ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΤΙΚΗ

OWEN GRIFFITHS & A. C. PASEAU.
ONE TRUE LOGIC: A MONIST MANIFESTO.

OXFORD, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2022, XXXI+232 ΣΕΛΙΔΕΣ.

Ο ΑΠΕΙΡΟΕΙΔΗΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑΣ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΙΚΗΣ ΣΩΣΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

ΓΙΑΝΝΗΣ ΣΤΕΦΑΝΟΥ

Υπάρχει μόνο μία σωστή λογική και, αν ναι, ποια είναι αυτή; Αυτά είναι σημαντικά ερωτήματα στη φιλοσοφία της λογικής. Οι Griffiths και Paseau υποστηρίζουν ότι πράγματι μόνο ένα λογικό σύστημα είναι ορθό και, μολονότι δεν το έχουμε βρει και για πολλές πλευρές του δεν είναι και οι ίδιοι βέβαιοι, θεωρούν ότι πάντως πρόκειται για σύστημα που, σε αντίθεση με την κλασική λογική, είναι απειροειδές (infinitary), δηλαδή επιτρέπει αφενός συζεύξεις και διαζεύξεις με απείρως πολλούς όρους και αφετέρου ποσόδειξη με απείρως πολλές μεταβλητές.

Ας ξεκινήσουμε με μια φυσική γλώσσα, παίρνοντας ως παράδειγμα τα αγγλικά συμπεριλαμβανομένου του τεχνικού λεξιλογίου των διαφόρων επιστημών, κι ας φανταστούμε ότι αίρονται οι αμφισημίες της και ότι εμπλουτίζεται με έννοιες που τώρα δεν μπορεί να εκφράσει. Έχουμε φανταστεί μια *επέκταση* των αγγλικών. Ειδικότερα, για κάθε άπειρο πληθικό αριθμό κ, κάποια τέτοια επέκταση εκφράζει την έννοια *υπάρχουν* κ*-πολλά πράγματα που ....* (Επειδή οι άπειροι πληθικοί αριθμοί, δηλαδή οι τάξεις απείρου, είναι μη αριθμήσιμα πολλοί, το τεχνικό μας λεξιλόγιο δεν επιτρέπει να εκφράσουμε τέτοια έννοια για τον καθένα τους.) Αν Π είναι ένα σύνολο προτάσεων σε μια επέκταση E των αγγλικών και π είναι μια πρόταση της E, σε αρκετές περιπτώσεις η π θα έπεται λογικά από τις προτάσεις του Π: ένα επιχείρημα με προκείμενες αυτές και συμπέρασμα την π θα είναι λογικά έγκυρο.

Μια λογική Λ, τώρα, αφορά, σε πρώτο επίπεδο τουλάχιστον, κάποια ειδικά φτιαγμένη συμβολική γλώσσα και ορίζει μια μοντελοθεωρητική έννοια λογικής συνέπειας (consequence), $\models_\Lambda$, τέτοια που ένας τύπος τ αυτής της γλώσσας μπορεί να αποτελεί συνέπεια κάποιων άλλων τύπων T, με άλλα λόγια $T \models_\Lambda \tau$. Επίσης όμως διαθέτουμε κανόνες για να μεταφράζουμε από τις φυσικές γλώσσες στις συμβολικές. Αν έχουμε ένα

Ο Γ. Στεφανου είναι Αναπληρωτής Καθηγητής Φιλοσοφικής Λογικής στο Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Ο συγγραφέας ευχαριστεί τον Δούκα Καπάντανη, που διάβασε μια μορφή αυτής της βιβλιοκρισίας και του έδωσε γραπτά σχόλια.

έγκυρο επιχείρημα σε μια φυσική γλώσσα, ή κάποια επέκτασή της, και οι προκείμενες και το συμπέρασμά του αποδίδονται στη γλώσσα μιας λογικής Λ μέσω των τύπων T και του τύπου τ αντίστοιχα, τότε η Λ αναγνωρίζει την εγκυρότητα του επιχειρήματος εφόσον $T \models_{\Lambda} \tau$.

Λέγοντας ότι μια λογική Λ είναι σωστή, οι Griffiths και Paseau εννοούν περίπου ότι, για κάθε επέκταση E των αγγλικών, θα υπάρχει κάποιο σύστημα μετάφρασης *Form* από την E στο συμβολικό ιδίωμα της Λ έτσι ώστε, για οποιοδήποτε σύνολο Σ προτάσεων της E και οποιαδήποτε πρόταση σ της E, η σ θα έπεται λογικά από το Σ αν και μόνο αν $Form(\Sigma) \models_{\Lambda} Form(\sigma)$. (Έγραψα «περίπου» γιατί τροποποίησα λίγο, σύμφωνα με όσα λένε στην ενότητα 5.4 του βιβλίου, την εξήγηση που δίνουν στην ενότητα 2.1.4, όπου έχουν εστιάσει την προσοχή τους σε μία επέκταση των αγγλικών.) Λέγοντας δε ότι μια λογική Λ είναι η μόνη σωστή, εννοούν ότι και είναι σωστή και, μεταξύ των σωστών (εφόσον υπάρχουν περισσότερες), είναι αυτή που κάνει τις λιγότερο ισχυρές παραδοχές.

Ο μονισμός των συγγραφέων στρέφεται (κεφ. 3) ενάντια στον λογικό πλουραλισμό των Beall και Restall (2006) και σε εκείνον του Shapiro (2014). Σύμφωνα με τους Beall και Restall, υπάρχουν περισσότερες από μία έννοιες έγκυρου επιχειρήματος που είναι εξίσου αποδεκτές, και διαφορετικές λογικές αντιστοιχούν στις διαφορετικές έννοιες. Οι λογικές αυτές περιλαμβάνουν την κλασική λογική, την ιντουϊσιονιστική και τη συναφή (relevant logic) και είναι κατ' αρχήν όλες ορθές. Οι ποικίλες έννοιες προκύπτουν από την αρχή «Ένα επιχείρημα είναι έγκυρο αν και μόνο αν σε κάθε περίπτωση που είναι αληθείς οι προκείμενες είναι αληθές και το συμπέρασμα» δίνοντας διαφορετικό περιεχόμενο στον όρο «περίπτωση». Κάθε αποδεκτή έννοια περιλαμβάνει ορισμένα γνωρίσματα που, περισσότερο από άλλα, έχουν συνδεθεί στην ιστορία της λογικής με την ιδέα του έγκυρου επιχειρήματος. Τα γνωρίσματα αυτά είναι η αναγκαιότητα (το συμπέρασμα έπεται κατ' ανάγκην από τις προκείμενες), η μορφικότητα (formality, να έχει το επιχείρημα μια μορφή τέτοια που σε όλα τα επιχειρήματα αυτής της μορφής με αληθείς προκείμενες είναι αληθές το συμπέρασμα) και η κανονιστικότητα (δεν είναι επιτρεπτό να δέχεσαι τις προκείμενες, αλλά να απορρίπτεις το συμπέρασμα).

Η κύρια ένσταση των Griffiths και Paseau είναι ότι, στην παράδοση της λογικής και μέχρι τις μέρες μας, άλλοι συνέδεαν την ιδέα του έγκυρου επιχειρήματος με την αναγκαιότητα, άλλοι με τη μορφικότητα, άλλοι και με τα δύο και άλλοι με κανένα από τα δύο, ενώ επίσης κατά καιρούς συνδέθηκαν μαζί της επιπλέον γνωρίσματα, όπως η δυνατότητα αξιωματικοποίησης των λογικών κανόνων ή η απουσία οντολογικών δεσμεύσεων. Άρα δεν έχουν λόγο οι Beall και Restall να επιλέγουν τα συγκεκριμένα γνωρίσματα και να αποδέχονται μόνο έννοιες εγκυρότητας που περιλαμβάνουν όλα αυτά και όχι τα επιπλέον που αναφέρθηκαν. Για να στηρίξουν την ένστασή τους, οι συγγραφείς του *One True Logic* έχουν κάνει στο κεφ. 1 μια ιστορική αναδρομή σε αντιλήψεις για τη λογική εγκυρότητα από την αρχαιότητα μέχρι την εποχή μας.

Σύμφωνα με τον Shapiro, τώρα, δεν υπάρχει έννοια έγκυρου επιχειρήματος που να είναι ανεξάρτητη από τις διάφορες λογικές· υπάρχουν μόνο οι έννοιες της μορφής *έγκυρο κατά την τάδε λογική*. Οποιαδήποτε λογική είναι αποδεκτή εφόσον έχει βρει εφαρμογή στα μαθηματικά ή αλλού ή έχει κάποιο ενδιαφέρον, οπότε καταξιώνεται μια πληθώρα μη κλασικών λογικών που έχουν προταθεί. Η κύρια ένσταση των Griffiths και Paseau απέναντι στον πλουραλιστή αυτού του τύπου είναι ότι δεν μπορεί να βρει ποιους λογικούς κανόνες να ακολουθήσει στις φιλοσοφικές συζητήσεις για τη λογική, όπως όταν υποστηρίζει τον πλουραλισμό του. Κατά τον Shapiro, η μεταλογική συζήτηση μπορεί να βασιστεί μόνο στους κανόνες που γίνονται γενικά δεκτοί. Καθώς όμως επισημαίνουν οι Griffiths και Paseau, είναι ζήτημα αν υπάρχει τέτοιος κανόνας· ακόμα και οι πιο απλοί, όπως ο modus ponens, έχουν αμφισβητηθεί. Αν, πάλι, ο πλουραλιστής επιλέξει να υποστηρίξει τη θέση του διαδοχικά σε όλες τις λογικές που βρίσκει αποδεκτές, μερικές είναι τόσο αδύναμες που δεν μπορεί η συζήτηση να προχωρήσει περιοριζόμενη σε κάποια από αυτές. Αν, ακόμα, πάρει μια λογική στην τύχη και την ακολουθήσει, η επιχειρηματολογία του δεν θα είναι πειστική απέναντι σε μονιστές που υποστηρίζουν διαφορετική λογική.

Πάντως, οι συγγραφείς του *One True Logic*, παρά τον μονισμό τους, δέχονται, όπως είδαμε, ότι στη λογική παράδοση βρίσκουμε ποικίλες έννοιες λογικά έγκυρου επιχειρήματος. Ποια είναι, λοιπόν, η έννοια του «έπεται λογικά» κατά την οποία η μία σωστή λογική αναγνωρίζει ακριβώς τους συλλογισμούς στους οποίους το συμπέρασμα έπεται λογικά από τις προκείμενες; Οι Griffiths και Paseau επιλέγουν τη μορφική (formal) έννοια κατά τη συνήθη εκδοχή της: ένα επιχείρημα είναι λογικά έγκυρο εφόσον έχει μια μορφή τέτοια που αφενός όλα τα επιχειρήματα αυτής της μορφής με αληθείς προκείμενες έχουν αληθές συμπέρασμα και αφετέρου ο κοινός σκελετός των επιχειρημάτων αυτής της μορφής αποτελείται μόνο από λέξεις ή σύμβολα που είναι λογικές σταθερές. Θεωρούν όμως ότι ένα επιχείρημα που είναι έγκυρο με αυτή την έννοια θα χαρακτηρίζεται επίσης από αναγκαιότητα (σελ. 10–11 και 133–134).

Δεν μου φαίνεται να έχουν έτσι τα πράγματα. Ας πάρουμε το επιχείρημα «Τα πάντα είναι φθαρτά· άρα ο Σωκράτης είναι φθαρτός». Είναι λογικά έγκυρο με τη μορφική έννοια, γιατί έχει τη μορφή «Τα πάντα *F*· άρα το *a F*» και η έκφραση «τα πάντα» αποτελεί λογική σταθερά. Αν όμως δεχτούμε (όπως φαίνεται εύλογο, αλλά σε αντίθεση με μια μεταφυσική άποψη που συζητιέται ευρέως στις μέρες μας) ότι ένα σύνηθες αντικείμενο ή πρόσωπο θα μπορούσε να μην υπήρχε, το επιχείρημα δεν χαρακτηρίζεται από αναγκαιότητα. Γιατί θα μπορούσε να ήταν τα πάντα φθαρτά, αλλά ο Σωκράτης να μην υπήρχε κι έτσι να μην ήταν φθαρτός. Και αν κάποιος θεωρεί πως δεν θα μπορούσε να ήταν κάθε ον φθαρτό, γιατί δεν θα ήταν φθαρτά τα μαθηματικά αντικείμενα, ας αντικαταστήσει στο επιχείρημα το κατηγόρημα «φθαρτός» με το σύνθετο κατηγόρημα «είτε φθαρτός είτε μαθηματική οντότητα». Φαίνεται, λοιπόν, ότι άλλη λογική χρειάζεται για να συλλάβουμε τους συλλογισμούς που ικανοποιούν μόνο το μορφικό κριτήριο και άλλη για να συλλάβουμε όσους είναι λογικά έγκυροι με μια έννοια που επιπλέον απαιτεί αναγκαιότητα κατά τη μετάβαση από τις προκείμενες στο συμπέρασμα. Ίσως η κλασική πρωτοβάθμια λογική αρκεί για τον πρώτο σκοπό, αλλά χρειαζόμαστε μια ελεύθερη λογική (free logic) για τον δεύτερο.

Ο μονισμός χάνει σε ενδιαφέρον αν δεν συνοδεύεται από κάποιες απόψεις για το ποια είναι η μόνη σωστή λογική. Όπως ανέφερα στην αρχή, οι συγγραφείς του βιβλίου υποστηρίζουν ότι είναι απειροειδής. Επιχειρηματολογούν υπέρ αυτής της θέσης στο μεν κεφ. 5 εξετάζοντας συγκεκριμένα επιχειρήματα, στα οποία θεωρούν ότι το συμπέρασμα έπεται λογικά από τις προκείμενες, στο δε κεφ. 6 αναπτύσσοντας μια γενική θέση για το ποιες ιδιότητες και σχέσεις είναι λογικές.

Το πρώτο συγκεκριμένο επιχείρημα είναι το A, όπως το αποκαλούν οι Griffiths και Paseau:

$$\begin{array}{c}
\text{Υπάρχει τουλάχιστον ένας πλανήτης} \\
\text{Υπάρχουν τουλάχιστον δύο πλανήτες} \\
\vdots \\
\text{Υπάρχουν τουλάχιστον } \nu \text{ πλανήτες} \\
\vdots \\
\hline
\text{Άρα υπάρχουν απείρως πολλοί πλανήτες.}
\end{array}$$

Εδώ οι προκείμενες είναι απείρως πολλές: μία για κάθε θετικό ακέραιο ν. Το συμπέρασμα έπεται από τις προκείμενες, αλλά δεν έπεται από κανένα πεπερασμένο υποσύνολο των προκειμένων. Κάθε προκείμενη μπορεί να μεταφραστεί στη συμβολική γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής. Όμως το συμπέρασμα δεν μπορεί να μεταφραστεί. Η κλασική πρωτοβάθμια λογική (FOL) είναι συμπαγής, δηλαδή αν $T \models_{\text{FOL}} \tau$ όπου το σύνολο T περιλαμβάνει απείρως πολλούς τύπους, τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο T' του T τέτοιο που $T' \models_{\text{FOL}} \tau$. Αν το όλο επιχείρημα μπορούσε να μεταφραστεί στο ιδίωμα της πρωτοβάθμιας λογικής, θα παραβιαζόταν η συμπάγεια. Έτσι, η λογική FOL δεν μπορεί να αναγνωρίσει την εγκυρότητα του A.

Ωστόσο, το συμπέρασμα μπορεί να μεταφραστεί στο συμβολικό ιδίωμα μιας απειροειδούς λογικής είτε ως σύζευξη των τύπων που μεταφράζουν τις προκείμενες είτε ως εξής:

$$\exists\{x_1, x_2, \ldots\} \bigwedge(\{x_i{\neq}x_j : 1{\leq}i{<}j{<}\omega\} \cup \{Fx_i : 1{\leq}i{<}\omega\})$$

Αυτό που βλέπουμε εδώ είναι συντομογραφία ενός τύπου με άπειρο μήκος στον οποίο ο ποσοδείκτης έχει εφαρμοστεί σε τόσες μεταβλητές όσοι οι θετικοί ακέραιοι, ενώ ακολουθεί μια σύζευξη της οποίας όροι είναι αφενός οι ανισότητες $x_i{\neq}x_j$ για οποιεσδήποτε δύο από τις μεταβλητές στις οποίες εφαρμόστηκε ο ποσοδείκτης και αφετέρου όλες οι απλές κατηγορήσεις Fx_i. Το κατηγορηματικό γράμμα F σημαίνει «είναι πλανήτης» και το ακολουθεί οποιαδήποτε από τις ίδιες μεταβλητές. Τα μη λογικά σύμβολα, όπως οι συνολοθεωρητικές αγκύλες, ανήκουν στη συντομογραφία κι όχι στον ίδιο τον τύπο. Η απειροειδής λογική μπορεί και να μεταφράσει το A και να αντικατοπτρίσει μοντελοθεωρητικά την εγκυρότητά του.

Είναι όμως το επιχείρημα *λογικά* έγκυρο; Οι Griffiths και Paseau εξετάζουν την αντίρρηση πως είναι μαθηματικά, και όχι λογικά έγκυρο, οπότε δεν βρίσκεται μεταξύ αυτών που θα πρέπει να αναγνωρίσει η μία σωστή λογική. Η απάντησή τους είναι ότι τα μαθηματικώς έγκυρα επιχειρήματα μετατρέπονται σε λογικώς έγκυρα με την προσθήκη των κατάλληλων μαθηματικών προκειμένων. Ας προσθέσουμε, λοιπόν, την προκείμενη «Αν, για κάθε θετικό ακέραιο ν, υπάρχουν τουλάχιστον ν πλανήτες, τότε υπάρχουν απείρως πολλοί πλανήτες». Το επιχείρημα που προκύπτει από την προσθήκη είναι λογικά έγκυρο, αλλά εξακολουθεί να ισχύει ότι το συμπέρασμα δεν έπεται από κανένα πεπερασμένο υποσύνολο των προκειμένων, και άρα το επιχείρημα δεν μπορεί να μεταφραστεί στην πρωτοβάθμια λογική.

