

# Journal of the Hellenic Veterinary Medical Society

Vol 35, No 2 (1984)

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΚΤΗΝΙΑΤΡΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Επιστημονικό Σωματείο Αναγνωρισμένο, Απόφ. Πρωτ. Αθηνών 1021/83  
**Διοικητικό Συμβούλιο:**  
Πρόεδρος: Σπ. Κ. Κυριάκης  
Αντιδρος: Λουκ. Ευσταθίου  
Γ. Γραμ.: Θεοδ. Ανασταδής  
Ειδ. Γραμ.: Ευαγ. Σίμος  
Ταμίας: Αγγ. Παπαδόπουλος  
Μέλη: Απ. Ράνταος  
Αλ. Καρδούλης

**ΕΚΔΟΣΗΣ:** Λουκάς Ευσταθίου  
Ζαλοκώστα 30, Χαλάνδρι  
Τηλ.: 6823459

**ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**  
Πρόεδρος: Αρίσ. Σεϊμένης  
Μέλη: Χρ. Παππούς  
Γιαν. Δημητριάδης  
Στεφ. Κολάγγης  
Ειρ. Οικονομίδου


**ΦΩΤΟΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ**  
**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ:**  
Σ. Μπέλλου, Ελ. Βενιζέλου 98,  
Χολαργός, Τηλ.: 6529604

Ημερομηνία έκδοσης: ΙΟΥΝΙΟΣ

**TAX. ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ:**  
Ταχ. Θυρίδα 3546  
10210 Αθήνα

**Συνδρομές για Ελλάδα και Κύπρο:**

ήσια μελών	δρχ. 1.000
Ετήσια μη μελών	= 1500
Ετήσια φοιτητών	= 500
Ετήσια Υπηρεσ., Οργαν. ΑΕΙ	= 1500
Τιμή κάθε τεύχους	= 500



**Δελτίον**  
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ  
ΚΤΗΝΙΑΤΡΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ ΕΚΔΟΣΗ  
ΠΕΡΙΟΔΟΣ Β  
ΤΟΜΟΣ 35  
ΤΕΥΧΟΣ 2

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ  
1984

**Bulletin**  
OF THE HELLENIC  
VETERINARY MEDICAL SOCIETY

QUARTERLY  
SECOND PERIOD  
VOLUME 35  
No 2

APRIL - JUNE  
1984

Επιταγές και εμβάσματα αποστέλλονται επί ονόματι κ. Αγγ. Παπαδόπουλου Κτην. Ινστι. Υγιεινής και Τεχνολογίας Τροφίμων, Ιερά οδός 75, 118 55 Αθήνα. Μελέτες, επιστολές κ.λπ. αποστέλλονται στον κ. Α. Ευσταθίου, Κτηνιατρικό Ινστιτούτο Φυσιολογίας, Αναπαραγωγής και Διατροφής Ζώων, Νεοπόλεως 9-25, Αγία Παρασκευή Αττικής.

## Epidemiological models

A. Μακρόγλου, Σ. Κουιμτζής

doi: [10.12681/jhvms.21636](https://doi.org/10.12681/jhvms.21636)

Copyright © 2019, A. Μακρόγλου, Σ. Κουιμτζής



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

### To cite this article:

Μακρόγλου Α., & Κουιμτζής Σ. (2019). Epidemiological models. *Journal of the Hellenic Veterinary Medical Society*, 35(2), 106–110. <https://doi.org/10.12681/jhvms.21636>

## ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

A. ΜΑΚΡΟΓΛΟΥ\*, Σ. ΚΟΥΙΜΤΖΗΣ\*\*

## EPIDEMIOLOGICAL MODELS

A. MAKROGLOU\* and S. KOUIMTZIS\*\*

### SUMMARY

In this paper are described some epidemiological models which govern the spread of infectious diseases. These models are deterministic, and have the form of integral and integrodifferential equations. Solving these equations it is possible to predict the number of the infected members of a population at time  $t > 0$  if it is known at time  $t = 0$ .

