ΦΩΤΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑ ΑΙΝΙΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΩΝ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΩΝ ΕΠΙΛΥΣΕΩΝ

ΓΙΑΝΝΗΣ ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ. Στην εργασία προτείνεται η χρήση των αναλογιών προκειμένου να εξηγηθούν οι τεχνικές που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος κατά τις επιλύσεις των εξισώσεων με δύο αγνώστους. Ταυτόχρονα, διατυπώνονται μια σειρά επιχειρήματα εναντίον της ερμηνείας των ίδιων τεχνικών μέσω της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας. Η ερμηνεία δια των αναλογιών είχε προταθεί για πρώτη φορά από τον Βυζαντινό Μάξιμο Πλανούδη στο σχόλιό του στο πρόβλημα Β.8 των *Αριθμητικών*. Τέλος, σε παράρτημα παρουσιάζονται επιστολές που έλαβε ο συγγραφέας από τους R. Rashed, I. G. Bashmakova, J. Høyrup, D. Fowler και S. Unguru, στις οποίες οι εν λόγω ιστορικοί διατυπώνουν τις απόψεις τους για την προτεινόμενη ερμηνεία.

ABSTRACT. In this paper it is proposed that the techniques employed by Diophantus is his solutions of the equations with two unknowns can be explained by means of the theory of proportions. At the same time, a number of arguments are advanced against interpreting the same techniques through modern algebraic geometry. The interpretation by means of proportions was proposed for the first time by Maximus Planudes in his commentary on problem II.8 of the *Arithmetica*. Finally, an appendix presents letters received by the author from R. Rashed, I. G. Bashmakova, J. Høyrup, D. Fowler and S. Unguru, in which these historians express their views on the proposed interpretation.

Τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου περιλαμβάνονται χωρίς αμφιβολία στα έργα εκείνα της αρχαιότητας που επηρέασαν σημαντικά την ιστορία των μαθηματικών στην περίοδο από τον ένατο ως τον δέκατο όγδοο αιώνα. Ως μέτρο της επίδρασης που άσκησαν θα μπορούσε κανείς να παραθέσει τη μακρά λίστα των μαθηματικών που ασχολήθηκαν με αυτό το

* Ο Γ. Χριστιανιδης είναι Ομότιμος Καθηγητής στο Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Το κείμενο αυτό αποτελεί ενημερωμένη εκδοχή μιας ομιλίας με τίτλο «Les équations $F(x,y) = 0$ dans les *Arithmétiques* et la méthode de Diophante» στο διεθνές συνέδριο «Histoire de la lecture des anciens en mathématiques», που διοργάνωσαν οι Karine Chemla, Jeanne Peiffer και Eberhard Knobloch στο Centre International des Rencontres Mathématiques (CIRM), Luminy (Μασσαλία, Γαλλία), 16–20 Οκτωβρίου 1995. Εκδοχές του κειμένου έχουν δημοσιευθεί στα περιοδικά *Νεύσις* 3 (1995), 109–132, με τίτλο «Οι ερμηνείες της μεθόδου του Διοφάντου», και *Historia Mathematica* 25 (1998), 22–28, με τίτλο «Une interprétation byzantine de Diophante».

έργο, είτε ως δάσκαλοι, μεταφραστές και σχολιαστές, είτε ως ερευνητές, οι οποίοι βρήκαν σε αυτό την πηγή έμπνευσης για τις δικές τους πρωτότυπες συνεισφορές στην ανάπτυξη των μαθηματικών.

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μια ανανέωση του ενδιαφέροντος για το έργο του Διόφαντου. Αυτή τη φορά, όμως, το ενδιαφέρον δεν προήλθε από τους μαθηματικούς αλλά από τους ιστορικούς των μαθηματικών. Οι αιτίες για αυτή την αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος είναι ποικίλες. Μία αιτία ήταν η ανακάλυψη, στα χρόνια γύρω στο 1970, τεσσάρων νέων βιβλίων των *Αριθμητικών*, σε αραβική μετάφραση, που θεωρούνταν ως τότε χαμένα. Αν και όχι χωρίς προηγούμενο στην ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, επρόκειτο για ένα γεγονός εξαιρετικής σημασίας διότι επανέφερε στην επικαιρότητα το ερώτημα για τη φύση και το εύρος των ερευνών του Αλεξανδρινού μαθηματικού (Rashed στο Διόφαντος 1984, 3, vi). Επιπλέον, ήταν οι έρευνες για να βρεθεί μια ενοποιητική, στο μέτρο του δυνατού, ερμηνεία των φαινομενικά ανόμοιων διαδικασιών που χρησιμοποιούσε ο μαθηματικός για να επιλύσει τα προβλήματα που συμπεριέλαβε στα *Αριθμητικά*. Στη διάρκεια των ετών 1960–70 διαπιστώθηκε ότι οι επιλυτικές διαδικασίες που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος μπορούν να υπαχθούν σε έναν περιορισμένο αριθμό γενικών μεθόδων που μας διδάσκει η σύγχρονη αλγεβρική γεωμετρία και πιο συγκεκριμένα η θεωρία των αριθμητικών ιδιοτήτων των αλγεβρικών καμπυλών και των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων διάστασης n. Αυτό το συμπέρασμα, που το οφείλουμε στην Isabella Grigoryevna Bashmakova (1921–2005),[1] προκάλεσε την εποχή εκείνη μεγάλη εντύπωση, σε σημείο ώστε να οδηγηθεί ο διάσημος μαθηματικός του Princeton André Weil (1906–1998) να δηλώσει ότι «η αλγεβρική γεωμετρία έχει τίτλους ευγενείας πολύ αρχαιότερους» από ό,τι πιστεύαμε (Weil 1981, 395), χωρίς να κρατήσει καμιά επιφύλαξη για το ενδεχόμενο οι ίδιες διαδικασίες να είναι δεκτικές και άλλων ερμηνειών, πέραν αυτής δια της αλγεβρικής γεωμετρίας, και παρά τις σημαντικές εργασίες του Paul Tannery (1843–1904) των ετών 1887 και 1888 (Tannery 1887· 1888). Η ίδια η Bashmakova, πιο συγκρατημένη στην εξαγωγή ιστορικών συμπερασμάτων, ήταν υποχρεωμένη παρόλα αυτά να υποστηρίξει την άποψη ότι ο Διόφαντος «είχε αντιληφθεί τις διασυνδέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις απροσδιόριστες εξισώσεις και στις αντίστοιχες αλγεβρικές καμπύλες» (στο Διόφαντος 1977, 341).[2] Την ιδέα της ερμηνείας των επιλύσεων του Διόφαντου μέσω της αλγεβρικής γεωμετρίας την υιοθέτησε αργότερα

[1] Ανακοινώθηκε για πρώτη φορά σε ένα άρθρο που δημοσιεύθηκε το 1966 στο ρωσσικό περιοδικό *Istoriko-matematicheskie issledovaniya*. Την ίδια χρονιά δημοσιεύθηκε, υπό τον τίτλο «Diophante et Fermat», γαλλική μετάφραση του άρθρου στο περιοδικό *Revue d'histoire des sciences* (τ. 19, 289–306). Βλ. επίσης το άρθρο της ίδιας «Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré», *Historia Mathematica* 8 (1981), 393–416.

[2] Στην κριτική που έγραψε το ίδιο έτος για αυτή την έκδοση ο Adolph P. Youschkevich (1906–1993) δεν συμμερίζεται αυτή την άποψη η οποία, όπως γράφει, «είναι υπερβολική και θα ήταν δύσκολο να υποστηριχθεί» (Youschkevich 1977, 341).

ο Roshdi Rashed και την ανέπτυξε περαιτέρω σε συνεργασία με τον Gilles Lachaud (1946–2018), για να φτάσει με την πέννα τους σε ένα πολύ πιο υψηλό επίπεδο αφαίρεσης και γενικότητας (Διόφαντος 1984, 3, lxxxv–cxxxvi, cxxxvii–ccvi· 4, v–cxxxiv). Επίσης, μία τρίτη αιτία, η οποία στα χρόνια γύρω στο 1990 έδωσε και αυτή προσωρινά ώθηση στο να αναπτυχθεί το ενδιαφέρον για τον Διόφαντο, προήλθε από έρευνες στα βαβυλωνιακά μαθηματικά, που σκοπό είχαν να εντοπίσουν στις επιλυτικές τεχνικές του Διόφαντου ίχνη πιθανής βαβυλωνιακής επίδρασης (Friberg 1991). Τέλος, την πιο ισχυρή ώθηση για το ενδιαφέρον για τον Διόφαντο έδωσε η πρόσφατη έρευνα σχετικά με την πρώιμη ιστορία της άλγεβρας και η διαπίστωση ότι το έργο του Διόφαντου ανήκει στην παράδοση της προ-μοντέρνας άλγεβρας (βλ., ενδεικτικά, τα Christianidis και Oaks 2023, και Χριστιανίδης και Oaks, υπό έκδοση).[3]

Το ερώτημα αν ο Διόφαντος έλυνε τα απροσδιόριστα προβλήματα με απλές δοκιμές ή με μια λίγο ως πολύ μεθοδική διαδικασία έχει απασχολήσει τους ιστορικούς των μαθηματικών ήδη από τον δέκατο όγδοο αιώνα. Ανάλογα με τις απαντήσεις που έχουν δώσει στο ερώτημα αυτό οι ιστορικοί μπορούν να καταταγούν σε δύο ριζικά αντίθετα μεταξύ τους στρατόπεδα. Από τη μία πλευρά είναι εκείνοι που υποστηρίζουν ότι στο έργο του Διόφαντου δεν υπάρχει κανένα ίχνος συστηματικής θεωρίας επίλυσης των απροσδιόριστων εξισώσεων. Σύμφωνα με τους ιστορικούς που υποστηρίζουν αυτή την άποψη ο Διόφαντος ήταν, ούτως ειπείν, ένας 'βιρτουόζος', εξαιρετικά επιδέξιος στη χρήση κομψών τεχνασμάτων, τα οποία, παρ' ότι του επέτρεπαν κάθε φορά να βρίσκει μια συγκεκριμένη λύση μιας απροσδιόριστης εξίσωσης, εν τούτοις δεν ήταν δεκτικά καμίας γενίκευσης. Μια τέτοια άποψη εκφυλίζει τον σκοπό των *Αριθμητικών*, όπως παρατήρησε ο Thomas L. Heath (1861–1940), από την παροχή μάθησης μεθόδων σε μια απλή εξαγωγή μιας πληθώρας αποτελεσμάτων (Heath 1910, 55). Από την άλλη βρίσκονται οι ιστορικοί εκείνοι οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι επιλυτικές διαδικασίες που ακολουθεί ο Διόφαντος είναι ενιαίες και έχουν γενικότητα, και επομένως, όπως σημειώνει ο Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann (1811–1881), «όλη η προσοχή του είναι στραμμένη στην εξήγηση της *μεθόδου* και για τον σκοπό αυτό τα αριθμητικά παραδείγματα χρησιμεύουν μόνο ως το μέσον».[4] Ας μου επιτραπεί στη συνέχεια να παραθέσω μερικές απόψεις από τους οπαδούς τόσο του ενός στρατοπέδου όσο και του άλλου.

[3] Είναι προφανές ότι η τελευταία αυτή πρόταση, η οποία προστέθηκε στην παρούσα εκδοχή του κειμένου, δεν ήταν δυνατόν να περιλαμβάνεται σε καμία από τις παλαιότερες εκδοχές του των ετών 1995 και 1998.

[4] Παρατίθεται από τον Heath, *ό.π.*

Η θέση σύμφωνα με την οποία οι υποθέσεις[5] που εισάγει ο Διόφαντος για να φτάσει κάθε φορά στην επίλυση μιας απροσδιόριστης εξίσωσης είναι απλώς ευφυή τεχνάσματα, είχε διατυπωθεί ήδη το 1758 από τον Jean-Étienne Montucla (1725–1799) στην περίφημη *Histoire des Mathématiques*: «Ο Διόφαντος – έγραφε ο Montucla – ξέρει να αποφεύγει αυτόν τον σκόπελο [του να καταλήγει σε άρρητες λύσεις] με μεγάλη επιδεξιότητα, μέσω μερικών ψευδο-εξισώσεων,[6] με ένα τέχνασμα που αξίζει να εξάρουμε» (Montucla 1966, I, 321). Στους αιώνες που ακολούθησαν πλήθος ιστορικών εξέφρασαν απόψεις παρόμοιες με αυτή του Montucla. Πολύ γνωστές είναι οι ρήσεις του Γερμανού μαθηματικού και ιστορικού των Μαθηματικών Hermann Hankel (1839–1873) ότι «είναι [...] δύσκολο για έναν σύγχρονο μαθηματικό ακόμα και αν έχει διαβάσει 100 διοφαντικές λύσεις να λύσει το 101ο πρόβλημα» και ότι «Ο Διόφαντος περισσότερο μαγεύει παρά προσφέρει απόλαυση»,[7] με τις οποίες ήθελε να δείξει με εμφαντικό τρόπο ότι από το έργο του Διόφαντου απουσιάζουν οι γενικές μέθοδοι. Έκτοτε οι φράσεις αυτές επαναλαμβάνονται συχνά από άλλους ιστορικούς (βλ., ενδεικτικά, Vogel 1971, 116· Scott 1975, 56). Λιγότερο εκφραστικός, μα εξίσου απόλυτος με τον Hankel, ο Florian Cajori (1859–1930) γράφει: «Αλλά ακόμα πιο μεγάλη ποικιλία από τα προβλήματα παρουσιάζουν οι λύσεις. Οι γενικές λύσεις είναι σχεδόν άγνωστες στον Διόφαντο»· και «ένα άλλο μεγάλο μειονέκτημα [των *Αριθμητικών*] είναι η απουσία γενικών μεθόδων. Οι νεότεροι μαθηματικοί, όπως ο L. Euler, ο J. Lagrange, ο K. F. Gauss, έπρεπε να αρχίσουν τη μελέτη της απροσδιόριστης ανάλυσης από την αρχή, χωρίς να έχουν καμία άμεση βοήθεια από τον Διόφαντο στη διατύπωση των μεθόδων» (Cajori 1919,

---

[5] Με τον όρο «υπόθεση» (position) πρέπει να νοούνται τα αλγεβρικά ονόματα που αποδίδει ο Διόφαντος στους ζητούμενους αριθμούς, δηλαδή στους μη ονοματισμένους αγνώστους του προβλήματος. Στην παρούσα εργασία οι «υποθέσεις», αναφέρονται συνήθως ως «αντικαταστάσεις» (εντός εισαγωγικών). Παρά το γεγονός ότι ο όρος «αντικατάσταση» είναι λανθασμένος – για τον ίδιο λόγο όπως λανθασμένο θα ήταν αν λέγαμε, φερ' ειπείν, ότι η λέξη «Πόλη» (Κωνσταντινούπολη) στη φράση «η Πόλη έχει σήμερα πληθυσμό μεγαλύτερο των δεκαπέντε εκατομμυρίων» *αντικαθιστά* τη λέξη «πόλη» της φράσης «μια πόλη με πληθυσμό μεγαλύτερο των δεκαπέντε εκατομμυρίων» – τον διατηρούμε διότι είναι συμβατός με την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία. Αντίθετα, οι όροι «όνομα» (name), «ονοματισμός», «ονοματοδοσία» (naming), που αποδίδουν ακριβώς την ενέργεια που κάνει ο Διόφαντος όταν εισάγει τους αλγεβρικούς όρους στις επιλύσεις του, είναι τελείως ασύμβατοι με την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία. Το θέμα συζητείται στο Επίμετρο, στο τέλος του παρόντος κειμένου.

[6] Λέγοντας «ψευδο-εξίσωση» ο Montucla εννοεί, για παράδειγμα, την «υπόθεση» $y = mx - a$, που κάνει ο Διόφαντος κατά την επίλυση του προβλήματος Β.8, το οποίο θα το γράφαμε με σύγχρονη γλώσσα ως $x^2 + y^2 = a^2$. Όπως είπαμε προηγουμένως, άλλοι ιστορικοί αναφέρονται σε αυτή την ενέργεια του Διόφαντου χρησιμοποιώντας τον όρο «αντικατάσταση», ενώ για τον ίδιο σκοπό βρίσκουμε επίσης να χρησιμοποιείται και ο όρος «μετασχηματισμός». Στο Επίμετρο εξηγούμε γιατί όλοι αυτοί οι όροι, με εξαίρεση τον όρο «υπόθεση» (position), είναι παραπλανητικοί και, επομένως, λανθασμένοι. Πρβλ. την προηγούμενη υποσημείωση.

[7] Παρατίθενται από τον Heath, *ό.π.*

62). Κατά τον Jacob Klein (1899–1978), επίσης, ο Διόφαντος αντιπροσωπεύει ένα πρώιμο στάδιο της άλγεβρας που συνίσταται, σε ό,τι αφορά στην απροσδιόριστη ανάλυση, «στο να θέτει προβλήματα που ανήκουν στην απροσδιόριστη ανάλυση [...], αλλά να μετατρέπει πάντοτε αυτά τα προβλήματα σε ορισμένες εξισώσεις μέσω αυθαίρετων παραδοχών που επιτρέπουν μια μονοσήμαντη (αν και όχι κατ' ανάγκην ακέραιη) λύση». Ο Klein, εν τούτοις, διατηρεί μια επιφύλαξη όσον αφορά στον «ανάστροφο υπολογισμό [...], ο οποίος καλείται γενικώς μέθοδος της "ψευδούς παραδοχής"», καθώς «και για τον κανόνα επίλυσης της λεγόμενης "διπλής ισότητας"», που έχουν, όπως γράφει, «γενικό χαρακτήρα» (Klein 1968, 133). Ο van der Waerden (1903–1996), επίσης, γράφει για τις μεθόδους του Διόφαντου: «Η μέθοδός του ποικίλει από τη μία περίπτωση στην άλλη. Στο έργο του δεν υπάρχει ίχνος συστηματικής θεωρίας των διοφαντικών εξισώσεων» (2000, 326). Παρόμοια είναι η άποψη που έχει εκφράσει ο Jean Itard (1902–1979): «Ο Διόφαντος, εξάλλου, αρκείται γενικώς σε μια μεμονωμένη λύση, η οποία συχνά λαμβάνεται με κομψά τεχνάσματα που δεν επιδέχονται γενίκευσης» (1957, 352). Τέλος, ο Alexander Jones γράφει στην *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* ότι «οι μέθοδοι που εφαρμόζει [ο Διόφαντος] είναι μάλλον τυχαίες» (1994, 56).

Η άποψη περί απουσίας μεθοδικής πραγμάτευσης των απροσδιόριστων προβλημάτων στο έργο του Διόφαντου είναι κυρίαρχη στις μελέτες των ιστορικών των μαθηματικών.[8] Έχουν υπάρξει εν τούτοις στο παρελθόν εργασίες στις οποίες οι συγγραφείς υποστήριζαν τη θέση ότι

[8] Αξίζει να υπογραμμίσουμε εδώ ότι αντίθετα με τους ιστορικούς, οι ίδιοι οι μαθηματικοί που εργάστηκαν πάνω στο έργο του Διόφαντου δεν συμμερίζονταν συνήθως την άποψη περί απουσίας γενικών μεθόδων. Έτσι, γράφοντας στα 1756–57, ο Leonhard Euler (1707–1783) σημείωνε: «Ο ίδιος ο Διόφαντος δίνει, είναι αλήθεια, μόνο τελείως συγκεκριμένες λύσεις σε όλα τα προβλήματα που πραγματεύεται και αρκείται γενικώς στο να υποδεικνύει αριθμητικές τιμές που του παρέχουν μια μεμονωμένη λύση. Αλλά δεν πρέπει να υποθέσουμε ότι η μέθοδός του περιοριζόταν σε αυτές τις ειδικές λύσεις [...]. Ωστόσο, οι πραγματικές μέθοδοι που χρησιμοποιεί για να επιλύσει οποιοδήποτε από τα προβλήματά του είναι εξίσου γενικές όπως αυτές που χρησιμοποιούμε σήμερα» (παρατίθεται από τον Heath, ό.π., σ. 56). Σύμφωνα με τον Euler, εκείνο που εμπόδιζε τον Διόφαντο να δίνει γενικές λύσεις ήταν η απουσία κατάλληλου συμβολισμού. Ίδια είναι επίσης η άποψη που διατυπώνει ο Joseph Louis Lagrange (1736–1813) σε μια εργασία του με τίτλο *Projet d'une nouvelle édition de l'Arithmétique de Diophante* που υπέβαλε στην Ακαδημία του Βερολίνου στις 21 Αυγούστου 1777: «Από τη μία, καθώς οι λύσεις των απροσδιόριστων προβλημάτων του Διόφαντου περικλείουν συγκεκριμένα τεχνάσματα που αξίζουν όλης της προσοχής των γεωμετρών και που είναι δύσκολο να συλλάβουμε μέσα στο ίδιο το έργο του Διόφαντου, εξαιτίας του ότι οι λύσεις του είναι καθαρά αριθμητικές, θα έπρεπε να αντικαταστήσουμε τα σχόλια του Bachet με μια σύντομη αλγεβρική ανάλυση κάθε προβλήματος, η οποία θα μας έκανε να αντιληφθούμε το πνεύμα των μεθόδων που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος και με την οποία θα μπορούσαμε να κρίνουμε τη γενικότητα των μεθόδων αυτών και τη χρησιμότητά τους σε άλλα προβλήματα» (στο Rashed 1988, 49). Εν τούτοις, η άποψη ότι από το έργο του Διόφαντου απουσιάζουν οι γενικές μέθοδοι είναι και αυτή καταγεγραμμένη σε κείμενα μαθηματικών. Για παράδειγμα ο Édouard Lucas (1842–1891) έγραφε στα τέλη του δέκατου

ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε σταθερούς κανόνες και ότι διαχειριζόταν τις επιλύσεις των προβλημάτων με έναν περιορισμένο αριθμό μεθόδων. Στους πιο επιφανείς εκπροσώπους αυτής της άποψης περιλαμβάνονται οι P. Tannery, Hieronymus Georg Zeuthen (1839–1920) και T. L. Heath. Σύμφωνα με τον Heath (1910, 67–94) ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε σταθερούς κανόνες για να επιλύσει μερικές περιπτώσεις της εξίσωσης δεύτερου βαθμού. Συγκεκριμένα, για να επιλύσει την εξίσωση $y^2 = a^2x^2 + bx + c$ έκανε χρήση της «αντικατάστασης» $y = ax - m$. Ομοίως, για να λύσει την εξίσωση $y^2 = ax^2 + bx + c^2$ χρησιμοποιούσε την «αντικατάσταση» $y = c - mx$. Τέλος, για τις εξισώσεις της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c$, υπό τον όρο ότι $D = \frac{1}{4}b^2 - ac = \square$, η μέθοδός του συνίσταται στο να κάνει αρχικά την «αντικατάσταση» $y = mx$ και να επιλύσει στη συνέχεια την εξίσωση $D + cm^2 = y^2$ που θα προκύψει. Εκτός από αυτές τις τρεις περιπτώσεις ο Διόφαντος γνώριζε επίσης, σύμφωνα με τον Heath, πώς επιλύεται κάθε εξίσωση της μορφής $y^2 = ax^2 \pm c$, όταν είναι γνωστή μία αρχική λύση αυτής, καθώς και κάθε διπλή εξίσωση πρώτου βαθμού και μερικές περιπτώσεις διπλών εξισώσεων δεύτερου βαθμού. Όσο για τις εξισώσεις ανώτερου βαθμού, γράφει, «οι μέθοδοί του στερούνται γενικότητας» (Heath 1910, 96).

Λίγα χρόνια νωρίτερα ο Zeuthen απέδιδε γενικότητα στα τεχνάσματα του Διόφαντου και θεωρούσε ότι «βλέποντας τον Διόφαντο να πραγματεύεται μια σειρά συγκεκριμένων προβλημάτων [...] μπορούμε να συλλάβουμε τη γενική του μέθοδο» (Zeuthen 1902, 212). Έτσι, κατά τον Zeuthen, μέσω της «αντικατάστασης» $y = ax + z$ ο Διόφαντος μπορούσε να επιλύσει κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού της μορφής $y^2 = a^2x^2 + bx + c$, ενώ με την «αντικατάσταση» $y = zx + c$ μπορούσε να επιλύσει κάθε εξίσωση της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c^2$. Με την ίδια μέθοδο μπορούσε επίσης να επιλύσει την κυβική εξίσωση $y^3 = a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1$. Επιπλέον, σύμφωνα με τον ίδιο, ο Διόφαντος κατείχε επίσης γενικές μεθόδους για να επιλύει τις διπλές εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού.

Η πραγμάτευση των επιλυτικών διαδικασιών του Διόφαντου από τον Zeuthen και τον Heath που μόλις παρουσιάσαμε αφήνει ένα σημείο θολό. Οι δύο μελετητές, αν και δέχονται ότι ο Διόφαντος χρησιμοποιεί «αντικαταστάσεις», που του επιτρέπουν να κάνει τις κατάλληλες κάθε φορά απαλοιφές, προκειμένου να φτάσει τελικά σε μια ρητή θετική λύση, είναι πολύ φειδωλοί όσον αφορά στο ερώτημα πώς οδηγήθηκε ο Διόφαντος ώστε να κάνει κάθε φορά την κατάλληλη «αντικατάσταση». Ως προς αυτό το ερώτημα ο Zeuthen αρκείται απλώς στο να υποθέσει ότι «ο Διόφαντος έπρεπε να εκτελεί από στήθους και να διατυπώνει με λόγια αυτό που λέμε *απαλοιφές*» και «αυτό αποτελούσε μια συγκεκριμένη άσκηση που του έδινε τη δυνατότητα να επιλέγει τους αγνώστους του κατά τρόπο ώστε η απαλοιφή να ήταν η απλούστερη δυνατή» (Zeuthen

ένατου αιώνα ότι «ο Διόφαντος δεν εξέτασε το ζήτημα [της επίλυσης των απροσδιόριστων εξισώσεων] από γενικής απόψεως και δεν έδινε κατά κανόνα παρά την ελάχιστη λύση της προτεινόμενης εξίσωσης» (Lucas 1873, 8).

1902, 209–210). Ενδέχεται την ίδια ερμηνεία να υιοθετούσε και ο Heath. Φαίνεται, λοιπόν, ότι τόσο για τον Zeuthen όσο, πιθανώς, και για τον Heath,[9] η στρατηγική του Διόφαντου κάθε φορά που εισήγαγε τις «αντικαταστάσεις» της μορφής $y = px \pm q$, ήταν να αναγνωρίσει, αναλογιζόμενος τη μορφή της προς επίλυση εξίσωσης, πώς οι εν λόγω «αντικαταστάσεις» μπορούν να οδηγήσουν στις κατάλληλες απαλοιφές, ώστε να προκύψει μια γραμμική συνθήκη ως προς x και, τελικά, μια θετική ρητή τιμή για τον x.

Μια παρόμοια άποψη διατύπωσε στην εποχή μας ο Jacques Sesiano. Όπως γράφει, «η γενική εντύπωση που αφήνουν τα *Αριθμητικά* είναι ότι ο Διόφαντος, έχοντας στη διάθεσή του μία μόνο μέθοδο, μπορούσε να γεμίσει τις σελίδες οσωνδήποτε βιβλίων επινοώντας προβλήματα κατά βούληση – μια άλλη όψη της μαθηματικής του ιδιοφυίας» (Sesiano 1982, 84). Αυτή η «μία μόνο» μέθοδος ήταν, στην περίπτωση της εξίσωσης $Ax^2 + Bx + C = \square$, και με τη συμπληρωματική συνθήκη ότι ο ένας από τους συντελεστές A και C είναι μηδέν ή τετράγωνος αριθμός, να θέτει «$\square = h^2$ ή $\square = h^2x^2$ αν $A = 0$ και $C = 0$, αντίστοιχα, και $\sqrt{\square} = (\sqrt{A}x+h)^2$ ή $\square = (hx + \sqrt{C})^2$ για A ή C τετράγωνο. Η παράμετρος h της γραμμικής εξίσωσης που προκύπτει επιλέγεται έτσι ώστε να δίνει θετική λύση» (Sesiano 1982, 7).

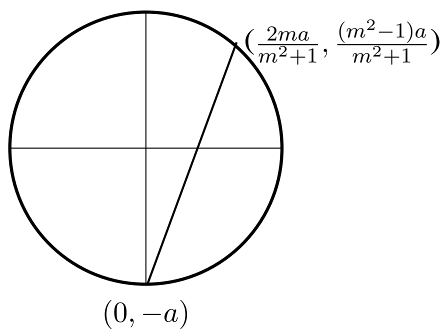
Ο Tannery, τέλος, στην εργασία των ετών 1887–8 έχει προτείνει δύο αρχές που θα μπορούσαν να αποτελούν τη βάση των «αντικαταστάσεων» του Διόφαντου. Οι αρχές αυτές συνοψίζονται στα εξής: Αν $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι μια αρχική λύση της εξίσωσης $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, τότε κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x_1 = a_1y, x_2 = a_2 + z_1y, \ldots, x_n = a_n + z_{n-1}y$. Αν αντίθετα οι τιμές $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ μηδενίζουν τους όρους υψηλότερου βαθμού, σε αυτή την περίπτωση κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x_1 = a_1y, x_2 = a_2y + z_1, \ldots, x_n = a_ny + z_{n-1}$. Σύμφωνα με τον Tannery, «τέτοιες είναι οι δύο θεμελιώδεις αρχές που διέπουν εκ περιτροπής και με τους πιο διαφορετικούς συνδυασμούς τις αντικαταστάσεις που πραγματοποιεί ο Διόφαντος και που εφαρμόζονται τόσο στην απαλοιφή για την αναγωγή των διαφόρων συνθηκών του προβλήματος σε μία μόνο εξίσωση, όσο και στην επίλυση αυτής της τελικής εξίσωσης» (Tannery 1887–8/1912, 379).

Στη δεκαετία του 1960 η Isabella Grigoryevna Bashmakova πρότεινε μια άλλη ερμηνεία των «αντικαταστάσεων» του Διόφαντου, η οποία δεν ανάγει τη στρατηγική που ακολουθούσε ο Διόφαντος όταν εισήγαγε τις

[9] Φαίνεται ότι ο Heath θα ήταν ως έναν βαθμό διατεθειμένος να δεχθεί μια ενοποιητική ερμηνεία των «αντικαταστάσεων» του Διόφαντου, αν υπήρχε όντως τέτοια ερμηνεία, διότι γράφει, ασκώντας κριτική στον Nesselmann, ο οποίος είχε συμπεριλάβει στις επιλυτικές μεθόδους του Διόφαντου «την έξυπνη υπόθεση των αγνώστων»: «Υποθέτοντας ότι έχει προταθεί ένας αριθμός ουσιωδώς διαφορετικών προβλημάτων, οι διαφορές καθιστούν απολύτως αναγκαία τη διαφορετική επιλογή αγνώστου στην κάθε περίπτωση. Τούτου δοθέντος, πώς θα ήταν δυνατόν να δοθεί ένας κανόνας για όλες τις περιπτώσεις;» (Heath 1910, 57).

«αντικαταστάσεις» σε έναν απλό στοχασμό για τη μορφή της προς επίλυση εξίσωσης και σε δοκιμές. Η ερμηνεία της Bashmakova συνοψίζεται στα παρακάτω. Οι «αντικαταστάσεις» του Διόφαντου επιδέχονται μιας απλής γεωμετρικής ερμηνείας. Οι εξισώσεις που τις εισάγουν ορίζουν ρητές ευθείες που περνούν στην κάθε περίπτωση από ένα γνωστό ρητό σημείο της αλγεβρικής καμπύλης που ορίζεται από την αρχική εξίσωση του προβλήματος. Κάθε μία από αυτές τις ευθείες τέμνει την καμπύλη σε ένα άλλο σημείο το οποίο είναι επίσης ρητό. Με αυτή τη μέθοδο βρίσκουμε, για τις καμπύλες δεύτερου βαθμού (τις καμπύλες γένους $g = 0$ στην ορολογία της αλγεβρικής γεωμετρίας), όλα τα ρητά σημεία αν ξέρουμε ένα αρχικό ρητό σημείο, ενώ για τις καμπύλες γένους $g = 1$ βρίσκουμε ένα νέο ρητό σημείο αν ξέρουμε ένα ή δύο αρχικά σημεία.

Ας πάρουμε ως παράδειγμα το πρόβλημα B.8 για να ερμηνεύσουμε με αυτή τη μέθοδο τη διαδικασία που ακολουθεί ο Διόφαντος για να το επιλύσει. Το πρόβλημα ισοδυναμεί με την εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ $(a = 4)$. Αυτή η εξίσωση ορίζει έναν κύκλο με κέντρο το σημείο $(0, 0)$ και ακτίνα ίση με a. Η «αντικατάσταση» του Διόφαντου είναι $x = t$, $y = mt - a$ $(m = 2)$ και αντιπροσωπεύει γεωμετρικά μια ρητή ευθεία με συντελεστή διευθύνσεως m, η οποία περνά από το ‘προφανές’ γνωστό σημείο $(0, -a)$ του κύκλου, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε ένα δεύτερο σημείο, το οποίο είναι κατ’ ανάγκην και αυτό ρητό και έχει συντεταγμένες $x = \frac{2ma}{m^2+1}$ και $y = \frac{(m^2-1)a}{m^2+1}$. Αν θέσουμε σε αυτούς τους τύπους τις τιμές $m = 2$ και $a = 4$, θα βρούμε τη λύση της αρχικής εξίσωσης $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{12}{5}$, δηλαδή τη λύση του Διόφαντου.

Η εξίσωση του προβλήματος B.8 είναι της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c^2$, αλλά η ερμηνεία που περιγράψαμε καλύπτει επίσης τις εξισώσεις της μορφής $y^2 = a^2x^2 + bx + c$, δηλαδή τον δεύτερο τύπο των εξισώσεων για τις οποίες ο Διόφαντος κατείχε, σύμφωνα με τους Zeuthen και Heath, ενιαία μέθοδο επίλυσης. Η μόνη διαφορά σε αυτή την περίπτωση είναι ότι τώρα το γνωστό σημείο της καμπύλης είναι το λεγόμενο «επ’ άπειρον σημείο» και επομένως η ευθεία $y = ax + m$ με την οποία τέμνουμε την καμπύλη για να βρούμε ένα ρητό σημείο αυτής περνά από το «επ’ άπειρον σημείο» της καμπύλης.

Δεχόμενοι αυτή την ερμηνεία της επιλυτικής διαδικασίας του Διόφαντου μέσω της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε τις εξής δύο βασικές παραδοχές: Ότι ο Διόφαντος είχε διακρίνει τη σύνδεση μεταξύ μιας απροσδιόριστης εξίσωσης και της αντίστοιχης αλγεβρικής καμπύλης, αφενός, και ότι θεωρούσε, και επομένως πραγματευόταν, κάθε εξίσωση με δύο αγνώστους στη γενική της μορφή και όχι ως ειδική εκδοχή αυτής. Έτσι, η εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ του προβλήματος Β.8 είναι, για όσους υποστηρίζουν την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία, μια εξίσωση της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c$, της οποίας γνωρίζουμε ένα προφανές ρητό σημείο. Ομοίως, η εξίσωση $y^2 = 9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x$ του προβλήματος Δ.28 θεωρείται ότι έχει απλά τη μορφή $y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Το ότι μπορεί να γραφεί με την πολύ ειδική μορφή $y^2 = (3x^2 + 1)^2 - 4x^3 - 12x$ δεν θεωρείται ότι έχει οποιαδήποτε σημασία. Αν η πρώτη παραδοχή είναι δύσκολο να υποστηριχθεί, η δεύτερη, όπως θα δούμε, είναι παραπλανητική.

Αν και πέρασαν σχεδόν τριάντα χρόνια από τότε που προτάθηκε για πρώτη φορά η αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία των επιλυτικών τεχνικών του Διόφαντου,[10] και παρά ότι είναι ευφυέστατη και ιδιαίτερα γοητευτική, δεν υιοθετήθηκε από την πλειονότητα των ιστορικών των μαθηματικών. Ο λόγος για την απόρριψή της περιγράφεται με τρόπο λιτό και σαφή από τον Jöran Friberg: «Η προσέγγιση [μέσω της αλγεβρικής γεωμετρίας] είναι μαθηματικώς ενδιαφέρουσα αλλά τελείως ανιστορική και αναχρονιστική» (Friberg 1991, 2). Το γεγονός, επίσης, ότι παρά τον μεγάλο αριθμό των μαθηματικών που για πολλούς αιώνες, από την ύστερη αρχαιότητα και μετά, εργάστηκαν πάνω στο έργο του Διόφαντου, δεν υπάρχουν μαρτυρίες που να την επιβεβαιώνουν, δεν συνηγορεί υπέρ της βασιμότητας αυτής της ερμηνείας ως ιστορικά έγκυρης. Προκύπτει, λοιπόν, το συμπέρασμα ότι το πρόβλημα της ερμηνείας των διοφαντικών επιλύσεων, και πιο συγκεκριμένα των «αντικαταστάσεων» που περιλαμβάνονται σε αυτές, εξακολουθεί να είναι ανοικτό για νέες έρευνες.[11]

Η αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία, όμως, δεν είναι η μόνη ερμηνεία που μπορεί να εξηγήσει με τρόπο ενιαίο τις υποθέσεις που κάνει ο Διόφαντος κατά τη διαδικασία επίλυσης κάποιων από τα απροσδιόριστα προβλήματα που πραγματεύεται στα *Αριθμητικά*.[12] Στη συνέχεια

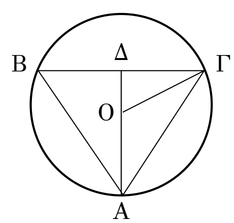
[10] Υπενθυμίζεται ότι το παρόν κείμενο παρουσιάστηκε στο διεθνές συμπόσιο «Histoire de la lecture des anciens en mathématiques», το 1995.

[11] Οι έρευνες αυτές έγιναν στις δεκαετίες που ακολούθησαν μετά την ανακοίνωση του παρόντος κειμένου το 1995, τόσο από τον συγγραφέα όσο και από τον ιστορικό των αραβικών μαθηματικών Jeffrey Oaks. Καρπός των ερευνών αυτών είναι το βιβλίο (Christianidis και Oaks 2023), το οποίο θα κυκλοφορήσει και σε ελληνική μετάφραση (βλ. Χριστιανίδης και Oaks υπό έκδοση).

[12] Ας σημειώσουμε στο σημείο αυτό και μία ελάχιστα πειστική ερμηνεία για την «αντικατάσταση» που εφαρμόζει ο Διόφαντος στο πρόβλημα Β.8, την οποία έχει προτείνει ο Friberg (1991). Η ερμηνεία βασίζεται σε μια επίλυση που απαντά σε ένα πρόβλημα μιας πινακίδας της παλαιοβαβυλωνιακής περιόδου (Bruins και Rutten 1961, 22–23). Το κείμενο συνοδεύεται από το παρακάτω διάγραμμα (χωρίς τα γράμματα):

θα αναπτύξουμε μια νέα ερμηνεία, η οποία βρίσκει εφαρμογή σε μια μεγάλη κλάση προβλημάτων των *Αριθμητικών*. Αυτή η κλάση περιλαμβάνει ιδιαίτερα όλες τις εξισώσεις στην πορεία επίλυσης των οποίων ο Διόφαντος εισάγει τις υποθέσεις χρησιμοποιώντας το ρήμα «πλάσσω».[13] Η νέα ερμηνεία έχει, όσον αφορά στη γενικότητα, την ίδια εμβέλεια με την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία. Σε σύγκριση με εκείνη, όμως, έχει μερικά πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα. Δεν παραβιάζει τις εννοιολογικές προϋποθέσεις που χαρακτηρίζουν τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, δεν χρησιμοποιεί έννοιες ξένες προς τον Διόφαντο και την εποχή του και επικυρώνεται από μαρτυρίες Βυζαντινών συγγραφέων.

Η οδός για αυτή την ερμηνεία, την οποία θα ονομάζουμε εφεξής «ερμηνεία δια των αναλογιών» (ο λόγος για αυτή την ονομασία θα γίνει σύντομα φανερός), είχε υποδειχθεί το 1932, σε μια διάλεξη του Πολωνού ιστορικού των επιστημών Aleksander Birkenmajer (1890–1967). Στη διάλεξή του ο Birkenmajer είχε θέσει το ερώτημα «αν ο Διόφαντος έλυνε τα απροσδιόριστα προβλήματα με μια μεθοδική ανάλυση ή όχι». Απορρίπτοντας τη θέση του Γερμανού μαθηματικού και ιστορικού των μαθηματικών Edmund Hoppe (1854–1928), διατύπωσε τη δική του θέση ως εξής: «Η προέλευσή τους [δηλ. των «αντικαταστάσεων» που εισάγει ο Διόφαντος] δεν είναι (υποστηρίζει [ο Hoppe]) παρά καθαρά διαισθητική, ήτοι εμπειρική. Δεν μπορώ να συμμεριστώ αυτή την άποψη, τουλάχιστον κατά τρόπο απόλυτο. Κατ' εμέ, αυτές οι σχεδόν αυθαίρετες υποθέσεις αποτελούν πολύτιμα κατάλοιπα αυτού που ο Διόφαντος σκόπιμα παρέλειψε, κατά το παράδειγμα του Ευκλείδη, δηλαδή τα τελευταία ίχνη της ανάλυσης» (Birkenmajer 1970, 582). Το κείμενο της διάλεξης του Birkenmajer δημοσιεύθηκε μόλις το 1970, σε μια συλλογή των εργασιών



Το ύψος διαιρείται από το κέντρο του κύκλου σε δύο μέρη, από τα οποία το ένα φέρει τον αριθμό $8° \; 45'$ στο εξηκονταδικό σύστημα, ενώ η ακτίνα του κύκλου είναι $31° \; 15'$. Στο τμήμα ΟΑ του ύψους αναγράφεται: «$\langle 40° \rangle$ το συνολικό πλάτος», ενώ το τμήμα ΔΓ της βάσης φέρει την ένδειξη 30°, που σημαίνει ότι ολόκληρη η βάση ΒΓ είναι $60° = 1$ SAG. Τέλος, στην πλευρά ΑΓ είναι σημειωμένος ο αριθμός 50°. Σύμφωνα με τον Friberg τα δεδομένα του προβλήματος είναι η ακτίνα του κύκλου, έστω a, και ο λόγος m του τριγώνου, δηλ. ο λόγος του ύψους h προς το μισό της βάσης, και ζητούνται η βάση και τα δύο μέρη του ύψους. Αν θέσουμε $\Delta\Gamma = x$ και $\mathrm{O}\Delta = y$ θα έχουμε $m = \frac{h}{x}$, οπότε $h = mx$ και επομένως $y = mx - a$, που είναι η «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

[13] Για τη χρήση του ρήματος «πλάσσω» αξίζει να σημειωθεί η ακόλουθη παρατήρηση του Tannery: «Ο όρος 'πλάσσειν' (ελληνικά στο κείμενο) φαίνεται [...] ότι ήταν ένας τεχνικός όρος της λογιστικής, όπως ήταν το πορίζειν στη γεωμετρία, προς το οποίο αντιστοιχεί πραγματικά». Ως παράδειγμα ο Tannery παραθέτει την έκφραση του Πάππου «πλάσσεται ἡ ἁρμονικὴ μεσότης» (Tannery 1882/1912, 278 υποσ.)

του, αλλά πέρασε, εξ όσων γνωρίζω, απαρατήρητο από την πλειονότητα των ιστορικών των μαθηματικών. Ο Birkenmajer εφαρμόζει την ερμηνεία του δια των αναλογιών μόνο στα προβλήματα 8 και 9 του δεύτερου βιβλίου των *Αριθμητικών*, ωστόσο μπορεί να εφαρμοστεί σε μια ολόκληρη κλάση εξισώσεων με δύο αγνώστους που πραγματεύεται ο Διόφαντος, όπως αναφέραμε.[14]

Ας εξετάσουμε πάλι την εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ του προβλήματος Β.8, ενός προβλήματος που δικαίως μπορεί να χαρακτηριστεί θεμελιώδες, λόγω της σημασίας του για την κατανόηση της μεθοδικής ανάλυσης με την οποία ενδέχεται να πραγματευόταν ο Διόφαντος έναν αριθμό των απροσδιόριστων προβλημάτων του. Ο Διόφαντος προτείνει για αυτό το πρόβλημα δύο λύσεις, που παραδίδονται από το σύνολο της χειρόγραφης παράδοσης των *Αριθμητικών* και, επομένως, η αυθεντικότητά τους όχι μόνο δεν αμφισβητείται,[15] αλλά επιπλέον επιβεβαιώνεται από το σχόλιο του Μάξιμου Πλανούδη (στο Διόφαντος 1893–95, II, 212–213). Επίσης, λαμβανομένου υπόψιν ότι το πρόβλημα Β.8 είναι το πρώτο απροσδιόριστο πρόβλημα των *Αριθμητικών* – τα προβλήματα του βιβλίου Α και τα πρώτα επτά προβλήματα του βιβλίου Β είναι προσδιορισμένα από την εκφώνησή τους ή μετατρέπονται σε προσδιορισμένα στην αρχή της επίλυσης – δεν είναι παράλογο να υποθέσουμε ότι η παράθεση αυτών των δύο λύσεων είχε ειδική σημασία για την αποσαφήνιση των τεχνικών που ενδέχεται να χρησιμοποιούσε ο Διόφαντος στην επίλυση των απροσδιόριστων προβλημάτων. Το κρίσιμο ερώτημα στο οποίο οφείλουμε να απαντήσουμε είναι το ακόλουθο: Η διαδικασία που ακολουθεί ο Διόφαντος στην καθεμία από τις δύο επιλύσεις του Β.8 είναι η ίδια ή στην κάθε επίλυση προχωρεί ακολουθώντας διαφορετική στρατηγική; Οι σύγχρονοι σχολιαστές φαίνεται ότι συμμερίζονται την πρώτη εκδοχή. Έτσι ο Heath, χωρίς κανέναν δισταγμό, έχει παραλείψει στην παράφρασή του των προβλημάτων των *Αριθμητικών* τη δεύτερη λύση· χωρίς αμφιβολία τη θεωρούσε ταυτόσημη με την πρώτη. Ο Paul Ver Eecke (1867–1959) από την πλευρά του, στη γαλλική μετάφραση των *Αριθμητικών*, αρκείται απλώς στο να παρατηρήσει ότι «αυτή η παραλλαγή της επίλυσης του προβλήματος δεν διαφέρει από την πρώτη επίλυση παρά στους όρους που χρησιμοποιεί για να δηλώσει τις ίδιες εκφράσεις» (στο Διόφαντος 1959, 55 υποσ.). Για τον Sesiano, επίσης, αυτή η δεύτερη λύση «είναι ουσιαστικά ταυτόσημη με την πρώτη» (Sesiano 1982, 54). Σύμφωνα με τους τρεις ιστορικούς, λοιπόν, η δεύτερη λύση δεν είναι στην πραγματικότητα διαφορετική από την πρώτη, παρά το γεγονός ότι ο Διόφαντος την εισάγει με τη λέξη «Ἄλλως». Έτσι, είμαστε υποχρεωμένοι, για να απαντήσουμε στο ερώτημα που θέσαμε προηγουμένως, να εξετάσουμε προσεκτικά τις δύο επιλύσεις που προτείνει ο Διόφαντος.

[14] Όλα τα παραδείγματα που θα συζητήσουμε στη συνέχεια προέρχονται από τα ελληνικά βιβλία των *Αριθμητικών*.

[15] Βλ. το κριτικό υπόμνημα για αυτό το πρόβλημα στην έκδοση του Tannery.

Στην πρώτη επίλυση ο Διόφαντος θεωρεί, σε σύγχρονη γλώσσα, την εκδοχή $x^2 + y^2 = 16$ του προβλήματος. Θέτει $x^2 = t^2$, στη συνέχεια μετατρέπει το πρόβλημα στο $y^2 = 16 - t^2$ (*) και το επιλύει θέτοντας $y = mt - 4$, μια έκφραση για την οποία υιοθετεί για το m την τιμή $m = 2$. Έτσι, αντικαθιστώντας την έκφραση $4t^2 + 16 - 16t$ αντί του y^2 στην (*) βρίσκει $5t^2 = 16t$, από όπου προκύπτει ότι $t = \frac{16}{5}$, οπότε προκύπτει η λύση $x^2 = \frac{256}{25}$ και $y^2 = \frac{144}{25}$. Στη δεύτερη επίλυση ο Διόφαντος θεωρεί και πάλι το πρόβλημα $x^2 + y^2 = 16$, αλλά αυτή τη φορά θέτει συγχρόνως $x = t$ και $y = mt - 4$ ($m = 2$). Άρα $x^2 = t^2$, $y^2 = 4t^2 + 16 - 16t$ και η εξίσωση που καταστρώνεται είναι η $5t^2 + 16 - 16t = 16$, από την οποία προκύπτει πάλι ότι $t = \frac{16}{5}$. Άρα $x^2 = \frac{256}{25}$ και $y^2 = \frac{144}{25}$.

Είναι φανερό ότι στη δεύτερη επίλυση ο Διόφαντος εργάζεται με τρόπο άμεσο. Αναγνωρίζει ευθύς εξαρχής ότι αν θέσει $x = t$ και $y = mt - 4$ ο σταθερός όρος της εξίσωσης που θα προκύψει απαλείφεται και επομένως, διαιρώντας με t, η εξίσωση θα γίνει γραμμική ως προς t. Έτσι εργάζεται και στο πρόβλημα Β.19 για να λύσει τη σχέση $y^2 = t^2 + 8t + 4$, διότι γράφει: «Σχηματίζω τον τετράγωνο από (πλευράς) ⟨1⟩ Αριθμού, προκειμένου να έχω τη δύναμη, και τόσων μονάδων επιπλέον, ώστε τα άλλα είδη που σχηματίζονται στον τετράγωνο – των Αριθμών και των μονάδων – να μην υπερβαίνουν κατά το πλήθος τους το ένα τους 8 Αριθμούς και το άλλο τις 4 μονάδες, αλλά το ένα να υπολείπεται και το άλλο να πλεονάζει». Θέτει, λοιπόν, $y = t + m$ ($m = 3$) για να απαλείψει, αυτή τη φορά, τον δευτεροβάθμιο όρο από τα δύο μέλη, προκειμένου τελικά να καταλήξει σε μια γραμμική εξίσωση ως προς t. Προκύπτει, επομένως, το συμπέρασμα ότι εισάγοντας τις «αντικαταστάσεις» $y = mt \pm n$ ο Διόφαντος ακολουθεί συχνά μια στρατηγική η οποία συνίσταται στο να αναγνωρίσει, αναλογιζόμενος τη μορφή της προς επίλυση σχέσης, πώς αυτές οι «αντικαταστάσεις» μπορούν να οδηγήσουν στις κατάλληλες απαλοιφές προκειμένου να προκύψει μια γραμμική εξίσωση ως προς t και τελικά μια θετική ρητή τιμή του t. Η δεύτερη λύση του προβλήματος Β.8 εκφράζει αυτήν ακριβώς τη στρατηγική. Αλλά, ακολουθεί ο Διόφαντος την ίδια στρατηγική και στην πρώτη λύση; Κάτι τέτοιο μας φαίνεται όχι πολύ πιθανό, καθώς σε αυτή την περίπτωση οι δύο επιλύσεις θα ήταν ταυτόσημες, οπότε η ένδειξη «Ἄλλως» για να δηλώσει τη δεύτερη επίλυση δεν θα είχε κανένα νόημα. Πιο πιθανό φαίνεται ότι στην πρώτη λύση ο Διόφαντος βρήκε την αντικατάσταση $y = mt - 4$ μετά από κάποιου είδους ανάλυση της συνθήκης του προβλήματος. Ποια, όμως, θα μπορούσε να είναι αυτή η ανάλυση, για την οποία άλλωστε το διοφαντικό κείμενο δεν κάνει καμία νύξη; Η «αντικατάσταση» $y = mt - 4$, λοιπόν, μπορεί εύκολα να εξηγηθεί αν γράψουμε τη σχέση $y^2 = 16 - t^2$ με μορφή αναλογίας. Πράγματι, η σχέση γράφεται διαδοχικά:

(1) $16 - y^2 = t^2,$

(2) $(4 + y) \cdot (4 - y) = t^2,$

(3) $(4 + y) : t = t : (4 - y).$

Οι αριθμοί y, t, 4 είναι θετικοί ρητοί, επομένως το ίδιο ισχύει και για την αριθμητική έκφραση του λόγου $(4+y):t$, η οποία στην ορολογία της εποχής λεγόταν «πηλικότης». Μπορούμε λοιπόν να αποδώσουμε στην «πηλικότητα» του λόγου μια οποιαδήποτε αριθμητική τιμή m (ο Διόφαντος επιλέγει την τιμή $m=2$), οπότε θα έχουμε $(4+y):t=m$, από όπου $y=mt-4$, δηλαδή η υπόθεση («αντικατάσταση») του Διόφαντου.

Η ερμηνεία που μόλις προτείναμε για τη διαδικασία που ενδέχεται να ακολούθησε ο Διόφαντος στην πρώτη λύση του προβλήματος Β.8 για να βρει την «αντικατάσταση» $y=2t-4$ ενισχύεται να συνυπολογίσουμε τα παρακάτω.

(1) Κατ' αρχάς αυτήν ακριβώς τη διαδικασία αποδίδει στην εκτενή εξήγησή του τού προβλήματος Β.8 ο Βυζαντινός σχολιαστής Μάξιμος Πλανούδης, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Επί του παρόντος αρκούμαστε να σημειώσουμε ότι η εξήγηση του Πλανούδη καλύπτει επτά ολόκληρες σελίδες της έκδοσης Tannery, εκ των οποίων περισσότερες από τρεις αφορούν στην εξήγηση της κρίσιμης φράσης «Σχηματίζω τον τετράγωνο από οσουσδήποτε Αριθμούς με έλλειψη τόσων μονάδων όσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων», με την οποία ο Διόφαντος περιγράφει την «αντικατάσταση».

(2) Από την άλλη, υπάρχει μέσα στα *Αριθμητικά* ένα πρόβλημα στο οποίο μια σχέση της μορφής $y=mt+a$, που είναι η πιο συνηθισμένη μορφή των «αντικαταστάσεων» που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος, πηγάζει σαφώς από μια ισότητα της μορφής $(y-a):t=m$. Πρόκειται για το πρόβλημα Α.3, η εκφώνηση του οποίου είναι η εξής: «Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος αριθμός σε δύο αριθμούς με λόγο και δεδομένη διαφορά». Οι νεότεροι μεταφραστές έχουν αντικαταστήσει αυτή την κάπως δυσνόητη διατύπωση με άλλες πιο σαφείς, όπως για παράδειγμα, «Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος αριθμός σε δύο αριθμούς οι οποίοι, παρά μια δεδομένη διαφορά, να είναι σε λόγο» (Ver Eecke στο Διόφαντος 1959, 10) ή «Να διαιρεθεί ένας δεδομένος αριθμός σε δύο αριθμούς έτσι ώστε ο ένας να είναι ένας δεδομένος λόγος του άλλου συν μια δεδομένη διαφορά» (Heath 1910, 132). Ο Heath σχολιάζει αυτή τη φράση ως εξής: «Το νόημα της φράσης, μολονότι δεν είναι τόσο σαφές, είναι το ίδιο με την έκφραση "δοθέντι μείζον ἢ ἐν λόγῳ" του Ευκλείδη. Σύμφωνα με τον ορισμό του Ευκλείδη ένα μέγεθος είναι "κατά (ορισμένο) λόγο μεγαλύτερο ενός μεγέθους κατά μια (επιπλέον) δεδομένη ποσότητα" όταν το υπόλοιπο του πρώτου μεγέθους, μετά την αφαίρεση της δεδομένης ποσότητας, έχει προς το δεύτερο μέγεθος τον συγκεκριμένο λόγο. Αυτό σημαίνει ότι, αν x και y είναι τα μεγέθη, d είναι η δεδομένη ποσότητα, και k ο λόγος, $x-d=ky$ ή $x=ky+d$» (Heath 1910, 132 υποσ.). Πράγματι, οι δύο εκφράσεις του Ευκλείδη, «δοθέντι μείζον ἢ ἐν

λόγῳ» και «δοθέντι ἔλασσον ἢ ἐν λόγῳ» (Ευκλείδης 1896, 4), αντιστοιχούν στις δύο ισότητες $(y - a) : t = m$ και $(y + a) : t = m$, και κατά συνέπεια στις $y = mt \pm a$. Είναι εύλογο, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι ο Διόφαντος εξάγει σε μερικές περιπτώσεις τις «αντικαταστάσεις» της μορφής $y = mt \pm a$ αποδίδοντας στην «πηλικότητα» ενός λόγου της μορφής $(y \pm a) : t$ μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή m.

(3) Δεν είναι άνευ σημασίας, τέλος, να προσθέσουμε ότι ο Διόφαντος πραγματεύεται συχνά στα *Αριθμητικά* αναλογίες και λόγους, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

α. Σε μερικά προβλήματα, όπως τα Δ.21 και Ε.1–2, εμφανίζεται ήδη από την εκφώνηση ο όρος «ἀναλογία» ή «ἀνάλογον». Σε πολλά άλλα προβλήματα οι εκφωνήσεις περιέχουν την έννοια του «λόγου» (Α.7–8, Α.10–12, Β.19 κ.λπ.).

β. Υπάρχει στα *Αριθμητικά* ένας αριθμός προβλημάτων στην πορεία επίλυσης των οποίων ο Διόφαντος εφαρμόζει διάφορες ιδιότητες των αναλογιών. Έτσι, στο πρόβλημα Δ.21 διατυπώνει την ιδιότητα της γεωμετρικής μεσότητας: «Αλλά αν τρεις αριθμοί είναι σε αναλογία, το γινόμενο των άκρων είναι ίσο προς τον τετράγωνο του μέσου». Στο επόμενο πρόβλημα (Δ.22) χρησιμοποιεί την ιδιότητα της εναλλαγής των μέσων όρων στην αναλογία $t^2 : 4t = 2t : 9$, για να τη γράψει $t^2 : 2t = 4t : 9$. Στο πρόβλημα Δ.32 γράφει την αναλογία $(t + 1) : (t - 1) = 4 : 1$, με μορφή εξίσωσης, $4t - 4 = t + 1$. Στο πρόβλημα Δ.39 από τη σχέση $(6t + 12) : (t^2 - 3) < 2 : 1$ εξάγει τη σχέση $(6t + 12) \cdot 1 < 2 \cdot (t^2 - 3)$, και ομοίως, στο πρόβλημα Ε.10, από τη διπλή ανισότητα $\frac{17}{12} < \frac{6t}{t^2+1} < \frac{19}{12}$ εξάγει τις δύο ανισότητες $6t \cdot 12 > (t^2 + 1) \cdot 17$ και $6t \cdot 12 < 19 \cdot (t^2 + 1)$.

γ. Υπάρχουν, τέλος, στα *Αριθμητικά* μερικά προβλήματα στα οποία είναι εμφανής μια τάση του Διόφαντου να ανατρέχει στη βοήθεια των αναλογιών όταν συμβαίνει να συναντά μια εξίσωση που δεν έχει ρητή λύση. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι το Ε.29: «Να βρεθούν τρεις τετράγωνοι ώστε ο (αριθμός) που απαρτίζεται από τους τετραγώνους τους να σχηματίζει τετράγωνο». Ο Διόφαντος θέτει τους τρεις τετραγώνους να είναι οι t^2, 4 και 9, οπότε πρέπει $t^4 + 97 = \square$· δέχεται για τη ρίζα του τετραγώνου την έκφραση $t^2 - 10$, οπότε ανάγεται στην εξίσωση $20t^2 = 3$, η οποία δεν έχει ρητή λύση. Επιστρέφει, τότε, στις αρχικές υποθέσεις που έκανε για τους τρεις τετραγώνους και αναδιατυπώνει την εξίσωση στην οποία σκόνταψε, αλλά τώρα γράφοντάς τη σαν να ήταν αναλογία. Γράφει: «Και αν ο καθένας ήταν τετράγωνος το ζητούμενο θα είχε ικανοποιηθεί. Ανάγεται, λοιπόν, στο να βρεθούν δύο

> τετράγωνοι και ένας ορισμένος αριθμός ⟨ώστε⟩ ο τετράγωνος αυτού, αν ελαττωθεί κατά τους τετραγώνους από τους ζητούμενους (τετραγώνους), να σχηματίζει κάποιον ⟨αριθμό⟩ ο οποίος να έχει προς το διπλάσιο του αρχικού αριθμού τον λόγο ενός τετράγωνου αριθμού προς έναν τετράγωνο αριθμό». Σε σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα, αν θέσουμε τους τρεις τετραγώνους t^2, a^2, b^2 και τη ρίζα του τετραγώνου που ισούται προς το άθροισμα των τετραγώνων τους $t^2 - u$, θα προκύψει η εξίσωση $2u \cdot t^2 = u^2 - (a^4 + b^4)$. Είναι φανερό ότι ο Διόφαντος αντιλαμβάνεται αυτή την εξίσωση κατά τον ίδιο τρόπο σαν την αναλογία $[u^2 - (a^4 + b^4)] : 2u = m^2 : n^2$.

Με αυτές τις σκέψεις ας επανέλθουμε στο πρόβλημα B.8. Από την ανάλυση που προηγήθηκε συνάγεται ότι ο μετασχηματισμός της σχέσης $y^2 = 16 - t^2$ στην αναλογία $(4 + y) : t = t : (4 - y)$ δεν είναι ασύμβατος με την πρακτική του Διόφαντου. Απομένει ωστόσο ένα τελευταίο ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί. Η ερμηνεία της μεθόδου του Διόφαντου που προτείναμε αναπτύσσεται σε δύο φάσεις: η πρώτη φάση είναι η παραγοντοποίηση και η δεύτερη φάση είναι αναδιατύπωση με μορφή αναλογίας, ή, έστω, ο σχηματισμός του ενός από τους δύο λόγους της αναλογίας. Αλλά αυτή η δεύτερη φάση δεν είναι πρακτικά περιττή; Δεν θα μπορούσε ο Διόφαντος να βρει την «αντικατάσταση» $y = mt - 4$ απευθείας από την παραγοντοποίηση, δηλαδή αμέσως μετά τη γραφή της σχέσης με τη μορφή $t^2 = (4 + y) \cdot (4 - y)$; Πράγματι, ο Διόφαντος θα μπορούσε να παρατηρήσει ότι, σε αυτή τη σχέση, καθώς το γινόμενο των δύο αριθμών $4 - y$ και $4 + y$ ισούται προς t^2, θα μπορούσε να θέσει τον μεγαλύτερο αριθμό $4 + y = mt$ (οπότε $y = mt - 4$) και, συγχρόνως, τον μικρότερο αριθμό $4 - y = \frac{1}{m}t$, και να αξιοποιήσει στη συνέχεια τις πληροφορίες που περιέχονται στις δύο εξισώσεις για να βρει

$4 = \frac{1}{2}(mt + \frac{1}{m}t)$, από όπου συνάγεται η τιμή του t, και
$y = \frac{1}{2}(mt - \frac{1}{m}t)$.

Πράγματι, έτσι εργάζεται λίγο μετά, στο πρόβλημα B.11, όπου πραγματεύεται για πρώτη φορά τη διπλή ισότητα. Στο πρόβλημα B.8, πάντως, δεν ακολουθεί αυτή τη διαδικασία.

Η ερμηνεία που προτείναμε μπορεί να εφαρμοστεί για να εξηγήσει τις «αντικαταστάσεις» που κάνει ο Διόφαντος σε μια ευρεία κλάση εξισώσεων δεύτερου βαθμού που πραγματεύεται στα *Αριθμητικά*, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια.

(1) Στις εξισώσεις της μορφής $y^2 = a^2t^2 + bt + c$, ο Διόφαντος εφαρμόζει την «αντικατάσταση» $y = at + m$, η οποία μπορεί εύκολα να εξηγηθεί αν γράψουμε την εξίσωση ως αναλογία, $(y - at) : 1 = (bt + c) : (y + at)$. Αν θεωρήσουμε τον πρώτο λόγο και θέσουμε $y - at = m$, θα έχουμε $y = at + m$.

(2) Στις εξισώσεις της μορφής $y^2 = at^2 + bt + c^2$, ο Διόφαντος εφαρμόζει την «αντικατάσταση» $y = mt + c$. Αν γράψουμε την εξίσωση ως $(y - c) : t = (at + b) : (y + c)$ και θέσουμε $y - c = mt$, θα έχουμε την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

(3) Στην εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ $(a^2 + b^2 = 13)$ του προβλήματος Β.9, ο Διόφαντος θέτει $x = t + a, y = mt - b$. Πράγματι, η εξίσωση γράφεται διαδοχικά, $x^2 - a^2 = b^2 - y^2, (x - a)(x + a) = (b - y)(b + y)$, από την οποία προκύπτει η αναλογία $(b + y) : (x - a) = (x + a) : (b - y)$. Αρκεί, τώρα, να θέσουμε τον πρώτο λόγο ίσο προς m, δηλαδή $(b + y) : (x - a) = m$, οπότε $y = m(x - a) - b$, και στη συνέχεια να θέσουμε $x - a = t$, για να βρούμε $x = t + a$ και $y = mt - b$, όπως ο Διόφαντος.

(4) Στην εξίσωση της μορφής $y^2 = ax^2 + b$, με τη συνθήκη $a + b = \square = k^2$, ο Διόφαντος θέτει $x = t + 1$ και $y = mt - k$. Αυτές οι «αντικαταστάσεις» εξηγούνται εύκολα αν γράψουμε την εξίσωση ως αναλογία και θέσουμε $k^2 - a$ αντί του b. Συγκεκριμένα, η εξίσωση γίνεται $y^2 = ax^2 + k^2 - a$, και στη συνέχεια $(y - k)(y + k) = a(x - 1)(x + 1)$, οπότε προκύπτει η αναλογία $(y + k) : (x - 1) = a(x + 1) : (y - k)$. Αρκεί, τώρα, να θέσουμε τον πρώτο λόγο ίσο προς m, δηλαδή $(y + k) : (x - 1) = m$, οπότε $y = m(x - 1) - k$, και να θέσουμε στη συνέχεια $x - 1 = t$, για να έχουμε $x = t + 1$ και $y = mt - k$. Ο Διόφαντος επιλύει αυτή την εξίσωση στο λήμμα που προηγείται του προβλήματος ΣΤ.12.

(5) Στις εξισώσεις της μορφής $y^2 = at^2 + b$, ο Διόφαντος θέτει $y = mt$, μια «αντικατάσταση» που εξηγείται εύκολα αν γράψουμε την εξίσωση με τη μορφή $y : t = (at + b) : y$.

Εφαρμόζοντας την ίδια τεχνική μπορούμε να εξηγήσουμε επίσης τις «αντικαταστάσεις» που κάνει ο Διόφαντος σε εξισώσεις με δύο αγνώστους, βαθμού ανώτερου του δεύτερου. Συγκεκριμένα, μπορεί να εφαρμοστεί:

(6) Στις εξισώσεις της μορφής $y^2 = at^3 + bt^2 + ct + d$. Στα *Αριθμητικά* περιέχεται μόνο μία τέτοια εξίσωση, στο πρόβλημα ΣΤ.18, η οποία όμως έχει την ειδική μορφή $y^2 = at^3 + bt^2 + ct + d^2$. Ο Διόφαντος θέτει $y = mt + d$ και επιλέγει την τιμή του m κατά τρόπο ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του t στην εξίσωση που θα προκύψει $(m = \frac{c}{2d})$. Αν γράψουμε την εξίσωση ως αναλογία θα γίνει $(y - d) : t = (at^2 + bt + c) : (y + d)$, οπότε αρκεί να θέσουμε $y - d = mt$ για να βρούμε την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

(7) Στις εξισώσεις της μορφής $y^3 = at^3 + bt^2 + ct + d$. Στα *Αριθμητικά* περιέχεται μόνο η ειδική μορφή $y^3 = a^3t^3 + bt^2 + ct + d^3$ αυτής της εξίσωσης, η οποία εμφανίζεται στα προβλήματα Δ.26 και Δ.27. Ο Διόφαντος θέτει $y = mx + d$ και επιλέγει την τιμή του m με τρόπο ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του t^3 στην εξίσωση που προκύπτει $(m = a)$. Αν γράψουμε την εξίσωση με μορφή

αναλογίας, θα έχουμε $(y-d) : t = (a^3t^2 + bt + c) : (y^2 + dy + d^2)$. Αν θέσουμε $y - d = mt$, θα έχουμε αμέσως την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

(8) Στην εξίσωση $t(a - t) = y^3 - y$, η οποία εμφανίζεται στο πρόβλημα Δ.24, ο Διόφαντος θέτει $y = mt - 1$ και επιλέγει την τιμή του m κατά τρόπο ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του t στην εξίσωση που προκύπτει ($m = \frac{a}{2}$). Πράγματι, η εξίσωση γράφεται $(y+1) : t = (a-t) : y(y-1)$. Αν θέσουμε $y + 1 = mt$ θα έχουμε την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

(9) Στην εξίσωση $y^2 = a^2t^4 + 2abt^2 + b^2 - ct^3 - dt$, η οποία εμφανίζεται στο πρόβλημα Δ.28, ο Διόφαντος θέτει $y = at^2 + b - mt$ και επιλέγει την τιμή του m ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του t στην εξίσωση που προκύπτει ($m = \frac{d}{2b}$). Η εν λόγω εξίσωση είναι τέταρτου βαθμού αλλά πολύ ειδικής μορφής, αφού γράφεται ως $y^2 = (at^2 + b)^2 - ct^3 - dt$ και, ως αναλογία, $(at^2 + b - y) : t = (ct^2 + d) : (at^2 + b + y)$. Αν θέσουμε $at^2 + b - y = mt$, θα έχουμε αμέσως την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

(10) Στην εξίσωση $y^2 = t^6 - at^3 + bt + c^2$, η οποία εμφανίζεται στο πρόβλημα Δ.18, ο Διόφαντος θέτει $y = t^3 + m$, και επιλέγει την τιμή του m έτσι ώστε να μηδενίζεται ο σταθερός όρος στην εξίσωση που προκύπτει ($m = c$). Αν γράψουμε την εξίσωση με μορφή αναλογίας θα έχουμε $(y - t^3) : 1 = (c^2 - at^3 + bt) : (y + t^3)$. Αρκεί τώρα να θέσουμε $y - t^3 = m$ για να έχουμε την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

Από την ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι «αντικαταστάσεις» που κάνει ο Διόφαντος κατά την επίλυση των απροσδιόριστων εξισώσεων με δύο αγνώστους που εμφανίζονται στα *Αριθμητικά*, μπορούν να ερμηνευθούν χωρίς να χρειάζεται να προσφύγουμε στη σύγχρονη θεωρία των αριθμητικών ιδιοτήτων των αλγεβρικών καμπυλών. Αρκούν μόνο:

1) Η γνώση ορισμένων αριθμητικών ταυτοτήτων, όπως είναι οι:

$$m^2 \pm 2mn + n^2 = (m \pm n)^2,$$
$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n),$$
$$m^3 - n^3 = (m-n)(m^2 + mn + n^2),$$
$$m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2).$$

2) Η γνώση της παραγοντοποίησης των πολυωνύμων. Ότι ο Διόφαντος γνώριζε και χρησιμοποιούσε την παραγοντοποίηση αποδεικνύεται από το γεγονός ότι την αναφέρει ρητά στα προβλήματα 6 και 8 του βιβλίου ΣΤ των *Αριθμητικών*. Χρησιμοποιούσε μάλιστα την ειδική έκφραση «μέτρησις [...] κατὰ [...]», για να δηλώσει τους δύο παράγοντες. Έτσι, στο πρόβλημα ΣΤ.6 αναφέρει: «Η διαφορά είναι 1 Δύναμη με έλλειψη 14 Αριθμών. Η μέτρηση: ο 1 Αριθμός (τα μετρεί) κατά 1 Αριθμό με έλλειψη 14 μονάδων»,

δηλαδή, σε σύγχρονη γλώσσα, «η διαφορά είναι $t^2 - 14t$. Οι παράγοντες είναι ο t και ο $t - 14$». Επίσης, στο πρόβλημα ΣΤ.8: «Η διαφορά είναι 14 Αριθμοί. Η μέτρηση: (τους μετρούν) οι 2 Αριθμοί κατά 7 μονάδες», δηλαδή, «η διαφορά είναι $14t$. Οι παράγοντες είναι ο $2t$ και οι 7 μονάδες».

3) Η γνώση της αριθμητικής θεωρίας των αναλογιών και η ταύτιση εξίσωσης και αναλογίας βάσει της ιδιότητας $a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$.

Αξίζει να θυμίσουμε στο σημείο αυτό ότι οι μαθηματικοί του δέκατου έκτου και του δέκατου έβδομου αιώνα χρησιμοποιούσαν συχνά τους δύο όρους, εξίσωση και αναλογία, ως ταυτόσημους. Για παράδειγμα, ο François Viète (1540–1603), όπως σημειώνει ο Jacob Klein, «μιλάει πάντοτε για "εξισώσεις" και "αναλογίες" μαζί, π.χ. στο τέλος του κεφαλαίου II [του κειμένου του *Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη*]: "Μια αναλογία μπορεί να ονομαστεί 'η κατασκευή μιας εξίσωσης' και μια εξίσωση 'η λύση μιας αναλογίας'"»· και καταλήγει στο συμπέρασμα: «Δηλαδή η 'καθαρή' άλγεβρα είναι για αυτόν όχι μόνο μια 'γενική θεωρία των εξισώσεων' αλλά ταυτόχρονα μια 'γενική θεωρία των αναλογιών'» (Klein 1968, 160 υποσ. 14).

Η ερμηνεία που προτείναμε είναι γενική, υπό την έννοια ότι εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις εξισώσεων με δύο αγνώστους που πραγματεύεται ο Διόφαντος. Είναι, επίσης, εξαιρετικά απλή και δεν χρησιμοποιεί γνώσεις που ξεφεύγουν από τον ορίζοντα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Για αυτούς και μόνο τους λόγους, η ερμηνεία δια των αναλογιών είναι προτιμητέα ως ιστορική ερμηνεία έναντι της αλγεβρογεωμετρικής. Ωστόσο, και αυτή η ερμηνεία θα παρέμενε μια απλή υπόθεση, αν δεν τεκμηριωνόταν ιστορικά. Όμως, υπάρχουν ιστορικές μαρτυρίες που την επιβεβαιώνουν. Προέρχονται από τη βυζαντινή σχολιαστική μαθηματική παράδοση, η οποία συχνά έχει αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμη για την αποσαφήνιση ορισμένων δυσνόητων σημείων των αρχαίων μαθηματικών κειμένων.

Κατ' αρχάς υπάρχει η μαρτυρία για τον Ιωάννη Δαμασκηνό που περιέχεται στον Βίο BHG 884. Τη συγκεκριμένη μαρτυρία τη συζητάμε στα δημοσιεύματά μας των ετών 1995 και 1998, όπου και παραπέμπουμε τον αναγνώστη.

Πολύ σημαντική, όμως, είναι η μαρτυρία του λόγιου μοναχού και εμβριθούς σχολιαστή του Διόφαντου Μάξιμου Πλανούδη (1255/60–1305/10). Η μαρτυρία περιέχεται στο σχόλιο του Πλανούδη στο πρόβλημα Β.8 των *Αριθμητικών*, το οποίο, όπως έχουμε αναφέρει, γράφεται σε σύγχρονη γλώσσα ως $x^2 + y^2 = a^2$, με $a^2 = 16$. Κατά την πορεία επίλυσης αυτού του προβλήματος, και αφού έχει θέσει τον x^2 να είναι «1 Δύναμη» (δηλ. $x^2 = t^2$), ο Διόφαντος βρίσκει στη συνέχεια τη σχέση $y^2 = a^2 - t^2$ και γράφει «σχηματίζω τον τετράγωνο (δηλ. τον y^2) από οσουσδήποτε

Αριθμούς (δηλ. από οσαδήποτε t) με έλλειψη τόσων μονάδων όσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων», εισάγοντας με αυτή τη φράση την «αντικατάσταση» $y = mt - a$. Ο Πλανούδης εξηγεί στο σημείο αυτό με σαφή τρόπο ότι αυτή η «αντικατάσταση» προκύπτει από την αναλογία $(a + y) : t = t : (a - y)$. Το κείμενο είναι το εξής:

> Γενικώς, (Α)[16] για όλους τους τετραγώνους οι οποίοι διαιρούνται σε δύο τετραγώνους, (Β) η πλευρά του διαιρούμενου (τετραγώνου), μαζί με την πλευρά οποιουδήποτε από τους (τετραγώνους που προκύπτουν) από τη διαίρεση, έχει προς την πλευρά του άλλου κάποιον λόγο. (Γ) Οποιοσδήποτε, λοιπόν, μεταξύ των (τετραγώνων που προκύπτουν) από τη διαίρεση και αν αφαιρεθεί, (Δ) η πλευρά του άλλου θα αποτελείται από τόσες μονάδες όσες ήταν, με έλλειψη της πλευράς του διαιρούμενου, (Ε) η πλευρά του αφαιρούμενου (τετραγώνου) λαμβανόμενη τόσες φορές[17] όσες η πλευρά του άλλου, μαζί με την πλευρά του διαιρούμενου, ήταν της πλευράς του αφαιρούμενου.
>
> Για παράδειγμα, επειδή ο 25 απαρτίζεται από τον 16 και τον 9 και διαιρείται σε αυτούς, και η πλευρά του 25, τα 5, μαζί με την πλευρά του 9, τα 3, είναι διπλάσια της πλευράς του 16, των 4, αν αφαιρέσω τον 16, η πλευρά του 9 θα είναι, εξαιτίας του διπλάσιου λόγου, δύο φορές η πλευρά του 16 με έλλειψη της πλευράς του 25, δηλαδή παρά 5 (μονάδες) 8 μονάδες, δηλαδή 3. Πάλι, επειδή η πλευρά του 25, τα 5, μαζί με την πλευρά του 16, τα 4, είναι τριπλάσια της πλευράς του 9, των 3, αν αφαιρέσω τον 9, η πλευρά του 16, εξαιτίας του τριπλάσιου λόγου, θα είναι τρεις φορές η πλευρά του 9 με έλλειψη της πλευράς του ⟨25⟩, δηλαδή παρά 5 μονάδες 9 μονάδες, το οποίο είναι 4 μονάδες.

Θα σχολιάσουμε αυτόν τον συλλογισμό του Πλανούδη χρησιμοποιώντας σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Ας γράφουμε τη διαίρεση του δεδομένου τετραγώνου σε δύο τετραγώνους ως $a^2 = x^2 + y^2$, έχοντας κατά νου ότι στην αλγεβρική επίλυση του προβλήματος το x θα αντιστοιχεί στην πλευρά του τετραγώνου που ορίζεται να είναι «1 Δύναμη», δηλαδή θα είναι $x = t$, και το y θα είναι η πλευρά που ορίζεται να είναι «2 Αριθμοί με έλλειψη 4 μονάδων», δηλαδή, σε σύγχρονο συμβολισμό και με γενικούς όρους, $y = mt - a$ για κάποιο m. Ο Πλανούδης ξεκινά από την (Α) $a^2 = x^2 + y^2$. Αναφέρει ότι (Β) το $(a + y) : x$ είναι ένας λόγος, του οποίου την αριθμητική έκφραση (δηλαδή την «πηλικότητα») θα αποκαλούμε m. Τότε, (Γ) αν υποθέσουμε ότι t είναι η πλευρά του αφαιρούμενου τετραγώνου, δηλαδή η πλευρά του τετραγώνου που ονομάστηκε «1 Δύναμη», ο οποίος θα αφαιρεθεί από τον 16 ($= a^2$), (Δ) «η

[16] Οι ενδείξεις (Α) , (Β), ..., (Ε) έχουν προστεθεί για να γίνει κατανοητό το επιχείρημα.

[17] Ο κώδικας Marc. gr. 308 (φ. 130r, γρ. 13) έχει εδώ τη λέξη «όσόλογος». Η λέξη αυτή δεν εμφανίζεται στα άλλα βασικά χειρόγραφα που παραδίδουν το κείμενο των *Αριθμητικών* και ο Tannery την έχει μεταφέρει στο κριτικό υπόμνημα.

πλευρά του άλλου (y) θα αποτελείται από τόσες μονάδες (mt), όσες ήταν, με έλλειψη της πλευράς του διαιρούμενου (a) η πλευρά του αφαιρούμενου (t)», ή $y = mt - a$, και εξηγεί τι σημαίνει το «τόσες μονάδες»: «η πλευρά του αφαιρούμενου (τετραγώνου) (t) λαμβανόμενη τόσες φορές (m) όσες η πλευρά του άλλου (y), μαζί με την πλευρά του διαιρούμενου (a), ήταν της πλευράς του αφαιρούμενου (t)», ή $m = (y + a) : t$.

Στη δεύτερη παράγραφο του παραπάνω αποσπάσματος ο Πλανούδης διευκρινίζει τον συλλογισμό του με ένα αριθμητικό παράδειγμα.[18] Σε αυτό, ξεκινώντας από την ισότητα $25 = 16 + 9$ σημειώνει ότι $5 + 3 = 2 \cdot 4$, από την οποία, $3 = 2 \cdot 4 - 5$, ή, όπως στο κείμενο, «η πλευρά του 9 θα είναι, εξαιτίας του διπλάσιου λόγου, δύο φορές η πλευρά του 16 με έλλειψη της πλευράς του 25, δηλαδή παρά 5 (μονάδες) 8 μονάδες, δηλαδή 3». Κατόπιν, επαναλαμβάνει το ίδιο αντιστρέφοντας τους ρόλους των 3 και $4 : 5 + 4 = 3 \cdot 3$, από την οποία, $4 = 3 \cdot 3 - 5$, ή, όπως στο κείμενο, «η πλευρά του 16, εξαιτίας του τριπλάσιου λόγου, θα είναι τρεις φορές η πλευρά του 9 με έλλειψη της πλευράς του (25), δηλαδή παρά 5 μονάδες 9 μονάδες, το οποίο είναι 4 μονάδες». Μετά από αυτά τα παραδείγματα ακολουθούν δύο ακόμα παραδείγματα με τους τετραγώνους 25, 144 και 169.

Η ερμηνεία δια των αναλογιών είναι προτιμότερη ως ιστορική ερμηνεία της επιλυτικής στρατηγικής του Διόφαντου, συγκρινόμενη με την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία. Επιπλέον, όπως κάθε αληθινά ιστορική ερμηνεία, είναι σε θέση να εξηγήσει διάφορα «μυστικά» των *Αριθμητικών*. Για παράδειγμα, με την ερμηνεία δια των αναλογιών εξηγείται γιατί ο Διόφαντος δεν πραγματεύεται όλες τις περιπτώσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c$, ή άλλων εξισώσεων ανώτερου βαθμού, αλλά περιορίζεται μόνο σε εκείνες τις ειδικές περιπτώσεις αυτών των εξισώσεων στις οποίες μπορούν να εφαρμοστούν οι γνωστές αριθμητικές ταυτότητες, ώστε να παραγοντοποιηθούν και κατόπιν να γραφούν με μορφή αναλογίας.

Βιβλιογραφια

[1] I. G. Bachmakova «Diophante et Fermat». *Revue d'histoire des sciences* 19 (1966), 289–306.
[2] I. G. Bashmakova: «Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré». *Historia Mathematica* 8 (1981), 393–416.
[3] A. Birkenmajer: «Diophante et Euclide». Στο: A. Birkenmajer, *Études d'histoire des sciences et de la philosophie du Moyen Age* (Studia Copernicana I), Wroclaw, Zaklad Narodowy Imienia Ossolińskich, 1970, 575-585.
[4] E. M. Bruins & M. Rutten (επιμ.): *Textes mathématiques de Susse*. Paris, Librairie Orientaliste Paul Geuthner, 1961.
[5] F. Cajori: *A History of Mathematics*. New York, Macmillan, 1919.

[18] Μετά από αυτό το παράδειγμα ακολουθεί ένα δεύτερο παράδειγμα, με τους τετραγώνους 25, 144 και 169.

[6] J. Christianidis & J. Oaks: *The Arithmetica of Diophantus. A complete translation and commentary*. London, New York, Routledge, 2023.

[7] Γ. Χριστιανιδης & J. Oaks: *Τα Αριθμητικά του Διόφαντου*. Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (υπό έκδοση).

[8] Διοφαντος: *Diophantus Alexandrinus opera omnia*, έκδ. P. Tannery, 2 τ. Leipzig, B. G. Teubner, 1893-95.

[9] Διοφαντος: *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, μτφρ. P. Ver Eecke. Paris, A. Blanchard, 1959.

[10] Διοφαντος: *Diofant Alexandrinskij, Arifmetica I kniga o mnogougol'nykh chislakh*, μτφρ. I. N. Vesselovski, σχολιασμός I. G. Bashmakova. Moscow, Nauka, 1977.

[11] Διοφαντος: *Diophante. Les Arithmétiques*, έκδ. R. Rashed, τ. 3–4. Paris, Les Belles Lettres, 1984.

[12] Ευκλειδης: *Euclidis Data, cum commentario Marini et scholiis antiquis*, έκδ. H. Menge. Leipzig, B. G. Teubner, 1896.

[13] J. Friberg: «Traces of Babylonian influence in the *Arithmetica* of Diophantus». Department of Mathematics, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg, Nr. 19, 1991.

[14] J. Itard: «Mathématiques pures et appliquées». Στο: *Histoire générale des sciences*, επιμ. R. Taton, τ. I, 307–354. Paris, Presses Universitaires de France, 1957.

[15] A. Jones: «Greek Mathematics to AD 300». Στο: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, επιμ. I. Grattan-Guinness, τ. I, 46–57. London, New York, Routledge, 1994.

[16] J. Klein: *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, μτφρ. E. Brann. Cambridge, Mass., The M.I.T. Press, 1968.

[17] É. Lucas: *Recherches sur l'analyse indéterminée et l'Arithmétique de Diophante*. Paris, Moulins, 1873.

[18] J.-É. Montucla: *Histoire des mathématiques*, 4 τ. Paris, Blanchard, 1966. (Πρώτη έκδ. σε 2 τ. Paris, Agasse, 1799–1802).

[19] R. Rashed (επιμ.): *Sciences à l'époque de la révolution française*. Paris, Blanchard, 1988.

[20] J. F. Scott: *A History of Mathematics*. London, Taylor & Francis, 1975.

[21] J. Sesiano: *Books IV to VII of Diophantus Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qusṭā ibn Lūqā*. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982.

[22] P. Tannery: «De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide», *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* 4 (1982) 395–416. Ανατύπωση στο *Mémoires Scientifiques de Paul Tannery*, επιμ. J. L. Heiberg και H. G. Zeuthen, τ. 2 (1912), 254–280.

[23] P. Tannery: «Études sur Diophante», *Bibliotheca Mathematica* (n.s.), 1 (1887): 37–43, 81–88, 103–108· 2 (1888): 3–6. Ανατύπωση στο *Mémoires Scientifiques de Paul Tannery*, επιμ. J. L. Heiberg, και H. G. Zeuthen, τ. 2 (1912), 367–399.

[24] B. L. Van der Waerden: *Η αφύπνιση της επιστήμης. Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά*, μτφρ. Γ. Χριστιανίδης. Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.

[25] K. Vogel: «Diophantus of Alexandria». Στο: *Dictionary of Scientific Biography*, επιμ. C. C. Gillispie, τ. 4, 110–119. New York, Charles Scribner's Sons, 1971.

[26] A. Weil: «Sur les origines de la géométrie algébrique». *Compositio Mathematica* 44 (1981), 395–406.

[27] A. P. Youschkevich: «Une édition en langue russe des œuvres de Diophante». *Revue d'histoire des sciences* 30 (1977), 338–343.

[28] H. G. Zeuthen: *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*, μτφρ. J. Mascart. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

ΕΠΙΜΕΤΡΟ

Όταν ετοίμασα το κείμενο «Les équations $F(x, y) = 0$ dans les *Arithmétiques* et la méthode de Diophante» που θα παρουσίαζα στο διεθνές συμπόσιο «Histoire de la lecture des anciens en mathématiques», στο Centre International des Rencontres Mathématiques (CIRM) στη Γαλλία, το έστειλα – όπως είθισται για νέους, όπως ήμουν εγώ την εποχή εκείνη, ερευνητές – σε αναγνωρισμένους συναδέλφους από το εξωτερικό για να μου πουν τη γνώμη τους για τη ρηξικέλευθη ερμηνεία που πρότεινα των τεχνικών που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος κατά τις επιλύσεις των προβλημάτων των *Αριθμητικών*. Συγκεκριμένα, το έστειλα σε πέντε διακεκριμένους ιστορικούς των μαθηματικών: στον David Fowler (1937–2004), καθηγητή τότε στο Μαθηματικό Ινστιτούτο του Πανεπιστημίου του Warwick, στον Sabetai Unguru (1931–2024), καθηγητή τότε στο Πανεπιστήμιο του Τελ Αβίβ, στον Jens Høyrup, καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Roskilde, στον Roshdi Rashed, στο Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales (CNRS, Paris), και στην Isabella Grigoryevna Bashmakova, η οποία ήταν καθηγήτρια στο Πανεπιστήμιο Λομονόσοφ, στη Μόσχα. Μάλιστα στην Bashmakova έστειλα και την απάντηση που είχα λάβει ήδη από τον Rashed, καθώς ο τελευταίος μου είχε επιτρέψει να τη δημοσιοποιήσω. Στην απαντητική επιστολή του (με ημερομηνία 2/5/1995) ο Unguru έγραφε ότι ο φόρτος εργασιών του δεν του επέτρεπε να διαβάσει το κείμενο και να διατυπώσει τη γνώμη του, ενώ ο Fowler στη δική του επιστολή (με ημερομηνία 6/5/1995) έγραφε ότι: «Δεν γνωρίζω πολλά για τον Διόφαντο, όμως μου αρέσει η εναλλακτική ερμηνεία σου. Σε τι ποσοστό του Διόφαντου μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί; Τα παραδείγματα που μου έστειλες επελέγησαν ειδικά, ή μπορείς να κάνεις τα ίδια πράγματα σε πολλά ακόμα; Στα περισσότερα; Έχω την αίσθηση ότι το θέμα θα αναχθεί σε αυτό το είδος γενικής 'αίσθησης', της αίσθησης του πόσο φυσικό είναι. Επίσης, θα ήθελα να δω μερικά παραδείγματα της ερμηνείας γραμμένα χωρίς τον αλγεβρικό συμβολισμό, όσο το δυνατόν πλησιέστερα προς το ίδιο το κείμενο του Διόφαντου.»

Στη συνέχεια θα παραθέσω τις επιστολές των Høyrup, Rashed και Bashmakova, και θα ολοκληρώσω με κάποια σχόλια για την όλη συζήτηση.

Η απαντητική επιστολή του Jens Høyrup (1/4/1995)

Αγαπητέ Γιάννη,

Σε ευχαριστώ πολύ για την επιστολή σου και για το περιοδικό[19] του οποίου, δυστυχώς, μπορώ να εκτιμήσω μόνο την αισθητική του ποιότητα

[19] Στον Høyrup είχα αποστείλει και το πρώτο τεύχος του νεότευκτου τότε περιοδικού *Νεύσις*, που είχε εκδοθεί το Φθινόπωρο του 1994 από τις Εκδόσεις Νεφέλη.

– η έκδοση είναι πολύ ωραία, το χαρτί είναι επιπέδου βιβλιόφιλης έκδοσης. *Συγχαρητήρια*!

Δεν βρήκα ακόμα τον χρόνο να μελετήσω σε βάθος τη συζήτησή σου των διοφαντικών προβλημάτων, αλλά καθώς μπορεί να περάσει καιρός μέχρι να τον βρω, σπεύδω να σου γράψω τις προκαταρκτικές παρατηρήσεις μου. Όπως ίσως το φαντάζεσαι, είμαι πεπεισμένος ότι βρίσκεσαι σε καλό δρόμο. Η φράση του Althusser την οποία θυμάμαι περισσότερο, και με την οποία συμφωνώ περισσότερο σε σύγκριση με τα άλλα, είναι η ειρωνεία του ως προς «την ιστορία που είναι γραμμένη σε τετελεσμένο μέλλοντα» – ενώ εκείνη του Μαρξ που μου προκαλεί τη μεγαλύτερη δυσκολία είναι η ιδέα ότι η ανατομία του ανθρώπου είναι το κλειδί για την ανατομία του πιθήκου. Δεν είμαι σίγουρος ότι θα αποτελούσε πρόβλημα αν η ερμηνεία σου ήταν λιγότερο γενική από την ερμηνεία των Bashmakova/Rashed: η θεωρία των χώρων Hilbert καλύπτει τόσο τη συναρτησιακή ανάλυση του 19ου αιώνα όσο και το *Ausdehnungslehre* του Grassman, αλλά είναι σαφώς (και για αυτόν ακριβώς τον λόγο) μια κακή ιστορική ερμηνεία των δύο. Η θεωρία των αναλογιών είναι προφανώς πολύ πιο εύλογη ως ερμηνεία. Μπράβο!

Με τους εγκάρδιους χαιρετισμούς μου,

Jens

Η απαντητική επιστολή του Roshdi Rashed (14/6/1995)

Αγαπητέ φίλε,

Ευχαριστώ πολύ για το τελευταίο σας κείμενο, το οποίο διάβασα αμέσως μόλις το έλαβα. Τα μαθήματα, τα ταξίδια και τα λοιπά με έκαναν να καθυστερήσω να σας γράψω. Ένας προφανής λόγος για το ενδιαφέρον που έχει αυτό το κείμενο είναι ότι ανακινεί πάλι το ερώτημα της ανάγνωσης του Διόφαντου, την οποία εκθέτετε με μεγάλη σαφήνεια. Έχετε δίκιο, αυτό το ερώτημα δεν πρέπει πέσει στη λήθη. Μπορείτε να φανταστείτε, λοιπόν, τη μεγάλη μου χαρά, καθώς και το ενδιαφέρον μου να διαβάσω το κείμενό σας. Ελπίζω ότι στο μέλλον θα μπορέσετε να έρθετε για έναν χρόνο στο Παρίσι για να συνεχίσετε τις έρευνές σας.

Έχω διαβάσει το κείμενο του Birkenmajer (το οποίο, επομένως, δεν «πέρασε [...] απαρατήρητο από την πλειονότητα των ιστορικών των ελληνικών μαθηματικών». Απαιτώ δικαιοσύνη !!!). Ας επανέλθουμε, λοιπόν, σε αυτή την ερμηνεία· σας παραθέτω τα επιχειρήματά μου, τα οποία μπορείτε να αναπαράγετε, εφόσον το επιθυμείτε, σε επίμετρο στη μελέτη σας.

Δεν θεωρώ ότι είμαι σύμφωνος για να μιλήσω για μια ερμηνεία «δια των αναλογιών», για τους εξής λόγους:

1. Στο κείμενο του Διόφαντου δεν λαμβάνει χώρα σχηματισμός αναλογιών προκειμένου να γίνει η αλλαγή μεταβλητής. Ο Διόφαντος προβαίνει πάντοτε μέσω βοηθητικής μεταβλητής, η οποία δεν χρειάζεται *καθόλου* σε μια πραγμάτευση με τη βοήθεια των αναλογιών.
2. Αντίθετα, ο Διόφαντος μιλάει ρητά για αντικατάσταση, αναγωγή, προκειμένου να αναγάγει την εξίσωση σε «ένα είδος ίσο προς ένα είδος».
3. Ο Διόφαντος δεν χρησιμοποιεί κατ' ουδένα τρόπο την πληροφορία που περιέχεται στην αναλογία. Για παράδειγμα, η $x^2 + y^2 = a^2$ οδηγεί στην $\frac{x}{a+y} = \frac{a-y}{x} = m$, από όπου προκύπτουν οι $y = a - mx$ **και** $my = x - am$. Αντί να χρησιμοποιήσει αυτές τις δύο πληροφορίες ο Διόφαντος αρκείται να μεταφέρει την $y = a - mx$ στην αρχική εξίσωση. Αν είχε χρησιμοποιήσει την αναλογία θα μπορούσε να είχε αξιοποιήσει τη συμπληρωματική πληροφορία, και να επιλύσει το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.
4. Η μέθοδος της «συμπλήρωσης των τετραγώνων», ή των κύβων, που χρησιμοποιείται αλλού, και ρητά, από τον Διόφαντο, εξηγεί τέλεια τις επιλύσεις όλων των εξισώσεων που παραθέτετε στο άρθρο σας. Στην 3η περίπτωση, για παράδειγμα, η αλλαγή μεταβλητής $x = 1 + t$ ανάγει αμέσως το πρόβλημα στην περίπτωση υπ' αριθμ. 2 του άρθρου σας, άρα σε ένα πρόβλημα συμπλήρωσης τετραγώνων, $y^2 = ax^2 + b$· αν δώσουμε στο x την τιμή 1 θα έχουμε αμέσως $a + b =$ τετράγωνος· αν, τώρα, αντικαταστήσουμε το x με $1 + t$, βρίσκουμε $y^2 = at^2 + 2at + (a + b) = at^2 + 2at + k^2$· επομένως, αυτό που συμβαίνει είναι ότι εφαρμόζεται η μέθοδος της συμπλήρωσης των τετραγώνων. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει την τεχνική των αναλογιών, δεν θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί αυτή των αντικαταστάσεων. Άλλωστε και σεις ο ίδιος χρησιμοποιείτε την αντικατάσταση όπως ο Διόφαντος.
5. Οι ταυτότητες είναι αναγκαίες για τη συμπλήρωση των τετραγώνων και των κύβων και δεν συνιστούν επιχείρημα υπέρ της αναλογίας. Δεν βλέπω άλλωστε τι εξηγεί ή προσθέτει η αναλογία, ενώ, προ πάντων, ο Διόφαντος δεν χρησιμοποιεί καμία αριθμητική ιδιότητα των αναλογιών. Αυτή η μέθοδος των αναλογιών, ακόμα και αν είχε χρησιμοποιηθεί από τον Διόφαντο, θα ήταν στην καλύτερη περίπτωση μια εμπειρική τεχνική και όχι μια αληθινή μέθοδος για τα προβλήματα ανώτερης διάστασης – και επομένως δεν θα μπορούσε να απαντήσει στο ερώτημα: να βρεθούν οι περιορισμένου αριθμού μέθοδοι που εφάρμοζε ο Διόφαντος.

6. Όταν είχα αναφερθεί στην Αθήνα στην ιστορική διάσταση της ερμηνείας των *Αριθμητικών*[20], εννοούσα να βρούμε ικανό αριθμό στοιχείων διοφαντικής ανάλυσης πριν από τον Διόφαντο και την εποχή του. Οι εργασίες των Βυζαντινών μαθηματικών, οι οποίες είναι ενδιαφέρουσες αυτές καθαυτές, δεν μπορούν να φωτίσουν, όπως εξάλλου και οι εργασίες των Αράβων, τις αληθινές μεθόδους του Διόφαντου. (Θα επιθυμούσα με αυτή την ευκαιρία να προχωρούσατε σε μια εργασία για τον Διόφαντο στο Βυζάντιο.)

Αυτά είναι, συνοπτικά, μερικά από τα σημεία που ήθελα να θίξω. Απομένει να επαναλάβω ότι σας διαβάζω πάντοτε με χαρά και ενδιαφέρον, έστω και αν στην αλληλογραφία μου δεν είμαι συνεπής!

Με όλη μου τη φιλία,
Roshdi Rashed

Η απαντητική επιστολή της I. G. Bashmakova (1/10/1995)

Αγαπητέ Κύριε Χριστιανίδη, αγαπητέ συνάδελφε,

Σας ευχαριστώ θερμά για την επιστολή και για το άρθρο σας. Διάβασα το κείμενό σας για μια νέα ερμηνεία των μεθόδων του Διόφαντου με μεγάλο ενδιαφέρον. Εκθέτετε την ιστορία του θέματος με μεγάλη σαφήνεια.

Η γνώμη μου, όμως, για την ερμηνεία σας συμπίπτει με αυτή του κ. Roshdi Rashed. Δεν μπορώ να δεχθώ την άποψή σας. Σε αυτή την επιστολή θέλω να κάνω μερικές ουσιαστικές παρατηρήσεις αναφορικά με την ερμηνεία σας.

1. Ο ίδιος ο Διόφαντος παρέχει μαρτυρία ενάντια σε αυτή την ερμηνεία. Στην εισαγωγή του στο βιβλίο Ι των *Αριθμητικών* εκθέτει τις αρχές μιας νέας άλγεβρας – αυτής των εξισώσεων. Εισάγει σύμβολα για τον άγνωστο και τις δυνάμεις του, δίνει τους κανόνες των πράξεων με εξισώσεις, κ.λπ. Ούτε λέξη για αναλογίες!
2. Πώς θα μπορούσε, λοιπόν, να γράφει ο Διόφαντος αναλογίες σαν τις
$$(a+y):x = x:(a-y)$$
$$(y-x^3):1 = (c^2-ax^3+bx):(y+x^3);$$
Με λέξεις; Μα αυτό θα ήταν ένα βήμα προς τα πίσω. Ούτε ο Ήρων ακόμα δεν χρησιμοποιεί αναλογίες.
3. Όλοι οι Άραβες μαθηματικοί, όπως και οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί των XVI–XVII αιώνων (Bombelli, Stevin, Viète, Fermat και πολλοί άλλοι), κατανοούσαν τις μεθόδους του Διόφαντου ως καθαρά αλγεβρικές, που αφορούσαν στη θεωρία των εξισώσεων.

[20] Ο Rashed αναφέρεται εδώ στην επίσκεψή του στην Αθήνα, την άνοιξη του 1995, κατόπιν πρόσκλησής μου, προκειμένου να δώσει μια διάλεξη στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ.

4. Με τη μέθοδο των αναλογιών δεν μπορούν να επιλυθούν οι «διπλές ισότητες».

Παρουσίασα μερικά σημεία αναφορικά με την ερμηνεία σας. Από την άλλη θα ήθελα πολύ να συνεχίσετε τις έρευνές σας για τον Διόφαντο στο Βυζάντιο. Κάτι τέτοιο θα ήταν πολύ σημαντικό για την ιστορία της επιστήμης. Κατά τη γνώμη μου κανείς άλλος δεν θα μπορούσε να το κάνει καλύτερα από εσάς.

Δεχθείτε τις καλύτερες ευχές μου για εσάς και την οικογένειά σας,

Ημέτερη,
Isabella Bashmakova

Σχόλια και διευκρινήσεις για το πλαίσιο της συζήτησης

Η συζήτηση που προηγήθηκε για τις ερμηνείες της μεθόδου που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος στις επιλύσεις των αριθμητικών προβλημάτων που έχει συμπεριλάβει στα *Αριθμητικά*, για να είναι γόνιμη και ουσιαστική, πρέπει να εκκινεί από μια βασική παραδοχή που να τη συμμερίζονται όλα τα εμπλεκόμενα μέρη. Πρέπει, συγκεκριμένα, όλοι οι συμμετέχοντες στη συζήτηση, όταν χρησιμοποιούν στα κείμενά τους τεχνικούς όρους, να αντιλαμβάνονται πίσω από αυτούς τους όρους τις ίδιες έννοιες. Δυστυχώς, φαίνεται ότι αυτή η προϋπόθεση δεν ισχύει στην προκειμένη περίπτωση. Υπάρχει σύγχυση ως προς τη χρήση των βασικών όρων «πρόβλημα», «εξίσωση» και «μέθοδος», συνέπεια της οποίας είναι η τελείως άστοχη χρήση μιας σειράς άλλων όρων όπως είναι οι όροι «αντικατάσταση», «μετασχηματισμός» και «αλλαγή μεταβλητής», που συναντήσαμε στα κείμενα που παρατέθηκαν προηγουμένως.

Για να διαλυθεί η σύγχυση θα χρησιμοποιήσω ως παράδειγμα το κείμενο του προβλήματος Β.8 των *Αριθμητικών*, το οποίο αναφέρθηκε συχνά στο κείμενο που προηγήθηκε. Για λόγους ευκολίας θα εξετάσω μόνο την πρώτη από τις δύο λύσεις του προβλήματος που παραθέτει ο Διόφαντος. Θα παραθέσω, λοιπόν, αρχικά τη μετάφραση του προβλήματος, αριθμώντας τα μέρη στα οποία χωρίζεται η κειμενική ενότητα του προβλήματος, προκειμένου να διευκολυνθούν οι αναφορές στη συζήτηση που θα ακολουθήσει.

Πρόβλημα Β.8

1	Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος τετράγωνος σε δύο τετραγώνους.
2	Έστω, λοιπόν, ότι έχει προταθεί να διαιρέσουμε τον 16 σε δύο τετραγώνους.
3	Και έστω ότι ο πρώτος έχει οριστεί να είναι 1 Δύναμη.
4	Άρα ο άλλος θα είναι 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης.
5	Άρα, 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης θα πρέπει να είναι ίσες προς έναν τετράγωνο.
6	Σχηματίζω τον τετράγωνο από οσουσδήποτε Αριθμούς με έλλειψη τόσων μονάδων όσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων. Έστω (από) 2 Αριθμούς με έλλειψη 4 μονάδων.
7	Άρα ο ίδιος ο τετράγωνος θα είναι 4 Δυνάμεις, 16 μονάδες με έλλειψη 16 Αριθμών.
8	Αυτά είναι ίσα προς 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης.
9	Ας προστεθεί αυτό που λείπει από κοινού και (ας αφαιρεθούν) τα όμοια από τα όμοια. Άρα, 5 Δυνάμεις είναι ίσες προς 16 Αριθμούς, οπότε ο Αριθμός γίνεται 16 πέμπτα.
10	Ο ένας θα είναι 256 25α, ο άλλος 144 25α, και όταν προστεθούν οι δύο γίνονται 400 25α, ήτοι 16 μονάδες, και ο καθένας είναι τετράγωνος.

Το πρώτο σημείο που πρέπει να διευκρινίσουμε είναι ότι στο κείμενο αυτό ο Διόφαντος διατυπώνει και επιλύει ένα *αριθμητικό πρόβλημα και όχι μια αλγεβρική εξίσωση*. Το πρόβλημα διατυπώνεται στη γραμμή 1 με γενικούς όρους, ενώ στη γραμμή 2 διατυπώνεται μια συγκεκριμένη εκδοχή του, στην οποία έχει εκχωρηθεί η αριθμητική τιμή 16 στον δεδομένο τετράγωνο. Αν γράφαμε εμείς σήμερα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας συμβολική γλώσσα θα το γράφαμε ως $x^2 + y^2 = a^2$, στη γενική περίπτωση (γραμμή 1) και ως $x^2 + y^2 = 16$, στη συγκεκριμενοποιημένη εκδοχή του (γραμμή 2). Θα γράφαμε δηλαδή το πρόβλημα ως αλγεβρική εξίσωση με δύο αγνώστους (διοφαντική εξίσωση). Κάνοντας, όμως, αυτό, θα είχαμε κάνει δύο ενέργειες που *δεν περιέχονται στο κείμενο*: θα είχαμε δώσει ονόματα στους δύο ζητούμενους τετραγώνους, αποκαλώντας τον έναν x^2 και τον άλλο y^2. Αυτή η απόδοση ονομάτων μετατρέπει το πρόβλημα από ένα πρόβλημα αριθμητικής σε μια αλγεβρική εξίσωση με δύο αγνώστους. Αυτή η μετατροπή, όμως, παραβιάζει τον τρόπο που σκέπτεται ο Διόφαντος. Ο Διόφαντος δεν διατυπώνει καμιά αλγεβρική εξίσωση με δύο αγνώστους· διατυπώνει, και θα λύσει στη συνέχεια, ένα αριθμητικό πρόβλημα, στο οποίο ζητείται να βρεθούν δύο άγνωστοι τετράγωνοι αριθμοί.

Ακριβώς σε αυτό το σημείο εντοπίζεται το πρώτο θεμελιώδες λάθος που κάνουν ο Rashed και η Bashmakova, απότοκα του οποίου είναι οι αναφορές σε «αντικαταστάσεις», «μετασχηματισμούς» και «αλλαγές μεταβλητών», όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια. Είναι προφανές, επίσης, ότι το αριθμητικό πρόβλημα δεν ορίζει καμία αλγεβρική καμπύλη.

Αλγεβρική καμπύλη (κύκλο εν προκειμένω) ορίζει η εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$, όμως ο Διόφαντος, όπως εξηγήσαμε, δεν διατυπώνει καμιά τέτοια εξίσωση.

Ας δούμε, τώρα, τι κάνει ο Διόφαντος στις γραμμές 3 και 4 του κειμένου. Σε αυτές τις γραμμές αποδίδει ονόματα στις άγνωστες αριθμητικές τιμές των ζητούμενων τετραγώνων. Ορίζει, λοιπόν, τον πρώτο τετράγωνο να ονομάζεται «1 Δύναμη» (συντομογραφικά, 1Δ) και τον δεύτερο τετράγωνο να ονομάζεται «16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης» (συντομογραφικά, αν και με αναχρονιστική χρήση του σημείου «−», 16μ − 1Δ). Τις δύο αυτές ενέργειες θα μπορούσαμε να τις γράψουμε, μένοντας κοντά στο κείμενο του Διόφαντου (με εξαίρεση τη χρήση του «−»), ως εξής:

$$\begin{aligned} &1\text{ος τετράγωνος} := 1\Delta, \\ &2\text{ος τετράγωνος} := 16\mu - 1\Delta. \end{aligned}$$

Πρόκειται και στις δύο περιπτώσεις για αλγεβρικά ονόματα που αποδίδονται στις άγνωστες αριθμητικές τιμές των δύο ζητούμενων τετραγώνων, προκειμένου στη συνέχεια να είναι δυνατή η εκτέλεση πράξεων, μέσω των ονομάτων, με αυτές τις τιμές, σαν να ήταν γνωστοί αριθμοί. Με σύγχρονους όρους θα μπορούσαμε να γράψουμε τους δύο ονοματισμούς ως

$$\begin{aligned} &1\text{ος τετράγωνος} := t^2, \\ &2\text{ος τετράγωνος} := 16 - t^2. \end{aligned}$$

Τώρα, οι οπαδοί της αλγεβρο-γεωμετρικής ερμηνείας, έχοντας ήδη ερμηνεύσει το πρόβλημα ως $x^2 + y^2 = 16$, αποδίδουν τις γραμμές 3 και 4 του κειμένου ως

$$\begin{aligned} x^2 &= t^2, \\ y^2 &= 16 - t^2. \end{aligned}$$

Έχοντας, όμως, αποδώσει εξαρχής τα ονόματα x^2 και y^2 στους δύο τετραγώνους, αδυνατούν να αντιληφθούν ότι τα t^2 και $16 - t^2$ είναι ονόματα που αποδίδονται σε δύο μη ονοματισμένες ποσότητες – αφού έχουν ήδη αποδώσει σε αυτές τα ονόματα x^2 και y^2 – και για αυτό είναι υποχρεωμένοι να περιγράφουν τις παραπάνω σχέσεις ως «αντικαταστάσεις», «μετασχηματισμούς» ή «αλλαγές μεταβλητής», διαστρεβλώνοντας έτσι τον τρόπο του σκέπτεσθαι του Διόφαντου.

Στη γραμμή 5 του κειμένου ο Διόφαντος αναφέρει ότι το πολυώνυμο 16μ − 1Δ (με σύγχρονους όρους, $16 - t^2$) πρέπει να είναι τετράγωνος αριθμός. Αυτή η δήλωση δεν πρέπει να θεωρείται ότι ταυτίζεται με ό,τι γράφεται στη γραμμή 4: στη γραμμή 4 αποδίδεται αλγεβρικό όνομα στον 2ο τετράγωνο, ενώ στη γραμμή 5 αρχίζει να διαμορφώνεται η αλγεβρική εξίσωση που θα καταστρωθεί από το πρόβλημα. Λέμε «αρχίζει να διαμορφώνεται» διότι στο στάδιο αυτό της επίλυσης έχει κατασκευαστεί μόνο το πρώτο μέλος της εξίσωσης, δηλαδή το πολυώνυμο 16μ − 1Δ (με σύγχρονους όρους, $16 - t^2$). Για να έχουμε μια πλήρως κατασκευασμένη εξίσωση πρέπει να κατασκευάσουμε και το δεύτερο μέλος της, πρέπει δηλαδή να ονοματίσουμε τον τετράγωνο προς τον οποίο ισούται το πολυώνυμο 16μ − 1Δ. Έχουμε, με άλλα λόγια, στη γραμμή 5 μια κατά το ήμισυ σχηματισμένη εξίσωση, ή, διαφορετικά, μια εξίσωση εν τω γεννάσθαι, την οποία θα μπορούσαμε να γράψουμε ως 16μ − 1Δ = □.

Ο ονοματισμός του μη ονοματισμένου τετραγώνου (□) γίνεται στη γραμμή 6 του κειμένου, με τη φράση «Σχηματίζω τον τετράγωνο από [...] 2 Αριθμούς με έλλειψη 4 μονάδων», που σημαίνει ότι στην πλευρά του τετραγώνου αποδίδεται το όνομα «2 Αριθμοί με έλλειψη 4 μονάδων» (συντομογραφικά, 2Α − 4μ). Την ενέργεια απόδοσης αυτού του ονόματος θα μπορούσαμε να τη γράψουμε ως $\sqrt{\Box}$: = 2Α − 4μ, ή, με σύγχρονους όρους, ως $\sqrt{\Box} := \ 2t - 4$. Στη συνέχεια, στην 7η γραμμή, ο Διόφαντος βρίσκει το ανάπτυγμα του τετραγώνου του πολυωνύμου 2Α − 4μ, το οποίο είναι «4 Δυνάμεις, 16 μονάδες με έλλειψη 16 Αριθμών», ήτοι (με αναχρονιστική χρήση των συμβόλων «+» και «−») 4Δ + 16μ − 16Α, ή, με σύγχρονους όρους $4t^2 + 16 - 16t$. Τώρα πια, έχοντας κατασκευάσει και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης, είναι σε θέση να γράψει την εξίσωση. Αυτό γίνεται στην 8η γραμμή με τη φράση «Αυτά είναι ίσα προς 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης». Πρόκειται, λοιπόν, για την εξίσωση

$$4\Delta + 16\mu - 16\mathrm{A} = 16\mu - 1\Delta,$$

ή, με σύγχρονους όρους,

$$4t^2 + 16 - 16t = 16 - t^2.$$

Αυτή είναι η εξίσωση που κατασκευάζει ο Διόφαντος από το πρόβλημα, *η μόνη εξίσωση που περιέχεται στο κείμενό του*. Ούτε το πρόβλημα είναι εξίσωση, ούτε η φράση που αναφέρεται στη γραμμή 5 είναι, κυριολεκτικά μιλώντας, εξίσωση, παρά τη χρήση του επιθέτου «ίσες» που περιέχεται σε αυτή. Η εξίσωση αναφέρεται στη γραμμή 8. Στη συνέχεια του κειμένου (9η γραμμή) η εξίσωση απλοποιείται για να λάβει την τελική μορφή της και επιλύεται, οπότε υπολογίζεται η αριθμητική τιμή του Αριθμού (δηλ. η αριθμητική τιμή του t). Κατόπιν, στην τελευταία γραμμή, υπολογίζονται οι αριθμητικές τιμές των ζητούμενων τετραγώνων και γίνεται η επαλήθευση.

Η ερμηνεία δια της αλγεβρικής γεωμετρίας είναι εσφαλμένη όχι μόνο για τον προφανή λόγο ότι είναι αναχρονιστική αλλά και διότι διαστρεβλώνει τα βήματα της επιλυτικής διαδικασίας που περιέχει το κείμενο. Αποδίδει ονόματα (x^2 και y^2) σε όσα αναφέρονται στις γραμμές 1 και 2, ενώ ο Διόφαντος αποδίδει ονόματα στις γραμμές 3 και 4. Θεωρεί ότι στις γραμμές 1 και 2 διατυπώνεται εξίσωση, ενώ ο Διόφαντος διατυπώνει την εξίσωση στη γραμμή 8. Ερμηνεύει όσα αναφέρονται στις γραμμές 3, 4 και 6 ως «αντικαταστάσεις», «αλλαγές μεταβλητής» κ.λπ., ενώ αυτό που γίνεται σε αυτές τις γραμμές είναι ότι αποδίδονται ονόματα σε μη ονοματισμένες ποσότητες. Ερμηνεύει το περιεχόμενο της γραμμής 5 ως ταυτόσημο με το περιεχόμενο της γραμμής 2, ενώ, όπως είδαμε, στη γραμμή 5 αρχίζει στην πραγματικότητα να καταστρώνεται η εξίσωση, η κατάστρωση της οποίας θα ολοκληρωθεί στη γραμμή 8. Τέλος, θεωρεί ότι άγεται η ευθεία $x = t, y = 2t - 4$ από το σημείο $(0, -4)$ του κύκλου

$x^2 + y^2 = 16$, συνδυάζοντας αυθαίρετα τις πληροφορίες που περιέχονται σε δύο τελείως διαφορετικά σημεία του κειμένου, στις γραμμές 2 και 6. Για όλους αυτούς τους λόγους η αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία όχι μόνο είναι τελείως και σε ακραίο βαθμό αναχρονιστική αλλά, επίσης, διαστρεβλώνει τη σειρά των βημάτων της επιλυτικής διαδικασίας που ακολουθεί ο Διόφαντος.

Το τελευταίο σημείο που πρέπει να διευκρινιστεί είναι η χρήση του όρου «μέθοδος». Όπως ξέρουμε οι ιστορικοί των μαθηματικών από τον δέκατο όγδοο αιώνα και μετά διαφωνούν ως προς το εάν ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε ενιαία μεθοδολογία στις επιλύσεις των προβλημάτων των *Αριθμητικών*. Το ακανθώδες σημείο στο οποίο έχει επικεντρωθεί η συζήτηση είναι, όσον αφορά στο παράδειγμα του προβλήματος Β.8, το περιεχόμενο της γραμμής 6. Σύμφωνα με τη μία εκδοχή αυτά που γράφει ο Διόφαντος στην 6η γραμμή του Β.8 είναι καρπός μιας μεθοδικής διαδικασίας – η οποία κατά τους οπαδούς της αλγεβρο-γεωμετρικής ερμηνείας δεν είναι άλλη από ό,τι οι σύγχρονοι αλγεβρο-γεωμέτρες αποκαλούν «μέθοδο της τεμνούσης» και «μέθοδο της εφαπτομένης» για την εύρεση των ρητών σημείων μιας αλγεβρικής καμπύλης, ενώ κατά τον Πλανούδη είναι η μετατροπή μιας σχέσης σε αναλογία. Σύμφωνα με την άλλη εκδοχή όσα αναφέρονται στην 6η γραμμή δεν απορρέουν από κανενός είδους μεθοδική διαδικασία. Όταν ο Hankel έγραφε το ότι «είναι [...] δύσκολο για έναν σύγχρονο μαθηματικό ακόμα και αν έχει διαβάσει 100 διοφαντικές λύσεις να λύσει το 101ο πρόβλημα» είχε κατά νου φράσεις των διοφαντικών επιλύσεων σαν αυτή της 6ης γραμμής του προβλήματος Β.8. Το ερώτημα περί ενιαίας μεθόδου στον Διόφαντο, λοιπόν, είχε ευθύς εξαρχής περιοριστεί στην εξήγηση του κειμένου της 6ης γραμμής. Στην 6η γραμμή, όμως, όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, ο Διόφαντος αποδίδει αλγεβρικό όνομα στην πλευρά του μη ονοματισμένου τετραγώνου προς τον οποίο πρέπει να εξισωθεί το πολυώνυμο 16μ – 1Δ ($16 - t^2$). Η συγκεκριμένη ενέργεια δεν καλύπτει το σύνολο της επίλυσης του προβλήματος Β.8· αποτελεί απλώς μια στιγμή της επιλυτικής διαδικασίας. Η αναζήτηση μεθόδου για να εξηγηθεί το περιεχόμενο της 6ης γραμμής δεν αφορά, λοιπόν, στην επίλυση συνολικά, αλλά μόνο στην εύρεση ονόματος για την πλευρά ενός μη ονοματισμένου τετραγώνου. Πρόκειται, δηλαδή, περί μεθόδου ονοματοδοσίας και όχι περί μεθόδου επίλυσης του προβλήματος. Στο κείμενο της ομιλίας μου του 1995 απέδειξα ότι οι ονοματισμοί σε περιπτώσεις ημιτελών εξισώσεων της μορφής $F(t) = \Box$ που λαμβάνουν χώρα στα προβλήματα των *Αριθμητικών* μπορούν να εξηγηθούν με ενιαίο τρόπο, με την τεχνική των αναλογιών. Η επίλυση των προβλημάτων, όμως, είναι κάτι διαφορετικό από την ονοματοδοσία. Και η Μέθοδος που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος για να επιλύσει τα αριθμητικά προβλήματα που συμπεριέλαβε στα *Αριθμητικά* δεν είναι άλλη από την Άλγεβρα, με την προ-μοντέρνα σημασία του όρου «Άλγεβρα».

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΟΛΩΝ ΤΩΝ HØYRUP, RASHED ΚΑΙ BASHMAKOVA

Jens Høyrup
Department of Languages and Culture
University of Roskilde
P.O. Box 260
DK-4000 Roskilde
Denmark
TEL (+45) 46 75 77 11
Private + FAX (+45) 31 31 41 87

1. avril 1995

Dr. Jean Christianidis
10, rue Chrisanthèmon
GR-15772 Athènes
Grækenland

Cher Jean,

Merci beaucoup pour ta lettre et pour la revue dont, malheureusement, je peux seulement apprécier les qualités esthétiques – la mise en page très belle, le papier en qualité d'édition bibliophile. *Félicitations!*

Je n'ai pas encore eu le temps de lire en profondeur ta discussion des problèmes, diophantines, mais puisqu'il peut durer en peu avant que je le trouve je me hâte de t'écrire mes remarques préliminaires. Comme tu le devines peut-être, je suis convaincu que tu suis la trace bonne. La phrase d'Althusser dont je me souviens le mieux, et avec lequel je sympathise plus qu'avec le reste, est son ironie vers "l'histoire écrite en future-parfait" – et celle chez Marx qui me donne la plus grande difficulté est l'idée que le clef pour l'anatomie du singe soit l'anatomie de l'homme. Je ne suis même pas sûr qu'il soit un problème si ton interprétation serait moins générale que celle de Bashmakova/Rashed: la théorie des espaces Hilbert couvre l'analyse fonctionnelle du 19$^{\text{ième}}$ siècle aussi bien que l'*Ausdehnungslehre* de Grassman, mais elle est certainement (et pour cette même raison) une mauvaise interprétation historique des deux. La théorie des proportions est évidemment beaucoup plus plausible comme interprétation. Bravo!

J'inclus une prépublication et deux manuscrits en photocopie. "On the mensuration ..." va paraître dans les actes d'un colloque sur les mathématiques arabes tenu en Tunisie en décembre 1994.

Avec mes salutations cordiales

Jens

Jens

Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales
(D 1085)
C.N.R.S. - É.P.H.É. (5e section)
27 rue Damesme - 75013 Paris

Tél.: 45.81.14.85
Fax.: 45.80.78.47

Pr. J. Christianidis

Le 14 juin 95

Cher ami,

Merci bien de votre dernier texte que j'ai lu à réception. Les cours, les voyages, et le reste, m'ont mis en retard pour vous écrire. L'un des intérêts manifestes de ce texte est de revenir encore à la question de la lecture de Diophante, que vous exposez très clairement. Vous avez raison, cette question ne doit pas tomber dans l'oubli. Vous pouvez donc imaginer tout mon plaisir, et aussi mon intérêt, à lire vos pages. J'espère que dans l'avenir vous pourrez séjourner une année à Paris pour poursuivre vos recherches.

J'ai lu le texte de Birkenmajer (il n'est donc pas "passé … tout à fait inaperçu par les historiens des mathématiciens". Je demande justice !!!). Revenons donc à cette interprétation ; je vous donne mes arguments, que vous pouvez reproduire, si vous le voulez, en appendice à votre étude.

Je ne pense pas être d'accord pour parler d'une interprétation "proportionnelle", pour les raisons suivantes :

1-. Dans le texte de Diophante, il n'y a pas de mise en forme des proportions pour déterminer le changement de variable. Diophante passe toujours par la variable auxiliaire, dont on n'a *nul* besoin dans un exposé à l'aide des proportions.

2-. En revanche, Diophante parle explicitement de substitution, réduction, pour ramener l'équation à "une espèce égale une espèce".

3-. Diophante n'utilise aucunement l'information contenue dans la proportion. Par exemple

$$x^2 + y^2 = a^2$$

conduit à

$$\frac{x}{a+y} = \frac{a-y}{x} = m,$$

ce qui donne

$$y = a - mx \ \textbf{et} \ my = x - am.$$

Diophante, au lieu d'utiliser ces deux informations, se contente de rapporter $y = a - mx$ dans l'équation initiale. S'il avait utilisé la proportion, il aurait pu profiter de cette information supplémentaire, et résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

4-. La méthode de "complétion des carrés", ou des cubes, utilisée ailleurs, et explicitement, par Diophante, explique parfaitement les résolutions de toutes les équations citées dans votre article.

Dans le cas 3, par exemple (p. 12), le changement de variable $x = 1 + t$, ramène le problème immédiatement au cas n° 2 de votre article, donc à un problème de complétion des carrés

$$y^2 = ax^2 + b;$$

si on donne à x la valeur 1, on a immédiatement

$$a + b = \text{un carré} ;$$

si maintenant on remplace x par $1 + t$, on trouve

$$y^2 = at^2 + 2at + (a+b) = at^2 + 2at + k;^2$$

on applique alors la méthode de complétion des carrés.

Si on avait utilisé la technique des proportions, on n'aurait pas dû utiliser celle des substitutions. D'ailleurs vous-même utilisez la substitution comme Diophante (voir p. 13).

5-. Les identités sont nécessaires pour compléter les carrés et les cubes, et ne représentent pas un argument en faveur de la proportion. Je ne vois d'ailleurs pas ce que la proportion explique ou ajoute, alors surtout que Diophante n'utilise *aucune propriété arithmétique* des proportions. Cette méthode des proportions, même si elle avait été utilisée par Diophante, l'aurait été au mieux comme technique empirique, et non pas comme une vraie méthode pour des problèmes de dimension supérieure — et ne pourra donc résoudre le problème : trouver un nombre limité des méthodes qui ont été appliquées par Diophante.

6-. Quand j'ai évoqué à Athènes la dimension historique de l'interprétation des Arithmétiques, j'entendais déterminer suffisamment d'éléments en analyse diophantienne avant Diophante, et à son époque. Les travaux des mathématiciens byzantins, importants pour eux-mêmes, ne peuvent éclairer, pas plus d'ailleurs que les mathématiciens arabes, les vraies méthodes de Diophante (je souhaiterais à ce propos que vous poursuiviez un travail sur Diophante byzantin).

Voilà, brièvement exposés, les quelques points que je voulais soulever. Il me reste à répéter que c'est toujours avec plaisir et intérêt que je vous lirai, même si je suis un mauvais correspondant !

En toute amitié,

RRashed

Roshdi Rashed

I.G.BASHMAKOVA

A Dr. J.Christianidis
Moscou, le Ier octobre, I995

Cher Monsieur Christianidis, cher collè~~a~~gue!

Je vous remercie vivement pour votre lettre et votre article. J'ai lu votre papier sur une nouvelle interprétation des méthodes de Diophante avec un~~e~~ grand~~e~~ ~~satisfaction~~ intérêt. Vous exposez l'histoire de la question bien clairement.

Mais mon avis sur votre interprétation coïncide avec selui de M. Roshdi Rashed. Je ne peut pas accepter votre point de vue. Dans cette lettre je veux faire quelques remarques essentielles sur votre interprétation.

I. Diophante lui-meme temoigne contre cette interprétation. Dans son introduction au Livre I d'Arithmétique il expose les principes d'une nouvelle algèbre - celle des équation. Il introduit des symboles pour l'inconnue et ses puissances, donne des règles pour opérations avec des équations, etc. Pas un mot sur des proportions!

2. Comment donc Diophante pouvait ecrire des proportions:

$$(a+y):x = x:(a-y)$$

$$(y-x^3):1 = (c^2-ax^3+bx):(y+x^3)?$$

Avec des mots? Mais ce serait un pas en arrière. Déjà Héron n'utilisait pas des proportions!

3. Tous les mathématiciens arabes et ceux d'Europe de XVIe - XVIIe siècles (Bombelli, Stevin, Viète, Fermat et beaucoup d'autres) comprenaient les méthodes de Diophante comme purement algébriques, concernant la théorie des équations.

4. On ne peut pas résoudre les "doubles équations" avec la méthode des proportions.

J'ai exposé ici quelques points concernants votre interp~~p~~rétation. En outre je souhaite beaucoup que vous poursuiviez des recherches sur Diophante byzantin. Ce serait bien important pour l'histoire de science. Sur mon avis personne ne peut le faire mieux que vous.

Veuillez accepter mes meilleurs veux pour vous et pour votre famille. Votre

И.Башмакова

Isabella Bashmakova