Μια άλλη αντίρρηση είναι πως το A μπορεί να μεταφραστεί στη δευτεροβάθμια λογική, η οποία αναγνωρίζει μοντελοθεωρητικά την εγκυρότητά του. Άρα δεν έχουμε ακόμα κίνητρο να καταφύγουμε σε απειροειδή λογική. Οι συγγραφείς όμως μας καλούν να πάρουμε οποιονδήποτε άπειρο πληθικό αριθμό κ μεγαλύτερο από τον ω (τη μικρότερη τάξη απείρου) και να δούμε το επιχείρημα με την εξής μορφή, που θα το ονομάζω $B(\kappa)$:

$$\begin{array}{c}
\text{Υπάρχει τουλάχιστον ένας πλανήτης} \\
\text{Υπάρχουν τουλάχιστον δύο πλανήτες} \\
\vdots \\
\text{Υπάρχουν τουλάχιστον } \aleph_0 \text{ πλανήτες} \\
\text{Υπάρχουν τουλάχιστον } \aleph_1 \text{ πλανήτες} \\
\vdots \\
\hline
\text{Άρα υπάρχουν τουλάχιστον } \kappa \text{ πλανήτες.}
\end{array}$$

Εδώ οι προκείμενες είναι τόσες όσοι οι πληθικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι από τον κ. $\aleph_0, \aleph_1$ κλπ. είναι οι άπειροι πληθικοί αριθμοί μικρότεροι του κ. Όποιος κι αν είναι ο κ, το επιχείρημα θα μπορεί να διατυπωθεί σε κάποια επέκταση των αγγλικών που θα περιλαμβάνει ονόματα για όλους τους πληθικούς αριθμούς μικρότερους του κ (οι οποίοι ίσως να μην είναι αριθμήσιμοι). Μια απειροειδής λογική που διαθέτει συζεύξεις με οποιαδήποτε πληθικότητα όρων και ποσοδείξεις με οποιαδήποτε πληθικότητα μεταβλητών παρέχει μετάφραση του επιχειρήματος για οποιονδήποτε κ και αναγνωρίζει την εγκυρότητά του. Η δευτεροβάθμια λογική, από την άλλη, παρέχει μεταφράσεις μόνο για μερικούς κ.

Είναι αυτό το επιχείρημα λογικά, κι όχι μαθηματικά, έγκυρο για οποιονδήποτε κ; Ναι, απαντούν οι συγγραφείς. Η σκέψη τους εδώ είναι πως η υπόθεση ότι πρόκειται για λογική εγκυρότητα προσφέρει την καλύτερη εξήγηση του γιατί το επιχείρημα είναι έγκυρο: είναι επειδή το συμπέρασμά του ισοδυναμεί με σύζευξη των προκειμένων του. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να εξηγηθεί και γιατί είναι έγκυρο το *A*. Ένα επιχείρημα που ουσιαστικά αποτελεί εισαγωγή σύζευξης (conjunction introduction) είναι λογικά έγκυρο.

Η απειροειδής λογική που διαθέτει συζεύξεις και ποσοδείξεις με οποιαδήποτε πληθικότητα, αλλά η ποσόδειξή της είναι πάντα ποσόδειξη σε συντακτική θέση ονόματος, όπως στην πρωτοβάθμια λογική, είναι γνωστή ως $L_{\infty\infty}$. Όπως δείχνουν οι Griffiths και Paseau, χωρίς τέτοιες συζεύξεις ή χωρίς τέτοιες ποσοδείξεις μια λογική δεν μπορεί να αναγνωρίσει την εγκυρότητα του $B(\kappa)$ για όλους τους κ. Επομένως, η μία σωστή λογική θα είναι η $L_{\infty\infty}$ ή ακόμα ισχυρότερη. Οι συγγραφείς δεν είναι βέβαιοι πόσο πιο ισχυρή θα είναι, αλλά στο κεφ. 7 υποστηρίζουν πως τουλάχιστον θα διαθέτει, όπως η δευτεροβάθμια λογική, ποσόδειξη σε συντακτική θέση κατηγορήματος.

