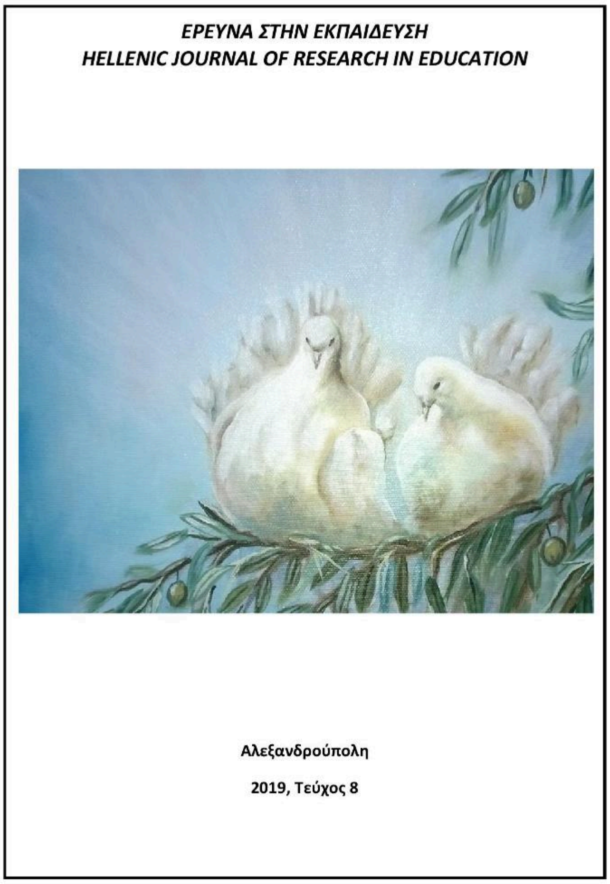
Έρευνα στην Εκπαίδευση

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2019)




# Η αντιμεταθετική ιδιότητα ως μέσο ενίσχυσης των νοερών υπολογισμών πρόσθεσης των μικρών παιδιών

*Δέσποινα (Despina) Δεσλή (Desli), Χαρίκλεια-Ειρήνη Αγγέλη*

doi: [10.12681/hjre.20055](https://doi.org/10.12681/hjre.20055)



**Βιβλιογραφική αναφορά:**

Δεσλή (Desli) Δ. (Despina), & Αγγέλη Χ.-Ε. (2019). Η αντιμεταθετική ιδιότητα ως μέσο ενίσχυσης των νοερών υπολογισμών πρόσθεσης των μικρών παιδιών. *Έρευνα στην Εκπαίδευση*, *8*(1), 63–76. https://doi.org/10.12681/hjre.20055

*Έρευνα στην Εκπαίδευση*
eISSN 2241-7303
2019, Τόμος 8, Τεύχος 1, σσ. 63-76
doi: http://dx.doi.org/10.12681/hjre.20055


Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης στην Προσχολική Ηλικία
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

# Η αντιμεταθετική ιδιότητα ως μέσο ενίσχυσης των νοερών υπολογισμών πρόσθεσης των μικρών παιδιών

Δέσποινα Δεσλή[α], Χαρίκλεια-Ειρήνη Αγγέλη[β]

[α] Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε., Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
[β] Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

## Περίληψη

*Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει αφενός τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας από μικρά παιδιά και αφετέρου τη σύνδεσή της με την εκτέλεση νοερών υπολογισμών. Για τον σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα στην οποία συμμετείχαν συνολικά 100 παιδιά, ισάριθμα προερχόμενα από τη Β΄ τάξη και τη Γ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου. Σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν τέσσερα έργα τα οποία περιλάμβαναν: α) αθροίσματα στη δεκάδα, β) αθροίσματα στα διπλά, γ) αθροίσματα ελέγχου, και δ) ισοδυναμίες. Εκτός από το τρίτο έργο, τα άλλα έργα ευνοούσαν τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας σε προσθέσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι συνολικά η επίδοση των παιδιών ήταν πολύ καλή (82%), χωρίς σημαντικές διαφορές αναφορικά με την ηλικία. Οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της αντιμεταθετικής ιδιότητας στις πράξεις που την ευνοούσαν, καθώς και περισσότερο στις πράξεις με μεγάλους αριθμητικά προσθετέους. Για την εκτέλεση των πράξεων η πλειοψηφία των συμμετεχόντων, κυρίως από τη Β΄ τάξη, έκαναν χρήση των νοερών υπολογισμών, ενώ λίγοι ήταν εκείνοι που χρειάστηκαν χαρτί και μολύβι.*

## Abstract

*The aim of the present study was to examine young children's use of commutativity principle in addition problems and its connection to mental calculations. For this aim, a total of 100 children, coming equally from Year 2 and Year 3 classes, were presented with four tasks that involved: a) additions and subtractions favoring sums that give ten, b) additions and subtractions favoring sums with double numbers, c) control additions and subtractions, and d) equivalences with additions and subtractions. Commutativity principle could be used in all tasks, but the third. Results showed that all the participants had high rates of success (82%). Their performance was not affected by age. The majority of the participants used the commutativity strategy in the tasks that its use was allowed and, particularly, in tasks that involved multi-digit addends. Mental calculations were mainly used by all children compared to written calculations. However, Year 2 children showed greater preference to mental computations compared to Year 3 children.*



**Λέξεις-κλειδιά:** αντιμεταθετική ιδιότητα, νοεροί υπολογισμοί, μαθηματικά, πρωτοβάθμια εκπαίδευση
**Key words:** commutativity principle, mental calculations, primary school mathematics

Υπεύθυνος επικοινωνίας: Δέσποινα Δεσλή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Πύργος Παιδαγωγικής, Πανεπιστημιούπολη, 54124 Θεσσαλονίκη. ddesli@eled.auth.gr
URL: http://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/hjre/index

# Εισαγωγή

Οι θεωρητικές προσεγγίσεις που προτείνουν ότι η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών αναπτύσσεται μαζί με τη γνώση των μαθηματικών διαδικασιών από τα παιδιά εγείρουν το ζήτημα της στενής σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση, με την ανάπτυξη της πρώτης να συμβάλλει στη βελτίωση της δεύτερης και το αντίστροφο (Gilmore, & Papadatou-Pastou, 2009. Crooks, & Alibali, 2014). Η σημασία των δύο ειδών γνώσης και η σχέση τους έχουν ιδιαίτερα μελετηθεί αναφορικά με ζητήματα ανάπτυξης των αριθμητικών εννοιών σε παιδιά (π.χ., Rittle-Johnson, & Schneider, 2015. Siegler, & Lortie-Forgues, 2015), συχνά καταλήγοντας ότι η εννοιολογική γνώση διευκολύνει την απόκτηση διαδικαστικών δεξιοτήτων στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, οι van den Heuvel-Panhuizen και Treffers (2009) επισημαίνουν πως η απόκτηση δεξιοτήτων υπολογισμού δεν αφορά μόνο στη μάθηση συγκεκριμένων διαδικασιών επίλυσης προβλήματος αλλά εμπεριέχει και την κατανόηση των ιδιοτήτων των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων, αναδεικνύοντας έτσι τον σημαντικό ρόλο της εννοιολογικής γνώσης. Τέτοιες αποτελεσματικές διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων οδηγούν σε καλύτερη γνώση των αριθμητικών γεγονότων και κατανόηση των δομών της αριθμητικής (Hiebert, & Lefevre, 1986) και ενδεχομένως συμβάλλουν στην κατανόηση περισσότερο απαιτητικών μαθηματικών περιοχών, όπως οι ρητοί αριθμοί ή ακόμα και οι νοεροί υπολογισμοί με φυσικούς ή ρητούς αριθμούς.

Την κατανόηση της αντιμεταθετικότητας ως ένδειξη εννοιολογικής γνώσης και τη σχέση της με τη διαδικαστική γνώση μελέτησε ερευνητικά η Canobi (2004) σε παιδιά ηλικίας από 6 έως 8 ετών. Βρήκε πως σε προσθετικά προβλήματα τα παιδιά στην πλειοψηφία τους αφενός χρησιμοποίησαν την αντιμεταθετική ιδιότητα και αφετέρου παρουσίασαν μεγάλα ποσοστά επιτυχίας, αναδεικνύοντας την ύπαρξη πολύ δυνατής σχέσης ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση. Ωστόσο, οι Robinson, Dube και Beatch (2017) βρήκαν περιορισμένη κατανόηση της αντιμεταθετικής ιδιότητας σε 8-χρονα παιδιά, η οποία όμως αναπτύσσεται σε μέτριο βαθμό μέχρι την ηλικία των 10 ετών. Τα διαφορετικά ευρήματα των δύο ερευνών εξηγούνται από διαφορές στη μεθοδολογία τους: ενώ στην έρευνα της Canobi (2004) οι συμμετέχοντες έκριναν αν μία κούκλα που χρησιμοποιούσε συγκεκριμένα αντικείμενα εκτελούσε σωστά τις προσθέσεις, στην έρευνα των Robinson et al. (2017) οι συμμετέχοντες έβλεπαν το πρόβλημα με συμβολική μορφή (π.χ., 2+8 = 8+?) και έπρεπε να δώσουν μία απάντηση που θα έδειχνε τη χρήση της αντιμεταθετικότητας και, συνεπώς, την εννοιολογική κατανόησή της. Η χρήση συγκεκριμένων χειραπτικών υλικών οπωσδήποτε ευνοεί την εμφάνιση υψηλών επιδόσεων (Gilmore, & Papadatou-Pastou, 2009), ωστόσο είναι αρκετές οι έρευνες που δείχνουν ότι ακόμα και παιδιά νηπιαγωγείου που δεν έχουν δεχθεί εξειδικευμένη διδασκαλία (π.χ., Wilkins, Baroody, & Tiilikainen, 2001. Cowan, & Renton, 1996) αναγνωρίζουν και κατανοούν σε ικανοποιητικό βαθμό την αντιμεταθετικότητα όταν προσθέτουν.

