

Ο ΧΕΓΚΕΛ ΚΑΙ Ο ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΓΙΑΝΝΗΣ ΠΙΣΣΗΣ*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ. Η *Επιστήμη της Λογικής* του Χέγκελ περιλαμβάνει μια εκτενή πραγματεύση του απειροστικού λογισμού, που μόνο σε μικρό βαθμό έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον της έρευνας. Η εργασία επιχειρεί να τοποθετήσει την ιδιότυπη θέση του Χέγκελ στο πλαίσιο των συζητήσεων της εποχής του για τη θεμελίωση της μαθηματικής ανάλυσης και εξετάζει ιδιαίτερα τη στάση του Χέγκελ απέναντι στον Νεύτωνα, τον Λαγκράνζ και τον Κωσύ. Προπάντων, επιχειρείται ναδειχτεί ότι η προσέγγιση του Χέγκελ στον απειροστικό λογισμό μπορεί να φωτίσει ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες της φιλοσοφίας του, όπως την έννοια του «αληθινού απείρου» ή εκείνη της «στιγμής» (Moment).

ABSTRACT. Hegel's *Science of Logic* contains a lengthy discussion of the infinitesimal calculus, that has attracted the interest of research only to a small extent. The paper attempts to place Hegel's peculiar position within the context of the debates of his time on the foundations of the calculus, and examines in particular Hegel's reception of Newton, Lagrange and Cauchy. Above all, the paper attempts to show that Hegel's approach to the calculus can shed some light on key Hegelian concepts such as the concept of "true infinity" or the concept of a "moment".

Ultimae rationes non sunt rationes quantitatum ultimarum.

Νεύτων

Αν κάποια ή κάποιος πιάσει για πρώτη φορά και ξεφυλλίσει την *Επιστήμη της Λογικής*, το *opus magnum* του Χέγκελ (Hegel), μάλλον θα ξαφνιαστεί από το γεγονός ότι ένα εκτενέστατο τμήμα του έργου είναι αφιερωμένο στον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό και μάλιστα σε μια ακραιφνώς τεχνική συζήτηση γύρω από υπολογισμούς παραγώγων και ολοκληρωμάτων, σειρές Τέιλορ (Taylor), εφαρμογές σε προβλήματα της γεωμετρίας και της μηχανικής. Οι παρεκβάσεις που είναι αφιερωμένες σε αυτό το θέμα καταλαμβάνουν πάνω από εκατό σελίδες του πρώτου βιβλίου, της *Λογικής του Είναι*, στην επεξεργασμένη δεύτερη έκδοση του 1832.¹ Ωστόσο, τα συγκεκριμένα χωρία σε μικρό μόνο βαθμό έχουν

* Ο ΓΙΑΝΝΗΣ ΠΙΣΣΗΣ είναι Επίκουρος Καθηγητής Λογικής, Μεταφυσικής και Φιλοσοφίας των Επιστημών στο Τμήμα Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου Κρήτης. – Προσχέδια της εργασίας αποτέλεσαν τη βάση προφορικών εισηγήσεων (α) στο 5ο Πανελλήνιο Συνέδριο Φιλοσοφίας της Επιστήμης στο Πανεπιστήμιο Αθηνών τον Νοέμβριο του 2018, (β) στο ερευνητικό σεμινάριο *Διαλεκτική* στο Πανεπιστήμιο Αθηνών τον Μάρτιο του 2019, (γ) στο workshop *Hegel's Logic in context* στο Πανεπιστήμιο Κρήτης, στο Ρέθυμνο, τον Μάιο του 2022. Ευχαριστώ όσες και όσους συμμετείχαν στις συζητήσεις. Επίσης, ευχαριστώ τους ανώνυμους κριτές της *Νεύσης* για την επισήμανση αβλεψιών και, προπάντων, για την ώθηση να διατυπώσω καθαρότερα ορισμένα σημεία.

¹ G. W. F. HEGEL: *Wissenschaft der Logik I: Die objektive Logik. 1: Die Lehre vom Sein* (1832), επιμ. F. Hogemann & W. Jaeschke, *Gesammelte Werke*, τ. 21, Hamburg, Meiner,

προσελκύσει το ενδιαφέρον της έρευνας μέχρι σήμερα.² Εκείνα που ο Χέγκελ είχε να πει για τη μαθηματική ανάλυση, δεν φαίνεται να λαμβάνονται ιδιαίτερα υπόψη ούτε σε σχέση με την ιστορία και τη φιλοσοφία των μαθηματικών ούτε, όμως, στο πλαίσιο των εγελιανών σπουδών, δηλαδή προκειμένου η κατανόηση και ερμηνεία τους να συμβάλει στην εν γένει κατανόηση και ερμηνεία της φιλοσοφίας του Χέγκελ.

Τον δεύτερο αυτό στόχο φιλοδοξεί πρωτίστως να υπηρετήσει η εργασία που ακολουθεί. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει δεν αφορούν τόσο το τι έχει να μας πει ο Χέγκελ για τον απειροστικό λογισμό, όσο το τι έχουν να μας πουν για τη φιλοσοφία του Χέγκελ οι θέσεις του για τον απειροστικό λογισμό. Σκοπός είναι να δειχτεί ότι οι εκτενείς παρεκβάσεις της Λογικής για τη μαθηματική ανάλυση είναι πράγματι σε θέση να φωτίσουν ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες της εγελιανής φιλοσοφίας και τη σχέση τους με την ιστορία των επιστημών. Προκειμένου, βέβαια, να συναχθεί αυτό το συμπέρασμα, θα πρέπει πρώτα να εξεταστεί τι ακριβώς έγραψε ο Χέγκελ για τη μαθηματική ανάλυση και, πρώτα απ' όλα, να εξεταστεί σε ποιο φόντο έγραψε ό,τι έγραψε, ποια ήταν δηλαδή τα ζητήματα που τίθεντο για τα μαθηματικά και για τη φιλοσοφία των μαθηματικών στις αρχές του 19ου αιώνα.

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

Ο Χέγκελ συζητά τον «απειροστικό λογισμό» (Infinitesimalrechnung) (GW 21, σ. 264, 271) –χρησιμοποιεί επίσης τους όρους «λογισμός του απείρου» (GW 21, σ. 237, 259) και «μαθηματικά του απείρου» (GW 21, σ. 252), αλλά συνήθως μιλά για τον «διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό» (Differential- und Integralrechnung) (GW 21, σ. 251, 298) ή για την

1984, σ. 236-309 (=σ. 300-412 στην πρωτότυπη έκδοση του 1832). Στο εξής, οι παραπομπές στην κριτική έκδοση των Απάντων του Χέγκελ θα γίνονται εντός κειμένου με τη συντομογραφία GW (= Gesammelte Werke), τον αριθμό του τόμου και τον αριθμό της σελίδας.

² Ανάμεσα στις λίγες εξαιρέσεις, ξεχωρίζει ακόμη η διαφωτιστική εργασία του Michael Wolff από το έτος 1986: M. WOLFF: «Hegel und Cauchy. Eine Untersuchung zur Philosophie und Geschichte der Mathematik». Στο: *Hegels Philosophie der Natur. Beziehungen zwischen empirischer und spekulativer Naturerkenntnis*, επιμ. R.-P. Horstmann & M. J. Petry, Stuttgart, Klett-Cotta, 1986, 197-263. Πβ. ακόμη T. PINKARD: «Hegel's Philosophy of Mathematics», *Philosophy and Phenomenological Research* 41 (1981), 452-464· A. MORETTO: «L'Influence de la 'Mathématique de l'Infini' dans la formation de la Dialectique Hégélienne». Στο: *Hegels Philosophie der Natur*, επιμ. Horstmann & Petry, 175-196· P. STEKELER-WEITHOFER: *Philosophie des Selbstbewußtseins. Hegels System als Formanalyse von Wissen und Autonomie*, Frankfurt/M., Suhrkamp, 2006, σ. 240-266 (σε πρώτη έκδοχή ως «Hegels Philosophie der Mathematik». Στο: *Vernunftkritik nach Hegel. Analytisch-kritische Interpretationen zur Dialektik*, επιμ. C. Demmerling & F. Kambartel, Frankfurt/M., Suhrkamp, 1992, 214-249)· P. STEKELER-WEITHOFER: «Mathematical Thinking in Hegel's Science of Logic». Στο: *International Yearbook of German Idealism*, τ. 3: *German Idealism and Contemporary Analytic Philosophy*, επιμ. J. Stolzenberg & K. Ameriks, Berlin, De Gruyter, 2005, 243-260.

«ανώτερη ανάλυση» (GW 21, σ. 91, 241)– στο πρώτο βιβλίο της *Επιστήμης της Λογικής*, τη *Λογική του Είναι*, σε τρεις εκτενείς παρατηρήσεις, δηλαδή παρεκβάσεις, στο τέλος του κεφαλαίου για την κατηγορία του μεγέθους (Quantum). Στην πρώτη έκδοση του 1812 περιλαμβάνεται μόνο η πρώτη από τις τρεις παρατηρήσεις, χωρίς τίτλο και όχι ολόκληρη.³ Στη δεύτερη έκδοση του 1832, η παρατήρηση αυτή συμπληρώνεται και απο-κτά τον τίτλο «Ο προσδιορισμός της έννοιας του μαθηματικού απείρου» (GW 21, σ. 236-273), ενώ προστίθενται η δεύτερη και η τρίτη παρατήρηση, με τίτλους «Ο σκοπός του διαφορικού λογισμού όπως συνάγεται από την εφαρμογή του» (GW 21, σ. 273-299) και «Κάποιες ακόμη μορφές συναφείς με τον ποιοτικό προσδιορισμό της ποσότητας» (GW 21, σ. 299-309). Συνολικά, η συζήτηση για την ανάλυση καταλαμβάνει στην πρώτη έκδοση λίγο περισσότερο από το ένα τρίτο της έκτασης που καταλαμβάνει στη δεύτερη έκδοση.