Οι Griffiths και Paseau αναπτύσσουν και μια άποψη για το ποιες ιδιότητες και σχέσεις είναι λογικές. Κατ' αυτούς μια ιδιότητα ή σχέση που μένει αναλλοίωτη σε ισομορφισμούς είναι λογική. Νοούν τις ιδιότητες και τις σχέσεις συνολοθεωρητικά, ως σύνολα. Όπως χρησιμοποιούν τον όρο «ισομορφισμός», ένας ισομορφισμός π ανάμεσα σε δύο πεδία βασίζεται σε μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ τους και επεκτείνει την αντιστοιχία σε υποσύνολα των πεδίων, σύνολα ν-άδων στοιχείων των πεδίων, σύνολα τέτοιων συνόλων κλπ. Μια ιδιότητα ή σχέση μένει αναλλοίωτη σε ισομορφισμούς εφόσον, για οποιαδήποτε δύο πεδία που σχετίζονται μεταξύ τους μέσω κάποιου ισομορφισμού π, αν R είναι ο περιορισμός της στο ένα πεδίο, και R' ο περιορισμός της στο άλλο, τότε $\pi(R) = R'$. Για παράδειγμα, ο συνήθης υπαρκτικός ποσοδείκτης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δηλώνει (denotes) την ιδιότητα του να είναι ένα σύνολο μη κενό. Αν δούμε την ιδιότητα συνολοθεωρητικά, ο περιορισμός της σε κάποιο πεδίο είναι το σύνολο των μη κενών υποσυνόλων του. Άμα υφίσταται ισομορφισμός π ανάμεσα σε δυο πεδία, και S και S' είναι, αντίστοιχα, το σύνολο των μη κενών υποσυνόλων του ενός και το σύνολο των μη κενών υποσυνόλων του άλλου, τότε $\pi(S) = S'$. Ως άλλο παράδειγμα, ο περιορισμός της σχέσης ταυτότητας σε κάποιο πεδίο D είναι το σύνολο $\{\langle d, d\rangle : d\in D\}$. Άμα Z και Z' είναι οι περιορισμοί της στο D και στο D', και π είναι ισομορφισμός ανάμεσα στα D και D', τότε $\pi(Z) = Z'$.

Η άποψη ότι οι ιδιότητες και σχέσεις που μένουν αναλλοίωτες σε ισομορφισμούς είναι λογικές αποτελεί μετεξέλιξη των ιδεών του Tarski (1986) και της Sher (1991) για το πότε μια έκφραση είναι λογική σταθερά. Τελικά η άποψη προέρχεται από την ιδέα ότι λογικές σταθερές είναι οι εκφράσεις που χρησιμοποιούμε για οποιοδήποτε θέμα κι αν μιλάμε, και άρα η χρήση τους είναι ανεξάρτητη από το ποια είναι τα αντικείμενα για τα οποία μιλάμε. Η ιδέα αυτή έχει γίνει εδώ ακριβέστερη, αλλά έχει επίσης μεταφερθεί από τις λογικές σταθερές στις ιδιότητες και σχέσεις που αυτές δηλώνουν. Αν μια ιδιότητα ή σχέση μένει αναλλοίωτη σε ισομορφισμούς, το πώς θα εφαρμοστεί σε κάποιο πεδίο είναι ανεξάρτητο από το ποια είναι τα στοιχεία του πεδίου. Οι Griffiths και Paseau αφιερώνουν τα κεφάλαια 8–11 προκειμένου να υπερασπιστούν την άποψή τους για τη λογικότητα απέναντι σε ποικίλες αντιρρήσεις.

Τώρα, για οποιαδήποτε λογική ιδιότητα ή σχέση R, η μία σωστή λογική θα πρέπει να διαθέτει κάποια έκφραση που δηλώνει την R. Αυτό προβάλλεται ως απαίτηση από τη σωστή λογική. Όμως η ιδιότητα του να έχει ένα σύνολο απείρως πολλά στοιχεία είναι αναλλοίωτη σε ισομορφισμούς. Ο περιορισμός της σε κάποιο πεδίο είναι το σύνολο των υποσυνόλων του πεδίου που έχουν απείρως πολλά στοιχεία. Ένας ισομορφισμός ανάμεσα σε δυο πεδία αντιστοιχεί αυτό το σύνολο από το ένα στο ανάλογο σύνολο από το άλλο. Άρα θα πρέπει η σωστή λογική να διαθέτει κάποια έκφραση σαν την «υπάρχουν απείρως πολλά πράγματα που ...». Παρομοίως, για οποιονδήποτε άπειρο πληθάριθμο κ, είναι αναλλοίωτη σε ισομορφισμούς η ιδιότητα του να έχει ένα σύνολο ακριβώς κ-πολλά μέλη. Άρα η σωστή λογική θα διαθέτει κάποια έκφραση «υπάρχουν ακριβώς κ-πολλά πράγματα που ...». Γενικότερα, οι Griffiths και Paseau αποδεικνύουν στο κεφ. 6 μια παραλλαγή ενός θεωρήματος του McGee (1996) η οποία συνεπάγεται ότι αν μια ιδιότητα ή σχέση R δηλώνεται από τύπο της απειροειδούς λογικής $L_{\infty\infty}$ ο οποίος περιέχει μόνο λογικά σύμβολα (κι όχι π.χ. ένα κατηγορηματικό γράμμα που σημαίνει «είναι πλανήτης»), τότε η R είναι αναλλοίωτη σε ισομορφισμούς. (Μάλιστα το αποδεικνύουν αυτό για μια απειροειδή λογική που επεκτείνει κατά πολύ την $L_{\infty\infty}$.) Συνεπώς, η σωστή λογική θα έχει τουλάχιστον τις εκφραστικές δυνατότητες τέτοιων τύπων της $L_{\infty\infty}$ κι έτσι θα πρέπει και η ίδια να είναι απειροειδής.

Παρά την επιχειρηματολογική δεινότητα των συγγραφέων, εξακολουθεί όμως να φαίνεται ότι έννοιες όπως *υπάρχουν τουλάχιστον ω-πολλά πράγματα που ...* και *υπάρχουν ακριβώς $\aleph_\omega$ πράγματα που ...* είναι μαθηματικές και όχι λογικές και ότι αν η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος οφείλεται στη διαπλοκή μεταξύ τέτοιων εννοιών, τότε το επιχείρημα είναι μαθηματικά και όχι λογικά έγκυρο. Ας στραφούμε λίγο στους πεπερασμένους πληθαρίθμους, μήπως μας διευκολύνουν. Δείτε το εξής επιχείρημα, που θα το αποκαλώ Γ:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Υπάρχουν λιγότεροι από τέσσερις πλανήτες}\\ \text{Υπάρχουν περισσότεροι από ένας πλανήτες}\end{array}}{\text{Άρα υπάρχουν είτε ακριβώς δύο είτε ακριβώς τρεις πλανήτες.}}$$

Το επιχείρημα φαίνεται να είναι μαθηματικά έγκυρο: οι έννοιες *λιγότεροι από/περισσότεροι από/ακριβώς ν* είναι μαθηματικές, και το συμπέρασμα έπεται από τις προκείμενες λόγω της αριθμητικής αλήθειας ότι οι μόνοι ακέραιοι ανάμεσα στο 1 και το 4 είναι το 2 και το 3. Ωστόσο το επιχείρημα μπορεί να μεταφραστεί, με καθιερωμένο τρόπο, στη γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής, και στη μετάφραση το συμπέρασμα αποτελεί λογική συνέπεια των προκειμένων. Τι συμβαίνει εδώ;

Η μετάφραση, για παράδειγμα, της πρότασης «Υπάρχουν περισσότεροι από ένας πλανήτες» είναι «$\exists x \exists y(Fx \wedge Fy \wedge x{\neq}y)$». Θα έθετα το ζήτημα ως εξής. Η έννοια *υπάρχουν περισσότεροι από ένας ...* είναι μαθηματική έννοια, αλλά η έννοια $\exists x \exists y(\ldots x \ldots \wedge \ldots y \ldots \wedge x{\neq}y)$ (όπου οι τελείες δηλώνουν ένα κενό που μπορεί να καλυφθεί με οποιοδήποτε κατηγόρημα) είναι λογική. Υπάρχουν περισσότεροι από ένας πλανήτες αν και μόνο αν $\exists x \exists y(Fx \wedge Fy \wedge x{\neq}y)$, και μάλιστα αυτή η ισοδυναμία ισχύει κατά μεταφυσική αναγκαιότητα και γνωρίζουμε a priori ότι ισχύει. Ωστόσο οι προτάσεις «Υπάρχουν περισσότεροι από ένας πλανήτες» και «$\exists x \exists y(Fx \wedge Fy \wedge x{\neq}y)$» διαφέρουν σε νόημα, γιατί εμπλέκουν διαφορετικές έννοιες. (Τέτοιες λεπτές διακρίσεις ανάμεσα σε μαθηματικές και λογικές αποφάνσεις κάνουν και οι συγγραφείς πολλές φορές στο κεφ. 9, αλλά σε διαφορετικά παραδείγματα.) Το *Γ* είναι μαθηματικά κι όχι λογικά έγκυρο, αλλά η μετάφρασή του στη γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής είναι λογικά έγκυρη. Παρομοίως, η έννοια που εκφράζεται όταν λέμε «υπάρχουν τουλάχιστον ω-πολλά πράγματα που ...» είναι μαθηματική, αλλά η έννοια που εκφράζεται στον απείρου μήκους τύπο που συντομογράφησα προηγουμένως όταν κάνουμε νοερά αφαίρεση από το συγκεκριμένο κατηγορηματικό γράμμα F είναι λογική.

