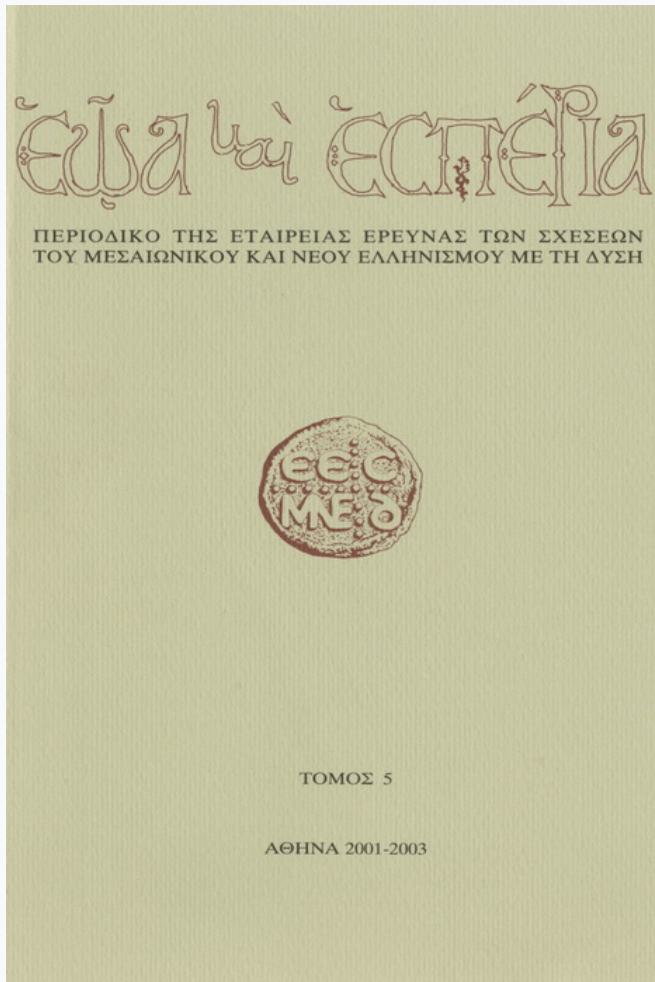


Εοα και Esperia

Vol 5 (2003)



Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΠΑ ΤΗΣ
ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΙΕΝΝΑΙΟ ΕΛΛ. ΦΙΛ.
ΚΩΔ. 65 (φ. llr-126r)

ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ

doi: [10.12681/eoaesperia.61](https://doi.org/10.12681/eoaesperia.61)

To cite this article:

ΧΑΛΚΟΥ Μ. (2003). Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΠΑ ΤΗΣ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΙΕΝΝΑΙΟ ΕΛΛ. ΦΙΛ. ΚΩΔ. 65 (φ. llr-126r). *Eoa Kai Esperia*, 5, 51–62. <https://doi.org/10.12681/eoaesperia.61>

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΙΕΝΝΑΙΟ ΕΛΛ. ΦΙΑ. ΚΩΔ. 65 (φ. 11r-126r)

Γνωρίζουμε ότι έποχές άκμης τών μαθηματικών στό Βυζάντιο ύπῆρξαν ό Ε', ΣΤ', Θ', Ι', ΙΓ' και ΙΔ' αιώνας¹. Οί μαθηματικοί τών πρώτων Βυζαντινών χρόνων ήχμασαν στην Άλεξάνδρεια. Έπί Ίουστινιανού όμως, λόγω τής μεγάλης τότε οίκοδομικής δραστηριότητας τό κέντρο βάρους μετατοπίστηκε στην Κωνσταντινούπολη². Τό 726 μ.Χ. ενώ τό Πανδιδασκῆριο τής Κωνσταντινούπολης είχε πλέον παρακμάσει δίδασκαν άκόμα λογιστική και γεωδαισία³, ή όποία θεωρείτο κλάδος τής λογιστικής⁴. Σημειωτέον, ότι στην άρχαία Έλλά-

-
1. H. HUNGER, Die hochsprachliche profane Literatur der Byzantiner, München 1978, σέ έλληνική μετάφραση: Η. HUNGER, Βυζαντινή Λογοτεχνία, Έ λόγια κοσμική γραμματεία τών Βυζαντινών, τ. Γ', Μαθηματικά και Άστρονομία, Φυσικές Έπιστήμες, Ίατρική, Πολεμική Τέχνη, Νομική Φιλολογία, Μουσική, μτφρ. Γ.Χ. ΜΑΚΡΗΣ, ΙΩΑΝΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ-ΑΓΟΡΑΣΤΟΥ, Τ. ΚΟΛΙΑ, ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΗ, ΣΠ. ΤΡΩΙΑΝΟΣ, Δ. ΓΙΑΝΝΟΥ, (Μορφωτικό Ίδρυμα Έθνικής Τραπέζης) Άθήνα 1994 (στό έξῆς: Η. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία), σ. 19. Κατά τό τέλος του ΙΓ' και στις άρχές του ΙΔ' αί. ή Κωνσταντινούπολη ήταν τό κέντρο τών άνωτέρων έπιστημών. Βλ. C.N. CONSTANTINIDES, Higher Education in Byzantium, Nicosia 1982 (στό έξῆς: CONSTANTINIDES, Higher Education), σ. 108.
 2. Ό.π., σ. 26.
 3. Γεωδαισία έστιν έπιστήμη τών έν τοίς αισθητοίς σώμασι μεγεθών και σχημάτων διαιρετική και συνθετική. Λαμβάνει τά σχήματα ού τέλεια ούδ' άπληρωμένα τῶ σωματικῆν ὕλην ὑποβεβλήσθαι, καθώσπερ και ή λογιστική μετρεί γούν και σωρόν ως κῶνον και φρέατα περιφεροῆ ως κυλινδρικά σχήματα... χοῖται δέ, ως ή γεωμετρία τῆ άριθμητική, οὔτω και αύτη τῆ λογιστική... ὡσπερ ό γεωμέτρης τās λογικάς εὐθείας μεταχειρίζεται, οὔτως ό γεωδαίτης ταίς αισθηταίς προσχοῖται... Πόσα μέρη μαθηματικής; Τῆς μὲν τιμωτέρας και πρώτης ὀλοσχερέστερα μέρη δύο, άριθμητική και γεωμετρία, τῆς δέ περι τά αισθητά άσχολονμένης ἔξ, λογιστική, γεωδαισία, όπτική, κανονική, μηχανική, άστρονομική. HERONIS ALEXANDRINI, Stereometrica et de mensuris, ed. J. Heiberg, Stuttgart 1976, τ. Δ', σ. 100, 164. Βλ. και εις: The Cambridge Medieval History, v. IV : The Byzantine Empire, part II: Government, church and civilization, ed. J.M. HUSSEY, Cambridge 1967, σέ έλληνική μετάφραση: Πανεπιστήμιο του Καμπριτζ, Έ Ίστορία τής Βυζαντινῆς Άυτοκρατορίας, τ. Α'-Β', μτφρ. ΝΤΟΥΝΤΟΥ ΣΑΟΥΛ, Πρόλογος Γ. Καραγιαννόπουλος, έκδ. Μέλισσα, Άθήνα 1979 στό: τ. Β', κεφ. XXVIII· K. VOGEL, Έ Βυζαντινή έπιστήμη, (στό έξῆς: VOGEL, Έ βυζαντινή έπιστήμη), σ. 808.
 4. Έ πρακτική άριθμητική όνομαζόταν από τούς άρχαίους Έλληνες λογιστική, και δέν άνῆκε στις μαθηματικές έπιστήμες. Τό ίδιο ισχυρε και στό Βυζάντιο με τῆ μόνη διαφορά ότι οι Βυζαντινοί έπιμύσαν ιδιαιτέρως τῆ λογιστική, έπειδή εφαρμόζόταν σέ προβλήματα καθημερινῆς ζωῆς. Βλ. Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτική βυζαντινού βιβλίου Άριθμητικής, Άθήνα 1965, (στό έξῆς: ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτική βυζ. βιβλίου Άριθμ.), σ. 12.