Στις παρεκβάσεις, ο Χέγκελ συζητά αναλυτικά τις διάφορες προσεγγίσεις στον λογισμό και τις διαφορετικές απόπειρες θεμελίωσης και δια-τυπώνει εμπειριστατωμένη κρίση για την καθεμιά από αυτές. Συζητά, μεταξύ διαφόρων άλλων, τον Νεύτωνα (Newton) (GW 21, σ. 253-255, 260-263, 271-272), τον Όιλερ (Euler) (GW 21, σ. 257-258), τον Λαζάρ Καρνό (Lazare Carnot) (GW 21, σ. 254-255, 263-264), ιδιαίτερα τον Λαγκράνζ (Lagrange) (GW 21, σ. 258, 261-268, 286-287, 296-297), όλους από πρώτο χέρι, δηλαδή με αναφορές στα πρωτότυπα έργα. Συζητά επίσης την προϊστορία της ανάλυσης: τον Ντεκάρτ (Descartes) (GW 21, σ. 287-288), τον Καβαλιέρι (Cavalieri) (GW 21, σ. 304-307), τον Μπάροου (Barrow) (GW 21, σ. 284-285), πάλι από πρώτο χέρι. Στη δεύτερη έκδοση σχολιάζει και τον Κωσύ (Cauchy), την τελευταία λέξη στη θεμελίωση της ανάλυσης που έχει προκύψει εντωμεταξύ. Αυτόν, ωστόσο, τον συζητά από δεύτερο χέρι. Συγκεκριμένα, ο Χέγκελ συζητά την εκτενή βιβλιοκρισία της *Σύνοψης των μαθημάτων περί του απειροστικού λογισμού* (*Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, 1823) του Κωσύ από τον Γερμανό Ένο Χέρεν Ντίρksen (Enno Heeren Dirksen). Ο Ντίρksen ήταν μαθητής του Γκάους (Gauß), καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου και φίλος του Χέγκελ.⁴ Η βιβλιοκρισία είχε δημοσιευτεί το 1827 στις *Επετηρίδες επιστημονικής κριτικής* (*Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik*), δηλαδή στο περιοδικό που εξέδιδε ο ίδιος ο Χέγκελ. Ο Χέγκελ δεν αναφέρει ρητά τον Κωσύ, παρά μιλά για «κάποια νεότερα έργα» (GW 21, σ. 267 υποσημ.).

Όλη αυτή η πολυμάθεια και η ενημέρωση για τις εξελίξεις είναι οπωσδήποτε εντυπωσιακή. Ο καθηγητής της Φιλοσοφίας γνωρίζει καλά τόσα μαθηματικά έργα, παλαιότερα και νεότερα, και ενημερώνεται για τις τελευταίες επιστημονικές εξελίξεις από τον συνάδελφό του καθηγητή των

³ G. W. F. HEGEL: *Wissenschaft der Logik. Erster Band. Die objektive Logik* (1812/13), επιμ. F. Hogemann & W. Jaeschke, *Gesammelte Werke*, τ. 11, Hamburg, Meiner, 1978, σ. 153-178 (=σ. 206-247 στην πρωτότυπη έκδοση του 1812).

⁴ Βλ. σχετικά WOLFF: «Hegel und Cauchy», σ. 212-213.

Μαθηματικών. Κάτι αντίστοιχο έκανε βέβαια ο Χέγκελ πάνω-κάτω για όλα τα πεδία του επιστητού. Στις πρώτες δεκαετίες του 19ου αιώνα, ήταν βέβαια ένας από τους τελευταίους ανθρώπους που διέθεταν μια τέτοια εποπτεία των διαφορετικών πεδίων. Ωστόσο, το θέμα εδώ είναι το εξής: Προς τι μια τέτοια συζήτηση, μια τόσο τεχνική, μαθηματική συζήτηση, σε ένα φιλοσοφικό κείμενο; Πραγματικά, όποια ή όποιος έχει έστω ξεφυλλίσει την *Επιστήμη της Λογικής*, θα πρέπει να έχει σκοντάψει σε αυτά τα χωρία. Ο τεχνικός χαρακτήρας της συζήτησης –για παράδειγμα, για την κατά Λαγκράνζ ανάπτυξη μιας συνάρτησης σε σειρά Τέιλορ (GW 21, σ. 262-263 υποσημ.)– οπωσδήποτε ξαφνιάζει τις αναγνώστριες και τους αναγνώστες. Γιατί, λοιπόν, μια φιλοσοφική πραγματεία –μάλιστα η *Επιστήμη της Λογικής*, που έχει ως θέμα της τις πλέον καθολικές μορφές της σκέψης⁵ να περιέχει μια τόσο εκτενή και τόσο λεπτομερειακή συζήτηση για τη μαθηματική ανάλυση και για τις εφαρμογές της;

Στο υπόβαθρο βρίσκεται το μεγάλο ζήτημα της εποχής, το ζήτημα της θεμελίωσης της ανάλυσης.⁶ Όπως το θέτει ο Χέγκελ, αν το ζήτημα αφορούσε απλώς δυσκολίες «της έννοιας» (GW 21, σ. 237), δηλαδή εννοιολογικές, φιλοσοφικές δυσκολίες, τότε δεν θα είχε λόγο να απασχολεί τους ίδιους τους μαθηματικούς και τη δουλειά τους. Το ζήτημα της θεμελίωσης θα ήταν αντικείμενο μιας αφηρημένης συζήτησης επί των μαθηματικών, χωρίς να αγγίζει την πράξη των μαθηματικών. Ωστόσο, τα προβλήματα ανέκυπταν πράγματι στην ίδια την πράξη των μαθηματικών (πβ. GW 21, σ. 237-238, 252): Οι μαθηματικοί όφειλαν να χειρίζονται τα απειροστά, δηλαδή τα απείρως μικρά μεγέθη, σαν πεπερασμένα μεγέθη, αλλά να κάνουν πράξεις απαράδεκτες για πεπερασμένα μεγέθη, όπως να αγνοούν κατά περίπτωση κάποιους όρους ως πολύ μικρούς. Τα θαυμαστά αποτελέσματα της μεθόδου ήταν αναντίρρητα, εντούτοις τίθετο ένα πρόβλημα νομιμοποίησης: Με ποιο δικαίωμα οι μαθηματικοί χειρίζονταν τα απειροστά με τους τρόπους που τα χειρίζονταν;

Εν γένει, θεωρούνταν ότι τα προβλήματα ανάγονται σε μια αντίφαση στην έννοια του απείρως μεγάλου ή απείρως μικρού (απειροστού) μεγέθους. Ένα μέγεθος ως τέτοιο θα πρέπει με αριθμητικές πράξεις να μπορεί

⁵ Για μια κατατοπιστική παρουσίαση του προγράμματος της *Επιστήμης της Λογικής* βλ. M. WOLFF: «Science of Logic». Στο: *The Bloomsbury Companion to Hegel*, επιμ. A. de Laurentis & J. Edwards, London-New York-New Delhi-Sydney, Bloomsbury, 2013, 71-101.

⁶ «[...]Από τον 17ο μέχρι τον 19ο αιώνα, η ιστορία της φιλοσοφίας των μαθηματικών εν πολλοίς ταυτίζεται με την ιστορία των θεμελίων του λογισμού», A. ROBINSON: *Non-Standard Analysis*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1966, σ. 280. Για αυτή την ιστορία βλ. στο ίδιο, σ. 260-282· H. J. M. Bos: «Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition». Στο: *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*, επιμ. I. Grattan-Guinness, Princeton, Princeton University Press, 1980, 49-93· I. GRATTAN-GUINNESS: «The Emergence of Mathematical Analysis and its Foundational Progress, 1780-1880». Στο: *From the Calculus to Set Theory*, 94-148.

να αυξάνεται και να μειώνεται, οπότε ένα άπειρα μεγάλο ή άπειρα μικρό μέγεθος αποτελεί μια αντίφαση εν τοις όροις.⁷ Η λύση αναζητούνταν λοιπόν είτε (α) σε μια μετα-θεωρητική, άρα φιλοσοφική, διασάφηση αυτών των εννοιών και της μεθόδου χειρισμού των αντίστοιχων μεγεθών, δηλαδή σε μια μεταφυσική της ανάλυσης, είτε (β) σε μια νέα μαθηματική προσέγγιση που θα εξάλειφε τα άπειρα και απειροστά μεγέθη. Για την πρώτη κατεύθυνση είναι ενδεικτικός ο τίτλος του συγγράμματος του Λαζάρ Καρνό –ήρωα της Γαλλικής Επανάστασης και πατέρα του θεμελιωτή της θερμοδυναμικής Σαντί Καρνό (Sadi Carnot)– του 1797: *Στοχασμοί περί της μεταφυσικής του απειροστικού λογισμού*.⁸ Ο Καρνό επιχειρούσε εντέλει να εξηγήσει την επιτυχία της μεθόδου μέσα από την αντιστάθμιση λαθών κατά την παράλειψη όρων.⁹ Στη δεύτερη κατεύθυνση εντάσσεται το πρόγραμμα του Λαγκράνζ, το πρόγραμμα μιας αλγεβροποίησης της ανάλυσης, όπως αυτό εκτίθεται στη *Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων*, επίσης του 1797.¹⁰ Κατά προτροπή του Λαγκράνζ, μάλιστα, η Ακαδημία Επιστημών του Βερολίνου είχε προκηρύξει το 1784 έναν περίφημο διαγωνισμό με το ερώτημα αν μπορούν να αντικατασταθούν το άπειρο και το απειροστό από μια αρχή που θα είναι «ασφαλής, σαφής και –με μια λέξη– αληθινά μαθηματική».¹¹

Ο Χέγκελ υιοθετεί μια ιδιότυπη στάση. Από τη μια μεριά, δεν περιμένει τη λύση στο πρόβλημα από μια μαθηματική θεμελίωση. Γι' αυτό, άλλωστε, όπως θα φανεί στη συνέχεια, αδυνατεί να εκτιμήσει τα επιτεύγματα του Κωσύ, που με μαθηματικούς ορισμούς των εννοιών του ορίου και της συνέχειας έθεσε τις βάσεις για την καθιερωμένη για μας σήμερα αυστηρή θεμελίωση της ανάλυσης κατά Βάιερστρας (Weierstrass), στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα. Από την άλλη μεριά, ο Χέγκελ δεν περιμένει τη λύση ούτε από μια θεωρία του απείρου ή μια θεωρητική δικαιολόγηση της μεθόδου, που θα έρθει να επιβληθεί στα μαθηματικά «εκ των υστέρων» (nachher), όπως γράφει χαρακτηριστικά (GW 21, σ. 276). Αντίθετα, ο Χέγκελ θεωρεί ότι στον συνήθη χειρισμό του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, αυτού του μαθηματικού εργαλείου, υπόκειται μια νέα έννοια του μαθηματικού απείρου, η αληθινή έννοια (πβ. GW 21, σ. 239, 276), η οποία δεν έχει σχέση με απείρως μεγάλα

⁷ Για $0 < \alpha < \beta$, αλλά α απειροστό και β πεπερασμένο, δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $n \cdot \alpha > \beta$. Επομένως, τα απειροστά μεγέθη δεν διαθέτουν τη λεγόμενη αρχιμήδεια ιδιότητα, που έμοιαζε να είναι όρος για να είναι τα οποιαδήποτε μεγέθη συγκρίσιμα μεταξύ τους.

⁸ L. CARNOT: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Paris, Duprat, 1797.

⁹ Για αυτή την «compensation d'erreurs» βλ. CARNOT: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, §§ 9-10, σ. 14-18. Πβ. GW 21, σ. 263-264.

¹⁰ J. L. LAGRANGE: *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, Bernard, 1797.

¹¹ *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin, 1784, σ. 12-13. Παρατίθεται στο WOLFF: «Hegel und Cauchy», σ. 198. – Για τις προσεγγίσεις του Λαγκράνζ και του Καρνό πβ. GRATAN-GUINESS: «The Emergence of Mathematical Analysis», σ. 100-103.

ή απείρως μικρά μεγέθη. Τα μεγέθη αυτά είναι, για τον Χέγκελ, αντιφατικά, άκυρα, «εικόνες της παράστασης που σε μια εγγύτερη εξέταση δείχνονται να είναι ανυπόστατη ομίχλη και σκιά [nichtiger Nebel und Schatten]» (GW 21, σ. 233). Το ζητούμενο είναι, λοιπόν, μια προσεκτική ανάλυση της μαθηματικής πράξης να ανασύρει και να αποκαθάρει την αληθινή έννοια του απείρου.

[...Τ]α μαθηματικά, καθώς δεν γνωρίζουν τη φύση αυτού του εργαλείου τους και δεν έχουν ξεμπερδέψει με τη μεταφυσική και κριτική του, δεν μπορούν να καθορίσουν το πεδίο της εφαρμογής του και να εξασφαλίστούν απέναντι σε καταχρήσεις του.

GW 21, σ. 236-237.

Τι σημαίνει η «μεταφυσική και κριτική» μιας έννοιας, εν προκειμένω της έννοιας του μαθηματικού απείρου; Σημαίνει την κατάδειξη των οντολογικών συνεπαγωγών, όπως θα λέγαμε σήμερα, που έχει ή που δεν έχει η χρήση της έννοιας, που έχει ή που δεν έχει η χρήση αυτού του εργαλείου. Με την ορολογία της φιλοσοφίας του Καντ (Kant), η «μεταφυσική και κριτική» μιας έννοιας σημαίνει την κατάδειξη της αντικειμενικής εγκυρότητας αυτής της έννοιας, αλλά και των ορίων αυτής της εγκυρότητας. Σημαίνει, δηλαδή, την απάντηση στο ερώτημα υπό ποιους όρους η έννοια μπορεί να έχει αντικειμενική αναφορά. Εν προκειμένω, λοιπόν, το ζητούμενο είναι να αποσαφηνιστεί η «μεταφυσική και κριτική» της έννοιας του μαθηματικού απείρου, προκειμένου τα μαθηματικά να διασφαλίσουν την εγκυρότητα στην εφαρμογή της έννοιάς τους και συνάμα να προφυλαχτούν απέναντι σε καταχρηστικές, προβληματικές εφαρμογές της.

Η μεταφυσική, όσο κι αν φέρνει αντίρρηση στο μαθηματικό άπειρο, δεν μπορεί να αρνηθεί ή να ανατρέψει τα λαμπρά αποτελέσματα της χρήσης του μαθηματικού απείρου, και τα μαθηματικά δεν μπορούν να συμφιλιωθούν με τη μεταφυσική της ίδιας τους της έννοιας, άρα και με τη συναγωγή των μεθόδων που καθιστά αναγκαίες η χρήση του απείρου.

GW 21, σ. 237.

Το έργο της φιλοσοφίας, κατά τον Χέγκελ, είναι να ξεκαθαρίσει στα μαθηματικά την ίδια τη δική τους έννοια. Έργο της φιλοσοφίας δεν είναι να επιβάλει στα μαθηματικά μια άλλη έννοια και κάποιες αρχές εκ των υστέρων. Οπωσδήποτε, έργο της φιλοσοφίας δεν είναι να αμφισβητήσει «τα λαμπρά αποτελέσματα» των μαθηματικών. Η φιλοσοφική, λογική ανάλυση της έννοιας καλείται να συμφιλιώσει τη μεθοδολογική αυτοκατανόηση των μαθηματικών με την πρακτική τους. Καλείται να απαλλάξει τους μαθηματικούς από την ένοχη συνείδησή τους για τη χρήση μιας μεθόδου που έμοιαζε να νομιμοποιείται μόνο εκ του αποτελέσματος και να στηρίζεται σε σαθρά θεμέλια.

Μάλιστα, την έννοια του απείρου η οποία υπόκειται του απειροστικού λογισμού, και ας μην είναι αυτό ακόμη ξεκάθαρο στους μαθηματικούς, ο Χέγκελ επιδιώκει να την καταστήσει γόνιμη για την ίδια τη φιλοσοφία. Η έννοια αυτή του μαθηματικού απείρου ανταποκρίνεται σε εκείνο που ο Χέγκελ ονομάζει «έννοια του αληθινού απείρου» (Begriff des wahren Unendlichen) (GW 21, σ. 237). Αυτός είναι, εντέλει, ο λόγος για την εκτενή και λεπτομερειακή πραγμάτευση του απειροστικού λογισμού στην *Επιστήμη της Λογικής*. Η προσεκτική εξέταση των προπαθειών να θεμελιωθεί η ανάλυση, να δικαιολογηθεί και προσδιοριστεί το μαθηματικό άπειρο, φανερώνει ότι αυτές οι προσπάθειες πράγματι προϋπέθεταν, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, περισσότερο ή λιγότερο καθαρά, την αληθινή έννοια του απείρου (πβ. GW 21, σ. 238-239, 252-253, 258). Επομένως, η εξέτασή τους ενδείκνυται προκειμένου να πέσει φως «στη φύση της ίδιας της αληθινής έννοιας» (GW 21, σ. 239), πέρα από τα μαθηματικά. Αρχίζει λοιπόν να διαφαίνεται γιατί πράγματι εκείνα που ο Χέγκελ είχε να πει για τη μαθηματική ανάλυση έχουν ευρύτερες και μάλιστα θεμελιώδεις συνέπειες για τη φιλοσοφία του.

2. Η ΝΕΑ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ

Ποια είναι η έννοια του μαθηματικού απείρου που, κατά τον Χέγκελ, υπόκειται της ανάλυσης; Είναι η έννοια του «ποιοτικού προσδιορισμού της ποσότητας» (qualitative Quantitätsbestimmung) και της «ποιοτικής σχέσης ποσότητας» (qualitatives Quantitäts-Verhältnis). Ο όρος dy/dx εκφράζει μια «ποιοτική σχέση ποσότητας» (GW 21, σ. 253).¹² Τα διαφορικά, οι όροι dy και dx , αποτελούν «ποιοτικούς προσδιορισμούς της ποσότητας» (GW 21, σ. 257). Τι σημαίνουν άραγε αυτές οι εκφράσεις;

Το διαφορικό, το dx , δεν είναι ένα απείρως μικρό Δx . Δεν είναι η απείρως μικρή διαφορά ενός x από ένα άλλο x , δεν είναι μια σχέση ποσοτική, μια σχέση τετμημένης προς τετμημένη (x προς x). Το dx είναι ουσιωδώς σε σχέση με το dy . Είναι ό,τι είναι μόνο μέσα σε αυτή τη σχέση, μέσα σε μια σχέση τετμημένης προς τεταγμένη (x προς y), μια σχέση ποιοτική (πβ. GW 21, σ. 268-269). Με άλλα λόγια, το dy και το dx δεν αναφέρονται σε μεγέθη, που ως τέτοια θα ήταν «αδιάφορα» για τη σχέση ή «ισοδύναμα» (gleichgültig) (GW 21, σ. 241, 252), δηλαδή ανεξάρτητα από την όποια σχέση και ανταλλάξιμα με άλλα ίσα μεγέθη. Επομένως, το dy και το dx δεν μπορούν να είναι αμιγώς ποσοτικοί προσδιορισμοί.

Είναι σκόπιμο να διακόψουμε προσωρινά την εξήγηση του κατά Χέγκελ ποιοτικού χαρακτήρα των προσδιορισμών και των σχέσεων προκειμένου να εξετάσουμε σύντομα την έννοια του αδιάφορου ή του ισοδύναμου την οποία συναντήσαμε. Η γερμανική λέξη 'gleichgültig' σημαίνει

¹² Η λέξη Verhältnis σημαίνει στα γερμανικά 'σχέση', αλλά στο πλαίσιο των μαθηματικών σημαίνει επίσης ειδικά 'λόγος' (λατ. ratio). Αποδίδω ως 'σχέση', αφενός επειδή ο όρος 'Verhältnis' έχει βέβαια στη Λογική του Χέγκελ μια σημασία ευρύτερη από εκείνη της αναλογίας και αφετέρου επειδή, όπως θα φανεί, η σχέση που ο Χέγκελ χαρακτηρίζει «ποιοτική ποσοτική» δεν είναι εντέλει ο λόγος κάποιων ποσοτήτων, κάποιων μεγεθών.

στα σημερινά γερμανικά, αλλά ήδη και στην εποχή του Χέγκελ, ‘αδιάφορο’. Ωστόσο, ‘gleich-gültig’ σημαίνει κατά λέξη ‘ισο-δύναμο’, έχον ίση ισχύ, και αυτή ήταν η πρωταρχική σημασία της λέξης.¹³ Σήμερα, για τη μαθηματική έννοια του ισοδύναμου χρησιμοποιείται στα γερμανικά ο όρος ‘äquivalent’, δηλαδή η λατινικής καταγωγής λέξη που στον σχηματισμό της αντιστοιχεί επακριβώς στην ελληνική λέξη ‘ισοδύναμο’ και στη γερμανική λέξη ‘gleichgültig’. Στο κείμενο του Χέγκελ, πάντως, ο όρος ‘gleichgültig’ έχει σαφέστερα τη μαθηματική σημασία της ισοδυναμίας (βλ. GW 21, σ. 252). Ο Χέγκελ αξιοποιεί για την παρουσίαση της θέσης του τη διπλή σημασία της γερμανικής λέξης ‘gleichgültig’: Ένα μέγεθος x ως τέτοιο είναι αδιάφορο για τη σχέση στην οποία τυχαίνει να βρίσκεται, π.χ. για τον λόγο x/y , με την έννοια ότι έχει ίση αξία, την ίδια τιμή, είτε εντός είτε εκτός της σχέσης.

Έχει ενδιαφέρον, σε αυτό το σημείο, μια αναχρονιστική σύγκριση. Στον 20ό αιώνα, τη δεκαετία του 1960, ο μαθηματικός Αβραάμ Ρόμπινσον (Abraham Robinson) εισηγήθηκε τη μη-συμβατική ανάλυση (Non-Standard Analysis), μια εναλλακτική θεμελίωση της ανάλυσης, η οποία, σε αντίθεση με την καθιερωμένη προσέγγιση, δέχεται τα απειροστά, τα απείρως μικρά μεγέθη. Πώς όμως επανεισάγονται τα απειροστά σε αυτή την προσέγγιση; Με έναν λογικά αυστηρό τρόπο, ο Ρόμπινσον ορίζει σχέσεις ισοδυναμίας, οπότε μπορεί να εισάγει τα απειροστά ως μεγέθη, ως αριθμούς, ως επέκταση (enlargement) των πραγματικών αριθμών.¹⁴ Οπότε, και από αυτή τη σκοπιά, αναδρομικά και ex negativo, μπορεί να γίνει κατανοητή η παρατήρηση του Χέγκελ ότι τα διαφορικά dy και dx δεν μπορούν να αναφέρονται σε μεγέθη στο βαθμό που αυτά τα μεγέθη δεν μπορούν να είναι ισοδύναμα με άλλα μεγέθη, ανεξάρτητα από τη σχέση dy/dx .

Σε κάθε περίπτωση, για τον Χέγκελ, το dy και το dx δεν είναι το καθένα τίποτε έξω από τη μεταξύ τους σχέση. Οι όροι της σχέσης dy/dx είναι μονάχα «στιγμές» (Momente) της μεταξύ τους σχέσης (GW 21, σ. 241, 296). Είναι «ποιοτικές στιγμές της ποσότητας» (qualitative Quantitäts-Momente) (GW 21, σ. 253). Στον θεμελιώδη για την εγγεγραμμένη φιλοσοφία τεχνικό όρο ‘στιγμή’ θα επανέλθει η τελευταία ενότητα της εργασίας

¹³ Βλ. το σχετικό λήμμα στο λεξικό Duden: <https://www.duden.de/rechtschreibung/gleichgueltig> Η πρωταρχική σημασία της λέξης ήταν ‘gleichwertig’, δηλαδή ‘ισάξιο’, ‘ισοδύναμο’, και η σημασία σταδιακά μετατοπίστηκε από το ‘α-διάφορο’, που δεν έχει διαφορά, στο ‘αδιάφορο’, που δεν μας ενδιαφέρει.

¹⁴ Βλ. ROBINSON: *Non-Standard Analysis*, σ. 55-58, 266. Ένας αριθμός $a \in {}^*R$ (όπου *R η επέκταση των πραγματικών αριθμών R) είναι απειροστός ή απείρως μικρός αν $|a| < m$ για κάθε θετικό αριθμό $m \in R$. Οπότε, με τον ορισμό αυτό του Ρόμπινσον, το 0 είναι απειροστό. Για $a, b \in {}^*R$, αν η διαφορά $a - b$ είναι απειροστή, τότε ο Ρόμπινσον γράφει $a \simeq b$ και ορίζει ότι οι αριθμοί a και b είναι ισοδύναμοι, παρότι δεν είναι ίσοι αν η διαφορά τους είναι $\neq 0$. Η επέκταση *R των πραγματικών αριθμών R είναι ένα διατεταγμένο, αλλά μη-αρχιμήδαιο πεδίο. Διότι δεν ισχύει ότι για οποιαδήποτε $a, b \in {}^*R$ με $0 < a < b$, θα υπάρχει (πεπερασμένος) φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $n \cdot a > b$. Βλ. παραπάνω υποσημ. 7.

(ενότητα 9), όπου συνάγονται ορισμένα συμπεράσματα για την εγγελιανή φιλοσοφία εν γένει. Όπως και να έχει, το αληθινό άπειρο της ανάλυσης, η «άπειρη διαφορά» (unendliche Differenz) (GW 21, σ. 240), το διαφορικό (dx ή dy), δεν είναι, για τον Χέγκελ, ένα απείρως μικρό μέγεθος. Το απείρως μικρό, όπως και το απείρως μεγάλο, είναι, σύμφωνα με τα παραπάνω, ανυπόστατα και νεφελώδη. Τότε, όμως, με ποια έννοια είναι άπειρο το αληθινό άπειρο; Το άπειρο μέγεθος είναι, στο τεχνικό ιδίωμα του Χέγκελ, «ανηρημένο μέγεθος» (aufgehobenes Quantum) (GW 21, σ. 241): Με την αναίρεση του πεπερασμένου χαρακτήρα του, αναιρείται το μέγεθος ως τέτοιο, καθώς δεν προσδιορίζεται πια αυτοτελώς, με μια τιμή, αλλά μονάχα ως στιγμή ή στοιχείο μιας σχέσης, δηλαδή ποιοτικά. Εντούτοις, το ανηρημένο μέγεθος διατηρεί τον ποσοτικό προσδιορισμό (βλ. GW 21, σ. 239). Το dx είναι λοιπόν ένας «ποιοτικός ποσοτικός προσδιορισμός» ή «ποιοτικός προσδιορισμός της ποσότητας». Αλλά και το όλο dy/dx δεν είναι απλώς μια ποσότητα, δηλαδή ένα μέγεθος, σταθερό ή μεταβλητό. Αντίθετα, το dy/dx είναι ουσιαστικά μια σχέση που χαρακτηρίζει ποιοτικά μια καμπύλη, μια συνάρτηση. Επομένως, είναι μια «ποιοτική ποσοτική σχέση» ή μια «ποιοτική σχέση ποσότητας».

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι και εκείνη συνάρτηση, η $f'(x)$, όπως το βλέπει ήδη ο Χέγκελ (πβ. GW 21, σ. 283), και παίρνει βέβαια πεπερασμένες τιμές, όπως θα λέγαμε σήμερα. Η παράγωγος είναι μια ποσότητα ή ένα μέγεθος, όπως θα έλεγαν εν γένει την εποχή του Χέγκελ.¹⁵ Με ποια έννοια, όμως, τότε η παράγωγος χαρακτηρίζει ποιοτικά την αρχική ή παράγουσα συνάρτηση; Με την έννοια ότι εκείνο που χαρακτηρίζει την αρχική συνάρτηση δεν είναι μια ποσότητα, μια τιμή της παραγώγου. Σε μια εφαρμογή της ανάλυσης, εκείνο που χαρακτηρίζει το ίδιο το φυσικό φαινόμενο, δεν είναι εν γένει μια τιμή, η τιμή του ρυθμού μεταβολής κάποιου φυσικού μεγέθους σε κάποια χρονική στιγμή, αλλά το γεγονός ότι αυτός ο ρυθμός μεταβολής είναι, για παράδειγμα, σταθερός ή αυξάνεται γραμμικά ή εκθετικά ή με άλλο τρόπο.

Συμπερασματικά, για τον Χέγκελ, το dy/dx είναι μια ποιοτική ποσοτική σχέση: είναι ποιοτική κατά το ότι δεν αποτελεί σχέση μεγεθών –έναν λόγο, ένα κλάσμα, όπως το $\Delta y/\Delta x$ –, αλλά σχέση ανηρημένων μεγεθών. Τα dx και dy , τα ανηρημένα μεγέθη, είναι ποιοτικοί ποσοτικοί προσδιορισμοί: είναι ποιοτικοί κατά το ότι δεν έχουν αυτοτελείς και «αδιάφορες» τιμές, αλλά προσδιορίζονται μόνο ως «στιγμές» της μεταξύ τους σχέσης: είναι ποσοτικοί κατά το ότι αυτή τους η σχέση δεν παύει να είναι μια ποσοτική σχέση, το dy/dx δεν παύει να είναι ένα μέγεθος.

Τα dx, dy δεν είναι πια μεγέθη, [...] παρά έχουν μια σημασία μονάχα στη σχέση τους, έχουν ένα νόημα μόνο ως στιγμές [bloß als Momente]. Δεν είναι πια ένα κάτι [nicht mehr Etwas], αν πάρουμε το κάτι ως μέγεθος, δεν

¹⁵ Πβ. ενδεικτικά CARNOT: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, § 53, σ. 63-64.

είναι πεπερασμένες διαφορές· αλλά ούτε και τίποτε [auch nicht Nichts], δεν είναι το απροσδιόριστο μηδέν. Έξω από τη σχέση τους είναι καθαρά μηδενικά, αλλά οφείλουν να ληφθούν μόνο ως στιγμές της σχέσης, ως προσδιορισμοί του διαφορικού συντελεστή dy/dx .

GW 21, σ. 251.

Επομένως, ξεκαθαρίζουμε τη «μεταφυσική της έννοιας» του απειροστού, του απείρου της ανάλυσης, όταν απομπλέξουμε αυτή την έννοια από την απλοϊκή αντίληψη της αναφοράς σε απείρως μικρά μεγέθη. Η «άπειρη διαφορά», το διαφορικό, δεν είναι ένα κάτι, δηλαδή κάποιος μέγεθος, που ως τέτοιο θα ήταν υποχρεωτικά πεπερασμένο, αλλά προσδιορίζεται μόνο ως στιγμή μιας σχέσης· είναι κατά τούτο ένας ποιοτικός προσδιορισμός.

Στο δεύτερο μέρος της *Επιστήμης της Λογικής*, τη *Λογική της Έννοιας*, στο υποκεφάλαιο για την «αναλυτική γνώση» του κεφαλαίου για την «Ιδέα του Αληθούς», ο Χέγκελ επανέρχεται στη μαθηματική ανάλυση και διευκρινίζει το εξής:

Η μετάβαση σε αυτόν [τον ποιοτικό προσδιορισμό της ποσότητας] από την ποσότητα ως τέτοια δεν είναι πλέον αναλυτική. Γι' αυτό το λόγο, τα μαθηματικά δεν έχουν καταφέρει μέχρι σήμερα να δικαιολογήσουν τις πράξεις [Operationen] που εδράζονται σε αυτή τη μετάβαση με τα δικά τους μέσα, δηλαδή με μαθηματικό τρόπο. Κι αυτό γιατί [η μετάβαση] δεν είναι μαθηματικής φύσης.

GW 12, σ. 208.¹⁶

Με άλλα λόγια, η παραγωγή και η ολοκλήρωση –δηλαδή, η συναγωγή της παραγώγου μιας συνάρτησης και, αντίστροφα, η συναγωγή της παράγουσας συνάρτησης από την παράγωγο– δεν έχουν αναλυτικό χαρακτήρα, όπως έχουν, για τον Χέγκελ, οι συνήθεις αλγεβρικές πράξεις. Επομένως, κατά την αντίληψη του Χέγκελ, δεν θα ήταν δυνατό να επιτύχει τον στόχο του το πρόγραμμα του Λαγκράνζ, το πρόγραμμα μιας αλγεβρικής θεμελίωσης της ανάλυσης. Ούτε, όμως, θα ήταν δυνατό να θεμελιωθούν οι πράξεις της ανάλυσης σε γεωμετρικές κατασκευές. Όπως θα δούμε στα επόμενα (βλ. παρακάτω ενότητα 7), ο Χέγκελ χαιρετίζει την αποσύνδεση της ανάλυσης από γεωμετρικές και, εν γένει, εποπτικές θεωρήσεις.

Οπότε, γίνεται κατανοητό γιατί ο Χέγκελ θεωρούσε μάταιες τις προσπάθειες για μια μαθηματική θεμελίωση της ανάλυσης (βλ. παραπάνω ενότητα 1). Η μετάβαση από τα πεπερασμένα μεγέθη στον ποιοτικό

¹⁶ G. W. F. HEGEL: *Wissenschaft der Logik II: Die subjektive Logik oder Die Lehre vom Begriff* (1816), επιμ. F. Hogemann & W. Jaeschke, *Gesammelte Werke*, τ. 12, Hamburg, Meiner, 1981, σ. 208. – Βλ. σχετικά WOLFF: «Hegel und Cauchy», σ. 209-211.

προσδιορισμό της ποσότητας «δεν είναι μαθηματικής φύσης». Απαιτείται η συνδρομή της φιλοσοφίας προκειμένου τα μαθηματικά «να συμφιλιωθούν με τη μεταφυσική της ίδιας τους της έννοιας» (GW 21, σ. 237), προκειμένου να ξεκαθαριστεί η νέα έννοια του μαθηματικού απείρου που υπόκειται στις συνήθειες πράξεις του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

3. ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΠΕΙΡΟ ΕΞΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

Για τον Χέγκελ, η νέα έννοια του μαθηματικού απείρου, την οποία ανέδειξε ο απειροστικός λογισμός, δηλαδή η έννοια του απείρου ως ποιοτικού-ποσοτικού προσδιορισμού ή ως στιγμής μιας σχέσης, δείχνεται να είναι εν γένει, πέρα από τον λογισμό, η προσήκουσα έννοια του μαθηματικού απείρου.

Ο Χέγκελ δίνει το παράδειγμα του κλάσματος $\frac{1}{3}$ ή, σε δεκαδική ανάπτυξη, 0,285714... (βλ. GW 21, σ. 243-246). Συνηθίζουμε να ονομάζουμε την πρώτη έκφραση πεπερασμένη και τη δεύτερη άπειρη. Ωστόσο, η δεύτερη αυτή έκφραση, η άπειρη σειρά, αντιστοιχεί σε εκείνο που ο Χέγκελ ονομάζει «κακή άπειρία» (schlechte Unendlichkeit) (GW 21, σ. 245) σε αντιδιαστολή προς την αληθινή άπειρία. Η σειρά είναι άπειρη μόνο κατά την αρνητική σημασία ότι δεν έχει κάποιο πέρας. Η έκφραση είναι, στην πραγματικότητα, πάντοτε πεπερασμένη, όσα ψηφία και αν δοθούν, και πάντοτε «ελλειμματική» (ein Mangelhaftes) (GW 21, σ. 246): πάντοτε υπολείπεται σε σχέση με εκείνο που ζητά να εκφράσει. Αντίθετα, το κλάσμα $\frac{1}{3}$ εκφράζει πλήρως και καταφατικά εκείνο που ζητά να εκφράσει η άπειρη σειρά, δηλαδή το άθροισμα όλων των όρων της. Επομένως, «αυτή η ούτως καλούμενη πεπερασμένη έκφραση είναι η αληθινή άπειρη έκφραση» (GW 21, σ. 246). Κι αυτό καθώς αποτελεί την έκφραση μιας σχέσης. Ο αριθμητής και ο παρονομαστής, το 2 και το 7, δεν είναι «αδιάφορα» για τη σχέση τους μεγέθη, αλλά μπορούν να αντικατασταθούν από άπειρα άλλα ανάλογα ζεύγη: το 4 και το 14, το 8 και το 28 και ούτω καθεξής. Είναι, λοιπόν, στιγμές μιας σχέσης.

Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να δοθούν δύο διευκρινίσεις προς αποφυγή παρανοήσεων. (α) Η εγγελιανή έκφραση 'κακό άπειρο' δεν έχει κατ' αρχήν κάποια ηθική συνδήλωση. Σημαίνει κατά βάση ότι το άπειρο με αυτή του την έννοια είναι απλό (schlicht) ή, αν θέλουμε, ένα άπειρο πρώτης τάξης: ότι κατανοείται απλοϊκά ως άπειρο μέγεθος ή ως επ' άπειρον πρόοδος μέσα στην ίδια τάξη. Η έννοια του αληθινού απείρου είναι, αντίθετα, μια έννοια σχέσης ανάμεσα στην έννοια του απείρου και την έννοια του πεπερασμένου ή, αν θέλουμε, μια έννοια ανώτερης τάξης (βλ. στα επόμενα ενότητα 9). Το γεγονός ότι ο Χέγκελ δίνει τη σημασία του 'απλού' στη λέξη 'schlecht', είναι ξεκάθαρο στη δεύτερη παρέκβαση για τη μαθηματική ανάλυση, όπου η σταθερή ταχύτητα ($s/t = c$) χαρακτηρίζεται, κατά λέξη, ως «κακή ταχύτητα» (schlechte Geschwindigkeit)

(GW 21, σ. 278). Προφανώς, ο Χέγκελ δεν έχει κάποια ηθικού τύπου ένσταση απέναντι στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Όταν τη χαρακτηρίζει «κακά ομαλή» (schlechtgleichförmig) (GW 21, σ. 278, 282, 290), εννοεί ότι είναι απλά ομαλή ή εντελώς ομαλή σε αντιδιαστολή προς την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.¹⁷ Η γερμανική λέξη 'schlecht' διατηρούσε οπωσδήποτε στην εποχή του Χέγκελ την πρωταρχική της σημασία του 'απλού' (schlicht, einfach).¹⁸

(β) Η αντιδιαστολή του αληθινού απείρου προς το άπειρο όπως αυτό εκφράζεται στη μορφή μιας σειράς όρων, δεν σημαίνει ότι ο Χέγκελ priimodoteί για κάποιο λόγο τις αθροίσιμες ή συγκλίνουσες σειρές. Αντίθετα, μια μη-αθροίσιμη σειρά, όπως, για παράδειγμα, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, περιέχει «ένα ανώτερο είδος απειρίας από ό,τι οι αθροίσιμες» (GW 21, σ. 246). Κι αυτό γιατί περιέχει μια «ασυμμετρία» (Incommensurabilität), που δεν επιτρέπει στην «ποσοτική σχέση», δηλαδή στο άθροισμα των καλώς ορισμένων διαδοχικών όρων, να αποτυπωθεί «ως ένα μέγεθος, έστω και ως κλάσμα» (GW 21, σ. 246). Με άλλα λόγια, η μορφή της άπειρης σειράς είναι μια έκφραση της κακής απειρίας, είτε η σειρά είναι αθροίσιμη είτε όχι. Στην περίπτωση της μη-αθροίσιμης σειράς, η αληθινή απειρία εκφράζεται από την ασυμμετρία, η οποία προσδίδει στη σχέση των όρων έναν ποιοτικό χαρακτήρα: το άθροισμα των όρων δεν είναι πια μέγεθος. Στην περίπτωση του κλάσματος $\frac{2}{3}$ ή, εν γένει, μιας σταθερής αναλογίας $y/x = c$, οι όροι (2 και 7, y και x) είναι μεν στιγμές μιας σχέσης που τους καθορίζει, ωστόσο η ίδια η ποσοτική σχέση, δηλαδή ο λόγος τους, δεν παύει να είναι ένα σταθερό μέγεθος.

Αν, όμως, μια ευθεία αναλογία $y = cx$ είναι μια καθαρά ποσοτική σχέση, για τον Χέγκελ, σε μια συναρτησιακή σχέση $y = cx^2$ (και, εν γένει, $y = cx^n$ για $n > 1$) αναδεικνύεται ένας ποιοτικός χαρακτήρας, καθώς ο λόγος των y και x , των «στιγμών» της συνάρτησης, δεν είναι πλέον ένα σταθερό μέγεθος (βλ. GW 21, σ. 249-250). Βέβαια, οι ίδιες οι στιγμές, το y και το x , εξακολουθούν να είναι μεγέθη, όπως ήταν και στην ευθεία αναλογία.

Εντέλει, ο ποιοτικός χαρακτήρας της σχέσης δυνάμεων αναδεικνύεται, για τον Χέγκελ, στον απειροστικό λογισμό, στην παραγωγή μιας συνάρτησης όπως η $y = cx^2$ (βλ. GW 21, σ. 251). Η παράγωγος $dy/dx = 2cx$ αναδεικνύει τη σχέση μεταξύ των μεγεθών y και x ως μια ποιοτική ποσοτική σχέση, που δεν προσδιορίζεται από ένα μέγεθος εκτός της σχέσης, όπως στην ευθεία αναλογία. Στην έκφραση dy/dx , όπως εξηγήθηκε παραπάνω (βλ. ενότητα 2), οι εκφράσεις dy και dx δεν αναφέρονται πια σε

¹⁷ Ο Χέγκελ θα μπορούσε, επιπλέον, να εννοεί ότι η έννοια της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης είναι υπερβολικά απλή προκειμένου να περιγράψει κινήσεις που απαντούν πραγματικά στη φύση. Πβ. σχετικά STEKELER-WEITHOFER: *Philosophie des Selbstbewußtseins*, σ. 244.

¹⁸ Βλ. το σχετικό λήμμα στο λεξικό Duden: <https://www.duden.de/rechtschreibung/schlecht> και, συγκεκριμένα, την έβδομη σημασία της λέξης, που δίνεται ως «απαρχαιωμένη» (veraltet).

μεγέθη, αλλά σε ανηρημένα μεγέθη. Οι όροι της σχέσης dy/dx είναι μονάχα στιγμές της μεταξύ τους σχέσης. Η «άπειρη διαφορά», δηλαδή το διαφορικό dx ως στιγμή μιας σχέσης και μόνο, αποτελεί τη μαθηματική έκφραση της έννοιας του αληθινού απείρου.¹⁹

4. ΤΟ dy/dx ΩΣ «ΑΔΙΑΙΡΕΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟ»

Κατά την αντίληψη του Χέγκελ, οι εκφράσεις dy και dx έχουν νόημα μόνο εντός της έκφρασης dy/dx . Με άλλα λόγια, το dy/dx είναι «αδιαίρετο σύμβολο» (GW 21, σ. 265), όσο και αν ο καθιερωμένος συμβολισμός του Λάιμπνιτς (Leibniz) υποβάλλει ένα κλάσμα, τον λόγο των δύο διαφορικών. Η αντίληψη σύμφωνα με την οποία η έκφραση dy/dx αποτελεί αδιαίρετο σύμβολο, είναι φυσικά μια μοντέρνα αντίληψη. Κάθε άλλο παρά αυτονόητη ήταν αυτή η αντίληψη στο πρώτο μισό του 19ου αιώνα. Στην πρώτη έκδοση της *Επιστήμης της Λογικής*, ο Χέγκελ παραπέμπει σχετικά στον Σιμόν Λ'Υγιέ (Simon L'Huilier) (βλ. GW 11, σ. 171), η εργασία του οποίου είχε αποσπάσει το βραβείο στον διαγωνισμό που προκήρυξε η Ακαδημία Επιστημών του Βερολίνου το 1784.²⁰

Η θέση ότι το dy/dx είναι αδιαίρετο σύμβολο σημαίνει, βέβαια, ότι θεμελιώδης για τον διαφορικό λογισμό είναι η έννοια της παραγώγου και όχι εκείνη του διαφορικού, αφού η παράγωγος δεν είναι κλάσμα, δεν είναι ο λόγος των διαφορικών dy και dx .

Ακόμη και ο Κωσύ ταλαντεύεται σε σχέση με το ζήτημα αν η παράγωγος είναι εντέλει κλάσμα. Ο Κωσύ προβαίνει ως εξής στους ορισμούς της παραγώγου και των διαφορικών και στη συναγωγή της μεταξύ τους σχέσης:²¹

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{i \rightarrow 0} \frac{f(x+i)-f(x)}{i} \quad (1) \quad [i \text{ απειροστό (infiniment petite)}]$$

$$df(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+ah)-f(x)}{a} \quad (2) \quad [a \text{ απειροστό, } h \text{ πεπερασμένο}]$$

$$i = ah \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow df(x) = hf'(x) \quad (4)$$

$$\text{Για } f(x) = x \quad (4) \Rightarrow dx = h \quad (5)$$

$$(4), (5) \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad (6)$$

¹⁹ Η ερμηνεία σύμφωνα με την οποία το dx είναι, για τον Χέγκελ, «στην καλύτερη περίπτωση» (bestenfalls) ένας ποσοτικός προσδιορισμός με ποιοτική μορφή (STEKELER-WEITHOFER: *Philosophie des Selbstbewußtseins*, σ. 251), δηλαδή είναι κάτι λιγότερο από ένα μέγεθος, μπορεί μεν να ταιριάζει καλύτερα με τις νεότερες αντιλήψεις για την ανάλυση, ωστόσο παρουσιάζει τη βασική ιδέα του Χέγκελ ανεστραμμένη, με το κεφάλι στο έδαφος και τα πόδια στον αέρα.

²⁰ Για την προσέγγιση του Λ'Υγιέ βλ. GRATTAN-GUINNESS: «The Emergence of Mathematical Analysis», σ. 101-102.

²¹ Βλ. A. CAUCHY: *Résumé des leçons données à l'École Royal Polytechnique sur le calcul infinitesimal* (1823), *Oeuvres complètes*, σειρά 2, τ. 4, Paris, Gauthier-Villars, 1899, σ. 22-23, 27-28. Βλ. GRATTAN-GUINNESS: «The Emergence of Mathematical Analysis», σ. 111-112.

Ο Κωσύ ορίζει πρώτα την παράγωγο $f'(x)$ με βάση το όριο, δηλαδή την ορίζει με έναν μοντέρνο, θα σπεύδαμε να πούμε, τρόπο, ακριβώς όχι ως κλάσμα (1). Κατόπιν, όμως, ορίζει το διαφορικό $df(x)$ (2), οπότε συνάγει έναν τύπο για τη σχέση μεταξύ του διαφορικού $df(x)$ και της παραγώγου $f'(x)$ (4), καθώς και έναν τύπο για την τιμή του διαφορικού dx (5). Κατά συνέπεια όλων αυτών, η εξίσωση $f'(x) = df(x)/dx$ (6) προκύπτει σαν θεώρημα, όχι εξ ορισμού του συμβόλου $df(x)/dx$. Επομένως, το σύμβολο $df(x)/dx$ δεν είναι, για τον Κωσύ, αδιαίρετο σύμβολο. Αντίθετα, είναι κανονικός λόγος, ένα κλάσμα.

5. ΧΕΓΚΕΛ ΚΑΙ ΝΕΥΤΩΝ

Για τον Χέγκελ, σε κάθε περίπτωση, το dy/dx δεν είναι κλάσμα. Προκειμένου να στηρίξει αυτή τη θέση, ο Χέγκελ ανατρέχει στον Νεύτωνα. Όσο και αν ενδεχομένως εκπλαγούν οι αναγνώστριες και οι αναγνώστες –καθώς είναι γνωστές οι κάπως άγαρμπες επιθέσεις του Χέγκελ στον Νεύτωνα σε άλλα συμφραζόμενα (βλ. ενδεικτικά GW 21, σ. 362)–, εν προκειμένω ο Χέγκελ δηλώνει το εξής: «Η σκέψη δεν μπορεί να προσδιοριστεί ορθότερα από τον τρόπο που μας την έδωσε ο Νεύτων» (GW 21, σ. 253). Ποια σκέψη έχει εκφράσει τόσο καλά ο Νεύτων; Ο Χέγκελ αναφέρεται στην επίγνωση ότι ο διαφορικός λογισμός δεν έχει να κάνει με απείρως μικρά μεγέθη, αλλά με σχέσεις που τείνουν σε ένα όριο. Οι σχετικές διατυπώσεις του Νεύτωνα είναι, κατά τον Χέγκελ, ανυπέρβλητες.

[...Ω]ς έσχατος λόγος των εξαφανιζόμενων μεγεθών θα πρέπει να κατανοηθεί ο λόγος των μεγεθών όχι προτού εξαφανιστούν, ούτε αφότου εξαφανιστούν, αλλά ο λόγος με τον οποίο εξαφανίζονται [quacum evanescunt].²²

Η σχέση που μας ενδιαφέρει δεν είναι η σχέση που έχουν τα μεγέθη πριν εξαφανιστούν, οπότε είναι ακόμη πάντοτε πεπερασμένα, ούτε όμως η σχέση που έχουν αφότου εξαφανιστούν, οπότε τα μεγέθη είναι ίσα με το μηδέν, άρα η σχέση τους θα ήταν ο λόγος 0/0. Η σχέση που μας ενδιαφέρει είναι η σχέση με την οποία τα μεγέθη εξαφανίζονται, «ο λόγος με τον οποίο εξαφανίζονται». Αυτήν ακριβώς τη σκέψη ειρωνευόταν ο επίσκοπος Μπάρκλεϋ (Berkeley) στην περίφημη κριτική του στον απειροστικό λογισμό. Ο Μπάρκλεϋ μιλούσε για «φαντάσματα μεγεθών που έχουν αποχωρήσει» (ghosts of departed quantities).²³ Για τον Χέγκελ, το κρίσιμο είναι η έννοια του ορίου (limes), δηλαδή του έσχατου λόγου (ultima ratio), στον Νεύτωνα και μάλιστα το γεγονός ότι δεν έχουμε να

²² I. NEWTON: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (31726), επιμ. A. Koyré & I. B. Cohen, Cambridge Mass., Harvard University Press, 1972, βιβλίο I, τμήμα I, λήμμα XI, σχόλιο, σ. 87.

²³ G. BERKELEY: *The Analyst or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* (1734). Στο: *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne*, τ. 4, επιμ. A. A. Luce, London-Edinburgh, Thomas Nelson, 1951, 53-102, στη σ. 89.

κάνουμε με έσχατα μεγέθη (βλ. GW 21, σ. 253-254). Τα έσχατα μεγέθη είναι εκείνα που, στα μάτια του Χέγκελ, είναι όντως φαντάσματα, «ανυπόστατη ομίχλη και σκιά» (GW 21, σ. 233).

Εκείνοι οι έσχατοι λόγοι, με τους οποίους τα μεγέθη εξαφανίζονται, δεν είναι αληθινά λόγοι εσχάτων μεγεθών, αλλά όρια, προς τα οποία οι λόγοι των μεγεθών, καθώς αυτά μειώνονται δίχως όριο, πάντοτε συγκλίνουν.²⁴

Ο Νεύτων μιλά για έσχατους λόγους, με τους οποίους τα μεγέθη εξαφανίζονται (*evanescere*), και αντίστοιχα για πρώτους λόγους, με τους οποίους τα μεγέθη γεννιούνται (*nascere*). Ο Χέγκελ δηλώνει με ενθουσιασμό ότι περί αυτού ακριβώς πρόκειται. Όπως το θέτει ο Νεύτων: «οι έσχατοι λόγοι [...] δεν είναι [...] λόγοι εσχάτων μεγεθών» (*ultimae rationes [...] non sunt rationes quantitatum ultimarum*). Για τον Χέγκελ, η διατύπωση εκφράζει ακριβώς εκείνο στο οποίο επιθυμεί να εστιάσει ο ίδιος: ότι ο έσχατος λόγος δεν είναι πια κλάσμα, αλλά μια ποιοτική σχέση, της οποίας οι όροι, ως ανηρημένα πια μεγέθη, είναι μονάχα στιγμές (*Momente*) (βλ. GW 21, σ. 253). Ο όρος ‘στιγμές’ είναι βέβαια όρος του ίδιου του Νεύτωνα.²⁵ Στην ορολογία της μεθόδου των ροών (*methodus fluxionum*) του Νεύτωνα: (α) ρέοντα (λατ. *fluentes*, αγγλ. *fluents*) είναι τα αρχικά μεγέθη, το y και το x , (β) ροές (λατ. *fluxiones*, αγγλ. *fluxions*) είναι οι παράγωγοι των μεγεθών αυτών ως προς τον χρόνο, dy/dt και dx/dt με τον συμβολισμό του Λάιμπνιτς, $\dot{y}$ και $\dot{x}$ με τον συμβολισμό του ίδιου του Νεύτωνα, (γ) στιγμές (λατ. *momenta*, αγγλ. *moments*) είναι το dy και το dx , που είναι $\dot{y}o$ και $\dot{x}o$ (όπου o η στοιχειώδης, στιγμιαία μεταβολή του χρόνου, δηλαδή το dt) στον συμβολισμό του Νεύτωνα.²⁶

Στον εγχειρίδιο όρο ‘στιγμή’ και στη σχέση του Χέγκελ με τον Νεύτωνα θα επανέλθει η τελευταία ενότητα της εργασίας (ενότητα 9). Από τη συζήτηση σε αυτή την ενότητα, ας κρατηθεί η επισήμανση ότι ο Χέγκελ αναγνωρίζει την κεντρική σημασία της έννοιας του ορίου. Στην ίδια συνάφεια με τον Νεύτωνα, ο Χέγκελ επαινεί και τον Καρνό, στον βαθμό που και εκείνος ανέτρεχε σε μια έννοια του ορίου ως του λόγου που διατηρείται, «δυνάμει του νόμου της συνέχειας» (GW 21, σ. 254), όταν τα μεγέθη τείνουν να εξαφανιστούν.²⁷ Για τον Χέγκελ, η ανάλυση έχει να κάνει με το «όριο του λόγου μεγεθών» (*Grenze des Größen-Verhältnisses*) (GW

²⁴ NEWTON: *Principia Mathematica*, βιβλίο I, τμήμα I, λήμμα XI, σχόλιο, σ. 88. Πβ. GW 21, σ. 254.

²⁵ Βλ. NEWTON: *Principia Mathematica*, βιβλίο II, τμήμα II, λήμμα II, σ. 364.

²⁶ Βλ. C. B. BOYER: *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (1949), New York, Dover, 1959, σ. 194.

²⁷ Βλ. CARNOT: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, §§ 17-18, σ. 24-25· § 42, σ. 47-49. Τη συμβολή του Καρνό σε σχέση με την έννοια του ορίου –παρά τη θεώρησή του περί αντιστάθμισης λαθών, που έχει την πηγή της στον Μπάρκλεϊ– επισημαίνει και ο GRATTAN-GUINNESS: «The Emergence of Mathematical Analysis», σ. 102-103. Ο Ρόμπινσον σημειώνει ότι ενδέχεται ο Καρνό να επηρέασε σχετικά τον Κωσό. Βλ. A. ROBINSON: «The Metaphysics of the Calculus» (1967). Στο: *Selected Papers of Abraham Robinson*, τ. 2: *Nonstandard Analysis and Philosophy*, επιμ. W. A. J. Luxemburg & S. Körner,

21, σ. 253· πβ. σ. 265), το οποίο προσδιορίζεται ακριβώς, και όχι με τον λόγο απείρως μικρών μεγεθών ή ελάχιστων αυξήσεων και ελαττώσεων (βλ. GW 21, σ. 256), ο χειρισμός των οποίων απαιτούσε να αγνοούνται ως αμελητέοι οι σχετικά μικροί όροι, π.χ. το dx σε σχέση με το x ή το $(dx)^2$ σε σχέση με το dx ή το d^2x σε σχέση με το dx .²⁸ Όπως η θέση ότι το dy/dx αποτελεί αδιαίρετο σύμβολο, έτσι και αυτή η θέση του Χέγκελ συνάδει βέβαια με τις νεότερες αντιλήψεις για την ανάλυση.

6. ΧΕΓΚΕΛ ΚΑΙ ΚΩΣΥ

Ο Χέγκελ εμμένει στην έννοια του ορίου και απέναντι στην προσέγγιση του Λαγκράνζ (βλ. GW 21, σ. 264-267). Με την αλγεβρική του προσέγγιση, ο Λαγκράνζ επιχειρούσε να απαλλάξει την ανάλυση όχι μόνο από τα απειροστά μεγέθη, ή τις ελάχιστες μεταβολές, αλλά και από τα όρια, ή τους έσχατους λόγους, καθώς θεωρούσε ότι και τούτες οι έννοιες όζουν μεταφυσικής.²⁹ Ο Χέγκελ, από τη μεριά του, στη δεύτερη έκδοση της *Επιστήμης της Λογικής*, επιμένοντας στις ανυπέρβλητες διατυπώσεις του Νεύτωνα –«οι έσχατοι λόγοι δεν είναι λόγοι εσχάτων μεγεθών»–, ασκεί κριτική όχι μόνο στον Λαγκράνζ, αλλά και στη νεότερη «θεωρία των ορίων» (GW 21, σ. 267), δηλαδή στην προσέγγιση του Κωσύ. Ο σημαντικός μελετητής του Χέγκελ Μίκαελ Βολφ (Michael Wolff) έχει δείξει πειστικά ότι η κριτική του Χέγκελ αναφέρεται πράγματι στον Κωσύ, παρότι δεν τον ονοματίζει.³⁰

Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland Publishing Company, 1979, 537-555, στη σ. 544.

²⁸ Πβ. την οξεία κριτική του Χέγκελ στον πράγματι 'μπακάλικο' τρόπο με τον οποίο δικαιολογούσε ο Κρίστιαν Βολφ (Christian Wolff) την αγνόηση των διαφορικών ανώτερης τάξης, την οποία σύγκρινε με την περίπτωση ενός κόκκου άμμου που έτυχε να απομακρύνει ο άνεμος από την κορυφή ενός βουνού κατά τη μέτρηση του ύψους του (GW 21, σ. 256· βλ. CHR. WOLFF: *Elementa Matheseos Universae*, τ. I (1730), *Gesammelte Werke*, τμήμα II, τ. 29, Hildesheim, Olms, 1968, σ. 543). Για τον Χέγκελ, «στην επιστήμη των μαθηματικών δεν γίνεται επ' ουδενί λόγος για μια τέτοια εμπειρική ακρίβεια» (GW 21, σ. 256). Πβ. τη σχετική κριτική του Χέγκελ στον Βολφ ήδη στη *Λογική της Ιένας* του 1804, G. W. F. HEGEL: *Jenaer Systementwürfe II: Logik, Metaphysik, Naturphilosophie* (1804/5), επιμ. R.-P. Horstmann & J. H. Trede, *Gesammelte Werke*, τ. 7, Hamburg, Meiner, 1971, σ. 18. – Στον Κρίστιαν Βολφ, τη σημαντική αυτή μορφή του Γερμανικού Διαφωτισμού, ανήκει πάντως η τιμή ότι ήταν ο πρώτος άνθρωπος που δίδαξε απειροστικό λογισμό σε γερμανικό πανεπιστήμιο.

²⁹ Πβ. τον πλήρη τίτλο της πραγματείας του Λαγκράνζ: *Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων, περιέχουσα τις αρχές του διαφορικού λογισμού, απαλλαγμένες από οποιαδήποτε θεώρηση απείρως μικρών ή εξαφανιζόμενων μεγεθών, ορίων ή ροών και ανηγμένες στην αλγεβρική ανάλυση πεπερασμένων μεγεθών* (*Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de tout considération d'infiniment petites ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*). Για την κριτική του Λαγκράνζ στους έσχατους λόγους και τα εξαφανιζόμενα μεγέθη του Νεύτωνα βλ. LAGRANGE: *Théorie des fonctions analytiques*, σ. 4.

³⁰ Βλ. WOLFF: «Hegel und Cauchy», σ. 212-215, 231-238. – Ούτε με την τυπική, χρονολογική σημασία, αλλά ούτε και με μια ουσιαστική σημασία είναι ακριβές ότι «ο Χέγκελ

Σε ποιαν όψη της θεωρίας του Κωσύ αναφέρεται η κριτική του Χέγκελ; Η κριτική στρέφεται ενάντια στην έννοια της προσέγγισης (βλ. GW 21, σ. 268-269). Γιατί; Επειδή ο Χέγκελ θεωρεί ότι η έννοια αυτή επαναφέρει μια παράσταση εσχάτων μεγεθών, δηλαδή τιμών που καταλαμβάνουν οι διαφορές και ο λόγος τους (το Δx , το Δy , το $\Delta y/\Delta x$) όταν η αύξηση Δx μειώνεται και το $x+\Delta x$ προσεγγίζει απείρως το x . Για τον Χέγκελ, το όριο δεν θα πρέπει καθόλου να το σκεφτούμε ως «εσχάτη τιμή» (GW 21, σ. 269), αλλά μονάχα ως σχέση. Η αλήθεια είναι ότι ο Κωσύ όντως διαχωρίζει τα κατά τον Χέγκελ αδιαχώριστα dx και dy και ότι τα αντιμετωπίζει ως μεγέθη. Όπως είδαμε παραπάνω (βλ. ενότητα 4), στην προσέγγισή του, η παράγωγος $f'(x)$ ισοδυναμεί εντέλει με ένα κλάσμα, το $df(x)/dx$. Τα διαφορικά $df(x)$ και dx μπορούν, κατά τον Κωσύ, να παίρνουν τόσο πεπερασμένες όσο και απείρως μικρές τιμές καθώς πλησιάζουν το 0. Για τον Χέγκελ, η «άπειρη προσέγγιση» (GW 21, σ. 267) είναι μια κενή έννοια: «μια ποσοτική διαφορά που προσδιορίζεται ως εξής, όχι μόνο να μπορεί, αλλά να οφείλει να είναι μικρότερη από κάθε δεδομένη διαφορά, δεν είναι πια ποσοτική διαφορά» (GW 21, σ. 266). Δηλαδή, το dx δεν είναι πια μέγεθος, δεν είναι μια διαφορά Δx που ολοένα μειώνεται και προσεγγίζει επ' άπειρον το 0. Όπως το θέτει ο Χέγκελ:

Το dx έχει αφήσει την προσέγγιση πίσω του [dx hat die Annäherung bereits im Rücken], δεν είναι εγγύς ούτε κάτι εγγύτερο [ist weder nahe noch ein Näheres]· και 'απείρως εγγύς' σημαίνει ακριβώς την άρνηση του εγγύς-είναι και της προσέγγισης.

GW 21, σ. 269.

Το dx «έχει αφήσει την προσέγγιση πίσω του» (κατά λέξη: έχει την προσέγγιση ήδη στην πλάτη του), το $x_0 + dx$ δεν είναι κοντά ή πιο κοντά στο x_0 . Το dx δεν είναι μια απείρως μικρή διαφορά Δx . Είναι, για τον Χέγκελ, όπως είδαμε, κατά βάση ένας ποιοτικός ή σχεσιακός προσδιορισμός: το dx έχει ένα νόημα μόνο σε σχέση με το dy .

Η άπειρη διαφορά [unendliche Differenz] είναι μια αιωρούμενη διάκριση ενός μεγέθους από ένα μέγεθος, και ο ποιοτικός χαρακτήρας, κατά τον οποίο το dx είναι ουσιωδώς ένας σχεσιακός προσδιορισμός [Verhältnißbestimmung] όχι απέναντι στο x , αλλά απέναντι στο dy , υποχωρεί στην παράσταση.

GW 21, σ. 269.

γράφει πριν τον Κωσύ», όπως αποφαινεται ο G. PRIEST: *Beyond the Limits of Thought*, Oxford, Oxford University Press, 2002, σ. 107 υποσημ.

Η κριτική του Χέγκελ αφορά βέβαια μια όψη της θεωρίας του Κωσύ που μοιάζει, θα έλεγε κανείς, έτσι κι αλλιώς ξεπερασμένη. Με τους ε,δ-ορισμούς του ορίου και της συνέχειας από τον Βάιερστρας,³¹ η θεμελίωση της ανάλυσης φαίνεται να έχει απαλλαγεί τόσο από τον ασαφή –εποπτικού και κινηματικού χαρακτήρα– λόγο περί προσέγγισης όσο και από τα απειροστά σε οποιαδήποτε μορφή τους. Ωστόσο, ο Αβραάμ Ρόμπινσον και ο Ίμρε Λάκατος (Imre Lakatos), σε σημαντικές ιστορικές εργασίες τους,³² έχουν δείξει ότι ο Κωσύ εισήγαγε τα απειροστά με έναν ειδικό τρόπο –ως μεταβλητές, δυναμικές οντότητες– και για έναν ειδικό λόγο: Τα κατά Κωσύ απειροστά είναι δυνάμει απείρως μικρά και πρόθεση του Κωσύ ήταν ακριβώς να αποφύγει κάθε ενεργεία άπειρο. Ας σημειωθεί ότι ο Χέγκελ αντιλαμβάνεται πως τα απειροστά του Κωσύ είναι μόνο δυνάμει απείρως μικρά. Γράφει, όπως είδαμε, ότι τα διαφορικά μπορούν και οφείλουν να είναι μικρότερα από οποιαδήποτε δεδομένη τιμή, όχι ότι είναι μικρότερα (βλ. GW 21, σ. 266).

Από την άλλη, στην καθιερωμένη σήμερα ‘αριθμητική’ προσέγγιση της ανάλυσης, μετά τον Βάιερστρας και μετά τον Ντέντεκιντ (Dedekind) και τον Κάντορ (Cantor), δεχόμαστε βέβαια ένα ενεργεία άπειρο, ένα άπειρο πλήθος πραγματικών αριθμών στο συνεχές. Σε αυτό το πλαίσιο, θεωρούμε ότι εξορίσαμε από τα μαθηματικά την έννοια του απείρως μικρού, του απειροστού, ενώ, αντίθετα, τιθασεύσαμε τις λογικές δυσκολίες που παρουσίαζε η έννοια του απείρως μεγάλου.³³ Ωστόσο, τα ζητήματα σχετικά με τη θεμελίωση της ανάλυσης εξακολουθούν να απασχολούν τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Πέρα από τη βαϊερστρασιανή ορθοδοξία, έχουν ανακύψει, τουλάχιστον από τη δεκαετία του 1960 και έπειτα, εναλλακτικοί τρόποι θεμελίωσης της ανάλυσης: (α) οι κατασκευασιοκρατικές (κονστρουκτιβιστικές) απόπειρες θεμελίωσης, (β) η μη-συμβατική ανάλυση, (γ) η συνθετική διαφορική γεωμετρία ή η λεία απειροστική ανάλυση (smooth infinitesimal analysis).³⁴ Υπό αυτό το

³¹ Δηλαδή ορισμούς του τύπου: Μια συνάρτηση $f(x)$ συγκλίνει στο σημείο x_0 στο όριο με τιμή a αν για οποιοδήποτε, οσοδήποτε μικρό, $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - a| < \varepsilon$.

³² Βλ. ROBINSON: *Non-Standard Analysis*, σ. 269-276, 281· ROBINSON: «The Metaphysics of the Calculus», σ. 547· I. LAKATOS: «Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics» (1966). Στο: *Mathematics, science and epistemology*. Philosophical Papers τ. 2, επιμ. J. Worrall & G. Currie, Cambridge, Cambridge University Press, 1978, 43-60, στις σ. 56-57.

³³ Για δυο παραδειγματικές εκφράσεις αυτής της στάσης πβ. A. FRAENKEL: *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin, Springer, ³1928, σ. 113-117· B. RUSSELL: *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, George Allen & Unwin, 1919, σ. 97-116. Παρεμπιπτόντως, σε αυτό το κείμενο (σ. 107), ως παράδειγμα φιλοσόφου προσκολλημένου στην απαίτηση απειροστών μεγεθών, ο Ράσελ αναφέρει –άστοχα, σύμφωνα με τα παραπάνω– τον Χέγκελ.

³⁴ (α) P. LORENZEN: *Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*, Frankfurt/M., Akademische Verlagsgesellschaft, 1965· E. BISHOP & D. BRIDGES: *Constructive Analysis*, