ένα τυχόν ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο· τὸ ἴδιο θὰ ἴσχυε καὶ ἂν ζητούσαμε τὸν ὑπολογισμό τοῦ ὕψους ἑνὸς τριγώνου ἐννοώντας τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση του.

Τὰ Βυζαντινὰ κείμενα διακρίνονται γιὰ τὴν ἁρμονία καὶ τὸν ρυθμὸ τους ποὺ βασίζονται στὴ συμμετρικὴ σχέση τονιζομένων συλλαβῶν καὶ συλλαβικῶν ἐνοτήτων³⁵. Τοῦτο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ χειρόγραφο μας. Διαβάζοντάς το ἔχει κανεὶς τὴν αἴσθηση, ὅτι ὁ συγγραφέας του ἐπιδιώκει νὰ τὸ κάνει νὰ μοιάσει μὲ ποίημα. Πιστεύουμε, ὅτι ἡ σκοπιμότητα εἶναι ἀφενὸς μὲν αἰσθητική, διότι ὁ ρυθμὸς προσδίδει κάλλος, ἀφετέρου δὲ παιδαγωγική, διότι τὰ ἀνωτέρω χαρακτηριστικά τοῦ λόγου *ποιοῦσιν εὐσχήμονα τὴν ψυχὴν* αὐτῶν ποὺ ἀκούουν³⁶. Ἐξ' ἄλλου, ἀναφερόμενοι καὶ στὴν ψυχολογία τῶν μαθηματικῶν, σύμφωνα μὲ σχετικὲς ἔρευνες ἔχει διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ μαθητὴς ἀφομοιώνει εὐκολώτερα τὴν ὕλη ὑπὸ μορφὴ ποιήματος, ἢ ὁποία χαρακτηρίζεται ἀπὸ μία μετρική, ἓνα ρυθμό³⁷.

Ἐπειδὴ ἡ γλωσσοπλαστικὴ τάση τῶν Βυζαντινῶν ἔχει δημιουργήσει ἓνα τεράστιο λεξικογραφικὸ θησαυρό, γιὰ τὸν ὁποῖο γνωρίζουμε πολὺ λίγα (σὲ κείμενα ρητορικά, ἱστοριογραφικά, νομικά, μαθηματικά), καὶ ἡ κλασικίζουσα γλῶσσα ἀναμειγνύεται μὲ τὴν ἀπλούστερη τῶν Εὐαγγελίων καὶ τὴ δημώδη, χωρὶς νὰ ὑπάρχει σαφὴς διάκριση μεταξὺ τους, οἱ ἴδιοι οἱ συγγραφεῖς (π.χ. Μιχαὴλ Ψελλός, Θεόδωρος Πρόδρομος) παρουσιάζουν διαφορετικὲς γλωσσικὲς τάσεις³⁸. Βέβαια ὑπάρχει κάποιος γενικὸς κανόνας σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖο, ὅ,τι ἔχει γραφεῖ ἀπὸ ὑποτιθέμενους ἀγράμματους εἶναι δημῶδες³⁹. Αὐτὸ ὅμως κατὰ τὸν Ν. Τωμαδάκη δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἀπόλυτο. Καὶ τοῦτο διότι συνήθως νόθευαν τὸν ἀττικισμό μὲ τὴν κοινὴ γλῶσσα, ἢ ὁποία εἶχε πάρεαι πολλὰ στοιχεῖα ἀπὸ τὴν λατινική, ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ κοινὴ ἀκόμα νοθεύονταν ἀπὸ δημῶδεις τύπους. Ὅμως τὰ πράγματα φαίνεται νὰ περιπλέκονται περισσότερο ἀφοῦ ἀκόμα καὶ ἡ μεσαιωνικὴ δημῶδης νοθεύεται συχνὰ ἀπὸ

35. Γ. ΗΛΙΟΥΔΗΣ, Ὁ ρυθμὸς καὶ ἡ ἁρμονία τοῦ λόγου σὲ λειτουργικά καὶ ὕμνογραφικά κείμενα τῶν Βυζαντινῶν, *Α' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (25-27 Σεπτεμβρίου 1998) (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ἰωάννινα 1999, σ. 150.

36. Ὁ.π., σ. 150.

