

ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΤΙΚΗ

WILBUR RICHARD KNORR

Η ΑΡΧΑΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ: Τ. ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ, ΠΡΟΛΟΓΟΣ: Ν. ΣΙΔΟΛΙ,

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Γ. ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ & Μ. ΣΙΑΛΛΑΡΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, ΗΡΑΚΛΕΙΟ, 2022

ΝΤΟΡΑ ΤΟΥΛΙΑΤΟΥ*

Η Αρχαία Παράδοση των γεωμετρικών προβλημάτων δεν συνιστά μια εμπειριστικώς ιστορία της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας. Στην πραγματικότητα, απαριθμεί τις απόπειρες της αναλυτικής επίλυσης προβλημάτων, κυρίως, κατά τη διάρκεια των ελληνιστικών χρόνων. Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της δραστηριότητας επικεντρώθηκε στην εύρεση λύσεων στα τρία κλασικά γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας: 1) τον διπλασιασμό του κύβου, πρόβλημα που ανάγεται στην εύρεση δύο μέσων ανάλογων μεταξύ δύο δεδομένων ευθύγραμμων τμημάτων. 2) την κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός δεδομένου κύκλου και 3) την τριχοτόμηση μιας δεδομένης γωνίας. Το κεφάλαιο 2, λοιπόν, «Απαρχές και πρώτες προσπάθειες», αφιερώνεται στην απαρίθμηση των πρώτων προσπαθειών για την αναζήτηση λύσεων στα συγκεκριμένα προβλήματα. Με την μελέτη των τεκμηρίων της πρώιμης έρευνας, ειδικότερα στα προβλήματα του διπλασιασμού του κύβου και του τετραγωνισμού του κύκλου, ανακαλύπτονται οι ρίζες της ενασχόλησης των αρχαίων με την επίλυση προβλημάτων. Ο Knorr επιχειρεί μια ενδελεχή επισκόπηση των πρώιμων προσπαθειών της αρχαίας παράδοσης, απογυμνώνοντας αυτές από τους μύθους που τις περιβάλλουν, και αναδεικνύει την καθοριστική σημασία του έργου του Ιπποκράτη του Χίου, ο οποίος συνέβαλε τα μέγιστα στην έναρξη της έρευνας των γεωμετρικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Ερατοσθένη, ο Ιπποκράτης ο Χίος ήταν ο πρώτος που είχε την ιδέα να ανάγει τον διπλασιασμό του κύβου στην εύρεση δύο μέσων ανάλογων σε συνεχή αναλογία με λόγο 2:1. Παρόλο που ο Ερατοσθένης αποδίδει μικρή αξία στη σκέψη του Ιπποκράτη, ο Knorr επισημαίνει τη σπουδαιότητα αναγωγής ενός προβλήματος σε μια μορφή που επιτρέπει την εφαρμογή ενός νέου φάσματος γεωμετρικών τεχνικών, στη συγκεκριμένη περίπτωση της θεωρίας αναλογιών. Γενικά, παρατηρεί ο Knorr, αυτή η μορφή μετασχηματισμού (ἀπαγωγή) ενός

* Η Ν. ΤΟΥΛΙΑΤΟΥ είναι Διδάκτορας του Τμήματος Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

προβλήματος σε άλλο, από τη λύση του οποίου προκύπτει και η λύση του αρχικού, είναι μια ισχυρή τεχνική επίλυσης προβλημάτων, ένας πρόδρομος της μεθόδου της γεωμετρικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, η αναγωγή του διπλασιασμού του κύβου προάγει τις γεωμετρικές τεχνικές της θεωρίας των αναλογιών, ενώ η αναγωγή του τετραγωνισμού του κύκλου σε τετραγωνισμό μηνίσκων ανάγει τις κατασκευαστικές τεχνικές σε προβλήματα, από τη μελέτη των οποίων θα προκύψουν, μεταγενέστερα, περιορισμοί στις τεχνικές κατασκευής. Τότε μόνο, στο πλαίσιο αυτής της πιο εκλεπτυσμένης γεωμετρίας, η τριχοτόμηση της γωνίας θα αποτελέσει πρόβλημα προς επίλυση.

Οι τεχνικές μέθοδοι γεωμετρίας που αναπτύχθηκαν κατά την πρώιμη περίοδο, και ιδιαίτερα η συνεισφορά του Ιπποκράτη του Χίου, έθεσαν τις βάσεις για μεταγενέστερες έρευνες και σημείωσαν σημαντική πρόοδο στα χέρια μιας ομάδας γεωμετρών που συνδέονται με την Ακαδημία του Πλάτωνα. Στις μελέτες αυτών των γεωμετρών ο Knorr αφιερώνει το κεφάλαιο 3, «Οι γεωμέτρεις της Ακαδημίας του Πλάτωνα». Η ενθάρρυνση της μαθηματικής έρευνας προέρχεται από τον Πλάτωνα, ο οποίος επεφύλαξε μια ειδική θέση στα Μαθηματικά μέσα στο πρόγραμμα του για τη φιλοσοφική εκπαίδευση. Πράγματι, ο Πλάτων, εντυπωσιασμένος από την τεχνική αυστηρότητα κάποιων παλαιότερων γεωμετρών, και ειδικότερα του Θεόδωρου του Κυρηναίου, ενός σύγχρονου του Σωκράτη, καθώς και τις ιδιοφυείς εμπνεύσεις γεωμετρών της δικής του γενιάς, ειδικότερα του Αρχύτα του Ταραντίνου και του Θεαίτητου του Αθηναίου, θέλησε να ενσωματώσει τεχνικά παραδείγματα στα κείμενα του, προκειμένου να αποσαφηνίσει σημεία της μεθόδου του. Περί τα μέσα του 4ου αιώνα, εντάχθηκε στη σχολή ο Εύδοξος ο Κνίδιος, ο οποίος, μαζί με τους μαθητές του Μέναιχμο και Δεινόστρατο, ώθησαν στο έπακρο τη μαθηματική έρευνα. Ο Knorr παραθέτει, λεπτομερώς, και επεξηγεί τις λύσεις που προτάθηκαν από τον Αρχύτα, τον Εύδοξο και τον Μέναιχμο για τα προβλήματα τόσο του διπλασιασμού του κύβου όσο και του τετραγωνισμού του κύκλου. Είναι αξιοσημείωτο ότι η αντιμετώπιση των προβλημάτων με μια ποικιλία γεωμετρικών μεθόδων οδήγησε: 1) στις πρώιμες μελέτες των κωνικών τομών από τον Μέναιχμο. 2) σε μια ειδική τεχνική που οι σύγχρονοι συγγραφείς αποκαλούν «μέθοδο της εξάντλησης» ή «έμμεση μέθοδο των ορίων», της οποίας η πατρότητα αποδίδεται στον Εύδοξο. Η «μέθοδος της εξάντλησης» συνιστά τη βάση για τη μέτρηση του κύκλου, της πυραμίδας, του κώνου και της σφαίρας και έχει αποτελέσει αντικείμενο πραγμάτευσης τόσο από τον Αρχιμήδη στο *Κύκλου Μέτρησις* όσο και από τον Ευκλείδη στο Βιβλίο XII των *Στοιχείων*. 3) σε μία καμπύλη, την «τετραγωνίζουσα» η οποία, με βάση τη μαρτυρία του Πάππου, δημιουργήθηκε για τον τετραγωνισμό του κύκλου από τον Δεινόστρατο, τον Νικομήδη και κάποιους άλλους νεότερους, χρησιμοποιήθηκε, όμως, από τον ίδιο τον Πάππο για την τριχοτόμηση μιας γωνίας. Ο Knorr, ανατρέχοντας στα στοιχεία που συλλέγει από τους σχολιαστές της Ύστερης Αρχαιότητας, μεταφέρει με λεπτομέρειες τις λύσεις που προτάθηκαν,