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με επιδημιολογικές μελέτες πληθυσμών έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές. Το 1927 οι Kermack και Mc Kendrick<sup>(1)</sup> δημοσίευσαν ένα μοντέλο που αφορούσε τη μετάδοση μιας μολυσματικής ασθένειας σε συνάρτηση με τον χρόνο σ' ένα κλειστό πληθυσμό. Η ανακοίνωση αυτή αποτελεί ακόμη και σήμερα μία κλασσική εργασία στον τομέα των επιδημιολογικών μοντέλων.

Τα επιδημιολογικά μοντέλα περιγράφουν ένα πληθυσμό που έχει χωριθεί σε κλάσεις ως προς μία μόλυνση. Οι κλάσεις του πληθυσμού περιλαμβάνουν άτομα που βρίσκονται σε μία σχέση ως προς μία συγκεκριμένη μολυσματική ασθένεια. Έτσι έχουμε τα ευαίσθητα άτομα ως προς τη μόλυνση, που απο-

τελούν την κλάση S (Susceptible), τα εκτεθειμένα στη μόλυνση που αποτελούν την κλάση E (exposed), τα μολυνθέντα άτομα που αποτελούν την κλάση I (Infected), τα άτομα που έχουν απομονωθεί και αποτελούν την κλάση Q (Quarantined infected) και άτομα που έχουν απομακρυνθεί από τον πληθυσμό και αποτελούν την κλάση R (Removed).

Στη μαθηματική παρουσίαση των επιδημιολογικών μοντέλων θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του Hoppensteadt<sup>(2)</sup>. Επίσης χωρίς θλάθη της γενικότητας θα θεωρήσουμε  $t_0 = 0$ .

Έτσι για ένα πληθυσμό με δύο μόνο κλάσεις S και I ο συμβολισμός

(1.1)



θα σημαίνει ότι στην μεν κλάση S εισέρχονται άτομα σε ποσοστό A και εξέρχονται σε ποσοστό αναλογο προς τον αριθμό των I και S, στην δε κλάση I εισέρχονται άτομα με ποσοστό IS και εξέρχονται μετά πεπερασμένο χρονικό διάστημα σ.

Για την δυναμική μελέτη ενός τέτοιου συστήματος υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός είναι αρκούντως μεγάλος, ώστε να χρησιμοποιηθούν συνεχείς συ. αρτήσεις με μεταβλη-

\* Δ/ση Μηχανογράφησης Υπ. Γεωργίας Μυλλέρου 1, Αθήνα 104 36

\*\* Κέντρο τεχν. Σπερμ. και Νοσ. Αναπαρ. Διαβατά, Θεσσαλονίκη

τή τον χρόνο  $t$ . Έτσι  $S(t)$  χρησιμοποιείται για την μέτρηση των ατόμων της κλάσης  $S$ ,  $I(t)$  για την κλάση  $I$  κ.ο.κ. Έτσι

$N \cdot S(t) = 0$  αριθμός των ευαίσθητων ατόμων κατά την χρονική στιγμή  $t$ ,  
(1.2)

$N \cdot I(t) = 0$  αριθμός των μολυσμένων ατόμων την χρονική στιγμή  $t$ , κ.ο.κ.

όπου  $N$  είναι μία παράμετρος, όπως π.χ. το μέγεθος του υπό εξέταση πληθυσμού σε χρόνο  $t = t_0$ .

Οι εξισώσεις που αφορούν τον ρυθμό μεταβολής αυτών των συναρτήσεων προκύπτουν άμεσα από το διάγραμμα (1.1). Έτσι για τον πληθυσμό που αναφέραμε με τις δύο μόνο κλάσεις  $S$  και  $I$  παίρνουμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dS}{dt} = A - rI(t)S(t) \quad (1.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = r[I(t)S(t) - I(t)S(t-\sigma)]$$

(Hoppensteadt [8], σ. 46).

Το (1.3) είναι ένα απλό μοντέλο. Πολλές φορές όμως και πολύ πολύπλοκα συστήματα έχουν χαρακτηριστικά που διέπονται από απλά μοντέλα.

Υπάρχουν όμως και περισσότερο πολύπλοκα μοντέλα που παίρνουν υπ' όψιν τους την ηλικία των ατόμων του πληθυσμού, όσο και άλλα που θεωρούν σαν μεταβλητή την θέση των ατόμων στον χώρο.

Εδώ θα περιγράψουμε ενδεικτικά μερικά απλά μοντέλα στην §2, και στην §3, άλλα που παίρνουν υπ' όψιν τους την ηλικία.