Η χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας σε προσθαφαιρέσεις (a+b-c) έχει παρατηρηθεί σε μικρά παιδιά (Klein, & Bisanz, 2000. Asghari, & Khosroshahi, 2017) που χρησιμοποιούν αντικείμενα. Επειδή, όπως προτείνει η Robinson (2017), η γνώση της ιδιότητας αυτής φαίνεται να είναι ιδιαίτερα βοηθητική σε περισσότερο δύσκολους υπολογισμούς (π.χ., 389+4438-4428), στα συμβολικά προβλήματα η κατανόηση και η χρήση της -ακόμα και από εφήβους- εμφανίζεται αδύναμη (Robinson, et al., 2017). Παρόμοια, η χρήση αντικειμένων ή/και η παρουσίαση λεκτικών προβλημάτων λειτουργεί βοηθητικά στην κατανόηση και εφαρμογή της αναστροφής (Gilmore, & Bryant, 2006. Author, 2011) σε σχέση με τα συμβολικά προβλήματα: περισσότερα από τα μισά 5-χρονα και 6-χρονα παιδιά κατανοούν ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση της ίδιας ποσότητας δεν μεταβάλλει την αρχική ποσότητα (π.χ., 5+3-3 = 5). Οι Baroody, Lai, Li και Baroody (2009) εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο παιδιά 3 έως 7 ετών κατανοούν τις ιδιότητες σε υπολογισμούς αφαίρεσης, βρήκαν ότι, αν και μετά την ηλικία των 5 ετών σχεδόν όλα τα παιδιά αναγνωρίζουν πως, αν αφαιρεθούν μηδέν στοιχεία από ένα σύνολο στοιχείων, το αρχικό σύνολο παραμένει αμετάβλητο (a-0=a), αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στην αναστροφή. Για τον λόγο αυτό, προτείνουν ότι η αναστροφή κατακτάται από τα παιδιά μεταγενέστερα και οπωσδήποτε με τη βοήθεια συγκεκριμένων υλικών. Σε άλλη έρευνα (Canobi, 2005), προσφέρονται σημαντικές ενδείξεις ότι η αναστροφή προκαλεί δυσκολίες στα παιδιά: παρόλο που σχεδόν όλα τα 7-χρονα παιδιά κατανοούν την αντιμεταθετικότητα, μόνο περίπου το 25% των 7-χρονων και το 50% των 8-χρονων και 9-χρονων παιδιών κατανοούν την αναστροφή. Όσα παιδιά χρησιμοποιούν αναστροφή, φαίνεται να χρησιμοποιούν και την προσεταιριστικη ιδιότητα ως επέκταση της αντιμεταθετικής ιδιότητας (Robinson, et al., 2017), με την αντιμεταθετική ιδιότητα να κατακτάται νωρίτερα από οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα (Ching, & Nunes, 2018). Η αργοπορημένη σειρά κατάκτησης της αναστροφής βρέθηκε και σε ερευνητικά αποτελέσματα με ενήλικες (Dube, & Robinson, 2010).

Η εννοιολογική κατανόηση των ιδιοτήτων σε προσθέσεις φαίνεται να συμβάλει στην υπολογιστική ευχέρεια των παιδιών (Canobi, 2004. Nunes, Bryant, Hallet, Bell, & Evans, 2009. Star, & Seifert, 2006). Ενδεχομένως η κατανόηση αυτή αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη σύνθετων και περισσότερο προηγμένων υπολογιστικών στρατηγικών που βοηθούν τους λύτες να μετατρέψουν σύνθετα προβλήματα σε περισσότερο εύκολα στην επίλυσή τους. Για παράδειγμα, οι Gaschler, Vatterodt, French, Eichler και Haider (2013) βρήκαν ότι ακόμα και εξάχρονα παιδιά δεν πραγματοποιούσαν απαραίτητα εκ νέου υπολογισμούς, όταν αναγνώριζαν το άθροισμα τριών αριθμών που τους είχε νωρίτερα παρουσιαστεί (π.χ., 4+5+6) και το οποίο είχαν υπολογίσει, ακόμα κι αν οι τρεις αριθμοί παρουσιάζονταν με διαφορετική σειρά (π.χ., 6+5+4). Όταν, δηλαδή, κατανοούσαν την αντιμεταθετική ιδιότητα, μπορούσαν εύκολα να την χρησιμοποιήσουν ως μία εννοιολογική συντόμευση σε έναν υπολογισμό όπως τον προηγούμενο ή και σε ακόμα δυσκολότερο. Παρόμοια, η χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών, όπως της αρίθμησης όλων αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο προσθετέο (CAL strategy) ή της αρίθμησης από τον πληθάριθμο του μεγαλύτερου προσθετέου (COL strategy), εμπεριέχει τη γνώση ότι η σειρά των αριθμών δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης και, κατά συνέπεια, την εφαρμογή της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Οι στρατηγικές αυτές δείχνουν το επίπεδο των παιδιών σε αριθμητικές ικανότητες, όπως τη χρήση των αριθμών, την κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων και των ιδιοτήτων του αριθμητικού συστήματος, και συνδέονται με την αίσθηση του αριθμού (McIntosh, Reys, & Reys, 1992). Άλλωστε η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού τους επιτρέπει να δοκιμάζουν από νωρίς στρατηγικές για την εκτέλεση μικρών και εύκολων υπολογισμών και είναι αυτές οι στρατηγικές που συχνά χρησιμοποιούν στην εκτέλεση νοερών προσθέσεων. Σε αντίθεση με τους γραπτούς αλγόριθμους όπου η ίδια μέθοδος χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις, στους νοερούς υπολογισμούς οι στρατηγικές είναι δυνατόν να αλλάζουν και να προσαρμόζονται σε μία πράξη ανάλογα με το μέγεθος των αριθμών, τη δυνατότητα εφαρμογής μίας ιδιότητας, κλπ.

Η κύρια υπόθεση στην οποία στηρίζεται η παρούσα εργασία αφορά στο γεγονός ότι η χρήση των αριθμητικών ιδιοτήτων φαίνεται να επιτρέπει στους λύτες να εκτελούν μετασχηματισμούς στους αριθμούς που συναντούν στους υπολογισμούς. Ο έλεγχος της κατανόησης και της χρήσης της αντιμεταθετικής ιδιότητας από τα παιδιά ως μίας εννοιολογικής συντόμευσης στον υπολογισμό θα μπορούσε να αποτελεί αφενός έναν τρόπο αξιολόγησης τους επιπέδου εννοιολογικής κατανόησης των παιδιών και αφετέρου μία ένδειξη δυνατότητας ενίσχυσης των νοερών υπολογισμών. Με δεδομένο ότι προηγούμενες έρευνες έχουν δείξει αφενός ότι τα παιδιά ακόμα και από πολύ μικρή ηλικία αναγνωρίζουν και χρησιμοποιούν την αντιμεταθετική ιδιότητα σε προσθέσεις με δύο όρους και αφετέρου ότι η αντιμεταθετική ιδιότητα κατακτάται νωρίτερα από άλλες ιδιότητες, η παρούσα εργασία επιχειρεί να εξετάσει τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας σε προσθέσεις με τρεις όρους από μικρά παιδιά και τη σύνδεση αυτής της χρήσης με την εκτέλεση νοερών υπολογισμών πρόσθεσης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι συνειδητά γίνεται η χρήση του όρου ‘αντιμεταθετική ιδιότητα’, αντί του όρου ‘προσεταιριστική ιδιότητα’, καθώς αφορά στη δυνατότητα αλλαγής της σειράς των αριθμών (ανεξάρτητα από το πόσοι είναι οι αριθμοί) σε μία πρόσθεση χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμά της (π.χ., 4+5 = 5+4). Αντίθετα, η προσεταιριστική ιδιότητα, αν και εκ προοιμίου χρησιμοποιείται σε περισσότερους από δύο αριθμούς, αφορά στη δυνατότητα αλλαγής της σειράς εκτέλεσης των διαδοχικών προσθέσεων σε μία πρόσθεση χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμά της (π.χ., στην πρόσθεση 4+5+2 εφαρμόζεται η προσεταιριστική ιδιότητα όταν δεχόμαστε ότι (4+5)+2 = 4+(5+2), δηλαδή, δεν αλλάζει η σειρά των αριθμών).

