

# Journal of the Hellenic Veterinary Medical Society

Vol 35, No 4 (1984)

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΚΤΗΝΙΑΤΡΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Επιστημονικό Σωματείο Αναγνωρισμένο, Απόφ. Πρωτ. Αθηνών 1021/83  
**Διοικητικό Συμβούλιο:**  
Πρόεδρος: Σπ. Κ. Κυριάκης  
Αντιδρός: Λουκ. Ευσταθίου  
Γ. Γραμ.: Θεοδ. Ανανιάδης  
Ειδ. Γραμ.: Ευαγ. Σίμος  
Ταμίας: Αγγ. Παπαδόπουλος  
Μέλη: Απ. Ράντσιος  
Αλ. Καρδούλης

**ΕΚΔΟΣΗΣ:** Λουκάς Ευσταθίου  
Ζαλοκώστα 30, Χαλάνδρι  
Τηλ.: 6823459

**ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**  
Πρόεδρος: Αρισ. Σειμένης  
Μέλη: Χρ. Παππούς  
Γιαν. Δημητριάδης  
Στεφ. Κολάγγης  
Ειρ. Οικονομίδου

**ΦΩΤΟΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ**  
**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ:**  
Σ. Μπέλλου, Ελ. Βενιζέλου 98,  
Χολαργός, Τηλ.: 6529604

**TAX. ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ:**  
P.O. Box 60063  
153 10 Ag. Paraskevi, Greece

**Συνδρομές για Ελλάδα και Κύπρο:**  
Ετήσια μελών            δρχ. 1.000  
Ετήσια μη μελών        » 1500  
Ετήσια φοιτητών        » 500  
Ετήσια Υπηρεσ., Οργαν. ΑΕΙ   » 1500  
Τιμή κάθε τεύχους        » 500



ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ ΕΚΔΟΣΗ  
ΠΕΡΙΟΔΟΣ Β  
ΤΟΜΟΣ 35  
ΤΕΥΧΟΣ 4

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ — ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ  
1984

**Bulletin**  
OF THE HELLENIC  
VETERINARY MEDICAL SOCIETY

QUARTERLY  
SECOND PERIOD  
VOLUME 35  
No 4

OCTOBER — DECEMBER  
1984

Επιταγές και εμβάσματα αποστέλλονται επ' ονόματι κ. Άγγ. Παπαδόπουλου Κτην. Ινστ. Υγιεινής και Τεχνολογίας Τροφίμων, Ιερά οδός 75, 118 55 Αθήνα. Μελέτες, επιστολές κ.λπ. αποστέλλονται στον κ. Α. Ευσταθίου, Κτηνιατρικό Ινστιτούτο Φυσιοπαθολογίας, Αναπαραγωγής και Διατροφής Ζώων, Νεαπόλεως 9-25, Αγία Παρασκευή Αττικής.

## Discrete demografie models in livestock studies

A. Μακρόγλου, Μ. Κοίμησης, Σ. Κουϊμτζής

doi: [10.12681/jhvms.21666](https://doi.org/10.12681/jhvms.21666)

Copyright © 2019, A. Μακρόγλου, Μ. Κοίμησης, Σ. Κουϊμτζής



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

### To cite this article:

Μακρόγλου Α., Κοίμησης Μ., & Κουϊμτζής Σ. (2019). Discrete demografie models in livestock studies. *Journal of the Hellenic Veterinary Medical Society*, 35(4), 288–293. <https://doi.org/10.12681/jhvms.21666>

**ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΔΗΜΟΓΡΑΦΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΒΟΟΕΙΔΩΝ**

A. ΜΑΚΡΟΓΛΟΥ, Μ. ΚΟΙΜΗΣΗΣ, Σ. ΚΟΥΪΜΤΖΗΣ

**DISCRETE DEMOGRAPHIC MODELS IN LIVESTOCK STUDIES**

A. MAKROGLOU, M. KIMISSIS AND S. KOUIMTZIS

**SUMMARY**

In an earlier work (2) was given a short review for various demographic models which govern population dynamics. Here is described in detail one of them, a discrete one, developed by Rault & Leibundgut and are given the details of its implementation to livestock. To use this model a computer program has been written which, given the livestock population at time  $t=t_0$ , predicts their number at time  $t>t_0$ .