κατά την πρώιμη περίοδο για την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων, καθώς και τις διαφορετικές απόψεις που υπήρξαν σχετικά με την πατρότητα των διαφόρων αποτελεσμάτων που προέκυψαν, τόσο από σχολιαστές όσο και από σύγχρονους ιστορικούς.

Το φιλοσοφικό περιβάλλον της Ακαδημίας του Πλάτωνα, μέσα στο οποίο αυτοί οι γεωμέτρες πραγματοποίησαν τις έρευνές τους, αποτέλεσε το έναυσμα για τη διαμόρφωση μιας συγκεκριμένης οπτικής, η οποία διαμορφώθηκε, πρωτίστως, από τους σχολιαστές της Ύστερης Αρχαιότητας. Υπό το πρίσμα, λοιπόν, αυτής της οπτικής, κυρίαρχο ρόλο διαδραματίζει η σύγκλιση φιλοσοφικών και μαθηματικών ενδιαφερόντων, η οποία θα οδηγήσει στην άμεση επίδραση της φιλοσοφικής παράδοσης, κυρίως του Πλάτωνα, στην ελληνική γεωμετρία. Αποτέλεσμα αυτής της αντίληψης είναι η ανάπτυξη μιας «εξωτεριστικής» οπτικής, η οποία επικεντρώνεται στα εξής σημεία: 1) ο φιλοσοφικός λόγος θεωρήθηκε το αρχικό πρότυπο της θεωρητικής σκέψης των Ελλήνων γεωμετρών και, 2) οι μεταμαθηματικοί» προβληματισμοί, όπως για παράδειγμα η οργάνωση των γεωμετρικών ευρημάτων σε συνεκτικές δομές παραγωγικού συλλογισμού, αποτέλεσαν την κινητήρια δύναμη που ώθησε, αποτελεσματικά, τις προσπάθειές τους. Όμως, η συγγραφή ενός εγχειριδίου, υποστηρίζει ο Knorr, αποτελεί τον τελευταίο όρο μιας ακολουθίας, αλλά, σε καμία περίπτωση, δεν εξηγεί το κυριότερο: το κίνητρο εμπλοκής κάποιου σε μια δραστηριότητα. Όσον αφορά στους αρχαίους γεωμέτρες, ο Knorr θεωρεί πιο πειστική μια «εσωτεριστική» θέση, σύμφωνα με την οποία η τεχνική έρευνα στοχεύει στη λύση προβλημάτων που έχουν ανακύψει από προηγούμενες ή εν εξελίξει ερευνητικές προσπάθειες. Ο στόχος της διαμόρφωσης πιο αυστηρών αποδείξεων για ήδη γνωστά αποτελέσματα μπορεί να προκαλέσει, χωρίς αμφιβολία, μια μορφή έρευνας, αλλά, με εξαίρεση την περίπτωση του Εύδοξου, το πλαίσιο των μαθηματικών εμπνεύσεων των αρχαίων γεωμετρών που παρουσιάζουν ενδιαφέρον έγκειται στη μελέτη προβλημάτων. Άλλωστε, οι συζητήσεις σχετικά με τα προβλήματα θεμελίωσης απασχόλησαν, πρωτίστως, τους φιλόσοφους, οι οποίοι ενδιαφέρονταν να εντάξουν μαθηματικά ερωτήματα στο πλαίσιο των δικών τους φιλοσοφικών απόψεων, όπως είναι ο Πλατωνισμός, ο Επικουρισμός και ο Σκεπτικισμός. Η συμμετοχή των μαθηματικών σε αυτό το πεδίο υπήρξε μικρή και, αντιστρόφως, η επιρροή του στις δικές τους έρευνες ακόμα μικρότερη. Η εναλλακτική άποψη, λοιπόν, που υποστηρίζει ο Knorr σε αυτή τη μελέτη, αναγνωρίζει τη σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρίας και φιλοσοφίας στον ειδικό κλάδο που ασχολείται με την τυπική φύση της απόδειξης, αλλά θεωρεί ότι οι δύο κλάδοι αναπτύχθηκαν αυτόνομα.

Ο κύριος όγκος της Αρχαίας παράδοσης είναι αφιερωμένος στη μελέτη των γεωμετρών της ελληνιστικής περιόδου: στον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, τον Απολλώνιο και τους συγχρόνους τους. Στο κεφάλαιο 4 ο Knorr πραγματεύεται τη γεωμετρία του Ευκλείδη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τίτλος του κεφαλαίου, «Η Γενιά του Ευκλείδη», ο οποίος απομακρύνει