# Μεθοδολογία της έρευνας

## *Συμμετέχοντες*

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 100 παιδιά (58 κορίτσια και 42 αγόρια), από τα οποία τα 50 (26 κορίτσια και 24 αγόρια) ήταν μαθητές/ριες Β΄ τάξης (ηλικίας από 7 χρονών και 4 μηνών έως 8 χρονών και 3 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 7 χρόνια και τους 8 μήνες) και τα υπόλοιπα 50 (32 κορίτσια και 18 αγόρια) ήταν μαθητές/ριες της Γ΄ τάξης (ηλικίας από 8 χρονών και 4 μηνών έως 9 χρονών και 3 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 8 χρόνια και 9 μήνες). Όλα τα παιδιά φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της ευρύτερης περιοχής της πόλης της Θεσσαλονίκης και κάλυπταν διαφορετικά επίπεδα ακαδημαϊκής επίδοσης και κοινωνικο-οικονομικής κατάστασης. Η επιλογή τους έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας, μέσα από τους ονομαστικούς καταλόγους κάθε τμήματος, ύστερα από πραγματοποίηση κλήρωσης από ένα σύνολο τριπλάσιων συνολικά συμμετοχών.

## *Σχεδιασμός-Εργαλείο μέτρησης*

Για την εκπλήρωση του σκοπού της έρευνας και την υλοποίησή της σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες τέσσερα έργα. Τα έργα αυτά απαιτούσαν τον υπολογισμό προσθετικών πράξεων με μικρούς και μεγάλους αριθμούς. Στα δύο πρώτα έργα ευνοούνταν η χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας και των στρατηγικών της, στο τρίτο έργο δεν ευνοούνταν η χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας, ενώ στο τέταρτο έργο υπήρχαν δοκιμασίες στις οποίες ήταν εφικτό να χρησιμοποιηθεί η αντιμεταθετική ιδιότητα και κάποιες άλλες στις οποίες δεν ήταν εφικτό.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο έργο (Έργο 1: Αθροίσματα στη δεκάδα) περιλάμβανε οκτώ αθροίσματα με τρεις προσθετέους τα οποία επέτρεπαν τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας προκειμένου το άθροισμα να φτάσει και να ‘πατήσει’ στη δεκάδα (a+b+c, όπου a+c=10 ή a+c=20, κλπ.). Από αυτά, τέσσερα αποτελούνταν από μικρούς αριθμούς στη θέση των προσθετέων (π.χ., 8+4+2, 7+5+3) και τέσσερα από μεγάλους (π.χ., 16+15+4, 19+22+1).

Το δεύτερο έργο (Έργο 2: Αθροίσματα με διπλά) περιλάμβανε οκτώ αθροίσματα με τρεις προσθετέους, από τους οποίους οι δύο ήταν όμοιοι αριθμοί (a+b+a). Τέσσερα αθροίσματα αποτελούνταν από μικρούς αριθμούς (π.χ., 6+3+6, 5+4+5) και τέσσερα από μεγάλους (π.χ., 30+13+30, 12+15+12). Με τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας θα μπορούσε ο λύτης να βρει το άθροισμα των όμοιων αριθμών και στη συνέχεια να προσθέσει τον τρίτο όρο.

Στο τρίτο έργο (Έργο 3: Δοκιμασίες ελέγχου) υπήρχαν συνολικά οκτώ αθροίσματα (a+b+c), ισάριθμα μοιρασμένα με μικρούς (π.χ., 5+3+4, 2+4+7) και μεγάλους προσθετέους (π.χ., 23+8+14, 12+7+16), τα οποία δεν ευνοούσαν τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Η ύπαρξη αυτού του έργου επιτρέπει τη σύγκριση της συχνότητας εφαρμογής της αντιμεταθετικής ιδιότητας ανάμεσα στις δοκιμασίες που ευνοούν και τις δοκιμασίες που δεν ευνοούν τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας.

Το τελευταίο έργο (Έργο 4: Αναγνώριση ισοδυναμίας) βασίζεται στην αναγνώριση από τα παιδιά των σωστών και λανθασμένων αριθμητικών παραστάσεων που αφορούν ισοδυναμίες. Συγκεκριμένα, παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες τέσσερις ισοδυναμίες με μικρούς αριθμούς που περιείχαν προσθέσεις ή αφαιρέσεις με δύο και τρεις προσθετέους (π.χ., 3+6=6+3, 9-4=4-9, 6+8+4=6+4+8) και τέσσερις αντίστοιχες ισοδυναμίες με μεγάλους αριθμούς (π.χ., 15+18+2=18+2+15, 35-12=12-35, 12+20=20+12). Οι συμμετέχοντες έπρεπε να διακρίνουν ποιες ήταν σωστές και ποιες λανθασμένες.

Στους μισούς συμμετέχοντες της Β΄ τάξης και τους μισούς συμμετέχοντες της Γ΄ τάξης (Ομάδα Α) τα έργα παρουσιάστηκαν από το πρώτο έως το τέταρτο με την πρότυπη σειρά (δηλαδή, 1, 2, 3 και 4), ενώ στους υπόλοιπους συμμετέχοντες (Ομάδα Β), πρώτα παρουσιάστηκε το τέταρτο έργο και στη συνέχεια το πρώτο, το δεύτερο και το τρίτο έργο. Ο λόγος για τη διαφοροποίηση στη σειρά παρουσίασης των έργων ανάμεσα στους συμμετέχοντες ήταν για να εξεταστεί αν τα παιδιά θα χρησιμοποιήσουν αυθόρμητα την αντιμεταθετική ιδιότητα ή αν θα επηρεαστούν από την υπενθύμιση για τη χρήση της. Είναι πολύ πιθανό το Έργο 4 να λειτουργήσει στους συμμετέχοντες ως υπενθύμιση της χρήσης της αντιμεταθετικής ιδιότητας και, κατά συνέπεια, η σειρά παρουσίασής του (πρώτο σε σειρά ή τελευταίο) να επηρεάσει τις επιδόσεις των συμμετεχόντων και τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας.

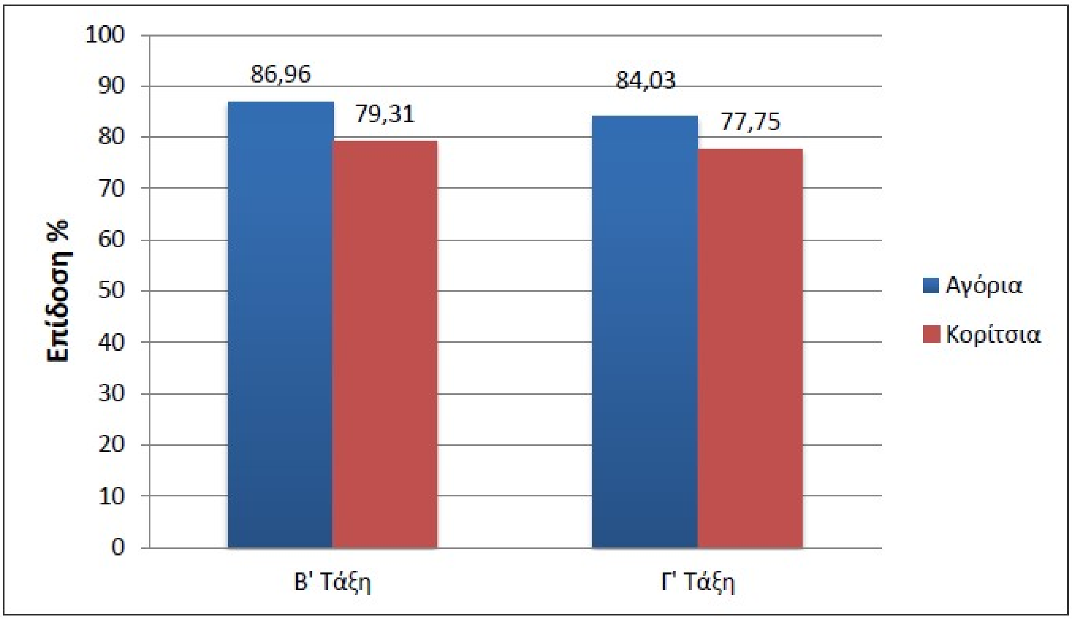
### *Διαδικασία*

Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν εθελοντική και ανώνυμη. Κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά σε μια ήσυχη αίθουσα του σχολείου του. Τα έργα παρουσιάζονταν με την καθορισμένη σειρά ανάλογα με την ομάδα (Ομάδα Α ή Ομάδα Β) στην οποία κάθε παιδί τυχαία έχει κατανεμηθεί. Όλοι οι συμμετέχοντες είχαν στη διάθεσή τους χαρτί και μολύβι, ώστε να έχουν τη δυνατότητα να επιλύσουν τα αθροίσματα –αν το επιθυμούσαν- γραπτά. Οι απαντήσεις τους καταγράφονταν σε ειδικό πρωτόκολλο που σχεδιάστηκε για τον σκοπό της έρευνας. Η διαδικασία διήρκησε περίπου 20’ λεπτά για κάθε συμμετέχοντα.