δα ό όρος «ἀριθμητική» σήμαινε τή σημερινή «θεωρία ἀριθμῶν». Στή λογιστική όμως οί τύποι χρησιμοποιούνταν χωρίς ἀποδείξεις και οί γνώσεις τῶν μαθηματικῶν και τῆς μηχανικῆς μεταδίδονταν ἀπό γενιά σέ γενιά στά μέλη τῶν ομάδων τῶν οἰκοδόμων, τῶν ἐμπόρων και τῶν βιοτεχνῶν⁵. Αὐτό βέβαια δέν σήμαινε κατ' ἀνάγκη, ὅτι οί διδάσκαλοι τῆς λογιστικῆς ἀγνοοῦσαν τά θεωρήματα στά ὁποῖα στηρίζονταν οί πρακτικοί κανόνες. Μάλιστα ὀρισμένοι ἀπό αὐτούς πρέπει νά ἦταν καλοί γνώστες τῆς θεωρίας, καθῶς ἔδιναν λύσεις πρωτότυπες και διαφορετικῆς ἀπό τούς συγχρόνους τους. Ἐπιπλέον εἶναι γνωστό ὅτι οί Βυζαντινοί ἔδειχναν προσήλωση στά ἀρχαιοελληνικά πρότυπα. Διαφύλαξαν ὅλα ὅσα εἶχαν ἐπιτευχθεῖ, τά ὁποῖα και παρέδωσαν προκειμένου νά συνεχισθεῖ ἡ πρόοδος στίς θετικῆς ἐπιστήμες. Οἱ Βυζαντινοί ὁμως δέν διακρίθηκαν γιά τίς γνώσεις τους στή θεωρία ἀλλά μάλλον γιά τήν πρακτική χρήση και ἐφαρμογή τῶν ἐπιστημονικῶν γνώσεων στήν καθημερινή ζωή⁶.

Κατά τόν 9ο αἰ. ὁ Λέων ὁ μαθηματικός ἦταν αὐτός πού ἐπανάφερε τήν παράδοση τῆς ἀνώτατης κρατικῆς ἐκπαίδευσης και ὁ Πατριάρχης Φώτιος ὁ ὁποῖος ἦταν λάτρης τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς παιδείας «ὀδήγησε τὸ Βυζάντιο στόν αὐθεντικό ἑλληνισμό», μέ περιορισμένη ὁμως τήν παρουσία τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν⁷. Σ' αὐτή τήν περίοδο, ἡ παιδεία και ἡ τέχνη εἶχαν πλέον σκοπό τήν ἀπόκτηση ἐκείνης τῆς νοσοτροπίας, ἡ ὁποῖα θά «ἀπομάκρυνε τόν πολίτη ἀπό κάθε τι τὸ ἀνθρώπινο, ὥστε νά πραγματοποιηθεῖ ἡ ἐπιθυμητή στροφή πρὸς τὸ ὑπεράνθρωπο»⁸.

Ἀργότερα (1008 μ.Χ.) ἐκδόθηκε μία μαθηματική τετρακτὺς ἀγνώστου συντάκτη, ἡ ὁποῖα ἂν και δέν ἦταν ὑψηλοῦ ἐπιπέδου μᾶς προσέφερε ἐντούτοις σημαντικῆς πληροφορίας σχετικά μέ κάποια εἶδη κειμένων, τά ὁποῖα παραδίδονταν στά πλαίσια τῆς ἐκπαιδευτικῆς πορείας πού ἀκολοθεῖτο⁹. Μεταξὺ ὅσων παρέλαβε ἀπό τήν ἀρχαιότητα τὸ Βυζάντιο, περιλαμβάνονταν

5. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 808, 809.

6. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία, σ. 14, 17, 18, 19.

7. P. LEMERLE, Le premier humanisme byzantin, Notes et remarques sur enseignement et culture à Byzance des origines au Xe siècle, Paris 1971, σέ ἑλληνικὴ μετάφραση: P. LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός, μτφρ. ΜΑΡΙΑ ΝΥΣΤΑΖΟΠΟΥΛΟΥ-ΠΕΛΕΚΙΔΟΥ, (Μορφωτικό Ἴδρυμα Ἑθνικῆς Τραπέζης) Ἀθήνα 1985, (στό ἔξῃ: LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός), σ. 280, 281.

8. Ὁ.π., σ. 285. Ἡ ἀρχαία ἑλληνικὴ παιδεία ἀποτελοῦσε ἕνα μέσον γιά νά κατανοηθεῖ καλύτερα ἡ ὑπαρξη τοῦ Χριστοῦ, ὁ ὁποῖος ἦταν πλέον τὸ κέντρο τοῦ κόσμου. Οἱ ἔννοιες «Χριστιανισμός» και «Παιδεία τοῦ Χριστοῦ» ἦταν ταυτόσημες. Ὁ Πλάτων διδασκόταν και ἦταν ἀρεστός, διότι ἀπομάκρυνε τὸ μυαλό ἀπό τὰ ὑλικά και τήν πραγματικότητα τῶν αἰσθήσεων και ὀδηγοῦσε τὸν ἄνθρωπο σέ κόσμους ὅπου κατοικοῦν οἱ ἐκλεκτοὶ νόες τῆς ἀνθρώπινης φυλῆς. W. JAEGER. Early Christianity and Greek Paideia, Harvard 1961, σ. 12, 46.

9. H. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία σ. 39.

γνώσεις τεχνολογίας στους τομείς της μηχανικής, της πολεμικής τέχνης, της φαρμακευτικής, και της χημικής τεχνολογίας¹⁰. Στα αλχημικά κείμενα μάλιστα σώζονται συνταγές που παραδίδονταν από γενιά σε γενιά στους μεταλλουργούς και στους χρυσοτεχνίτες, και οι οποίες περιλάμβαναν οδηγίες σχετικά με τη συγκόλληση μετάλλων, τη βαφή, την παρασκευή κραμάτων και τόν ποιτικό τους έλεγχο, ο οποίος γινόταν από κρατικούς υπαλλήλους¹¹. Από την εποχή των Παλαιολόγων έχουν σωθεί ή πραγματεία *περι χρυσοποιίας* του Νικολάου Βλεμμύδη, και η *έρμηνεία της επιστήμης της χρυσοχοΐας* ενός μοναχού Κοσμᾶ¹². Όσο καλά οι χρυσοτεχνίτες γνώριζαν ότι δεν υπήρχε μέθοδος μετατροπής άγενους μετάλλου σε χρυσό, άλλο τόσο γνώριζαν μεθόδους έπαργύρωσης και έπιχρύσωσης, με τις οποίες έδιναν όψη άργυρου ή χρυσοῦ σε άλλα μέταλλα ή σε κράματά τους. Έπειδή δέ τὰ κράματα τῶν μετάλλων χρησιμοποιούνται τόσο στην άργυροχρυσοχοΐα όσο και τη νομισματοκοπία, είναι αναγκαία ή γνώση τρόπων ύπολογισμού τῶν αναλογιών, υπό τις οποίες εύρισκονται τὰ μέταλλα σε κράματα. Τέτοιου είδους ύπολογισμοί και όσοι άλλοι σχετίζονταν με τη σημερινή πρακτική άριθμητική περιλαμβάνονταν στην καλουμένη *λογιστική*.

Τὰ μαθηματικά και ή αστρονομία, από την εποχή που ο Κωνσταντίνος ο Θ' (1042-1055)¹³ άναδιοργάνωσε τὸ Πανδιδακτήριο τῆς Κωνσταντινούπολης, είναι οι έπιστήμες που καλλιεργήθηκαν έντατικά¹⁴.

Έπί τῆς βασιλείας του Μανουήλ Α' Κομνηνού (1143-1180), τὸ Βυζάντιο ἦταν πὶὸ προηγμένο σε σχέση με τη Δύση στὸν τομέα τῶν μαθηματικῶν¹⁵. Περί τὸ 1300 μ.Χ. γίνεται πλέον ὁ διαχωρισμὸς τῶν *έμπορικῶν* (πρακτικῶν)¹⁶ ἀπὸ τὰ *ἀκαδημαϊκά* (τὰ διδασκόμενα στὶς ανώτερες σχολές) μαθηματικά.

10. Δημιουργικὸς ἀρχιτέκτων και μηχανικὸς θεωρεῖτο ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχοντας ἐντρύφησει στὶς τέσσερις μαθηματικὲς ἐπιστήμες (ἀριθμητική, γεωμετρία, μουσική, αστρονομία), μποροῦσε παράλληλα νὰ ἀσχεῖ με ἐπιτυχία τὴν τέχνη τοῦ μεταλλουργοῦ, τοῦ χτίστη, τοῦ μαραγοῦ, τοῦ ζωγράφου. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 827.

11. Ὁ.π., σ. 828.

12. Ὁ.π., σ. 826

13. Ὑπάρχουν ἐνδείξεις, ὅτι ὁ Κωνσταντίνος ὁ Θ' Μονομάχος ἦταν αὐτὸς ποῦ εἰσήγαγε τὴν τεχνικὴ ἐκπαίδευση γιὰ νὰ ἐνισχύσει τὴν ἀνερχόμενη τότε τάξη τῶν ἐμπόρων και τῶν βιοτεχνῶν περιορίζοντας κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο τὴν ἐξουσία τῆς ἀριστοκρατίας· βλ. ΣΤΑΥΡΟΥΛΑ ΧΟΝΔΡΙΔΟΥ, Ὁ Κωνσταντίνος Θ' Μονομάχος και ἡ εἰσαγωγή τῆς τεχνικῆς ἐκπαίδευσης, *Α' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος και Κύπρου* (25-27 Σεπτεμβρίου 1998), (περίληψη ανακοίνωσης), Ἰωάννινα 1999, σ. 151.

14. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 807.

15. Ὁ.π., σ. 811.

16. Κατὰ τὸν Μ. Βασιλείο: Ἡ ἀνθρώπινη σοφία εἶναι ἡ ἐμπειρικὴ γνώση τῶν πραγμάτων τῆς ζωῆς σύμφωνα με τὴν ὁποία ἀποκαλοῦμε σοφοὺς τοὺς γνώστες καθεμῶς ἀπὸ τις ὀφέλιμες τέχνες. Β.

Μάλιστα από τον 14ο αιώνα τα πρακτικά μαθηματικά όχι μόνον δέν περιλαμβάνονταν στη διδασκαλία ύλης των ανωτάτων σχολών¹⁷ αλλά κατά την άποψη όρισμένων, βρίσκονταν σε συνεχή ανταγωνισμό με την ύλη που διδασκόταν σ' αυτές¹⁸, αφού τα πρακτικά μαθηματικά ένδιέφεραν πλθθος ανθρώπων, καθώς εφαρμόζονταν σε προβλήματα καθημερινής ζωής, και ήταν χρήσιμα σε πολλά επαγγέλματα.

Μολονότι οί τελευταίες δεκαετίες πριν την άλωση τής Κωνσταντινούπολης θεωρούνται άσήμαντες σε προσφορά στα μαθηματικά, ή ύπαρξη μεγάλου πλθθους χειρογράφων¹⁹ δείχνει αύξημένο ένδιαφέρον τόσο για τις τέσσαρες μαθηματικές έπιστήμες (άριθμητική, γεωμετρία, άστρονομία, μουσική), όσο και για τη λογιστική και τη γεωδαισία, οί όποιες ήταν κλάδοι των κατ' έξοχήν *εμπορικών μαθηματικών*²⁰.

Η βυζαντινή έποχή τελειώνει με έργα προορισμένα για πρακτική χρήση. Αυτά είναι ως επί το πλείστον βιβλία άριθμητικής, δηλαδή συλλογές προβλημάτων που άποτελούνται από ποικίλες και έπιλεκτικές δημιουργίες κληροδοτημένες από την παράδοση πολλών χρόνων και λαών. Ο προσδιορισμός των έπιρροών που δέχθηκαν οί συγγραφείς αυτών των έργων άποτελεί έξαιρετικά έπίπονη διαδικασία, ιδιαίτέρως, όταν στις περισσότερες περιπτώσεις διαπιστώνονται άλληλεπιδράσεις μεταξύ Κινέζων, Περσών, Ίνδων, Δυτικών και Βυζαντινών. Αυτές οί συλλογές περιλαμβάνουν έκτός των άλλων και στοιχεία πολύτιμα για την εξέλιξη του πολιτισμού και τής γλώσσας, διότι αναφέρονται σε ζητήματα τής καθημερινής ζωής των ανθρώπων τής έποχής εκείνης (μετατροπές νομισμάτων, προβλήματα κληρονομιών, φορολογικό καθεστώς, κ.ά.)²¹.

Τά σχολεία κατά τους βυζαντινούς χρόνους λειτουργούσαν κυρίως σε χώρους έκκλησιαστικούς. Οί μαθητές έμεναν συνήθως μέσα σε αυτά²² και έτσι είχαν την δυνατότητα να αναπτύξουν στενές σχέσεις μεταξύ τους, οί όποιες συνέβαλλαν στη δημιουργία κλίματος που εύνοούσε τις έπιστημονικές συζητήσεις²³ και την πολύωρη ένασχόληση με τά γράμματα²⁴. Βέβαια,

ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Βασιλείου Καισαρείας του Μεγάλου "Απαντα τά έργα, 7 ("Ομιλία και Λόγοι), Θεσσαλονίκη 1973 (στο έξηξ: ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Μ. Βασιλείου "Απαντα), σ. 369.