37. Σύμφωνα μὲ τὴ μορφολογικὴ θεωρία ἡ ἀναγνώριση σημαντικῶν σχέσεων μεταξὺ τῆς παλαιᾶς καὶ τῆς νέας κατάστασης μάθησης εἶναι θεμελιώδης γιὰ τὴ μεταβίβαση τῆς μάθησης. Αὐτὸ συμβαίνει ἀκόμα καὶ ἂν ἓνας ἰδιαιτέρως ρυθμὸς ἐπαναλαμβάνεται, παρὰ τὸ ὅτι οἱ στίχοι διαφέρουν κατὰ μήκος καὶ δὲν ἔχουν καμμία λέξη κοινὴ. Π. ΓΕΩΡΓΟΥΣΗΣ, *Παιδαγωγικὴ Ψυχολογία*, Ἀθήνα 1981, σ. 378.

38. Θ. ΔΕΤΟΡΑΚΗΣ, Προβλήματα τῆς βυζαντινῆς λεξικογραφίας, *Β' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (24-26 Σεπτεμβρίου 1999) (περίληψη ἀνακοίνωσης), Ἀθήνα 2000, σ. 153.

39. Ν. ΤΩΜΑΔΑΚΗΣ, Κλείς τῆς βυζαντινῆς Φιλολογίας, Θεσσαλονίκη 1963, σ. 27.

τύπους λογιώτερους και ή νεοελληνική δημώδης άναμειγνύεται με στοιχεΐα συντηρητικώτερα⁴⁰.

Άπο τόν 12ο αϊ. μ.Χ. ή παιδεία εΐχε ως σκοπό νά γράφουν οί νέοι τήν άττική διάλεκτο⁴¹, αλλά δέν πρέπει νά παραγνωρίζουμε τó γεγονός ότι ό Βυζαντινός, όταν γράφει περί διδασκτικών θεμάτων, άγωνίζεται νά διακριθεΐ άκόμα και με τó ύφος τής γραφής, ιδιαίτερα μάλιστα όταν καταγίνεται με προβλήματα⁴². Η συγγραφή διδασκτικών θεμάτων συγκρίνεται με αύτήν τών δοκιμίων πού εκθέτουν έπιστημονικές γνώσεις με τήν κατάλληλη έκλαΐκευτική μορφή. Οί Βυζαντινοί συγγραφείς κατείχαν τήν τέχνη νά διδάσκουν λαμβάνοντας ύπόψη τους τó επίπεδο μόρφωσης τού μαθητού καθώς και τόν ευρύτερο κύκλο τών ενδιαφερόντων του, και προσπαθώντας νά κάνουν ζωντανή τήν διδασκαλία τους τήν εμπλουτίζουν και με πνευματώδεις παρατηρήσεις άκόμα⁴³. Έπί τών Παλαιολόγων ή ροπή πρò τήν καθαρεύουσα φθάνει στο άποκορύφωμα και έτσι μεγαλώνει τó χάσμα μεταξύ καθομιλουμένης και γραφομένης. Επιπλέον δέν πρέπει νά άγνοηθεΐ τó ότι οί Βυζαντινοί έπρεπε σέ πολλά ζητήματα (πολιτικά, στρατιωτικά) νά εκφράσουν πλήθος νέων ιδεών και έτσι ήταν πρακτικά άδύνατο νά περιορισθοΐν στο κλασσικό λεξιλόγιο⁴⁴.

Όσον άφορά στο χειρόγραφο μας ή χρησιμοποιούμενη γλώσσα δείχνει τήν προσπάθεια πού κατέβαλλαν κάποιοι βυζαντινοί για νά γράφουν στήν επιθυμητή άττική διάλεκτο, ίσως τεχνητή και έξεζητημένη, ίσως άκόμη και πολύ διαφορετική άπό τήν καθομιλουμένη. Όμως, βάσει τής χρησιμοποιούμενης έπιστημονικής όρολογίας, θά μπορούσαμε νά χαρακτηρίσουμε τή γλώσσα τού χειρογράφου μας ως λογία, με έμφανή όμως τή λατινική επιρροή. Βέβαια ή λατινική επιρροή άποδεικνύεται και άπό όρισμένες μεθόδους, τίς όποιες χρησιμοποιεί ό συγγραφέας. Αναφέρουμε ως παράδειγμα τή μέθοδο τής ταβλέττας (τολέττας)⁴⁵, τήν όποία χρησιμοποιεί σέ προβλήματα έμπορικών συναλλαγών.