## Αποτελέσματα της έρευνας

### *Γενική επίδοση*

Η γενική επίδοση των παιδιών στο σύνολο των δοκιμασιών ήταν πολύ καλή (82%), χωρίς στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς την τάξη (t=1,152, df=98, p=.429). Τα αγόρια είχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση (85,5%) από τα κορίτσια (78,5%) στο σύνολο των συμμετεχόντων (t=2,848, df=98, p<.001). Ωστόσο, εξετάζοντας τις επιδόσεις τους ξεχωριστά για κάθε τάξη, το ποσοστό επιτυχίας των αγοριών της Β’ τάξης ήταν στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερο από αυτό των κοριτσιών της ίδιας τάξης (t=2,303, df=48, p<.05), εύρημα που δεν επιβεβαιώθηκε για τα αγόρια και τα κορίτσια της Γ’ τάξης τα οποία εμφάνισαν παρόμοια επίδοση (t=1,577, df=48, p=.121). Οι διαφορές αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα 1 που ακολουθεί.




**Σχήμα 1** Ποσοστό γενικής επίδοσης στο σύνολο των έργων ως προς το φύλο και την τάξη

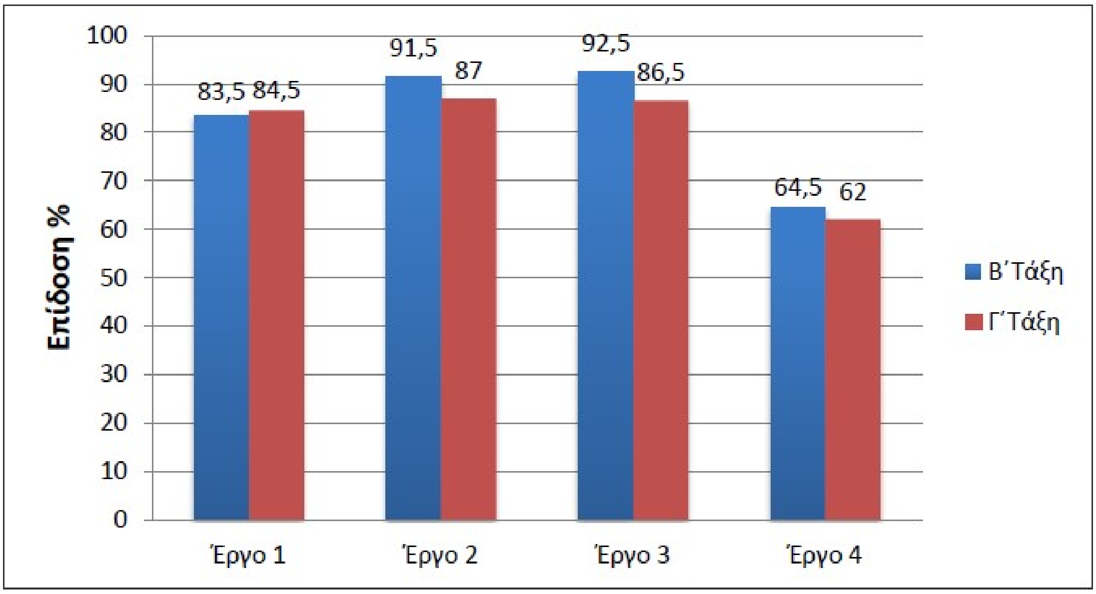
Στο σύνολο των δοκιμασιών όλα τα παιδιά παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στις προσθέσεις με μικρούς προσθετέους σε σχέση με αυτές που περιελάμβαναν μεγάλους προσθετέους (t=6,069, df=99, p<.001). Αυτή η διαφορά βρέθηκε ότι ισχύει και για τις δύο ηλικιακές ομάδες (t=3,855, df=49, p<.001 και t=4,689, df=49, p<.001, για τη Β’ και τη Γ’ τάξη, αντίστοιχα).

Η σειρά παρουσίασης των έργων δεν επηρέασε τη συνολική επίδοση των παιδιών (t=,862, df=98, p=.391): τα παιδιά που ανήκαν στην Ομάδα Α (όπου τους παρουσιάστηκαν τα Έργα 1 έως 4 με τη σειρά) είχαν παρόμοια επίδοση με τα παιδιά της Ομάδας Β (που απάντησαν αρχικά το Έργο 4 και στη συνέχεια τα Έργα 1, 2 και 3). Δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των δύο ομάδων ούτε όταν η ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για τη Β' (t=1,478, df=48, p=.142) και τη Γ' τάξη (t=-,476, df=48, p=.587).

## *Επίδοση στα Έργα*

Προκειμένου να εξεταστεί αν διαφέρει η επίδοση των παιδιών ανάμεσα στα Έργα, χρησιμοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Η ανάλυση έδειξε ότι για όλα τα παιδιά τα Έργα 2 και 3 ήταν τα πιο εύκολα (με ποσοστά επιτυχίας 89,25% και 89,5%, αντίστοιχα), ενώ το Έργο 4 τους δυσκόλεψε περισσότερο από όλα (με ποσοστό επιτυχίας 63,25%). Συγκεκριμένα, στο Έργο 4 τα παιδιά είχαν στατιστικά σημαντικά χειρότερη επίδοση σε σχέση με το Έργο 1 (t=6,214, df=99, p<.001), με το Έργο 2 (t=8,236, df=99, p<.001) και με το Έργο 3 (t=8,467, df=99, p<.001). Επίσης, η επίδοση όλων των παιδιών στο Έργο 1 (84%) ήταν στατιστικά σημαντικά χειρότερη από τα Έργα 2 και 3 (t=-3,632, df=99, p<.001 και t=-3,591, df=99, p<.01, αντίστοιχα), τα οποία μεταξύ τους ήταν παρόμοιας δυσκολίας για τα παιδιά (t=-,190, df=99, p=.850).

Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, βρέθηκε ότι για τα παιδιά της Β' τάξης τα Έργα 2 και 3 ήταν στατιστικά σημαντικά πιο εύκολα τόσο από το Έργο 1 (t=-3,746, df=49, p<.001 και t=-4,257, df=49, p<.001, αντίστοιχα) όσο και από το Έργο 4 (t=6,105, df=49, p<.001 και t=6,709, df=49, p<.001, αντίστοιχα), το οποίο ήταν για αυτά το πιο δύσκολο έργο. Ανάλογα ήταν τα αποτελέσματα και για τα παιδιά της Γ' τάξης που παρουσίασαν παρόμοια επίδοση στα Έργα 1, 2 και 3, η οποία ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερη από την επίδοσή τους στο Έργο 4 (t=5,077, df=49, p<.001, t=5,500, df=49, p<.001 και t=5,309, df=49, p<.001, αντίστοιχα). Το Σχήμα 2 παρουσιάζει τις διαφορές στην επίδοση των παιδιών στα τέσσερα έργα ως προς την ηλικία.




**Σχήμα 2** Ποσοστό επίδοσης των παιδιών στα έργα ως προς την τάξη

Η σύγκριση των επιδόσεων των παιδιών στις προσθέσεις με μικρούς και μεγάλους προσθετέους ξεχωριστά για κάθε έργο έδειξε πως όλα τα παιδιά είχαν στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στις πράξεις με μικρούς προσθετέους σε όλα τα έργα (t=4,606, df=99, p<.001, t=2,076, df=99, p<.05 και t=7,158, df=99, p<.001, στα Έργα 1, 2 και 3, αντίστοιχα) εκτός από το Έργο 4, στο οποίο η επίδοσή τους δεν επηρεάστηκε από το μέγεθος των προσθετέων (t=-,973, df=99, p=.333).

Το μέγεθος των αριθμών επηρέασε τα παιδιά της Β' τάξης μόνο στο Έργο 3 ($t=4,477$, $df=49$, $p<.001$) στο οποίο είχαν στατιστικά καλύτερη επίδοση στις πράξεις με μικρούς αριθμούς σε σχέση με τις πράξεις με μεγάλους προσθετέους. Παρόμοια, οι μικροί αριθμοί επηρέασαν την επίδοση των παιδιών της Γ' τάξης μόνο στα Έργα 1 και 3 ($t=3,898$, $df=49$, $p<.001$ και $t=5,621$, $df=49$, $p<.001$, αντίστοιχα).

## *Στρατηγικές των παιδιών*

Από όλους τους συμμετέχοντες, ανεξάρτητα από το αν η απάντησή τους ήταν σωστή ή λανθασμένη, ζητήθηκε να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποίησαν τους υπολογισμούς[1]. Οι απαντήσεις τους αναδείκνυαν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν και ταξινομήθηκαν, ακολουθώντας την ταξινόμηση του Beishuizen (1985), στις εξής επτά κατηγορίες:

*1. Ασαφής απάντηση:* Σε αυτή την κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών όπως «*Δεν ξέρω*» ή απαντήσεις που δεν είχαν σχέση με τις δοκιμασίες.

*2. Πρόσθεση με σειρά:* Τα παιδιά πρόσθεταν τους προσθετέους ακριβώς με τη σειρά με την οποία αναγράφονταν και τους παρουσιάζονταν (π.χ., 16+15+4 → 16+15=31, 31+4=35).