17. CALINGER, A contextual history of Mathematics to Euler, Prentice Hall 1999, σ. 357, 363.

18. C. B. BOYER - UT.C. MERZBACH, Η Ίστορία των Μαθηματικών, Άθήνα 1997, σ.284.

19. VOGEL, Η βυζαντινή έπιστήμη, σ. 814.

20. "Ο.π., σ. 814.

21. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτική βυζ. βιβλίον Άριθμ., σ. 4, 15.

22. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 160.

23. Ο Βασίλειος ό Μέγας στις Έπιστολές του προς τους Νέους γράφει ότι διά τής μαθήσεως θά κατακτηθεί ή άρετή, και τους προτρέπει να μη δέχονται άκριτα όλα όσα οί δάσκαλοι τους διδάσκουν. ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Μ. Βασιλείου "Απαντα, σ. 369.

24. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 160.

ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸν βιενναῖο ἐλλ. φιλ. κώδ. 65 (15ος αἰ.)²⁵, φαίνεται νὰ ὑπῆρχαν καὶ μαθητές, οἱ ὁποῖοι γιὰ νὰ σπουδάσουν μετακινουῦνταν σὲ ἄλλη πόλη, ὅπου κατοικοῦσαν πολλοὶ μαζί στὸν ἴδιο χῶρο πληρώνοντας ἐνοίκιο.

Σχετικὰ μὲ τὸ εἶδος τῶν μαθητῶν γνωρίζουμε ὅτι παλαιότερα ὑπῆρχαν μαθητές κάθε ἡλικίας, οἱ ὁποῖοι μπορεῖ νὰ ἦταν κληρικοί, δημόσιοι ὑπάλληλοι, ἀκόμα καὶ ἀξιωματοῦχοι μαζί μὲ τὰ παιδιὰ τους²⁶. Ἡ ὑπαρξη αὐτοῦ τοῦ εἶδους τοῦ ἀκροατηρίου καθόριζε ὡς ἓνα βαθμὸ καὶ τὸ περιεχόμενο τῆς διδασκτέας ὕλης, ἡ ὅποια ὅσον ἀφορᾷ στὰ μαθηματικά τις περισσότερες φορές περιλάμβανε ὄχι μόνον κεφάλαια πρακτικῆς ἀριθμητικῆς καὶ γεωδαισίας, ἀλλὰ καὶ ἄλγεβρας. Ἐπειδὴ αὐτὰ τὰ κεφάλαια περιλαμβάνονται στὸ περιεχόμενο τοῦ βιενναίου ἐλλ. φιλ. κώδ. 65, τίθενται ἐρωτήματα σχετικὰ μὲ τὴ σύσταση τοῦ ἀκροατηρίου, στὸ ὁποῖο ἀπευθυνόταν. Τοῦτο διότι τὰ κεφάλαια τῆς λογιστικῆς καὶ τῆς γεωδαισίας ἦταν χρήσιμα κυρίως σὲ ἐμπόρους, χειροτέχνες, διοικητικὸς ὑπαλλήλους, πρωτομάστορες, τοπογράφους, ἐνῶ τῆς ἄλγεβρας σὲ μαθητές σχολείου. Ἐνδεικτικὰ ἀναφέρουμε τὰ κεφάλαια τῆς ἄλγεβρας στὰ ὁποῖα ὁ συγγραφέας προτείνει λύσεις γιὰ τις ἐξιιώσεις 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ. Οἱ λύσεις αὐτές εἶναι ἐσφαλμένες, ἀλλὰ μέχρι τὸ 1615 πού ὁ Vieta ἀνακάλυψε τὴν γενικὴ τους λύση²⁷ εἶχαν γίνει πολλὲς ἀποτυχημένες ἀπόπειρες πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνση ἀπὸ τοὺς μαθηματικὸς ὄλων τῶν ἐποχῶν. Εἶναι δὲ σαφές ὅτι ἓνα τέτοιο θέμα καθαρὰ ἐρευνητικὸ δὲν θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ ἐνδιαφέρει ἀνθρώπους πού ἐπιζητοῦσαν πρακτικὲς γνώσεις, ἀφοῦ μάλιστα ἕως σήμερα οἱ λύσεις τῶν ἐξιιώσεων 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ διδάσκονται στοὺς μαθητές τῶν τελευταίων τάξεων τῶν Λυκείων.

Παλαιότερα στὰ σχολεῖα αὐτὰ ξεκινουῦσαν συνήθως μὲ ποίηση καὶ ρητορική, καὶ στὸ τέλος μάθαιναν μαθηματικά, ἂν καὶ ἡ σειρὰ δὲν ἦταν ἀπολύτως καθορισμένη. Βέβαια οἱ περισσότεροι μαθητές δὲν συνέχιζαν τις σπουδές τους στὰ ἀνώτερα μαθηματικά, διότι ἀφ' ἐνός μὲν οἱ δάσκαλοι ἦταν λιγοστοί, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπῆρχε ἔλλειψη χειρογράφων βιβλίων²⁸. Καθὼς ἡ τυπογραφία ἀνακαλύπτεται πρὸς τὸ τέλος τοῦ 15ου αἰ. μ.Χ. τὰ χειρόγραφα ἀντέγραφαν πολλὲς φορές οἱ ἴδιοι οἱ μαθητές. Οἱ περισσότεροι δάσκαλοι (Πλανούδης, Βρυνένιος, Παχυμέρης) εἶχαν δικές τους βιβλιοθήκες ἀλλὰ τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν πού δέχονταν ἦταν περιορισμένο²⁹.

25. Ἡ μεταγραφὴ καὶ ἡ μελέτη τοῦ μαθηματικοῦ περιεχομένου αὐτοῦ τοῦ χειρογράφου ἀποτελεῖ τὸ θέμα τῆς ὑπὸ ἐκπόνηση διδακτορικῆς διατριβῆς μου.

26. Συνήθως τὸ κράτος ἀναλάμβανε τὴν μόρφωση τῶν λειτουργῶν του, καὶ ἡ ἐκκλησία τῶν κληρικῶν τῆς LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμὸς, σ. 52, 229.

27. D.E. SMITH, *History of Mathematics*, τ. Β', Dover/New York 1958, σ. 465.

28. CONSTANTINIDES, *Higher Education*, σ. 155.

29. Ὁ.π., σ. 157.