τον συγκεκριμένο μαθηματικό από το επίκεντρο και, μάλιστα, έρχεται σε αντίθεση με τους τίτλους των κεφαλαίων 5 και 7, με τους οποίους εκθειάζεται η συνεισφορά του Αρχιμήδη και Απολλώνιου, αντίστοιχα. Ο τίτλος του κεφαλαίου 4 συνάδει με την άποψη που αναλύεται από τον Knorr σχετικά με τη συνεισφορά του Ευκλείδη στην επίλυση προβλημάτων. Πράγματι, παρόλο που ο Knorr αναγνωρίζει τον Ευκλείδη ως έναν αποτελεσματικό δάσκαλο και συμπληρητή, υποστηρίζει ότι δεν ενεργεί μόνος του, αλλά βρίσκεται σε διαρκή αλληλεπίδραση τόσο με τους τους προδρόμους του όσο και τους σύγχρονούς του, οργανώνοντας και συνθέτοντας έργα προγενέστερων συγγραφέων, στα οποία ενσωματώνει και τα αποτελέσματα που παράγει ο ίδιος. Ο Knorr θα ισχυριστεί ότι τα *Στοιχεία* είναι ένα εισαγωγικό, αλλά όχι καινοτόμο έργο, το οποίο αντλεί από τις ανακαλύψεις του Θεαίτητου, του Εύδοξου και των συνεχιστών τους, και, επί της ουσίας, δεν θα συζητηθεί στην *Αρχαία παράδοση*. Σύμφωνα με τον Knorr, η συνεισφορά του Ευκλείδη στην επίλυση προβλημάτων ανιχνεύεται στα *Δεδομένα*, τα *Κωνικά* (3 βιβλία, δεν διασώζεται), τα *Πορίσματα* (3 βιβλία, δεν διασώζεται) και, σε μικρότερο βαθμό, στο *Τόποι πρὸς ἐπιφανεία* (2 βιβλία, δεν διασώζεται). Από τα έργα που δεν διασώζονται, θεωρήθηκε ότι τα *Κωνικά* περιείχαν ανάλογα θέματα με τα *Κωνικά* του Απολλώνιου, ενώ το περιεχόμενο των *Πορισμάτων* ανακατασκευάστηκε, εν μέρει, από λήμματα που παραθέτει ο Πάππος. Όσο για τα *Δεδομένα*, ο Knorr υποστηρίζει ότι καινοτομούν ως προς τη μορφή, ενώ το περιεχόμενό τους αναπαράγει αυτό των *Στοιχείων*, με στόχο, όμως, να οργανώσει τα μαθηματικά αποτελέσματα, ώστε να εφαρμοστούν στη γεωμετρική ανάλυση. Ο κύριος όγκος του κεφαλαίου 4 αποτελείται από ανακατασκευές προβλημάτων οι οποίες προέρχονται από την θεωρία των κωνικών του Αρισταίου ή από τα *Πορίσματα*, καθώς και ανακατασκευές γεωμετρικών αναλύσεων που υποκρύπτονται πίσω από αρχαίες κατασκευές γεωμετρικών τόπων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι οι μαθηματικές ανακατασκευές που αποτελούν τον κύριο όγκο του κεφαλαίου 4, παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη μεθοδολογία της *Αρχαίας παράδοσης* διατρέχοντας όλο το έργο. Για την καλύτερη κατανόηση, όμως, της μεθοδολογίας θα πρέπει το συγκεκριμένο έργο να ενταχθεί και να εξεταστεί στο πλαίσιο της συνολικής εργογραφίας του Knorr. Η *Αρχαία παράδοση* γράφεται μετά την *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων* (*Evolution of the Euclidean Elements*, 1975) και αποτελεί μέρος του ίδιου ερευνητικού προγράμματος με τις *Κειμενικές μελέτες στην αρχαία και μεσαιωνική γεωμετρία* (*Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, 1989). Οι *Κειμενικές μελέτες* αναφέρονται στον πρόλογο της *Αρχαίας παράδοσης*, ως τόμος υπό διαμόρφωση και, περιστασιακά, στο κείμενο, ως «ο δεύτερος τόμος». Στην *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων* ο Knorr καταλήγει σε πολλά νέα συμπεράσματα, ακολουθώντας, όμως, μία παλαιά παράδοση ανασυγκρότησης της ιστορίας των Μαθηματικών που περιέχονται στα

Στοιχεία, με βάση εκτεταμένες ανακατασκευές οι οποίες, συχνά, στηρίζονται σε αρκετά ασαφείς πηγές και σε ανεπιβεβαιώτους ισχυρισμούς ότι τα ίδια τα Στοιχεία αποτελούν σχεδόν καθαρή αντιγραφή παλαιότερων έργων. Αντίθετα, το κύριο μεθοδολογικό εργαλείο του Knorr στο συγκεκριμένο ερευνητικό πρόγραμμα είναι η μαθηματική και ορθολογική ανακατασκευή. Πράγματι, η Αρχαία παράδοση περιλαμβάνει ένα σημαντικό αριθμό ανακατασκευών, οι οποίες, όμως, υποστηρίζονται από περισσότερες μαθηματικές πηγές σε σχέση με αυτές που αναπτύσσονται στην *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων*: επιπλέον, οι μαθηματικές πηγές που χρησιμοποιούνται μελετώνται, λεπτομερώς, στις *Κείμενικές μελέτες*, όπου ο Knorr προβαίνει σε προσεκτικές φιλολογικές αντιπαραβολές ανάμεσα σε διάφορες μεσαιωνικές πηγές και σε αρχαία κείμενα, όπως το *Κύκλου μέτρησις* του Αρχιμήδη. Τα αποτελέσματα, όμως, των μαθηματικών ανακατασκευών είναι, κατά βάση, αβέβαια, από τη στιγμή που διάφοροι ερευνητές μπορούν, και έτσι γίνεται, να οδηγηθούν σε εντελώς διαφορετικά συμπεράσματα, τα οποία είναι πιθανό να αποκλίνουν ακόμη και από το αρχικό κείμενο. Ως εκ τούτου, η χρήση τους θεωρείται αναχρονιστική και έχει πλέον εκλείψει. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες: ειδικά, στην περίπτωση πραγματειών που δεν διασώζονται, αποτελούν τη μόνη δυνατότητα διαμόρφωσης κάποιων υποθέσεων. Πράγματι, από τη στιγμή που τα παραδείγματα μαθηματικών αποτελεσμάτων από ελληνικές πηγές είναι πενιχρά, αυτές οι ανακατασκευές μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη ενός ευρύτερου πλαισίου κατανόησης των αποσπασματικών τεκμηρίων που διασώζονται. Για πολλά από τα μη διασωθέντα έργα του σώματος κειμένων της αρχαίας ανάλυσης, όπως τα *Πορίσματα* του Ευκλείδη, το *Περί των κανονικών στερεών σωμάτων* του Αρισταίου ή το *Περί χωρίου αποτομής* του Απολλώνιου, η μόνη δυνατή προσέγγιση που υπάρχει σχετικά με το περιεχόμενό τους προκύπτει από μαθηματική ανακατασκευή. Παρόλο που ο Knorr μετά την Αρχαία παράδοση απομακρύνθηκε από αυτή τη μέθοδο, ο τρόπος που χρησιμοποιεί τις μαθηματικές ανακατασκευές σε αυτό το έργο αναδεικνύει τις ωφέλειες που μπορούν να προκύψουν από αυτήν τη μεθοδολογική προσέγγιση. Στην Αρχαία παράδοση, η σημαντικότερη όψη αυτής της μεθοδολογικής προσέγγισης συνίσταται στην ανακατασκευή μιας υποθετικής ανάλυσης για πολλά προβλήματα που σώζονται στα αρχαία κείμενα μόνο με συνθετική μορφή. Πράγματι, ο Knorr στις περιγραφές του προτιμάει τις αναλυτικές παρουσιάσεις, αντί για τις συνθετικές, με αποτέλεσμα στις περιπτώσεις που διασώζεται μόνο η σύνθεση να επιχειρεί την ανακατασκευή της αντίστοιχης ανάλυσης. Ισχυρίζεται, μάλιστα, ότι η ανασύνθεση των αναλύσεων μπορεί να επιτευχθεί με απόλυτη ακρίβεια, δεδομένου του στενού παραλληλισμού μεταξύ αυτών των δύο μερών – ανάλυσης και σύνθεσης – της συγκεκριμένης διαδικασίας. Η ανακατασκευή των αναλύσεων δίνει, επίσης, τη δυνατότητα κατανόησης του λόγου ύπαρξης ορισμένων αιγιματικών