*3. Διαχωρισμός:* Τα παιδιά «έσπαγαν» έναν ή και παραπάνω αριθμούς χωρίζοντάς τους σε μικρότερους αριθμούς (κυρίως σε δεκάδες και μονάδες) που τους πρόσθεταν (π.χ., 25+16+11 → 20+10+10+5+6+1 = 52).

*4. Συσσώρευση:* Τα παιδιά ξεκινούσαν από τον πρώτο προσθετέο, τον οποίο κρατούσαν σταθερό, και πρόσθεταν διαδοχικά τους υπόλοιπους προσθετέους με τη σειρά, διαχωρίζοντάς τους πρώτα σε δεκάδες και μονάδες (π.χ., 25+16+11→ 25+10+6+10+1=52).

*5. Αντιστάθμιση:* Τα παιδιά χρησιμοποιούσαν αυτή τη στρατηγική σε κοντινούς ως προς το μέγεθος αριθμούς, προσθέτοντας επιπλέον μονάδες στα ψηφία ώστε να εμφανίζονται διπλοί αριθμοί ή κάποιο γνωστό σε αυτούς αριθμητικό αποτέλεσμα και έπειτα τις αφαιρούσαν από το τελικό αποτέλεσμα. Δηλαδή, προσθαφαιρούσαν αριθμούς από τον έναν όρο στον άλλο (π.χ., 7+5+3 → 8+8-1=15).

*6. Αντιμεταθετική ιδιότητα:* Όσα παιδιά έκαναν χρήση αυτής της στρατηγικής άλλαζαν τη σειρά πρόσθεσης των αριθμών και χρησιμοποιούσαν την αντιμεταθετική ιδιότητα,

*i. Ως προς τη δεκάδα:* άλλαζαν τη σειρά με την οποία πρόσθεταν τους αριθμούς, προσθέτοντας πρώτα εκείνους που συμπληρώνουν δεκάδα και έπειτα τον τελευταίο αριθμό (π.χ., 28+14+2 → 28+2+14=44),

*ii. Ως προς τα διπλά:* άλλαζαν τη σειρά με την οποία πρόσθεταν τους αριθμούς, προσθέτοντας πρώτα εκείνους που είναι ίδιοι, βρίσκοντας έτσι τα διπλά αθροίσματα και έπειτα τον τελευταίο αριθμό (π.χ., 30+13+30 → 30+30+13 = 73),

*iii. Ως προς τη διάταξη:* άλλαζαν τη σειρά με την οποία πρόσθεταν τους αριθμούς, προσθέτοντας πρώτα εκείνους που ήταν πιο ευνοϊκοί για αυτούς αρχίζοντας από τους μεγαλύτερους ή από κοντινούς σε μέγεθος αριθμούς (π.χ., 4+5+6 → 6+5+4 = 15),

*iv. Συνδυασμός αντιμεταθετικής ιδιότητας και διαχωρισμού:* πρόσθεταν με διαφορετική σειρά τους αριθμούς, αφού τους χώριζαν σε μικρότερα τμήματα για πιο εύκολη πρόσθεση. Συνήθως χώριζαν τους αριθμούς σε δεκάδες και μονάδες και πρόσθεταν τους διπλούς ή εκείνους που συμπληρώνουν δεκάδα (π.χ., 15+17+15 → 10+10+5+5+10+7=47),

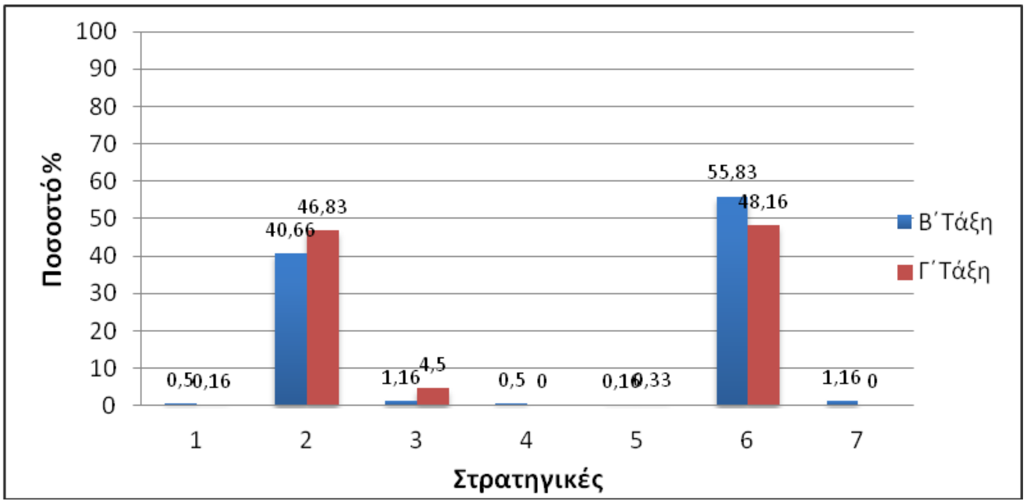
[1] Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να πραγματοποιήσουν υπολογισμούς μόνο στα Έργα 1, 2 και 3 και, για αυτόν τον λόγο υπάρχει καταγραφή των στρατηγικών τους μόνο για τα συγκεκριμένα Έργα.

7. *Συνδυασμός διαχωρισμού και συσσώρευσης:* Τα παιδιά χώριζαν τους διψήφιους αριθμούς σε μονάδες και δεκάδες, πρόσθεταν πρώτα τις δεκάδες και μετά συνέχιζαν με τις μονάδες. Τέλος, πρόσθεταν και τον μονοψήφιο όρο (π.χ., 23+15+7 → 20+10+3+5+7=45).

## *Συχνότητα χρήσης των στρατηγικών*

Στο σύνολό τους οι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν κυρίως τη στρατηγική 6 της αντιμεταθετικής ιδιότητας ως προς τη δεκάδα, τα διπλά και τη διάταξη (συνολικό ποσοστό χρήσης: 52%) και τη στρατηγική 2 της πρόσθεσης σε σειρά (43,75%). Οι υπόλοιπες στρατηγικές χρησιμοποιήθηκαν πολύ λιγότερο.

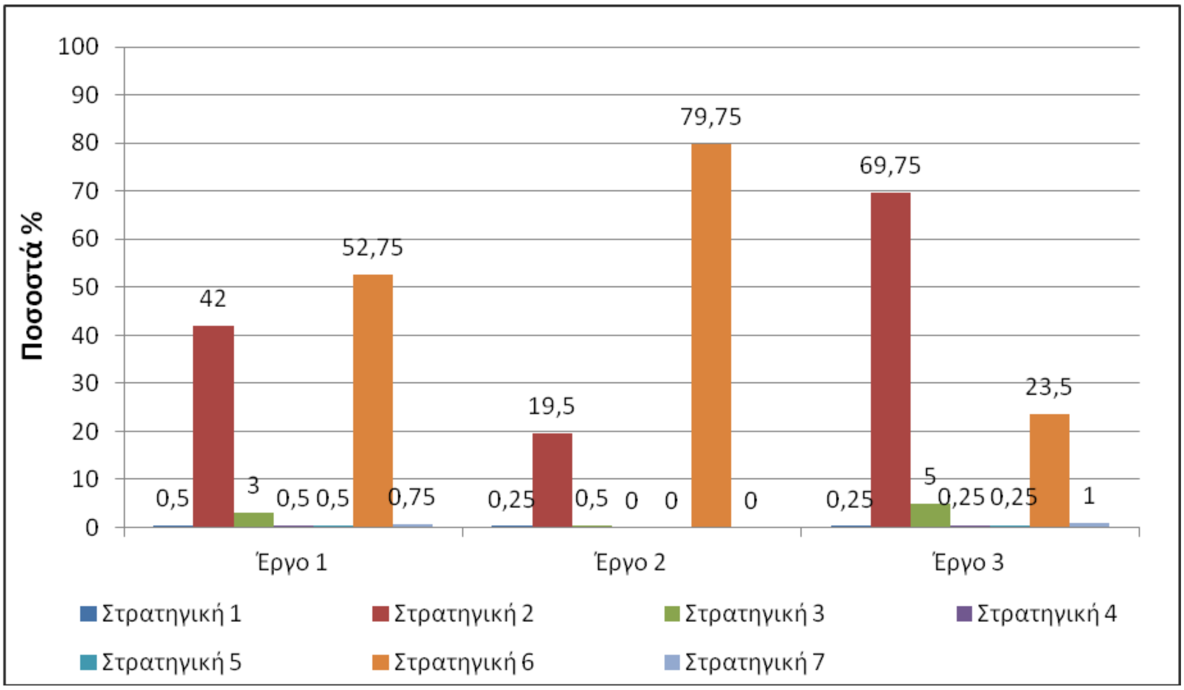
Η συχνότητα χρήσης όλων των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν τα παιδιά κατά την εκτέλεση των πράξεων σε όλα τα έργα δεν βρέθηκε να διαφέρει στατιστικά σημαντικά ως προς την ηλικία. Μόνη εξαίρεση αποτέλεσε η χρήση της στρατηγικής 7 (συνδυασμός διαχωρισμού και συσσώρευσης): συγκεκριμένα, τη στρατηγική αυτή χρησιμοποίησαν μόνο παιδιά της Β΄ τάξης και κανένα της Γ΄ (t=2,064, df=98, p<.05). Επίσης, οριακά δεν βρέθηκαν διαφορές στη χρήση της στρατηγικής 3 που αφορούσε τον διαχωρισμό (t=-1,971, df=98, p=.055). Τα ποσοστά χρήσης κάθε στρατηγικής για κάθε ηλικία παρουσιάζονται αναλυτικά στο Σχήμα 3.