Ὁ βιενναῖος ἑλλ. φιλ. κώδ. 65 εἶναι χαρτῶος καὶ χρονολογεῖται στὸν 15ο αἰ. Ἀποκτήθηκε ἀπὸ τὸν Augerius von Busbeck, ὅταν αὐτὸς ἦταν πρεσβευτῆς τοῦ αὐτοκράτορα Φερδινάνδου Α' στὴν αὐλὴ τοῦ σουλτάνου Σουλεϊμάν Β' (1555-1562 μ.Χ.)³⁰. Περιέχει ἓνα βιβλίο ἀριθμητικῆς μὲ λυμένα προβλήματα (φ. 11r-126r), τὰ ὁποῖα καλύπτουν ἓνα εὐρύτατο πεδίο θεμάτων κατάλληλων γιὰ διδασκαλία τόσο στὸ σημερινὸ δημοτικὸ ὅσο στὸ γυμνάσιο καὶ στὸ λύκειο. Ἡ τεράστια ποικιλία τῶν προβλημάτων καθιστᾷ δύσκολο τὸν καθορισμὸ τοῦ εἴδους τῶν μαθητῶν στὸν ὁποῖο ἀπευθύνεται. Ἄν ἐπρόκειτο γιὰ ὀλοκληρωμένο πρόγραμμα διδασκαλίας, τότε κατὰ τὴν ἀποψή μας θὰ μπορούσε τὸ ἀκροατήριο νὰ ἀποτελεῖτο ἀπὸ μαθητὲς ὄλων τῶν τάξεων τῆς σημερινῆς πρωτοβάθμιας καὶ δευτεροβάθμιας ἐκπαίδευσης, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ἄτομα τὰ ὁποῖα προορίζονταν νὰ ἀκολουθήσουν τὸ ἐπάγγελμα τοῦ κρατικοῦ λειτουργοῦ. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν προβλημάτων, ἐξαιρετικὸ ἐνδιαφέρον παρουσιάζει καὶ ἡ μαθηματικὴ ὀρολογία, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται καὶ εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἄγνωστη στὸν σύγχρονο μαθηματικὸ. Μερικὰ παραδείγματα εἶναι τὰ ἑξῆς:

Ὁ συγγραφέας ὀνομάζει τὸν ἀριθμὸ *ψηφον* καὶ ὀρίζει τὸ μηδὲν ὡς *οὐδέν* γράφει ὅτι τὸ οὐδέν *οὐδενός ἐστὶ δηλωτικόν*, καὶ τὸ συμβολίζει μὲ τὸ ἀνεστραμμένο h. Χρησιμοποιεῖ τὸν ὄρο *μηλιούρια* ἢ *μιλούνια* ἀντὶ τοῦ ὄρθου πού εἶναι *μιλλιούνια*, προκειμένου νὰ δηλώσει τὰ ἑκατομμύρια. Γιὰ τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιεῖ δύο σχήματα: τὸ *δίπλευρον* (τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστῆ τοποθετοῦνται κατακόρυφα), καὶ τὸ *οἰκός* (διὰ τὸ *τετραγωνικῶς λαμβάνειν τοὺς ψήφους*). Γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ, πού σήμερα λέμε ὅτι ἐκτελοῦμε χιαστί (ὅταν π.χ. θέλουμε νὰ κάνουμε δύο κλάσματα ὁμόνυμα), χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκφραση *πολλαπλασιάζω στανροειδῶς*. Οἱ ὄροι *ἐπιστρεπτικός ἀριθμός* καὶ *ἀνυπόστροφος*, χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσει ὁ συγγραφέας τοὺς σύνθετους καὶ τοὺς πρῶτους ἀριθμοὺς ἀντίστοιχα. Σημειωτέον, ὅτι ὁ ὄρος *πρῶτος ἀριθμός* χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸν ἀριθμὸ, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς διαιρέτες μόνο τὸν ἑαυτὸν του καὶ τὴ μονάδα, ἐνῶ ὁ ὄρος *σύνθετος ἀριθμός* δηλώνει τὸν ἀριθμὸ, ὁ ὁποῖος ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτες ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἑαυτὸν του καὶ τὴ μονάδα.

Οἱ ἔκφρασεις ἢ *διὰ τῶν τριῶν μεταχείρισις* καὶ *διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν* ἀντιστοιχοῦν στὴ σημερινὴ *μέθοδο τῶν τριῶν*. Μία συνήθης ὀνομασία αὐτοῦ τοῦ κανόνα ἦταν *ἐμπόρων κλείς*, ἡ ὁποία δείχνει τὴ σημασία του στὶς ἐμπορικὲς συναλλαγές. Ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ πολὺ συχνὰ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν, καὶ δὲν παραλείπει κάθε φορὰ, νὰ τὴν περιγράψει ἀναλυτικά.

30. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτικὴ βυζ. βιβλίου Ἄριθμ., σ. 5.

Ἐξ ὅρου *ἀφεξαίρεσις* σημαίνει τὴ σημερινὴ *ἀφαίρεση*.

Σχετικὰ μὲ τὶς ἀριθμητικὰς προόδους ἐπισημαίνουμε, ὅτι μολονότι ὁ ὅρος *ἀριθμητικὴ πρόοδος* δὲν συναντᾶται στὸ χειρόγραφο, ἐντούτοις ὑπάρχουν προβλήματα ὑπολογισμοῦ ἀθροισμάτων ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι εἶναι στὴν πραγματικότητα ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου³¹.

Ἐξ ὅρου *φυσικὴ ρίζα* χρησιμοποιεῖται γιὰ τὴν ἀκεραία ρίζα (π.χ. τὴν $\sqrt{16}$), καὶ *νόθος ρίζα* γιὰ αὐτὴ πού δὲν δίνει ἀκέραιο ἀποτέλεσμα (π.χ. τὴν $\sqrt{30}$). Ἐξ ὅρου *ἐφίμικτος ρίζα* χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸ ἀθροισμα τῶν ριζῶν δύο ἀριθμῶν. Σημειωτέον, ὅτι σήμερα δὲν χρησιμοποιοῦνται ἀντίστοιχοι ὀρισμοί. Ἄξιζει νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι ὁ συγγραφέας δίνει ἀξιόλογες μεθόδους ὑπολογισμοῦ ριζῶν δευτέρας καὶ τρίτης τάξης, τὶς ὁποῖες σχολιάζουμε ἐκτενῶς στὴ διδακτορικὴ διατριβή³².

Στὶς ἐξιιώσεις πρώτου ἕως καὶ τετάρτου βαθμοῦ ὁ συγγραφέας ὀνομάζει *ἀριθμὸν* κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸ καὶ *πραῖγμα* τὸν ἄγνωστο x . Οἱ ὅροι *τζένσο*, *κοῦβον*, καὶ *κάδρον* χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσουν τὴν δευτέρα (τετράγωνο), τρίτη (κύβο) καὶ τετάρτη δύναμη τοῦ ἄγνωστου x ἀντίστοιχα. Οἱ γενικὲς λύσεις γιὰ τὶς ἐξιιώσεις τρίτου καὶ τέταρτου βαθμοῦ παρουσιάζουν ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον, διότι δείχνουν τὴν προσπάθεια πού κατέβαλλαν τότε γιὰ τὴν εὔρεση γενικῆς λύσης. Σημειώνουμε, ὅτι ὁ σημερινὸς ὅρος *ισότητα* δύο μελῶν ἐμφανίζεται στὸ χειρόγραφο, ὡς *ὁμοιότητα*.