Σε μελλοντική εργασία θα γίνει προσπάθεια προσαρμογής κάποιου από αυτά σε ασθένειες ζώων.

Για μία εκτεταμένη ανασκόπηση και βιβλιογραφία αναφερόμαστε στους Hoppensteadt (8), Hethcote(7). Ο Diekmann(2) αναφέρεται και στην λύση των εξισώσεων που προκύπτουν μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή. Μοντέλα για πληθυσμούς ζώων, όπου οι ασθένειες προκαλούν αριθμό θανάτων ικα-

νών να επηρεάσουν το μέγεθος του πληθυσμού, έχουν θεωρηθεί από τους Anderson (1) και May(12). Με μοντέλα που παίρνουν υπ' όψιν τους και την θέση των ατόμων στον χώρο έχουν ασχοληθεί διάφοροι ερευνητές, όπως οι Diekmann(3),(4),(5), Hoppensteadt(8), Mollison(13).

## 2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

### 2.1. Το μοντέλο των Kermack - McKendrick.

Οι Kermack - McKendrick έχουν αναπτύξει διάφορα μοντέλα για την μετάδοση μίας μόλυνσης. Το βασικό τους μοντέλο δίνεται από το διάγραμμα

$$(2.1) \quad S \xrightarrow{rIS} I \xrightarrow{qI} Q$$

ο πληθυσμός υποτίθεται κλειστός, δηλαδή

$$(2.2) \quad S(t) + I(t) + Q(t) = 1$$

και  $N$  είναι το μέγεθος του ολικού πληθυσμού.

Η δυναμική ενός τέτοιου συστήματος διέπεται τότε από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -rIS \\ \frac{dI}{dt} &= rIS - qI \\ \frac{dQ}{dt} &= qI \end{aligned}$$

από τις οποίες γνωρίζοντας τις τιμές  $S(0)$ ,  $I(0)$ ,  $Q(0)$  μπορούν να βρεθούν στα  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Q(t)$  για  $t > 0$ .

## 2.2. Μοντέλα $A \xrightarrow{rIS} S \xrightarrow{E^\tau} I^\sigma \rightarrow R$ .

Σύμφωνα με τον συμβολισμό της §1 ένα τέτοιο διάγραμμα θα σημαίνει ότι στην κλάση S εισέρχονται άτομα σε ποσοστό A εξέρχονται σε ποσοστό ανάλογο προς τον αριθμό των I και S εισέρχονται στην κλάση E με ποσοστό rIS όπου και παραμένουν χρονικό διάστημα τ. Μετά εισέρχονται στην κλάση I όπου παραμένουν χρονικό διάστημα σ οπότε εισέρχονται στην κλάση R. Το χαρακτηριστικό δηλαδή αυτών των μοντέλων είναι ότι μεσολαβεί ένα σταθερό χρονικό διάστημα τ από τότε που τα μέλη θεωρούνται εκτεθειμένα (E) έως ότου μολυνθούν (I). Το χρονικό αυτό διάστημα λέγεται περίοδος επώασης (incubation period). Μετά δε την έξοδό του από την E κλάση εισέρχεται στην κλάση I όπου παραμένει ένα σταθερό χρονικό διάστημα σ έως ότου απομακρυνθεί π.χ. λόγω μόνιμης ανοσίας. Αυτής της μορφής είναι το μοντέλο της Ilaράς που έχει προταθεί από τον Soper (14) και αναπτύχθει από Wilson και Burke (15).

Το πλήρες μοντέλο είναι,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - rIS \\ E(t) &= \int_{t-\tau}^t rI(x)S(x)H(x)dx \\ I(t) &= I_0(t) + \int_{t-\tau-\sigma}^{t-\tau} rI(x)S(x)H(x)dx \\ R(t) &= R(0) + \int_0^{t-\tau-\sigma} rI(x)S(x)H(x)dx \\ &\quad + I_0(0) - I_0(t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου η συνάρτηση H(x) είναι η Heaviside συνάρτηση H(x) που ορίζεται σαν H(x) = 1 εάν x > 0 και H(x) = 0 εάν x < 0 και I<sub>0</sub>(t) είναι ο αριθμός των αρχικών μολυσμένων που εξακολουθούν να είναι μολυσμένα την χρονική στιγμή t. Αφού βρεθούν τα I και S από την 1η και 3η εξίσωση της (2.4), τα E και R μπορούν να βρεθούν συναρτήσσει αυτών από την 2η και 4η.