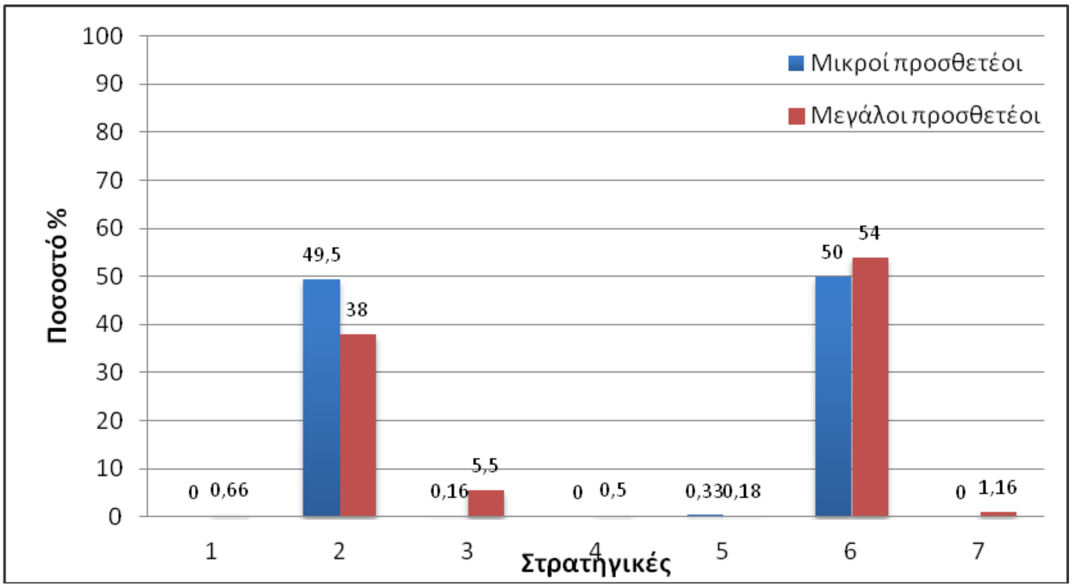

**Σχήμα 3** Ποσοστό χρήσης των στρατηγικών ως προς την τάξη

Όταν εξετάστηκε η συχνότητα χρήσης των στρατηγικών των παιδιών σε κάθε έργο ξεχωριστά, βρέθηκε ότι στο Έργο 1 και στο Έργο 3 υπερίσχυσε η στρατηγική 2 (Πρόσθεση με σειρά), ενώ στο Έργο 2 υπερίσχυε η στρατηγική 6 (Αντιμεταθετική ιδιότητα). Αναλυτικότερα, στατιστικά σημαντικές διαφορές εμφανίστηκαν μεταξύ των Έργων 1, 2 και 3 όσον αφορά τη χρήση της στρατηγικής 2, με μικρότερη χρήση της συγκεκριμένης στρατηγικής στο Έργο 2 (19,5%) σε σχέση με το Έργο 1 (42%) (t=4,776, df=99, p<.001) και μεγαλύτερη χρήση της στο Έργο 3 (69,75%) σε σχέση τόσο με το Έργο 1 (t=-6,044, df=99, p<.001) όσο και με το Έργο 2 (t=-12,224, df=99, p<.001). Επίσης, στατιστικά σημαντική διαφορά βρέθηκε στη χρήση της στρατηγικής 3 (Διαχωρισμός), η οποία χρησιμοποιήθηκε λιγότερο στο Έργο 2 συγκριτικά τόσο με το Έργο 1 (t=2,333, df=99, p<.05) όσο και με το Έργο 3 (t=-2,641, df=99, p<.05). Στατιστικά σημαντικά συχνότερη ήταν η χρήση της στρατηγικής 6 (χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας) στο Έργο 2 (79,75%) σε σχέση με το Έργο 3 (23,5%) (t=13,395, df=99, p<.001), αλλά και με το Έργο 1 (52,7%) (t=-5,629, df=99, p<.001). Οι στρατηγικές 1, 4, 5 και 7 παρουσίασαν παρόμοια συχνότητα χρήσης και στα τρία έργα. Η συχνότητα χρήσης όλων των στρατηγικών για κάθε έργο ξεχωριστά παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.

Οι περισσότερες στρατηγικές εμφανίζονται με σχετικά μεγαλύτερη συχνότητα στις προσθέσεις με μεγάλους προσθετέους: φαίνεται ότι αυτές οι προσθέσεις ενίσχυσαν την αναζήτηση των παιδιών σε εναλλακτικές στρατηγικές. Για παράδειγμα, η στρατηγική του διαχωρισμού, η στρατηγική της αντιμεταθετικής ιδιότητας και αυτή που συνδυάζει τον διαχωρισμό και τη συσσώρευση (στρατηγικές 3, 6 και 7, αντίστοιχα) εμφανίστηκαν στατιστικά σημαντικά περισσότερο στις προσθέσεις με μεγάλους προσθετέους ($t=-4{,}469$, $df=99$, $p<.001$, $t=-1{,}799$, $df=99$, $p<.05$ και $t=-2{,}841$, $df=99$, $p<.01$, αντίστοιχα για τις στρατηγικές 3, 6 και 7) σε σύγκριση με τις προσθέσεις που αφορούσαν μικρούς προσθετέους. Αντίθετα, στατιστικά σημαντικές διαφορές προέκυψαν στη χρήση της στρατηγικής 2 (Πρόσθεση σε σειρά), η οποία ευνοήθηκε περισσότερο στους μικρούς προσθετέους ($t=4{,}868$, $df=99$, $p<.001$). Στις στρατηγικές της συσσώρευσης και της αντιστάθμισης (στρατηγικές 4 και 5) δεν υπήρχε διαφοροποίηση στη χρήση τους ως προς τους μικρούς και μεγάλους προσθετέους. Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.




**Σχήμα 4** Συχνότητα χρήσης των στρατηγικών στα Έργα 1, 2 και 3




**Σχήμα 5** Ποσοστό χρήσης των στρατηγικών ως προς το μέγεθος των προσθετέων

## *Συσχέτιση της χρήσης στρατηγικών με την επίδοση*

Εξετάζοντας τις συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και την επίδοση όλων των παιδιών βρέθηκε ότι η στρατηγική 2 (πρόσθεση σε σειρά) εμφανίζεται με μη επιτυχείς απαντήσεις (Pearson's r = -,499, p<.001), δηλαδή όσο περισσότερο χρησιμοποιείται τόσο μειώνεται η επίδοση στο σύνολο των έργων αλλά και σε κάθε έργο ξεχωριστά. Αντίθετα, η στρατηγική 6 (χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας) εμφάνισε υψηλή θετική συσχέτιση (Pearson's r = ,564, p<.001) με την επίδοση στο σύνολο των έργων: όσο περισσότερο την χρησιμοποιούν τα παιδιά τόσο καλύτερη είναι η επίδοσή τους συνολικά στα έργα, αλλά και σε κάθε έργο ξεχωριστά, παρουσιάζοντας περισσότερες σωστές απαντήσεις. Οι υπόλοιπες στρατηγικές δεν εμφάνισαν καμία συσχέτιση με την επίδοση (βλ. Πίνακα 1).