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Σε μια προηγούμενη εργασία (2) δόθηκε μια σύντομη ανασκόπηση για διάφορα δημογραφικά μοντέλα που διέπουν την δυναμική πληθυσμών. Εδώ θα περιγραφεί αναλυτικά ένα από αυτά και θα επεξηγηθεί η μεθοδολογία εφαρμογής του σε βοοειδή, που αναπτύχθηκε από τους Rault & Leibundgut. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο που προτείνουν γράφηκε ένα πρόγραμμα με το οποίο γνωρίζοντας τον πληθυσμό των βοοειδών σε χρόνο  $t = t_0$  μπορούμε να προβλέψουμε τον αριθμό τους σε χρόνο  $t > t_0$ .

**1. Εισαγωγή.**

Υπάρχουν διάφορων μορφών δημογραφικά μοντέλα που αφορούν την δυναμική πληθυσμών. Για μια σύντομη ανασκόπηση αναφερόμαστε στο άρθρο (2). Εδώ θα περιγράψουμε αναλυτικά ένα από αυτά (3) για την μελέτη του πληθυσμού βοοειδών. Απώτερος σκοπός είναι η εφαρμογή του σε ελληνικά βοοειδή εφόσον καταστεί δυνατή η συγκέντρωση των αντίστοιχων δεδομένων.

Στην §2 δίνεται η αναλυτική περιγραφή του μοντέλου. Στην §3 η μέθοδος εκτίμησης διάφορων παραμέτρων όπως των συντελεστών θνησιμότητας, γονιμότητας, αναλογίας φύλου κλπ.

Τέλος στην §4 δίνονται τα αποτελέσματα των προβλέψεων για τα έτη 1973-1978 μαζί με τα δεδομένα των ετών αυτών που αφορούν γαλλικά βοοειδή για δυνατές συγκρίσεις.

\*Δ/ση Μηχανογράφησης Υπ. Γεωργίας Μυλλέρου 1, Αθήνα 104 36

\*\*Κέντρο Τεχν. Σπερματέγχυσης, Διαβατά Θεσσαλονίκης.

Σε μελλοντική εργασία θα γίνει προσπάθεια να συνδεθεί το μοντέλο με τιμές γάλατος, κρέατος, ζωοτροφών οπότε θα μπορεί κανείς να βλέπει με ποιο τρόπο μεταβολές στις τιμές των προϊόντων αυτών επηρεάζουν τον αριθμό των βοοειδών.

## 2. Περιγραφή.

Στην §4 της (2) έχει δοθεί μια σύντομη σκιαγράφηση ενός διακριτού μοντέλου που παίρνει υπόψη και την ηλικία των ζώων. Εδώ θα δοθεί η αναλυτική περιγραφή του στην §2.1 και η περιγραφή μεθόδου φιλτραρίσματος των δεδομένων (Kalman filtering) στην §2.2.

Ας θεωρήσουμε ένα κοπάδι του οποίου η εξέλιξη χαρακτηρίζεται από φαινόμενα γεννήσεως, ενηλικίωσης και θανάτου (σύστημα) και έστω  $\psi(x,t)$  η συνάρτηση που παριστάνει τον αριθμό των ζώων που έχουν ηλικία  $x$  την χρονική στιγμή  $t$ . Τότε η εξίσωση που δίνει την μεταβολή της συνάρτησης  $\psi$  συναρτήσει του  $x$  και του  $t$  είναι διαφορετική εξίσωση με μερικές παραγώγους, (εξίσωση ζωής).

$$(2.1) \quad \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = e(x,t) - S(x,t)$$

όπου  $e(x,t)$  συμβολίζει τις εισόδους στο σύστημα λόγω γεννήσεων και  $s(x,t)$  συμβολίζει τις εξόδους λόγω φυσικού θανάτου, σφαγής και εξαγωγικού εμπορίου. Το (2.1) είναι ένα συνεχές μοντέλο, δηλαδή ένα μοντέλο στο οποίο ο αριθμός των ζώων παρίσταται από την συνεχή συνάρτηση  $\psi(x,t)$ .

Πιο εύχρηστα είναι τα διακριτικά όπου η ηλικία και ο χρόνος παρίστανται από ακέραιους αριθμούς.