*Ρομβοειδὲς*³³ ὀνομάζεται κάθε πλάγιο παραλληλόγραμμο. Σήμερα βέβαια αὐτὸς ὁ ὅρος δὲν χρησιμοποιεῖται· ἐμεῖς ὀνομάζουμε ρόμβο τὸ παραλληλόγραμμο, τὸ ὁποῖο ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσες. Τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμο ὀνομάζονται *τετράγωνα*. Δὲν ὑπάρχουν δὲ οἱ ὅροι τοῦ ἰσοσκελοῦς καὶ τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου· ὅποτε ὁ συγγραφέας ἀναφέρεται σὲ αὐτὰ τὰ ἀποκαλεῖ *τρίγωνα μὲ δύο ἢ μὲ τρεῖς ἴσες πλευρὰς*. Παρατηροῦμε, ὅτι σὲ ὀρισμένα προβλήματα τοῦ χειρόγραφου μας χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος *ὑψος τριγώνου* γιὰ νὰ δηλώσει τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας πού κεῖται ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βᾶση του.

Ἐξ ὅρου *μηρικὸν κέρδος* ἀναφέρεται σὲ προβλήματα τόκου καὶ σημαίνει τὸ κέρδος ἑνὸς μηνός. Ἐξ ὅρου *ἐνιαυτὸς* δηλώνει τὴν χρονικὴ διάρκεια ἑνὸς

31. ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ, Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ, διαίρεσης, ἀναλογιῶν καὶ προόδων σὲ βιενναῖο κώδικα τοῦ 15ου αἰ., *Β' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (24-26 Σεπτεμβρίου 1999) (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Ἀθήνα 2000, σ. 172.

32. ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ, Περὶ ριζῶν, *Γ' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (22-24 Σεπτεμβρίου 2000) (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Ρέθυμνο 2002, σ. 90-93.

33. Ὁ Παχυμέρης ὀρίζει ὡς ρομβοειδὲς τὸ *παρῶσεσλευμένον ἐτερόμηκες, τὸ καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἔχον ἀνάσους* (δὲν πρόκειται ἀκριβῶς περὶ ρόμβου). Βλ. P. TANNERY, *Quadrivium de Georges Pachymère*, Città del Vaticano 1940, σ. 203.

έτους. Λείπει έντελῶς ὁ σημερινὸς ὄρος ἐπιτόκιο, ὁ ὁποῖος δηλώνει τὸ ἐτήσιο κέρδος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων.

Ὁ ὄρος *φίνον* (πρὸ βλ. *affinage*) ἀναφέρεται στὸ καθαρὸτατο ἀσημι τῶν 12 οὐγγιών, καὶ *φίνον μάλαγμα*ν στὸν χρυσὸ τῶν 24 καρατίων. Ὅταν ὁμως πρόκειται γιὰ παρασκευὴ ἀσημιοῦ μικρότερης καθαρότητος χρησιμοποιεῖται ὁ ὄρος *ἐπιβολὴ χαλκώματος*, ἐνῶ γιὰ τὴν παρασκευὴ καθαρότερου μετάλλου ὁ ὄρος *λογαρίζω*³⁴.

Τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα ἀναφέρεται ὡς *κανὼν τῆς σκάδρας*, καὶ διευκρινίζεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ὅτι σκάδρα σημαίνει τετράγωνο.

Ὁ ὄρος *ἄρριζον τζάκισμα κορυφῆς* ἀναφέρεται σὲ κάποιον ἀριθμὸ, τοῦ ὁποῖου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι κλασματικὸς μὲ *ἄρριζον* (κατὰ τὸν συγγραφέα δὲν μπορεῖς νὰ ὑπολογίσεις τὴ ρίζα) παρανομαστί, ὅπως π.χ. 3/8, 7/14, κ.λπ. Ὁ ὄρος *ἀσχημάτιστον ἢ ἄτιμητον τζάκισμα* χρησιμοποιεῖται γιὰ κλάσματα (π.χ. 13/14, 7/16), τὰ ὁποῖα –ὅπως ἐξηγεῖ ὁ συγγραφέας– δὲν μποροῦν νὰ λάβουν μετὰ ἀπὸ ἀπλοποίηση μία ἀπὸ τίς ἀκόλουθες μορφές: 1/2 ἢ 1/3 ἢ 1/4. Σύμφωνα μὲ τὸν συγγραφέα ἡ ρίζα αὐτῶν τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθεῖ.

Στὸ κεφάλαιο τῆς στερεομετρίας δὲν ἀναφέρονται κἂν οἱ ὄροι παράπλευρη ἐπιφάνεια ἢ ὀλικὴ ἐπιφάνεια στερεοῦ, καὶ ὅταν ὁ συγγραφέας ζητεῖ τὴν εὕρεση τοῦ *περιεχομένου* τοῦ στερεοῦ αὐτὸ σημαίνει τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὄγκου του.

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ χειρόγραφὸ μας χρησιμοποιεῖται πολὺ συχνὰ ὁ ὄρος *ἀπόδειξη*, ὅταν πρόκειται γιὰ ἀπλὴ ἐπαλήθευση τῆς ὀρθότητος τῶν πράξεων καὶ ὄχι γιὰ κάποια διαδικασία, ἡ ὁποία σχετίζεται μὲ τὴ θεωρία. Συχνὰ μάλιστα αὐτὴ ἡ ἐπαλήθευση πραγματοποιεῖται μὲ τὴν ἀνάπτυξη μίας διαφορετικῆς μεθόδου ἐπίλυσης τοῦ ἰδίου προβλήματος.

Ἡ ὀρολογία, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται στὸ χειρόγραφὸ μας ἀξιολογήθηκε προσεκτικὰ, καθὼς τὸ κείμενο εἶναι ἐξαιρετικὰ ἀνορθόγραφο καὶ ἡ γλῶσσα του ἔπρεπε νὰ συγκριθεῖ μὲ τὴ γλῶσσα τῶν βυζαντινῶν κειμένων τῆς ἐποχῆς. Ἡ ὀρολογία συγκρινόμενη μὲ τὴν σημερινή, παρουσιάζει, ὅπως θὰ περιέμενε κανεῖς, ὁμοιότητες ἀλλὰ καὶ σημαντικὲς διαφορές. Ἔτσι ὀρισμένοι ὄροι, ὅπως αὐτὸς τοῦ *τριγώνου* ἢ τῆς *ρίζας* παραμένουν ἀναλλοίωτοι· οἱ περισσότεροι ὁμως δὲν χρησιμοποιοῦνται πλέον σήμερα, ἐνῶ κάποιοι ἄλλοι θεωροῦνται λανθασμένοι. Π.χ. σήμερα θὰ ἦταν σοβαρὸ λάθος νὰ ὀνομάζαμε τε-

34. Οἱ χρυσοεπιθεῖαι ἐξελαγάριζαν τήζοντες τὸν χρυσὸν εἰς μικρὰ ὀστράκινα σκευή. Βλ. Φ. ΚΟΥΚΟΥΛΕΣ, Βυζαντινῶν βίος καὶ πολιτισμὸς, τ. Β', Ἀθήνα 1948, σ. 228. *Περὶ τοῦ λογαρίσμου τὸ χρυσίον*: βλ. Collection des Anciens Alchimistes Grecs, ed. M. BERTHELOT, τ. Β', Paris 1888, κεφ. 5, σ. 322, 333.