**Πίνακας 1** Συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση καθεμιάς στρατηγικής και την επίδοση στο σύνολο των συμμετεχόντων

| **Στρατηγικές** | **Συνολική επίδοση** | **Επίδοση σε** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Έργο 1** | **Έργο 2** | **Έργο 3** | **Έργο 4** | **Μικροί αριθμοί** | **Μεγάλοι αριθμοί** |
| **1.** Ασαφής απάντηση | -, 119 | -,225 | ,023 | ,019 | -,085 | ,033 | -,174 |
| **2.** Πρόσθεση με σειρά | -,499** | -,376** | -,398** | -,334** | -,289** | -,399** | -,482** |
| **3.** Διαχωρισμός | -,105 | -,031 | -,082 | -,077 | -,090 | -,154 | -,068 |
| **4.** Συσσώρευση | -,127 | -,226 | -,180 | -,184 | ,104 | -,023 | -,158 |
| **5.** Αντιστάθμιση | -,106 | ,046 | ,043 | ,187 | -,340* | -,199 | -,050 |
| **6.** Αντιμεταθετική ιδιότητα | ,564** | ,419** | ,437** | ,368** | ,342** | ,473** | ,534** |
| **7.** Διαχωρισμός και Συσσώρευση | ,152 | ,131 | ,145 | ,067 | ,082 | ,040 | ,184 |

* *στατιστική σημαντικότητα στο p<.05*

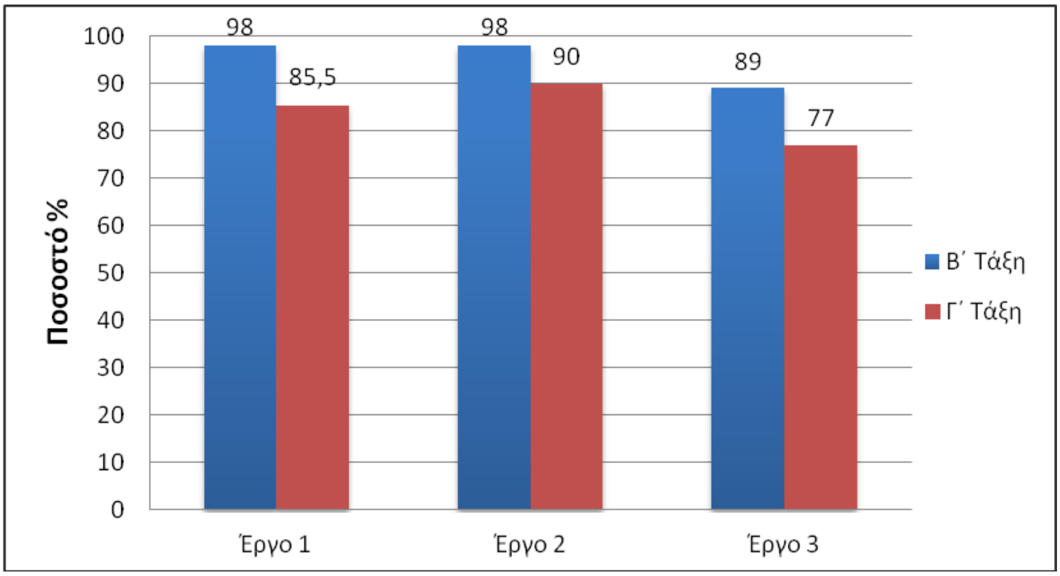
** *στατιστική σημαντικότητα στο p<.01*

## *Νοεροί υπολογισμοί*

Τέλος, εξετάστηκε ο τρόπος εκτέλεσης των προσθέσεων από τους συμμετέχοντες στα Έργα 1, 2 και 3, δηλαδή αν κατέφυγαν σε νοερούς ή γραπτούς υπολογισμούς. Στο σύνολό τους τα παιδιά χρησιμοποίησαν νοερούς υπολογισμούς για την εκτέλεση των πράξεων (89,5%), ενώ πολύ λίγα ήταν τα παιδιά που χρησιμοποίησαν χαρτί και μολύβι.

Στατιστικά σημαντικές ήταν οι διαφορές στη χρήση νοερών υπολογισμών ως προς την ηλικιακή ομάδα. Συγκεκριμένα, βρέθηκε πως τα παιδιά της Β΄ τάξης χρησιμοποίησαν νοερούς υπολογισμούς (95%) περισσότερο από τα παιδιά της Γ΄ τάξης, τα οποία επέλεξαν κατά 84% τους νοερούς υπολογισμούς και κατά 16% τους υπολογισμούς σε χαρτί (t=3,007, df=98, p<.01). Όταν έγινε επιμέρους εξέταση για τη χρήση των γραπτών και νοερών υπολογισμών για κάθε έργο ξεχωριστά, βρέθηκαν οι ίδιες στατιστικά σημαντικές διαφορές για τα Έργα 1 και 3 (t=2,080, df=98, p<.01), καθώς τα παιδιά της Β΄ τάξης έλυσαν περισσότερο νοερά τις προσθέσεις των έργων αυτών σε σχέση με τα παιδιά της Γ΄ τάξης. Για το Έργο 2 (t=1,513, df=98, p=.137), όμως, δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές: με παρόμοια συχνότητα οι δύο ηλικιακές ομάδες πραγματοποίησαν νοερά και γραπτά τους υπολογισμούς στις προσθέσεις.

Οι νοεροί υπολογισμοί επιλέχθηκαν από τους συμμετέχοντες με παρόμοια υψηλή συχνότητα στα Έργα 1 και 2 (t=-1,840, df=99, p=.069). Αντίθετα, στο Έργο 3, που περιλάμβανε δοκιμασίες οι οποίες δεν ευνοούσαν τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας και των νοερών υπολογισμών, οι συμμετέχοντες κατέφευγαν στατιστικά σημαντικά συχνότερα σε γραπτούς υπολογισμούς σε σύγκριση με το Έργο 1 και 2 (t=3,163, df=99, p<.01 και t=4,731, df=99, p<.001, αντίστοιχα). Αυτές οι διαφορές οι οποίες εντοπίστηκαν και ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.




**Σχήμα 6** Χρήση των νοερών υπολογισμών στα Έργα 1, 2 και 3 ως προς την τάξη

Προκειμένου να εξεταστεί εάν υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στη χρήση των νοερών υπολογισμών και τη συχνότητα χρήσης των στρατηγικών, πραγματοποιήθηκε ανάλυση συσχετίσεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η στρατηγική 2 (Πρόσθεση με σειρά) έχει υψηλή αρνητική συσχέτιση με τους νοερούς υπολογισμούς τόσο στο σύνολο των έργων (Pearson's r=-,218, p<.05) όσο και στα Έργα 1 και 2 (Pearson's r=-,376, p<.01 και Pearson's r=-,210, p<.05). Δηλαδή, όσο περισσότερο χρησιμοποιούν οι μαθητές τη στρατηγική 2 τόσο περισσότερο καταφεύγουν στους γραπτούς υπολογισμούς. Επίσης, η στρατηγική 5 (Αντιστάθμιση) έχει υψηλή θετική συσχέτιση στο σύνολο των έργων (Pearson's r=,282, p<.01) αλλά και στα Έργα 2 και 3 (Pearson's r=,256, p<.05 και Pearson's r=,335, p<.01, αντίστοιχα): όσο περισσότερο τα παιδιά τη χρησιμοποιούσαν τόσο περισσότερο επέλεγαν νοερούς υπολογισμούς για την επίλυση. Η ίδια στρατηγική, ωστόσο, δεν συσχετίστηκε με τη χρήση των νοερών υπολογισμών στο Έργο 1 (Αθροίσματα στη δεκάδα), όπου ενδεχομένως η χρήση της δεν ήταν βολική. Τέλος, η στρατηγική 6 (Αντιμεταθετική ιδιότητα) παρουσίασε θετική συσχέτιση με τη χρήση νοερών υπολογισμών στα Έργα 1 και 2 (Pearson's r=,348, p<.01 και Pearson's r=,204, p<.05, αντίστοιχα), αλλά καμία συσχέτιση στο Έργο 3, όπου οι δοκιμασίες ελέγχου δεν ευνοούσαν τη χρήση της. Τα αποτελέσματα των συσχετίσεων παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 2.

## Συζήτηση - Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε η μελέτη αφενός της χρήσης της αντιμεταθετικής ιδιότητας από μικρά παιδιά και αφετέρου της σύνδεσής της με την εκτέλεση νοερών υπολογισμών πρόσθεσης με τρεις προσθετέους. Τρία είναι τα κύρια ευρήματα που προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων. Πρώτον, η συνολική επίδοση των παιδιών της Β΄ και της Γ΄ τάξης βρέθηκε πολύ καλή, με ποσοστά επιτυχίας τα οποία ξεπέρασαν το 80%. Η υψηλή αυτή επίδοση συχνά συνοδευόταν με τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας, η οποία φαίνεται να συνδέεται σημαντικά με την επιτυχή επίδοση. Η χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας επιβεβαιώνει ευρήματα προηγούμενων ερευνών που έδειξαν πως μικρά παιδιά -ακόμα και πριν από την είσοδό τους στο σχολείο- είχαν μερική κατανόηση της έννοιας της αντιμεταθετικότητας (Gaschler et al., 2013. Canobi, 2004. Wilkins et al., 2001). Βέβαια, η διαφορά μεταξύ των ηλικιών στην παρούσα έρευνα ήταν αρκετά κοντινή ώστε να αποδώσει αντίστοιχη σημαντική διαφορά στις επιδόσεις των μαθητών.