στοιχείων στις συνθέσεις που διασώζονται. Ο Knorr παραδέχεται, βέβαια, ότι όλοι αυτοί οι ισχυρισμοί αποτελούν ερμηνεία, αλλά δηλώνει ότι η πρόθεσή του δεν είναι να παραφράσει ή να αναπαράγει, με άλλον τρόπο, τα δεδομένα της πρωτογενούς βιβλιογραφίας, αλλά να φέρει στο προσκήνιο την κεντρική απλή, συνήθως, γεωμετρική ιδέα που βρίσκεται πίσω από κάθε αποτέλεσμα, δηλαδή να παράσχει την κατάλληλη εισαγωγή για την περαιτέρω διερεύνηση αυτής της βιβλιογραφίας. Παρόλο που δεν γνωρίζουμε για το αν οι αναλύσεις που δημιουργήθηκαν μέσω αυτής της διαδικασίας υπήρξαν αντικείμενο θεώρησης των αρχαίων μαθηματικών, αυτή η προσέγγιση μπορεί να μας δώσει μία αίσθηση σχετικά με το μαθηματικό πλαίσιο των προβλημάτων που διασώζονται και, το κυριότερο, μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα και σε κείμενα που ο ίδιος ο Knorr δεν ανέλυσε.

Το κεφάλαιο 5 με τίτλο, «Αρχιμήδης: Ο άριστος γεωμέτρης της ευδόξειας παράδοσης», αρχίζει και τελειώνει με τις περίτεχνες προσπάθειες του Αρχιμήδη στον τομέα της υπολογιστικής γεωμετρίας: τόσο τις προσεγγίσεις του για το π στο Κύκλου μέτρησις όσο και τους αποτελεσματικούς κανόνες του για την προσέγγιση τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Στο σύνολο του έργου του Αρχιμήδη κυριαρχεί το ενδιαφέρον του για τις ποσοτικές μετρήσεις των γεωμετρικών σχημάτων, συγκεκριμένα για τα εμβαδά, τους όγκους και τα κέντρα βάρους καμπυλόγραμμων σχημάτων. Η μέθοδος που ακολουθεί σε αυτά τα προβλήματα, παρατηρεί ο Knorr, είναι θεωρητική και αποτελεί τη βελτίωση της μεθόδου των ορίων του Εύδοξου. Ο Knorr, με τη μελέτη συγκεκριμένων προβλημάτων, θα αναδείξει αυτή τη νέα εύχρηστη τεχνική σε νέες οικογένειες σχημάτων, όπως αυτά που οριοθετούνται από κωνικές καμπύλες και έλικες, καθώς και σε νέους τύπους προβλημάτων, όπως είναι η κατασκευή εφαπτόμενων σε έλικες. Ιδιαίτερη μνεία γίνεται από τον Knorr στη χρησιμότητα των αποτελεσμάτων που ανακάλυψε ο Αρχιμήδης στη μετρητική γεωμετρία. Το πλέον αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αποτελεί ο Ήρων, του οποίου οι απλοί κανόνες για τις υπολογιστικές μετρήσεις μπορεί να αντλούνται από τα Στοιχεία, αλλά οι πλέον προηγμένοι οφείλουν την ανακάλυψη και απόδειξή τους στον Αρχιμήδη. Προφανώς, η πρακτική παράδοση δεν έδειξε ενδιαφέρον για τις τυπικές λεπτολογίες των μεθόδων των ορίων του Εύδοξου που προήχθησαν από τον Αρχιμήδη. Αλλά, σημειώνει ο Knorr, αξιοσημείωτη είναι η ουσιαστική εγκατάλειψη αυτού του ενδιαφέροντος στη μεταγενέστερη του Αρχιμήδη γεωμετρική παράδοση: οι οριακές μέθοδοι, απαραίτητες για τις μετρήσεις, απουσιάζουν από τα έργα του Απολλώνιου, ενώ στη Συναγωγή του Πάππου ελάχιστα αποτελέσματα εμπίπτουν σε αυτήν την αρχιμήδεια κατηγορία. Οι υπολογιστικές προσπάθειες του Αρχιμήδη που επιλέγονται και καταγράφονται στο κεφάλαιο 5 αποκαλύπτουν το ενδιαφέρον του για τον τετραγωνισμό του κύκλου και τον διπλασιασμό του κύβου. Ο Αρχιμήδης επιλέγει τη νεύση στην επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος που συνδέεται με τα θεωρήματά του σχετικά με τις έλικες και επινοεί

ευρηματικές νεύσεις για την τριχοτόμηση της γωνίας και την εγγραφή επταγώνου σε κύκλο. Όπως παρατηρεί ο Knorr, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί, αποτελεσματικά, τη μέθοδο της ανάλυσης σε όλη την έκταση του έργου του, παρέχοντας αρκετά ενδιαφέροντα παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων. Παρά τη συνεισφορά του, όμως, στο ογκώδες Βιβλίο VII της *Συναγωγής* του Πάππου, στο οποίο εξετάζονται και σχολιάζονται αρκετές σημαντικές αναλυτικές πραγματείες – οι περισσότερες του Ευκλείδη και του Απολλώνιου – δεν αναφέρεται καμία δική του. Το κεφάλαιο 5 θα κλείσει με την παρατήρηση ότι ο Αρχιμήδης, επιλέγοντας ως κέντρο των ερευνών του το πεδίο με το οποίο ασχολήθηκε ο Εύδοξος, διαφοροποιείται από τη γενική ομάδα των γεωμετρών της εποχής του, καθώς και αυτής που ακολούθησε: αυτοί έθεσαν ως στόχο την ανάλυση των προβλημάτων. Τα έργα του Αρχιμήδη συνεχίζουν, ως ένα βαθμό, να μελετώνται και να εφαρμόζονται, όπως για παράδειγμα οι αριθμητικοί του κανόνες στην μετρητική γεωμετρία. Μόνο, όμως, μετά τον 16ο και 17ο αιώνα θα υπάρξουν γεωμέτρες οι οποίοι θα ενδιαφερθούν για τη συνέχεια και περαιτέρω ανάπτυξη του έργου του.