τράγωνο ένα τυχόν ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο· τὸ ἴδιο θὰ ἴσχυε καὶ ἂν ζητούσαμε τὸν ὑπολογισμό τοῦ ὕψους ἑνὸς τριγώνου ἐννοώντας τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση του.

Τὰ Βυζαντινὰ κείμενα διακρίνονται γιὰ τὴν ἄρμονία καὶ τὸν ρυθμὸ τους ποὺ βασίζονται στὴ συμμετρικὴ σχέση τονιζομένων συλλαβῶν καὶ συλλαβικῶν ἐνοτήτων³⁵. Τοῦτο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ χειρόγραφο μας. Διαβάζοντάς το ἔχει κανεὶς τὴν αἴσθησι, ὅτι ὁ συγγραφέας του ἐπιδιώκει νὰ τὸ κάνει νὰ μοιάσει μὲ ποίημα. Πιστεύουμε, ὅτι ἡ σκοπιμότητα εἶναι ἀφενὸς μὲν αἰσθητικὴ, διότι ὁ ρυθμὸς προσδίδει κάλλος, ἀφετέρου δὲ παιδαγωγικὴ, διότι τὰ ἀνωτέρω χαρακτηριστικὰ τοῦ λόγου *ποιοῦσιν εὐσχήμονα τὴν ψυχὴν* αὐτῶν ποὺ ἀκούουν³⁶. Ἐξ' ἄλλου, ἀναφερόμενοι καὶ στὴν ψυχολογία τῶν μαθηματικῶν, σύμφωνα μὲ σχετικὲς ἔρευνες ἔχει διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ μαθητὴς ἀφομοιώνει εὐκολώτερα τὴν ὕλη ὑπὸ μορφῆ ποιήματος, ἢ ὁποῖα χαρακτηρίζεται ἀπὸ μία μετρικὴ, ἕνα ρυθμὸ³⁷.

Ἐπειδὴ ἡ γλωσσοπλαστικὴ τάσι τῶν Βυζαντινῶν ἔχει δημιουργήσει ἕνα τεράστιο λεξικογραφικὸ θησαυρὸ, γιὰ τὸν ὁποῖο γνωρίζουμε πολὺ λίγα (σὲ κείμενα ῥητορικὰ, ἱστοριογραφικὰ, νομικὰ, μαθηματικὰ), καὶ ἡ κλασικίζουσα γλῶσσα ἀναμειγνύεται μὲ τὴν ἀπλούστερη τῶν Εὐαγγελίων καὶ τὴ δημώδη, χωρὶς νὰ ὑπάρχει σαφὴς διάκριση μεταξὺ τους, οἱ ἴδιοι οἱ συγγραφεῖς (π.χ. Μιχαὴλ Ψελλός, Θεόδωρος Πρόδρομος) παρουσιάζουν διαφορετικὲς γλωσσικὲς τάσεις³⁸. Βέβαια ὑπάρχει κάποιος γενικὸς κανόνας σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖο, ὅ,τι ἔχει γραφεῖ ἀπὸ ὑποτιθέμενους ἀγράμματους εἶναι δημῶδες³⁹. Αὐτὸ ὅμως κατὰ τὸν Ν. Τωμαδάκη δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἀπόλυτο. Καὶ τοῦτο διότι συνήθως νόθευαν τὸν ἀττικισμό μὲ τὴν κοινὴ γλῶσσα, ἢ ὁποῖα εἶχε πάρει πολλὰ στοιχεῖα ἀπὸ τὴν λατινικὴ, ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ κοινὴ ἀκόμα νοθεύεται ἀπὸ δημῶδεις τύπους. Ὅμως τὰ πράγματα φαίνεται νὰ περιπλέκονται περισσότερο ἀφοῦ ἀκόμα καὶ ἡ μεσαιωνικὴ δημῶδης νοθεύεται συχνὰ ἀπὸ

35. Γ. ΗΛΙΟΥΔΗΣ, Ὁ ρυθμὸς καὶ ἡ ἄρμονία τοῦ λόγου σὲ λειτουργικὰ καὶ ὑμνογραφικὰ κείμενα τῶν Βυζαντινῶν, *Α' Συνάντησι Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (25-27 Σεπτεμβρίου 1998) (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Ἰωάννινα 1999, σ. 150.

36. Ὁ.π., σ. 150.

37. Σύμφωνα μὲ τὴ μορφολογικὴ θεωρίαν ἡ ἀναγνώρισι σημαντικῶν σχέσεων μεταξὺ τῆς παλαιᾶς καὶ τῆς νέας κατάστασις μάθησις εἶναι θεμελιώδης γιὰ τὴ μεταβίβασι τῆς μάθησις. Αὐτὸ συμβαίνει ἀκόμα καὶ ἂν ἕνας ἰδιαιτερός ρυθμὸς ἐπαναλαμβάνεται, παρὰ τὸ ὅτι οἱ στίχοι διαφέρουν κατὰ μήκος καὶ δὲν ἔχουν καμμία λέξι κοινὴ. Π. ΓΕΩΡΓΟΥΣΗΣ, *Παιδαγωγικὴ Ψυχολογία*, Ἀθήνα 1981, σ. 378.

38. Θ. ΔΕΤΟΡΑΚΗΣ, Προβλήματα τῆς βυζαντινῆς λεξικογραφίας, *Β' Συνάντησι Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου* (24-26 Σεπτεμβρίου 1999) (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Ἀθήνα 2000, σ. 153.

39. Ν. ΤΩΜΑΔΑΚΗΣ, Κλείς τῆς βυζαντινῆς Φιλολογίας, Θεσσαλονίκη 1963, σ. 27.

τύπους λογιώτερους και ἡ νεοελληνικὴ δημώδης ἀναμειγνύεται μὲ στοιχεῖα συντηρητικώτερα⁴⁰.

Ἀπὸ τὸν 12ο αἰ. μ.Χ. ἡ παιδεία εἶχε ὡς σκοπὸ νὰ γράφουν οἱ νέοι τὴν ἀττικὴ διάλεκτο⁴¹, ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ παραγνωρίζουμε τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Βυζαντινός, ὅταν γράφει περὶ διδακτικῶν θεμάτων, ἀγωνίζεται νὰ διακριθεῖ ἀκόμα καὶ μὲ τὸ ὕφος τῆς γραφῆς, ἰδιαίτερα μάλιστα ὅταν καταγίνεται μὲ προβλήματα⁴². Ἡ συγγραφή διδακτικῶν θεμάτων συγκρίνεται μὲ αὐτὴν τῶν δοκιμῶν πού ἐκθέτουν ἐπιστημονικὲς γνώσεις μὲ τὴν κατάλληλη ἐκλαϊκευτικὴ μορφή. Οἱ Βυζαντινοὶ συγγραφεῖς κατεῖχαν τὴν τέχνη νὰ διδάσκουν λαμβάνοντας ὑπόψη τους τὸ ἐπίπεδο μόρφωσης τοῦ μαθητοῦ καθὼς καὶ τὸν εὐρύτερο κύκλο τῶν ἐνδιαφερόντων του, καὶ προσπαθώντας νὰ κάνουν ζωντανὴ τὴν διδασκαλία τους τὴν ἐμπλούτιζαν καὶ μὲ πνευματώδεις παρατηρήσεις ἀκόμα⁴³. Ἐπὶ τῶν Παλαιολόγων ἡ ροπή πρὸς τὴν καθαρεύουσα φθάνει στὸ ἀποκορύφωμα καὶ ἔτσι μεγαλώνει τὸ χάσμα μεταξὺ καθομιλουμένης καὶ γραφομένης. Ἐπιπλέον δὲν πρέπει νὰ ἀγνοηθεῖ τὸ ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἔπρεπε σὲ πολλὰ ζητήματα (πολιτικά, στρατιωτικά) νὰ ἐκφράσουν πλῆθος νέων ιδεῶν καὶ ἔτσι ἦταν πρακτικὰ ἀδύνατο νὰ περιορισθοῦν στὸ κλασσικὸ λεξιλόγιο⁴⁴.