Ο συντελεστής επαφής r, οι χρονικές περιόδοι τ και σ, τα αρχικά δεδομένα S(0), R(0) και η συνάρτηση I<sub>0</sub>(t) υποθέτονται γνωστά. Για t > σ έχουμε I<sub>0</sub>(t) = 0 αφού μέχρι την χρονική στιγμή t = σ όλα τα αρχικά μολυσμένα άτομα θα έχουν απομακρυνθεί.

Για το πώς προκύπτει αυτή η μορφή του μοντέλου αναφερόμαστε στον Hoppesteadt (8) σ. 48. Η αριθμητική λύση παρόμοιων εξισώσεων έχει θεωρηθεί π.χ. στην εργασία Makroglou (11).

## 2.3. Μοντέλα $S \xrightarrow{rIS} E^\tau \rightarrow I^\sigma \rightarrow R^\omega \rightarrow S$ .

Η διαφορά αυτού του μοντέλου από το προηγούμενο είναι ότι τα άτομα αφού παραμείνουν χρονικό διάστημα ω στην κλάση R ξαναγίνονται ευαίσθητα (S). Ένα τέτοιο μοντέλο έχει μελετηθεί από τους Hoppensteadt και Waltman (9).

Οι εξισώσεις για τα S και I είναι,

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) - \int_{t-\tau-\sigma-\omega}^t rI(x)S(x)H(x)dx \\ &\quad + [I_0(0) - I_0(t-\omega)]H(t-\omega) \\ I(t) &= I(0) + \int_{t-\tau-\sigma}^{t-\tau} rI(x)S(x)H(x)dx \end{aligned} \tag{2.5}$$

όπου πάλι τα r, τ, σ, ω, S(0), I<sub>0</sub>(t) υποτίθενται γνωστά και H(x) είναι η Heaviside συνάρτηση, όπως έχει ορισθεί στην §2.2.

Έχοντας βρει τα  $S$  και  $I$  από την (2.5), τα  $E$  και  $R$  μπορούν να βρεθούν από τους τύπους

$$(2.6) \quad E(t) = \int_{t-\tau}^t \tau l(x) S(x) H(x) dx$$

$$R(t) = \int_{t-\sigma-\omega}^{t-\tau-\sigma} r(x) S(x) H(x) dx + I_0(0) - I_0(t) - [I_0(0) - I_0(t-\omega)] H(t-\omega)$$

όπου τα αρχικά δεδομένα  $E(0)$  και  $R(0)$  έχουν υποτεθεί μηδέν.

### 3. ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΧΡΟΝΟ ΚΑΙ ΗΛΙΚΙΑ

Πιο ρεαλιστικά μοντέλα μπορούν να προκύψουν, εάν θεωρήσουμε σαν ανεξάρτητη μεταβλητή και την ηλικία είτε την χρονολογική, είτε την ηλικία κλάσεως. Εδώ σαν ανεξάρτητη μεταβλητή ηλικίας θα θεωρήσουμε την ηλικία κλάσεως  $a$ . Έτσι π.χ.  $S(a, t)$  θα είναι ο αριθμός των ατόμων τα οποία κατά την χρονική στιγμή  $t$  έχουν  $a$  χρόνο παραμονής στην κλάση.

#### 3.1. Μοντέλο των Kermack – McKendrick.

Θα θεωρήσουμε το απλό

$$S \rightarrow I \rightarrow$$

με δύο μόνο κλάσεις  $S$  και  $I$ .