40. Έκείνο πού μπορεί νά συμβαίνει εΐναι και τó αντίστροφο, δηλαδή ένας λόγιος νά χρησιμοποιεί τήν δημώδη γραφή και κάποιος πού θεωρείται άγράμματος τήν λογία, ή άκόμα κάποιος μορφωμένος νά κάνει σύνθεση λογίας και δημώδους γραφής, ό.π. (σημ. 39), σ. 27.

41. ΑΓΝΗ ΒΑΣΙΛΙΚΟΠΟΥΛΟΥ-ΙΩΑΝΝΙΔΟΥ, Η άναγέννηση τών γραμμάτων κατά τόν 12ο αϊ. στο Βυζάντιο και ό Όμηρος, Άθήνα 1971, σ. 54.

42. Ν. ΤΩΜΑΔΑΚΗΣ, Βυζαντινή έπιστολογραφία, Άθήνα 1969, σ. 319.

43. Ό.π., σ. 320.

44. Κ. KRUMBACHER, Geschichte der byzantinischen Litteratur, München 1897, σέ έλλ. μετάφρ. Γ. ΣΩΤΗΡΙΑΔΟΥ. Ίστορία τής βυζαντινής Λογοτεχνίας, τόμος Α', έν Άθήναις 1897 [άνατύπωση 1974], σ. 51.

45. Η λέξη toilette εΐναι τó ύποκοριστικό τής λέξης tola ή tavola, ή όποία στή βενετική διάλεκτο σημαίνει τράπεζα. G. LORIA. Ίστορία τών Μαθηματικών, Άθήνα 1971, τ. Β', σ. 352.

Σχετικά με τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων παρατηρούμε ότι κάποιες από αυτές, όπως π.χ. της δοκιμής του πολλαπλασιασμοῦ, της διαίρεσης καὶ της πρόσθεσης πολλῶν ἀριθμῶν, σήμερα εἶναι ἄγνωστες. Μάλιστα ἀξίζει νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι σὲ καμία βαθμίδα τῆς ἐκπαίδευσης δὲν διδάσκουμε σήμερα μέθοδο δοκιμῆς ἀθροισμάτων πολλῶν προσθετέων. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μετὰ τὶς ρίζες τρίτης τάξης⁴⁶, δηλαδή, δὲν διδάσκεται πλέον ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τους.

Ἡ σύγκριση τῆς μαθητικῆς ὀρολογίας καὶ τῶν μεθόδων ἐκείνης τῆς ἐποχῆς μετὰ τὶς ἀντίστοιχες σημερινές ἀποδεικνύει, ὅτι στὸ πέρασμα τοῦ χρόνου ἄλλοι μὲν τρόποι ἐπίλυσης καὶ ἐπιστημονικοὶ ὅροι ἐξαφανίζονται, ἄλλοι δὲ ἐξελίσσονται, ἐνῶ ἄλλοι παραμένουν ἴδιοι. Αὐτὰ τὰ στοιχεῖα εἶναι σημαντικά, διότι βοηθοῦν στὸ νὰ σχηματίσουμε μία καλύτερη εἰκόνα τῆς ἐξέλιξης τῶν μεθόδων διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν, ὅσον ἀφορᾷ στὴν ἐπινόηση μεθόδων ἐπίλυσης προβλημάτων καὶ τρόπων διδασκαλίας γιὰ τὴν κατὰ τὸ δυνατόν καλύτερη κατανόησή τους ἀπὸ τοὺς μαθητές.

46. Ὡς ρίζα τρίτης τάξης π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 8 ὀρίζουμε τὸν ἀριθμὸ 2, διότι ἰσχύει ἡ ἰσότητα $2^3 = 8$.

SUMMARY

MATHEMATICAL EDUCATION AND TERMINOLOGY IN BYZANTIUM ACCORDING TO COD. VIND. PHIL. GR. 65 (15TH C.)

In this article we present some few results of our study on the mathematical content of the unpublished part (f. 11r-126r) of Cod. Vind. Phil. gr. 65 (the other part has been published by H. Hunger and K. Vogel), which is the subject of our Dr. thesis (to be submitted). This 15th century Byzantine MS includes the solution of problems of practical arithmetic, geometry and algebra, the roots of which can be traced back to antiquity. Most of them are related to practical human needs and therefore they could be used not only by practical men like merchants, metal workers, builders and other people but also by state employers to calculate taxes. The mathematical terminology used in this MS has been strongly influenced by latin works; nevertheless its comparison with modern Greek mathematical terminology reveals –apart from some differences– many identities and similarities showing the continuity of Greek mathematical tradition through the centuries.

MARIA CHALKOU