Ὅσον ἀφορᾷ στὸ χειρόγραφο μας ἡ χρησιμοποιούμενη γλῶσσα δείχνει τὴν προσπάθεια πού κατέβαλλαν κάποιοι βυζαντινοὶ γιὰ νὰ γράφουν στὴν ἐπιθυμητὴ ἀττικὴ διάλεκτο, ἴσως τεχνητὴ καὶ ἐξεζητημένη, ἴσως ἀκόμη καὶ πολὺ διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν καθομιλουμένη. Ὅμως, βάσει τῆς χρησιμοποιούμενης ἐπιστημονικῆς ὀρολογίας, θὰ μπορούσαμε νὰ χαρακτηρίσουμε τὴ γλῶσσα τοῦ χειρογράφου μας ὡς λογία, μὲ ἐμφανῆ ὅμως τὴ λατινικὴ ἐπιρροή. Βέβαια ἡ λατινικὴ ἐπιρροὴ ἀποδεικνύεται καὶ ἀπὸ ὀρισμένες μεθόδους, τίς ὁποῖες χρησιμοποιεῖ ὁ συγγραφέας. Ἀναφέρουμε ὡς παράδειγμα τὴ μέθοδο τῆς ταβλέττας (τολέττας)⁴⁵, τὴν ὁποία χρησιμοποιεῖ σὲ προβλήματα ἐμπορικῶν συναλλαγῶν.

40. Ἐκεῖνο πού μπορεῖ νὰ συμβαίνει εἶναι καὶ τὸ ἀντίστροφο, δηλαδή ἓνας λόγιος νὰ χρησιμοποιεῖ τὴν δημώδη γραφὴ καὶ κάποιος πού θεωρεῖται ἀγράμματος τὴν λογία, ἢ ἀκόμη κάποιος μορφωμένος νὰ κάνει σύνθεση λογίας καὶ δημώδους γραφῆς, ὅ.π. (σημ. 39), σ. 27.

41. ΑΓΝΗ ΒΑΣΙΛΙΚΟΠΟΥΛΟΥ-ΙΩΑΝΝΙΔΟΥ, Ἡ ἀναγέννηση τῶν γραμμάτων κατὰ τὸν 12ο αἰ. στὸ Βυζάντιο καὶ ὁ Ὅμηρος, Ἀθήνα 1971, σ. 54.

42. Ν. ΤΩΜΑΔΑΚΗΣ, Βυζαντινὴ ἐπιστολογραφία, Ἀθήνα 1969, σ. 319.

43. Ὁ.π., σ. 320.

44. Κ. KRUMBACHER, Geschichte der byzantinischen Litteratur, München 1897, σὲ ἑλλ. μετάφρ. Γ. ΣΩΤΗΡΙΑΔΟΥ, Ἱστορία τῆς βυζαντινῆς Λογοτεχνίας, τόμος Α', ἐν Ἀθήναις 1897 [ἀνατύπωση 1974], σ. 51.

45. Ἡ λέξις toilette εἶναι τὸ ὑποκοριστικὸ τῆς λέξεως tola ἢ tavola, ἡ ὁποία στὴ βενετικὴ διάλεκτο σημαίνει τράπεζα. G. LORIA, Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, Ἀθήνα 1971, τ. Β', σ. 352.

Σχετικά με τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων παρατηρούμε ότι κάποιες από αυτές, όπως π.χ. της δοκιμής του πολλαπλασιασμοῦ, της διαίρεσης και της πρόσθεσης πολλῶν ἀριθμῶν, σήμερα εἶναι ἄγνωστες. Μάλιστα ἀξίζει νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι σὲ καμία βαθμίδα τῆς ἐκπαίδευσης δὲν διδάσκουμε σήμερα μέθοδο δοκιμῆς ἀθροισμάτων πολλῶν προσθετέων. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μετὰ τὴν τρίτην τάξιν⁴⁶, δηλαδή, δὲν διδάσκεται πλέον ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τους.

Ἡ σύγκριση τῆς μαθητικῆς ὀρολογίας καὶ τῶν μεθόδων ἐκείνης τῆς ἐποχῆς μετὰ τὴν ἀντίστοιχες σημερινῆς ἀποδεικνύει, ὅτι στὸ πέρασμα τοῦ χρόνου ἄλλοι μὲν τρόποι ἐπίλυσης καὶ ἐπιστημονικοὶ ὅροι ἐξαφανίζονται, ἄλλοι δὲ ἐξελίσσονται, ἐνῶ ἄλλοι παραμένουν ἴδιοι. Αὐτὰ τὰ στοιχεῖα εἶναι σημαντικά, διότι βοηθοῦν στὸ νὰ σχηματίσουμε μία καλύτερη εἰκόνα τῆς ἐξέλιξης τῶν μεθόδων διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν, ὅσον ἀφορᾷ στὴν ἐπινόηση μεθόδων ἐπίλυσης προβλημάτων καὶ τρόπων διδασκαλίας γιὰ τὴν κατὰ τὸ δυνατόν καλύτερη κατανόησή τους ἀπὸ τοὺς μαθητές.

46. Ὡς ρίζα τρίτης τάξεως π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 8 ὀρίζουμε τὸν ἀριθμὸ 2, διότι ἰσχύει ἡ ἰσότητα $2^3 = 8$.

SUMMARY

MATHEMATICAL EDUCATION AND TERMINOLOGY IN BYZANTIUM ACCORDING TO COD. VIND. PHIL. GR. 65 (15TH C.)

In this article we present some few results of our study on the mathematical content of the unpublished part (f. 11r-126r) of Cod. Vind. Phil. gr. 65 (the other part has been published by H. Hunger and K. Vogel), which is the subject of our Dr. thesis (to be submitted). This 15th century Byzantine MS includes the solution of problems of practical arithmetic, geometry and algebra, the roots of which can be traced back to antiquity. Most of them are related to practical human needs and therefore they could be used not only by practical men like merchants, metal workers, builders and other people but also by state employers to calculate taxes. The mathematical terminology used in this MS has been strongly influenced by latin works; nevertheless its comparison with modern Greek mathematical terminology reveals –apart from some differences– many identities and similarities showing the continuity of Greek mathematical tradition through the centuries.

MARIA CHALKOU