Ευαίσθητα άτομα εξέρχονται από την κλάση  $S$  μετά από επαφή με μολυσμένα, αλλά υποθέτουμε ότι ο συντελεστής  $r$  εξαρτάται μόνο από την ηλικία των μολυσμένων και όχι από την ηλικία των ευαίσθητων ατόμων ούτε από τον χρόνο. Επί πλέον υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μη φθίνουσα συνάρτηση  $\tau(t)$  έτσι ώστε ευαίσθητα που εκτίθενται

σε μόλυνση την χρονική στιγμή  $\tau(t)$  μολύνονται τη χρονική στιγμή  $t$ . Συνεπώς  $t-\tau(t)$  θα είναι ο χρόνος επώασης. Τέλος υποθέτουμε ότι από την κλάση  $I$  τα άτομα εξέρχονται (ή λόγω θανάτου ή λόγω απομόνωσης) μέχρι μία ηλικία  $\sigma$  οπότε η περίοδος μολυσματικότητας λήγει.

Υπό αυτές τις υποθέσεις το μοντέλο (2.3) γίνεται,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial a} = - \left[ \int_0^{\sigma} r(y) I(y, t) dy \right] S$$

$$S(0, t) = 0, \quad S(a, 0) = S_0(a)$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a} = -\alpha(a)I$$

$$I(0, t) = -\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} S[y, \tau(t)] dy,$$

$$I(a, 0) = I_0(a)$$

Η (2.7) αποτελεί σύστημα ολοκληρω - διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

#### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Περιγράφεται μία κατηγορία επιδημιολογικών μοντέλων που διέπουν τη μετάδοση μολυσματικών ασθενειών. Τα μοντέλα είναι καθοριστικά (deterministic) και όχι στατιστικά. Τα μοντέλα αυτά έχουν την μορφή ολοκληρωματικών και ολοκληρωδιαφορικών εξισώσεων. Από τη λύση αυτών των εξισώσεων μπορεί να προβλεφθεί ο αριθμός των μολυσμένων από μία ασθένεια ατόμων ενός πληθυσμού σε χρόνο  $t > t_0$ , όταν είναι γνωστός ο αριθμός των ατόμων σε χρόνο  $t = t_0$ .

## BIBΛIOΓPAΦIA

1. Anderson, R.M. and May, R.M.: Population biology of infectious diseases I, Nature 280, 361-367 (1979).
2. Diekmann O. : Integral equations and population dynamics, p. 117-149 in: Colloquium Numerical treatment of integral equations, Ed. H.J.J. te Riele, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1979).
3. Diekmann O.: Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, J. Math. Biol. 6, 109-130 (1978).
4. Diekmann, O.: On a nonlinear integral equation arising in Mathematical Epidemiology, in: Differential Equations and Applications (W. Eckhaus, E.M. de Jager, Eds), 133-140, North - Holland, Amsterdam, (1978).
5. Diekmann O.: Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic. To appear in J. Diff. Equ.
6. Diekmann, O.: A nonlinear integral equation describing the geographical spread of infection: the hair - trigger effect, travelling waves and the asymptotic speed of propagation, Report III, 129, Istituto per le Applicazioni del Calcolo « Mauro Picone », Roma, (1978).
7. Hethcote, H.W., Stech H.W. and Driessche, P. van der: Periodicity and stability in epidemic models: A survey, in: Differential equations and Applications in Ecology, Epidemics and Population problems, (Busenberg S. and Cooke K.L. Eds), Academic Press, 1981.
8. Hoppensteadt F.: Mathematical theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics. SIAM Regional Conference Series in Applied Math., 20, SIAM, Philadelphia, (1975).
9. Hoppensteadt F. and Waltman P.: A problem in the theory of epidemics. I, II, Math. Biosci. 9, 71-91: 133-145 (1970-1971).
10. Kermack W. O. and McKendrick A.G.: Proc. Roy. Soc. A. 115, p. 700-721: 138, p. 55-83: 141, p. 94-122 (1927, 1932, 1933).
11. Makroglou A.: A block - by - block method for the numerical solution of Volterra delay integro - differential equations, Computing, 30, p. 49-62 (1983).
12. May, R. M. and Anderson, R.M.: Population biology of infectious diseases II, Nature 280, p. 455 - 461 (1979).
13. Mollison D.: Spatial contact models for ecological and epidemic spread, J. Roy. Statist. Soc. B, 39, p. 283-326 (1977).
14. Soper, H. E.: Interpretation of periodicity in disease prevalence, J. Roy. Statist. Soc. B, 92, p. 34-73 (1929).
15. Wilson, L. O. and Burke, M. H.: The epidemic curve, Proc. Nat. Acad. Sci., 28, p. 361-366 (1924).