Το ενδιαφέρον για την επίλυση των τριών κλασικών προβλημάτων – διπλασιασμός του κύβου, τετραγωνισμός του κύκλου και τριχοτόμηση μιας γωνίας – συνεχίζεται αμείωτο και μετά την εποχή του Αρχιμήδη, με αποτέλεσμα ο Knorr να εισάγει το κεφάλαιο 6 με τίτλο, «Οι διάδοχοι του Αρχιμήδη κατά τον τρίτο αιώνα», παρατηρώντας ότι ο ύστερος 3ος αιώνας π.Χ., αναφορικά με αυτό το ενδιαφέρον, είναι η περίοδος της αρχαίας γεωμετρίας που δικαιούται να ονομάζεται «χρυσούς αιών». Πράγματι, τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας συνιστούν το κατ' εξοχήν ενοποιητικό στοιχείο στα έργα μιας σειράς γεωμετρών εκείνης της εποχής, όπως ο Ερατοσθένης, ο Νικομήδης, ο Ιππίας, ο Διοκλής, ο Διονυσόδωρος, Περσέας και ο Ζηνόδωρος. Ο Knorr θα παραθέσει κάποια από τα διασωθέντα αποσπάσματα αυτών των γεωμετρών, με στόχο να αναδείξει το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που παρουσιάζουν, το οποίο έγκειται στις σοβαρές προσπάθειες εφαρμογής της γεωμετρίας σε πεδία όπως η αστρονομία, η οπτική και η μηχανική, καθώς στις απόπειρες χρήσης μηχανικών μεθόδων στη γεωμετρία. Ο Knorr ονομάζει τους παραπάνω γεωμέτρες «διάδοχους» του Αρχιμήδη, εξαιτίας του αρχιμήδειου υπόβαθρου στο έργο τους, με άλλα λόγια, εξαιτίας του ενδιαφέροντος που έδειξαν για τις επιστημονικές εφαρμογές της γεωμετρίας που επικεντρώνονται στην διεύρυνση της γεωμετρικής μηχανικής, όπως αναπτύχθηκε από τον Αρχιμήδη. Οι προσπάθειες τους, άλλωστε, κατευθύνονται στην αναζήτηση εναλλακτικών λύσεων σε εκείνες που παρέχει ο Αρχιμήδης σε ειδικά προβλήματα. Παρόλο που το όνομα του Αρχιμήδη μνημονεύεται μόνο ως η πηγή του προβλήματος της διαίρεσης της σφαίρας – που πραγματεύτηκαν ο Διοκλής και ο Διονυσόδωρος – και ως πηγή των θεωρημάτων για το εμβαδόν του κύκλου, ο Knorr είναι πεπεισμένος ότι η σημασία του έργου του Αρχιμήδη είναι σαφής και διατρέχει όλες τις προσπάθειες των παραπάνω γεωμετρών. Συγκεκριμένα: 1) οι μελέτες του

Αρχιμήδη για τις έλικες αποτελούν σημαντικό παράγοντα στην εφαρμογή της τετραγωνίζουσας για τη λύση που επιχειρεί ο Νικομήδης στο πρόβλημα τετραγωνισμού του κύκλου. 2) τα θεωρήματα του Αρχιμήδη για τη μέτρηση του κύκλου και της σφαίρας είναι καθοριστικής σημασίας στη μελέτη των ισοπεριμετρικών σχημάτων από τον Ζηνόδωρο. 3) Η έννοια του κέντρου βάρους και η χρήση της από τον Αρχιμήδη αποτελεί τη βάση του θεωρήματος του Διονυσόδωρου, για τα μέτρα στερεών εκ περιστροφής. 4) Οι τεχνικές του Αρχιμήδη για την επίλυση προβλημάτων, όπως οι κατασκευές νεύσεως αποτελούν παράδειγμα για τη χρήση κογχοειδών από τον Νικομήδη. 5) Το πιθανό αρχιμήδειο υπόβαθρο πίσω από τη νεύση που αποδίδεται στον Ήρωνα για τον διπλασιασμό του κύβου. Οι εναλλακτικές λύσεις που έχουν προταθεί από τους γεωμέτρους αυτής της εποχής ωθεί, πιθανώς, τον Knorr στο να διακρίνει σε αυτούς μια γενιά που αγωνίζεται να μεταφέρει το κέντρο βάρους έξω από τον τομέα που κυριαρχείται από τα επιτεύγματα του Αρχιμήδη. Το ευκλείδειο πεδίο επίλυσης προβλημάτων προσέφερε έναν ενδεχόμενο προορισμό, αλλά η εξερεύνησή του απαιτούσε διαφορετικές τεχνικές από αυτές που προωθούσε ο Αρχιμήδης.

Με την παραδοχή ότι η αυτή η πρόκληση θα αποτελούσε το έναυσμα για τις προσπάθειες της επόμενης γενιάς, ο Knorr θα περάσει στο κεφάλαιο 7 με τίτλο, «Απολλώνιος: η κορύφωση της παράδοσης», όπου θα πραγματευτεί την μεγάλη προσφορά του Απολλώνιου στην επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων. Τα δύο σωζόμενα έργα του Απολλώνιου – *Κωνικά* και *Περί λόγου αποτομής* – καθώς και πέντε ακόμη έργα τα οποία δεν έχουν διασωθεί, κατέχουν κεντρική θέση στο σώμα των έργων για τη μελέτη της γεωμετρικής ανάλυσης που περιγράφει ο Πάππος στο Βιβλίο VII της *Συναγωγής*. Παρόλο, λοιπόν, που τα *Κωνικά* αποτελούν μια αυστηρή και συστηματική παρουσίαση της θεωρίας των κωνικών με συνθετικό τρόπο, ο Knorr θεωρεί αναγκαίο να αξιολογηθούν τα επιτεύγματα του Απολλώνιου στη γεωμετρία, μέσω των προσπαθειών που κατέβαλλε για την επίλυση των προβλημάτων. Για την επιλογή αυτής της μεθοδολογικής προσέγγισης ο Knorr προτάσσει δύο επιχειρήματα: 1) την προθυμία του Απολλώνιου να απαρνηθεί το πεδίο εντός του οποίου εντάσσονται οι έρευνες του Αρχιμήδη, όπως για παράδειγμα, τη μέθοδο των ορίων του Εύδοξου και τις εφαρμογές της σε προβλήματα όπως ο τετραγωνισμός του κύκλου. 2) τη μετατόπιση του ενδιαφέροντος του Απολλώνιου σε προβλήματα, όπως ο διπλασιασμός του κύβου, για τα οποία η μέθοδος της ανάλυσης, αν εφαρμοστεί, είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική. Τότε, όμως, προκύπτουν δυσκολίες ανάλογες με εκείνες που προκύπτουν κατά την έρευνα των έργων του Ευκλείδη: και στις δύο περιπτώσεις οι πρωτότυπες έρευνες των συγγραφέων εντάσσονται στον τομέα της αναλυτικής διερεύνησης, ενώ τα σωζόμενα κείμενα αποτελούνται μόνο από συνθετικές πραγματείες. Ο Knorr θα υπερκεράσει αυτές τις δυσκολίες και θα προσπαθήσει να ανακτήσει τις πρωτότυπες έρευνες, ανακατασκευάζοντας τις αναλύσεις. Η φιλοδοξία του Απολλώνιου

να αναγνωριστεί το έργο του σε μέγιστο βαθμό τον οδήγησε στην οριοθέτηση της περιοχής έρευνάς του – όπου τα πρότυπα ευρήματά του δεν θα επισκιάζονταν από τα επιτεύγματα του Αρχιμήδη – καθώς και σε μια πληθώρα αντιπαραθέσεων με σύγχρονους του οι οποίοι ήταν μαθητές του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη. Στο πλαίσιο αυτής της αντιπαραθέσης, ο Knorr θα αναπτύξει το κεφάλαιο 7, χωρίζοντάς το σε ενότητες στις οποίες θα παρουσιάσει την πραγμάτευση κάποιων προβλημάτων από τον Απολλώνιο συγκριτικά με άλλους συγγραφείς. Συγκεκριμένα, μια σύγχρονη μαρτυρία τόσο για το έργο του Αρχιμήδη όσο και για την επιρροή του στον Απολλώνιο θα μπορούσε να είναι ο Ηρακλείδης, που εικάζεται να είναι εκείνος που αναφέρει ο Αρχιμήδης στον πρόλογο του *Περί ελίκων*, γεωμέτρης με σημαντική επιρροή, βιογράφος και συνεργάτης του Αρχιμήδη. Η μαρτυρία του Ηρακλείδη σχετίζεται με την επίδραση του Αρχιμήδη τόσο στις αριθμητικές έρευνες του Απολλωνίου όσο και στις έρευνες για μία καμπύλη που ονομάζεται κοχλίας. Ο Knorr θα ολοκληρώσει αυτήν την ενότητα με μια ανακατασκευή η οποία επιλύει τη νεύση του Απολλωνίου ως προς ένα ρόμβο, αντίστοιχη με τη νεύση του Ηρακλείδη ως προς το τετράγωνο. Στη δεύτερη ενότητα, ο Knorr εξετάζει τα τεκμήρια σχετικά με τη συνεισφορά του Απολλωνίου στον τομέα που διερεύνησε, κυρίως, ο Νικομήδης, αλλά και οι υπόλοιποι γεωμέτρεις που διαδέχθηκαν τον Αρχιμήδη. Τα προβλήματα που μελετήθηκαν αφορούν στην τριχοτόμηση της γωνίας, του διπλασιασμού του κύβου, καθώς και τη μελέτη των καμπυλών που παράγονται με κίνηση. Παρόλο που ο ακριβής τρόπος και η έκταση του έργου του Απολλωνίου σε αυτούς τους τομείς δεν διασώζονται στις πηγές μας, γνωρίζουμε αρκετά για να αντιληφθούμε ότι η συνεισφορά του ήταν σημαντική. Ο πλούτος των γεωμετρικών ιδιοτήτων που περιέχονται στις έρευνες του Απολλωνίου και αναδεικνύονται από τις ανακατασκευές του Knorr είναι σαφής, ειδικότερα αν εξεταστούν σε αντιδιαστολή προς τα αποτελέσματα του Νικομήδη. Στην τρίτη ενότητα ο Knorr θα εξετάσει τη συνεισφορά του Απολλωνίου στη θεωρία των κωνικών, η οποία παρατίθεται στην ογκώδη πραγματεία του, *Κωνικά*, το οποίο απαρτίζεται από οκτώ βιβλία, με μόνο τα τέσσερα πρώτα να σώζονται στα ελληνικά. Ο Απολλώνιος, όπως παρατηρεί ο Knorr, υιοθετεί σε όλη την έκταση των *Κωνικών* τη συνθετική μέθοδο, με ελάχιστες εξαιρέσεις στο Βιβλίο II. Ο Knorr, αφού παραθέσει, εν συντομία, τα θέματα που πραγματεύονται τα διάφορα Βιβλία, θα προτείνει αναλύσεις σε προβλήματα τα οποία ο Απολλώνιος πραγματεύεται σε συνθετική μορφή. Στα *Κωνικά* συστηματοποιείται ένα σημαντικό μέρος της ήδη γνωστής θεωρίας, με την εισαγωγή νέων στοιχείων και την εφαρμογή αυτών στη διερεύνηση νέων τομέων. Τότε, όμως, η οριοθέτηση ανάμεσα στο πρωτότυπο έργο του Απολλωνίου και στα συμπεράσματα που αυτός άντλησε από προγενέστερους του είναι ασαφής. Ο Απολλώνιος δίνει την εντύπωση ότι οικειοποιήθηκε τις ανακαλύψεις άλλων, και ειδικότερα του Αρχιμήδη, προκαλώντας έτσι την αντίδραση των μαθητών

του. Ο Απολλώνιος άσκησε κριτική στον Ευκλείδη, λέγοντας ότι επεξεργάστηκε τις λύσεις προβλημάτων περί κωνικών, πρόχειρα και ανεπαρκώς. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τις ιδιαίτερα έντονες αντιδράσεις των διαδόχων του Ευκλείδη. Αναμφίβολα, όμως, οι προσπάθειες του Απολλώνιου για κατασκευές νεύσεων με επίπεδες μεθόδους αντικατοπτρίζουν ένα ενδιαφέρον για την κανονικοποίηση της επεξεργασίας μιας σημαντικής κατηγορίας γεωμετρικών προβλημάτων. Στην τέταρτη και τελευταία ενότητα του κεφαλαίου 7 ο Κνορρ αναφέρεται στην ποικιλία θεωρημάτων σχετικά με τους λόγους των γινομένων ευθυγράμμων τμημάτων που άγονται ως χορδές ή εφαπτόμενες σε κωνικές. Ο Απολλώνιος θεωρεί, όπως αναφέρει στον πρόλογο των *Κωνικών*, ότι οι προτάσεις του Βιβλίου III μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιλυθεί πλήρως το πρόβλημα των «τόπων επί τριών και τεσσάρων ευθειών», πρόβλημα με το οποίο είχε ασχοληθεί ο Ευκλείδης. Η πλήρης λύση του συγκεκριμένου προβλήματος, επισημαίνει ο Απολλώνιος, δεν κατέστη δυνατή παρά μόνο με βάση τα θεωρήματα που παρουσιάζονται στο Βιβλίο III των *Κωνικών*. Από το πρόβλημα του τόπου των τεσσάρων ευθειών αναπτύσσονται λύσεις σε προβλήματα κατασκευής κωνικών που διέρχονται από πέντε δεδομένα σημεία. Η πραγμάτευση της κατασκευής μιας έλλειψης που διέρχεται από πέντε δεδομένα σημεία, όπως δίνεται από τον Πάππο, συνδέεται με το πρόβλημα της εύρεσης των τομών μιας ευθείας με μια κωνική, που αναπτύσσεται λεπτομερώς από τον Απολλώνιο. Η κατασκευή με βάση δεδομένα σημεία και εφαπτόμενες απασχόλησε έντονα τον Απολλώνιο, αλλά οι πραγματείες του, οι οποίες περιγράφονται από τον Πάππο ως βοηθητικές, δεν φαίνεται να παρέχουν το κατάλληλο πλαίσιο. Το μόνο έργο που χαρακτηρίζεται συναφές με αυτό το θέμα είναι το *Περί στερεών τόπων* του Αρισταίου του Πρεσβύτερου, μια ογκώδης πραγματεία πέντε τόμων. Αν δεχθούμε, όμως, την υπόθεση του δεύτερου Αρισταίου, ως σύγχρονου του Απολλώνιου, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι το κύριο μέλημά του θα ήταν η τυπική διατύπωση των αποτελεσμάτων που είχε επιτύχει η αναλυτική παράδοση μέχρι την εποχή του. Ο Κνορρ θα ολοκληρώσει το κεφάλαιο 7, χαρακτηρίζοντας το έργο του Απολλώνιου ως μια σημαντική πηγή για την επίλυση των κωνικών προβλημάτων.

Κατά την επισκόπηση των αρχαίων προσπαθειών επίλυσης προβλημάτων και ανίχνευσης των διαφόρων τεχνικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται, ο Κνορρ επισημαίνει ότι οι αρχαίοι συγγραφείς, ειδικότερα αυτοί που ανήκουν στην ύστερη παράδοση της έκδοσης των χειμένων, προτιμούσαν τον συνθετικό τρόπο παρουσίασης στις τυπικές γεωμετρικές πραγματείες. Με τον συνθετικό τρόπο κάποιος καταλήγει σε έναν ισχυρισμό – θεώρημα ή κατασκευή- εκκινώντας από τις δεδομένες υποθέσεις και δεν χρησιμοποιεί παρά μόνο αξιώματα και πρώτες αρχές ή άλλα θεωρήματα και κατασκευές που έχουν ήδη αποδειχθεί. Για την ανακάλυψη λύσεων όμως σε γεωμετρικά προβλήματα, οι αρχαίοι χρησιμοποιούσαν μια εναλλακτική μέθοδο: την «ανάλυση». Σε περιπτώσεις

προβλημάτων κατασκευής η διαδικασία εκτυλίσσεται ως εξής: υποθέτουμε ότι το ζητούμενο σχήμα έχει κατασκευαστεί και, στη συνέχεια, συνάγουμε τις ιδιότητες του σχήματος μέχρι να προκύψει κάποιο στοιχείο που, από προηγούμενα συμπεράσματα, είναι γνωστό ότι είναι κατασκευάσιμο. Στη συνέχεια η «σύνθεση» εκκινεί από αυτά τα κατασκευάσιμα αντικείμενα και, ακολουθώντας μια σειρά από παραγωγικά βήματα που είναι περίπου τα αντίστροφα της ανάλυσης, καταλήγει στην ολοκλήρωση της ζητούμενης κατασκευής. Η αναλυτική λύση μπορεί να δώσει καρπούς, ακόμη και στις περιπτώσεις όπου η λύση του προβλήματος δεν είναι ακόμη γνωστή. Ο Knorr εξάγει την αναλυτική μέθοδο ως την απολύτως ενδεδειγμένη μέθοδο για τις ανάγκες της γεωμετρικής έρευνας, υποστηρίζοντας ταυτόχρονα και τον διδακτικό χαρακτήρα της στη εξοικείωση των μαθητευομένων στη χρήση της, εν όψει μεταγενέστερων δικών τους ερευνών. Επιπλέον, βοηθάει και στην ανακάλυψη της σκέψης που βρίσκεται πίσω από κάθε κατασκευαστικό βήμα. Αντίθετα, όταν σε θεωρήματα και προβλήματα παρατίθεται μόνο η σύνθεση, τα διάφορα βήματα φαντάζουν συχνά αυθαίρετα. Ως εκ τούτου, η προτίμηση του Knorr στις αναλυτικές παρουσιάσεις φαντάζει δικαιολογημένη. Όπως έχουμε, ήδη, επισημάνει, στις περιπτώσεις όπου διασώζεται μόνο η σύνθεση ο Knorr επιχειρεί να ανακατασκευάσει την αντίστοιχη ανάλυση.

Η γεωμετρική ανάλυση ως ευρετική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων διατρέχει όλα τα κεφάλαια της *Αρχαίας παράδοσης*. Στο τελευταίο κεφάλαιο, το κεφάλαιο 8 με τίτλο, «Η γεωμετρική ανάλυση των αρχαίων: μία αποτίμηση» συγκεκριμένα στην παράγραφο «Προβλήματα, θεωρήματα και η μέθοδος της ανάλυσης», συνοψίζει αυτήν την άποψη, υπογραμμίζοντας τις πολυάριθμες περιπτώσεις, στις οποίες η ευρετική ισχύς της γεωμετρικής ανάλυσης εφαρμόστηκε στις ανακατασκευές που έχουν παρατεθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Ένα σημαντικό τμήμα αυτής της παραγράφου αφιερώνεται στη διάκριση μεταξύ προβλημάτων και θεωρημάτων, διάκριση που διατηρείται σχολαστικά από τους συγγραφείς των βασικών πραγματειών της κλασικής γεωμετρίας, τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο, καθώς και σε διάφορα τεκμήρια που διασώθηκαν από μεταγενέστερους σχολιαστές, όπως ο Ήρων, ο Πάππος και ο Ευτόκιος. Αφού παραθέσει τη μορφή που έχει ένα πρόβλημα και την τυπική διατύπωση ενός θεωρήματος, θα υπερασπίσει τον τεχνητό χαρακτήρα της μεταξύ τους διάκρισης: «Ένα πρόβλημα, εύκολα, μπορεί να αναδιατυπωθεί σαν θεώρημα, αρκεί να ενσωματώσουμε στην εκφώνηση του θεωρήματος όλες τις λεπτομέρειες της κατασκευής του προβλήματος. Αντίστροφα, ένα θεώρημα μπορεί να αναδιατυπωθεί, ώστε να ζητείται να παραχθεί μια κατασκευή ή να βρεθεί κάποια ιδιότητα ενός δεδομένου σχήματος». Ο Πάππος και ο Πρόκλος επιφυλάσσουν μια τρίτη κατηγορία, τα πορίσματα, ξεχωριστή από τα προβλήματα και τα θεωρήματα. Με την παράθεση ενός ικανού αριθμού παραδειγμάτων αυτού του τύπου, ο Knorr θα ισχυριστεί ότι η επίλυση προβλημάτων αποτέλεσε το κύριο μέρος του γεωμετρικού εγχειρήματος

που σηματοδοτείται από τα έργα του Ευκλείδη, του Απολλώνιου και όσων ακολούθησαν την παράδοσή τους και ότι η σύνταξη θεωρημάτων ήταν για αυτούς μια προσπάθεια επικουρική αυτής της δραστηριότητας. Θα αναφέρει, βέβαια, και θα εξετάσει τις απόψεις των αρχαίων διανοητών σχετικά με τη φύση των προβλημάτων και των θεωρημάτων και τη σημασία τους για τη γεωμετρία. Προς τούτο θα παραθέσει ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα από το τρίτο Βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου. Η ευρετική ισχύς που παρέχει η ανάλυση στην εύρεση λύσεων στα γεωμετρικά προβλήματα, επισφραγίζεται με μια λεπτομερή περιγραφή αυτής της μεθόδου που δίνεται από τον Πάππο ως εισαγωγή στην επισκόπηση του αναλυτικού σώματος κειμένων στο Βιβλίο VII της *Συναγωγής*. Σε αυτήν ο Κπορρ θα προσθέσει δύο σύντομες αναφορές σχετικά με τη φύση της μεθόδου, η μία σε ένα σχόλιο που προλογίζει κάποιες εναλλακτικές αποδείξεις στα αρχικά θεωρήματα του Βιβλίου XIII του Ευκλείδη και η δεύτερη από το σχόλιο του Ήρωνα στο Βιβλίο II, όπως σώζεται στην αραβική μετάφραση του al-Nairizi. Ο Πάππος ολοκληρώνει την περιγραφή του με μια ενότητα, η οποία αποτελεί μια επαναδιατύπωση βασικών φιλοσοφικών θέσεων, όπου αποδέχεται τη διάκριση ανάμεσα στην ανάλυση των θεωρημάτων και στην ανάλυση των προβλημάτων. Ωστόσο, ο Κπορρ θα υποστηρίξει ότι η έννοια της «θεωρη(μα)τικής ανάλυσης», σε αντίθεση με την «προβληματική ανάλυση», είναι ένα δημιούργημα της Ύστερης Αρχαιότητας και δεν αντιστοιχεί σε κάποια ελληνιστική κατηγορία. Για αυτόν τον λόγο, θεωρεί ότι η ενδεδειγμένη μορφή ανάλυσης υπήρξε πάντοτε μια ευρετική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων. Όμως, ο ισχυρισμός του Κπορρ τίθεται υπό αμφισβήτηση, από τη στιγμή που υπάρχουν καταγεγραμμένες θεωρη(μα)τικές αναλύσεις στο *Λόγου αποτομή* του Απολλωνίου, άρα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτή η μορφή μαθηματικού κειμένου δεν χρησιμοποιούνταν από τους συγγραφείς της ελληνιστικής περιόδου. Επιπλέον, με τον περιορισμό στους γεωμέτρους της ελληνιστικής περιόδου, ο Κπορρ δεν έχει τη δυνατότητα να αναφερθεί στην επέκταση της έννοιας της ανάλυσης, όπως συναντάται στα έργα του Ήρωνα και του Πτολεμαίου. Συγκεκριμένα, ο Ήρων και ο Πτολεμαίος χρησιμοποιούν ισχυρισμούς από τα *Δεδομένα*, ώστε με μια αλληλουχία συλλογισμών να οδηγηθούν σε συμπεράσματα σχετικά με τον υπολογισμό αριθμητικών μεγεθών, με βάση την υπόθεση ότι ορισμένα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος έχουν δεδομένη τιμή. Αυτός ο τύπος συλλογισμού αποκαλείται «ανάλυση», τόσο από τον Ήρωνα όσο και από τον Πτολεμαίο, και αναπτύχθηκε περαιτέρω κατά τη μεσαιωνική περίοδο. Επομένως, για την πλήρη επισκόπηση και κατανόηση της γεωμετρικής ανάλυσης, θα έπρεπε να συμπεριληφθεί και αυτός ο τύπος συλλογισμού στη συνολική αποτίμηση των ελληνικών Μαθηματικών.

Ανακεφαλαιώνοντας, λοιπόν, η Αρχαία παράδοση είναι η πιο σημαντική μονογραφία που έχει γραφτεί σχετικά με την ελληνική γεωμετρική ανάλυση. Γενικότερα, ο Κπορρ, με το σύνολο των ευρημάτων του, παρουσιάζει μια ζωντανή εικόνα της ελληνικής γεωμετρίας. Πράγματι, η

μεθοδολογική προσέγγιση που ακολουθεί δεν οδηγεί σε μια απλή επισκόπηση, στην οποία οι μαθηματικοί διερευνούν ιδέες εντός κατοχυρωμένων πλαισίων. Αντίθετα, περιγράφει μια δυναμική κατάσταση, στην οποία οι μαθηματικοί, εν μέσω συμφωνιών και διαφωνιών, συνδιαλέγονται σχετικά με τη μέθοδο που θα ακολουθήσουν, παρουσιάζοντας διαφορετικές και συχνά αντικρουόμενες προσεγγίσεις για την επίλυση των προβλημάτων που τους απασχολούν. Η *Αρχαία παράδοση* αποτελεί σημείο εκκίνησης για τη γνώση και μελέτη των μαθηματικών πρακτικών που υπεισέρχονται στην προσέγγιση και επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στους αρχαίους ελληνόφωνους πολιτισμούς.

Η *Αρχαία παράδοση* έχει εκδοθεί, το 2022, στη σειρά *Αρχαία Επιστημονική Γραμματεία* των Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης, σε υποδειγματική ελληνική μετάφραση του Τεύκρου Μιχαηλίδη και άρτια επιστημονική επιμέλεια από τους Γιάννη Χριστιανίδη και Μιχάλη Σιάλαρο.