Από την άλλη, οι ιδιότητες και σχέσεις για τις οποίες μιλούν οι Griffiths και Paseau δεν είναι έννοιες. Το κάνουν επανειλημμένως σαφές (π.χ. σελ. 128) ότι πρόκειται για οντότητες στον κόσμο στις οποίες αναφέρονται γλωσσικές εκφράσεις σαν τους ποσοδείκτες. Ειδικότερα, πρόκειται για σύνολα. Όπως τονίζουν στο κεφ. 11, μπορεί μια γλωσσική έκφραση να αναφέρεται σε μια λογική ιδιότητα, αλλά να μην έχει η ίδια λογικό χαρακτήρα. Το παράδειγμα που δίνουν είναι οι φράσεις «δεν ταυτίζεται με τον εαυτό του» και «είναι μονόκερος». Επειδή δεν υπάρχουν μονόκεροι, οι δυο φράσεις δηλώνουν την αυτή ιδιότητα (δηλαδή αναφέρονται στο αυτό σύνολο), αλλά μόνο η πρώτη είναι έκφραση της λογικής. Πάντως, η απαίτησή τους από τη σωστή λογική τίθεται με όρους ιδιοτήτων (για κάθε λογική ιδιότητα να έχει διατύπωση που τη δηλώνει) παρά με όρους εννοιών (για κάθε λογική έννοια να έχει διατύπωση που την εκφράζει).

Αν η διάκριση που έκανα πριν λίγο ανάμεσα στα λογικώς έγκυρα επιχειρήματα και τα μαθηματικώς έγκυρα ευσταθεί, δεν συνιστά αντίρρηση στο συμπέρασμα των Griffiths και Paseau ότι η σωστή λογική είναι απειροειδής. Άμα υπάρχουν επιχειρήματα που διαφέρουν μόνο εννοιολογικά από τα *A* και *B(κ)* και είναι λογικώς έγκυρα, τότε η σωστή λογική (αν υπάρχει μία) χρειάζεται να είναι απειροειδής προκειμένου να αναγνωρίσει την εγκυρότητά τους. Συνιστά όμως αντίρρηση στην ιδέα ότι οι απαιτήσεις μας από μια σωστή λογική θα πρέπει να τεθούν με όρους ιδιοτήτων και σχέσεων. Μια τέτοια απαίτηση δεν μας εξασφαλίζει ότι το σύστημα που θα υιοθετήσουμε ως λογική δεν θα εκφράζει έννοιες που ανήκουν μάλλον στα μαθηματικά.

Μήπως αυτό δεν δείχνει πως η απαίτηση των Griffiths και Paseau πρέπει να αντικατασταθεί, αλλά πως πρέπει να συμπληρωθεί; Καθόλου δεν αποκλείουν την επιβολή επιπλέον αιτημάτων. Όμως η λογικότητα είναι γνώρισμα κάποιων λέξεων ή συμβόλων (των λογικών σταθερών) και των αντίστοιχων εννοιών. Μόνο με μια επέκταση του όρου «λογικός» μπορούμε να αποκαλούμε «λογικές» οντότητες στον κόσμο, όπως π.χ. σύνολα. Αν αυτή η παρατήρηση είναι ορθή, τότε είναι μάλλον προτιμότερο να βρούμε ποιες έννοιες είναι λογικές και απλά να απαιτήσουμε από τη λογική που θα υιοθετήσουμε να διαθέτει μια διατύπωση για κάθε τέτοια έννοια.

Είναι αναπόφευκτο για ένα φιλοσοφικό βιβλίο να εγείρει αντιρρήσεις. Αυτό κάθε άλλο παρά μειώνει την αξία του. Το *One True Logic* αποτελεί εξαιρετική συνεισφορά στην προβληματική για το είδος και τον αριθμό των λογικών συστημάτων που πρέπει να δεχτούμε. Ο ειδικός αναγνώστης θα βρει τροφή για σκέψη και ο όχι τόσο ειδικός θα αποκομίσει πολλές πληροφορίες ακόμα και για ζητήματα, όπως η δευτεροβάθμια λογική, που δεν τονίστηκαν σε αυτή την παρουσίαση. Το βιβλίο είναι πρωτότυπο και πολύ καλά τεκμηριωμένο και σίγουρα θα προκαλέσει πολλές συζητήσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Beall, J. C., και G. Restall. (2006). *Logical Pluralism*. Oxford, Oxford University Press.

McGee, V. (1996). «Logical Operations». *Journal of Philosophical Logic* 25, σ. 567–580.

Shapiro, S. (2014). *Varieties of Logic*. Oxford, Oxford University Press.

Sher, G. (1991). *The Bounds of Logic*. Cambridge, MA, MIT Press.

Tarski, A. (1986). «What Are Logical Notions?», εκδεδομένο από τον J. Corcoran. *History and Philosophy of Logic* 7, σ. 143–154.