**Πίνακας 2** Συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση καθεμιάς στρατηγικής και τους νοερούς υπολογισμούς στο σύνολο των συμμετεχόντων

| **Στρατηγικές** | **Σύνολο έργων** | **Νοεροί Υπολογισμοί σε** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **Έργο 1** | **Έργο 2** | **Έργο 3** |
| **1.** Ασαφής απάντηση | , 113 | ,090 | ,076 | ,111 |
| **2.** Πρόσθεση με σειρά | -,218* | -,376** | -,210* | -,004 |
| **3.** Διαχωρισμός | ,057 | ,177 | ,112 | -,105 |
| **4.** Συσσώρευση | ,104 | ,096 | ,081 | ,083 |
| **5.** Αντιστάθμιση | ,282** | ,098 | ,256* | ,335** |
| **6.** Αντιμεταθετική ιδιότητα | ,218* | ,348** | ,204* | ,031 |
| **7.** Διαχωρισμός και Συσσώρευση | -,032 | -,079 | -,126 | ,087 |

** στατιστική σημαντικότητα στο p<.05*

*** στατιστική σημαντικότητα στο p<.01*

Δεύτερον, η χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας ήταν ιδιαίτερα υψηλή στα έργα που την ευνοούσαν (Έργα 1 και 2). Τα αθροίσματα στη δεκάδα (π.χ., 8+4+2) και τα αθροίσματα με διπλά (π.χ., 6+3+6) επέτρεπαν στα παιδιά να χρησιμοποιήσουν την αντιμεταθετική ιδιότητα (ποσοστά χρήσης: 53% και 80%, αντίστοιχα) πολύ περισσότερο από τα τυπικά αθροίσματα ελέγχου (π.χ., 5+3+4). Στα τελευταία αθροίσματα μάλιστα χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον η στρατηγική της πρόσθεσης σε σειρά (περίπου 70%). Το εύρημα αυτό αφενός ενισχύει ακόμη μια φορά την προοπτική της κατανόησης της αντιμεταθετικότητας σε μικρές ηλικίες και αφετέρου αποτελεί ένδειξη ότι με τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας τα παιδιά, ακόμα και της Β' τάξης, πραγματοποιούσαν ένα είδος συντόμευσης στους προσθετικούς υπολογισμούς, ιδιαίτερα μάλιστα στα αθροίσματα με μεγάλους αριθμητικά προσθετέους. Η συντόμευση αυτή μάλιστα φαίνεται να οδήγησε τα παιδιά σε επιτυχείς υπολογισμούς, καθώς βρέθηκε πολύ υψηλότερη επίδοση των παιδιών στις δοκιμασίες που αφορούσαν αθροίσματα στη δεκάδα και αθροίσματα με διπλά σε σχέση με τις υπόλοιπες δοκιμασίες. Η χρήση παρόμοιων συντομεύσεων (π.χ., της αναστροφής) έχει ήδη αναγνωριστεί (Gilmore, & Bryant, 2006.

Author, 2011) και έχει αναδειχθεί η χρησιμότητα της εννοιολογικής κατανόησης στην υπολογιστική ευχέρεια των παιδιών (Nunes et al., 2009. Gilmore, & Papadatou-Pastou, 2009). Αν αυτό πράγματι ισχύει, τότε η εννοιολογική κατανόηση της αντιμεταθετικότητας από τα παιδιά τα βοηθά να κατακτήσουν τη στρατηγική της συντόμευσης –στην προκειμένη περίπτωση, την αντιμεταθετική ιδιότητα- και, κατά συνέπεια, να βελτιώσουν τις αριθμητικές υπολογιστικές τους ικανότητες. Αξίζει αυτό να μελετηθεί ακόμα περισσότερο, ενδεχομένως σε δοκιμασίες που ευνοούν τη χρήση συνδυασμού των αριθμητικών ιδιοτήτων ή δοκιμασίες που αφορούν ακόμα και σε άλλες αριθμητικές πράξεις (π.χ., πολλαπλασιασμούς).

Τρίτον, για την εκτέλεση των πράξεων η πλειοψηφία των συμμετεχόντων, κυρίως από τη Β΄ τάξη, έκαναν χρήση των νοερών υπολογισμών, ενώ λίγοι ήταν εκείνοι που χρειάστηκαν χαρτί και μολύβι, ακόμα και για τα αθροίσματα με μεγάλους αριθμούς. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει όσους διαφωνούν με την πρώιμη έκθεση των παιδιών σε γραπτούς αλγόριθμους των πράξεων στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου υποστηρίζοντας ότι επηρεάζει αρνητικά τη συγκρότηση των υπολογιστικών ικανοτήτων και την ανάπτυξη των νοερών υπολογισμών των παιδιών (Kamii & Dominick, 1997. van de Walle, Lovin, Karp, & Bay-Williams, 2017). Επιπρόσθετα, αν και η επιλογή των παιδιών σε νοερούς υπολογισμούς έφτασε περίπου στο 90% στο σύνολο των δοκιμασιών, τα παιδιά πραγματοποίησαν νοερούς υπολογισμούς με μεγαλύτερη συχνότητα στα αθροίσματα στη δεκάδα και στα αθροίσματα με διπλά (Έργα 1 και 2, περίπου 93%) σε σχέση με τα αθροίσματα ελέγχου (Έργο 3, περίπου 83%), στα οποία τα παιδιά κατέφευγαν αρκετά συχνά σε γραπτούς υπολογισμούς. Με δεδομένο ότι αφενός τα αθροίσματα στη δεκάδα και τα αθροίσματα με διπλά ευνοούν τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας και αφετέρου είναι αυτά τα αθροίσματα στα οποία οι νοεροί υπολογισμοί επιλέγονται με μεγαλύτερη συχνότητα, αναδεικνύεται η χρήση της αντιμεταθετικότητας από μικρά παιδιά ως συντόμευσης και υποστήριξης των νοερών υπολογισμών: όσο περισσότερο τα παιδιά προτιμούσαν τους νοερούς υπολογισμούς τόσο περισσότερο βασίζονταν στη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας, γεγονός που τους οδηγούσε σε ορθά αποτελέσματα και, κατά συνέπεια, υψηλές επιδόσεις.

Γενικά, τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη συντόμευση με τη χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας δείχνοντας ότι η κατανόηση της αντιμεταθετικότητας είναι σημαντική προκειμένου να αναγνωριστούν εκείνες οι συντομεύσεις που θα περιορίσουν τις δυσκολίες στους υπολογισμούς και θα ενισχύσουν τη χρήση και την ορθότητα των νοερών υπολογισμών. Τέλος, όπως δείχνουν τα αποτελέσματα από την παρούσα έρευνα, αξίζει να μελετηθεί περαιτέρω η ενθάρρυνση για πρώιμη και έγκαιρη χρήση της αντιμεταθετικότητας από τα παιδιά ως μέσο για την ενίσχυση τόσο των νοερών τους υπολογισμών όσο και των στρατηγικών τους σε νοερές προσθέσεις.

## Βιβλιογραφία


Asghari, A.H., & Khosroshahi, L.G. (2017). Making associativity operational. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1559-1577.

Baroody, A.J., Lai, M., Li, X., & Baroody, A.E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 41-60.

Canobi, K.H. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology, 92*, 220-246.

Canobi, K.H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development, 19,* 81-93.

Ching, B.H., & Nunes, T. (2018). Children's understanding of the commutativity and complement principles: A latent profile analysis. *Learning and Instruction, 47*, 65-79.

Cowan, R., & Renton, M. (1996). Do they know what they are doing? Children's use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology, 16*(4), 407-420.

Crooks, N.M., & Alibali, M.W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344-377.

Author (2011). The use of inversion principle by young children as evidence for conceptual understanding in additive problems. In N. Stellakis, & M. Efstathiadou (Eds.), *OMEP European Conference Proceedings* (pp. 82-89). Nicosia, Cyprus.

Dube, A.K., & Robinson, K.M. (2010). The relationship between adults' conceptual understanding of inversion and associativity. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 64*(1), 60-66.

Gaschler, R., Vatterodt, B., French, P.A, Eichler, A., & Haider, H. (2013). Spontaneous usage of different shortcuts based on the commutativity principle. *Plos One, 8*(9). Retrieved from https://doi.org/10.1371/journal.pone.0074972

Gilmore, C.K., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology, 76*, 309-331.

Gilmore, C.K., & Papadatou-Pastou, M. (2009). Patterns of individual differences in conceptual understanding and arithmetical skill: A meta-analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 25-40.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Procedural and conceptual knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Procedural and conceptual knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: LEA.

Kamii, C. & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behavior, 16*, 51-61.

Klein, & J.S., Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 54*(2), 105-115.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.

Nunes, T., Bryant, P., Hallet, D., Bell, D., & Evans, D. (2009). Teaching children about the inverse relation between addition and subtraction. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 61-78.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In R. Cohen Kadosh, & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of numerical cognition* (pp. 1102-1118). Oxford, UK: Oxford University Press.

Robinson K.M. (2017). The understanding of additive and multiplicative arithmetic concepts. In D.C. Geary, D.B. Berch, R.J. Ochsendorf, & K.M. Koepke (Eds.), *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 21-46). Elsevier, Academic Press.

Robinson, K.M., Dube, A.K., & Beatch, J-A. (2017). Children's understanding of additive concepts. *Journal of Experimental Child Psychology, 156*, 16-28.

Siegler, R.S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 107*(3), 909-918.

Star, J.R., & Seifert, C. (2006). The development of flexibity in equation solving. *Contemporary Educational Psychology, 31*(3), 280-300.

van de Walle, Lovin, L.H., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2017). *Μαθηματικά από το νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο*. Αθήνα: Gutenberg.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Treffers, A. (2009). Mathe-didactical reflections on young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 102-112.

Wilkins, J.L.M., Baroody, A.J., & Tiilikainen, S. (2001). Kindergartners' understanding of additive commutativity within the context of word problems. *Journal of Experimental Child Psychology, 79*, 23-36.