Οι μεταβολές ως προς τον χρόνο ( $\Delta t$ ) και ως προς την ηλικία ( $\Delta x$ ) είναι ίσες, όπως εύκολα επαληθεύεται, και έχουν ληφθεί,

$$(2.2) \quad \Delta x = \Delta t = 1 \text{ έτος}$$

Θέτοντας  $Y(i,n)$  τον αριθμό των ζώων που την 1η Ιανουαρίου του έτους  $n$  έχουν ηλικία  $i-1$  έτη,  $\Gamma(n)$  τον αριθμό των γεννηθέντων ζώων το έτος  $n$ ,  $N(i,n)$  τον αριθμό των νεκρών από φυσική θνησιμότητα ζώων κλάσεως ηλικίας ( $i$ )

το έτος  $n$ ,  $\Sigma(i,n)$  τον ισολογισμό σφαγών, εξαγωγών και εισαγωγών για την κλάση ηλικίας ( $i$ ) κατά το έτος  $n$ , και χρησιμοποιώντας την (2.2) παίρνουμε

$$(2.3) \quad \frac{Y(1,n+1) - Y(1,n)}{1} + \frac{Y(1,n) - Y(0,n)}{1} = \Gamma(n) - N(1,n) - \Sigma(1,n) \text{ για } i = 1$$

Υποθέτοντας  $Y(0,n) = 0$  έχουμε,

$$(2.4) \quad Y(1,n+1) = \Gamma(n) - N(1,n) - \Sigma(1,n), \quad i=1$$

και παρόμοια

$$(2.5) \quad Y(i,n+1) = Y(i-1,n) - N(i,n) - \Sigma(i,n), \quad i > 1$$

Ορίζοντας δε το συντελεστή φυσικής θνησιμότητας  $\varepsilon(i)$  σαν,

$$(2.6) \quad \varepsilon(1) = N(1,n) / Y(1,n) / \Gamma(n), \quad i = 1$$

$$\varepsilon(i) = N(i,n) / Y(i-1,n), \quad i > 1$$

και χρησιμοποιώντας το σύμβολο Kronecker

$$\delta_{ij} (\delta_{ij} = 1, i = j, \delta_{ij} = 0 \text{ } i \neq j).$$

οι εξισώσεις (2.4), (2.5) γράφονται σαν

$$(2.7) \quad Y(i,n+1) = (1 - \varepsilon(i)) [Y(i-1,n) + \delta_{ij} \Gamma(n)] - \Sigma(i,n), \quad i = 1, 2, \dots$$

Οι εξισώσεις (2.7) μπορούν στην συνέχεια να γραφούν υπό μορφή πινάκων. Εδώ θα δώσουμε την πινακοποίηση για την περίπτωση που παίρνουμε υπόψη και το φύλο τω ζώων. Έτσι έστωσαν,  $YF(i,n)$  ο αριθμός των θηλυκών ηλικίας  $(i-1)$  ετών το έτος  $n$ , για  $i=1,2,3,4$  και  $YF(5,n)$  ο-αριθμός των θηλυκών ηλικίας μεγαλύτερης των 4 ετών,  $YM(i,n)$  ο αριθμός των αρσενικών ηλικίας  $(i-1)$  ετών το έτος  $n$ , για  $i=1,2$  και  $YM(3,n)$  ο αριθμός των αρσενικών ηλικίας μεγαλύτερης των 2 ετών το έτος  $n$ .  $\Sigma F(i,n)$ ,  $\Sigma M(i,n)$  είναι οι αντίστοιχοι του  $\Sigma(i,n)$  συμβολισμοί για θηλυκά και αρσενικά.

Έστωσαν επίσης,  $AG(n)$  ο αριθμός των αγελάδων του έτους  $n$ , όπου αγελάδα θα καλούμε

κάθε θηλυκιά που θα αποκτήσει ένα μοσχάρι κατά τη διάρκεια του έτους  $n$ ,  $v$  ο συντελεστής γονιμότητας,  $\kappa$  ο συντελεστής αναλογίας φύλου ( $\kappa$  για τα θηλυκά,  $1-\kappa$  για τα αρσενικά) και  $mnf$ ,  $mvm$ ,  $mf$ ,  $mm$  4 συντελεστές θνησιμότητας. Τότε

$$(2.8) \Gamma(n) = v \times A\Gamma(n)$$

και

$$(2.9) A\Gamma(n) = \alpha YF(3,n) + \beta YF(4,n) + \gamma YF(5,n)$$

αφού μόνο αριθμός θηλυκών των κλάσεων

$YF(3,n)$ ,  $YF(4,n)$ ,  $YF(5,n)$  μπορούν να αποκτήσουν μοσχάρια. Θέτοντας δε,

$$y(n+1) = [YF(1,n+1), YF(2,n+1), \dots, YF(5,n+1),$$

$$YM(1,n+1), YM(2,n+1), YM(3,n+1)]^T$$

και

$$u(n) = [\Sigma F(1,n), \dots, \Sigma F(5,n),$$

$$\Sigma M(1,n), \Sigma M(2,n), \Sigma M(3,n)]^T$$

παίρνουμε την εξίσωση

$$(2.10) y(n+1) = A y(n) - u(n)$$

όπου

$$(2.11) A =$$

0	0	acf	bcf	ycf	0	0	0
1-mf	0	0	0	0	0	0	0
0	1-mf	0	0	0	0	0	0
0	0	1-mf	0	0	0	0	0
0	0	0	1-mf	1-mf	0	0	0
0	0	acm	βom	γcm	0	0	0
0	0	0	0	0	1-mm	0	0
0	0	0	0	0	0	1-mm	1-mm

$$(2.12) cf = (1 - mvf) v K$$

$$cm = (1 - mvm) v (1 - k)$$

## 2.2 Φιλτράρισμα των δεδομένων

Από την σχέση (2.10) βλέπουμε ότι αν έχουμε τα στοιχεία των διανυσμάτων  $\psi(n)$  και  $u(n)$  και ξέρουμε ή έχουμε εκτιμήσει τα στοιχεία του πίνακα  $A$  μπορούμε να βρούμε τα στοιχεία του διανύσματος  $y(n+1)$  δηλ. μπορούμε να κάνουμε πρόβλεψη για τον αριθμό των ζώων κατά κλάσεις ηλικίας για το έτος  $n+1$ . Αλλά συνήθως δεν έχουμε όλα τα στοιχεία του διανύσματος  $y(n)$ , και αυτά που έχουμε ίσως δεν είναι αξιόπιστα.

Στην πραγματικότητα έχουμε ένα άλλο διάνυσμα παρατηρήσεων  $S(n)$  το οποίο έχει και στοιχεία που αφορούν αριθμό ζώων κατά κλάσεις ηλικίας αλλά επί πλέον και άλλες μεταβλητές όπως αυτές που αφορούν την παραγωγή γάλατος, τον αριθμό αγελάδων κλπ. Τα στοιχεία του  $S(n)$  συνδέονται με τα στοιχεία του διανύσματος καταστάσεως  $y(n)$  με μια σχέση της μορφής,

$$(2.17) s(n) = H_n y(n)$$

Επειδή όμως και οι παρατηρήσεις είναι στατιστικά δεδομένα που συνήθως δίνονται με διάστημα εμπιστοσύνης και οι σφαγές  $u(n)$  μερικές φορές δεν δίνονται κατά τις ίδιες με το  $y(n)$  κλάσεις ηλικίας, αντί των σχέσεων (2.10), (2.14), στην πραγματικότητα έχουμε,

$$(2.18) y(n+1) = Ay(n) - u(n) + w(n)$$

και

$$(2.19) s(n) = H_n y(n) + v(n)$$

όπου  $w(n)$ ,  $v(n)$  είναι θόρυβοι (noise) για τους οποίους υποθέτουμε ότι

$$(2.20) E(v) = 0, E(w) = 0$$

$$E(vv^T) = R, E(ww^T) = Q, E(vw^T) = 0$$

και ο  $\Phi$ ,  $R$  είναι οι πίνακες συνδιασποράς τους.

Το πρόβλημα του φιλτράρισματος συνίσταται στο εξής.

Έχοντας το διάνυσμα παρατηρήσεων  $s(n)$ , ένα διάνυσμα καταστάσεως  $y_{n/n-1}$  να βρούμε μια εκτίμηση  $y_{n/n}$  του  $y(n)$  που θα ελαχιστοποιεί το

$$(2.21) E[u_{v/v} - u(v)] (u_{v/v} - u(v))^T = C_{n/n}$$

όπου  $C_{n/n}$  είναι ο πίνακας συνδιασποράς για



### Δεδομένα σφαγών σε χιλιάδες κεφαλών

	1972	1973	1974	1975	1976	1977
ABF(1)	1397.8	1344.1	1446.1	1516.0	1545.9	1628.0
ABF(2)	328.7	277.8	338.7	408.9	408.4	389.0
ABF(3)	365.3	319.5	387.2	432.7	435.1	403.5
ABF(4)	467.4	459.4	583.6	608.9	614.9	566.9
ABF(5)	1206.5	1163.8	1482.4	1570.4	1582.3	1471.3
ABM(1)	2914.1	2.765.0	3012.6	3249.0	3301.0	3220.1
ABM(2)	499.3	424.4	593.0	748.3	717.4	629.5
ABM(3)	1169.0	1182.2	1450.8	1449.4	1405.2	1158.1

### Κατάσταση του κοπαδιού σε χιλιάδες κεφαλών και 10<sup>5</sup> εκατόλιτρα (γάλα)

Κατάσταση την 1η Ιανουαρίου	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
ΥF(1)	3099.3	3272.4	3469.0	3524.9	3438.3	3405.4	3329.0
ΥF(2)	2709.3	2690.6	2910.1	3040.7	3025.0	2941.1	2927.8
ΥF(3)	2269.0	2274.1	2301.7	2447.8	2529.6	2511.9	2461.7
ΥF(4)	1527.4	1743.0	1756.1	1658.7	1775.8	1849.4	1880.2
ΥF(5)	7882.7	7960.8	8289.6	8304.1	8135.4	8073.2	8195.3
ΥM(1)	2045.7	2222.1	2528.4	2454.8	2200.2	2145.1	2232.4
ΥM(2)	1393.8	1382.7	1619.9	1733.1	1510.0	1306.8	1344.0
ΥM(3)	1057.2	1085.9	1088.8	1041.2	1103.0	998.7	963.0
Αγελάδες	9553.0	9845.3	10168.6	10134.6	10128.6	10140.3	10265.3
Γάλα	1879.8	1957.4	2049.1	2067.8	2086.2	2111.7	2164.3

### Αποτελέσματα προβλέψεων

	1973	1974	1975	1976	1977	1978
ΥF(1)	3269.9	3446.4	3522.4	3435.9	3403.0	3326.7
ΥF(2)	2690.6	2909.0	3039.6	3023.9	2940.1	2926.6
ΥF(3)	2274.1	2301.7	2447.4	2529.1	2511.4	2461.3
ΥF(4)	1743.0	1756.0	1658.7	1775.5	1849.2	1880.0
ΥF(5)	7960.5	8289.3	8303.8	8135.1	8072.8	8194.9
ΥM(1)	2222.7	2529.0	2455.2	2200.5	2145.2	2232.5
ΥM(2)	1382.7	1620.3	1733.4	1510.3	1307.0	1344.1
ΥM(3)	1085.9	1088.9	1041.4	1103.1	998.9	963.1

#### 4. Αποτελέσματα

Για να γίνει test του προγράμματος που γράφηκε για την χρήση του μοντέλου με ηλεκτρονικό υπολογιστή, χρησιμοποιήθηκαν τα γαλλι-

κά δεδομένα που ευγενώς έστειλαν από το ADERSA – GERBIOS, France.

Τα δεδομένα αυτά αναπαράθετουμε για δυνατές συγκρίσεις με τις προβλέψεις.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.S.M. Bozic. Digital and Kalman Filtering, Edward Arnold, 1979.

2. Α. Μακρόγλου, Μ. Κοιμήσης. Δημογραφικά μοντέλα στη μελέτη πληθυσμών, Αγροτικά θέματα, Τεύχ. 2, 1984 (υπό δημοσίευση)

3. A. Rault, B. Leibundgut, Demographic models of French Livestock, P. 107-123 in: Computer applications in Food Production and Agricultural Enginnering, Ed. R. Kálman and J. Marinez, North - Holland, IFIP, 1982.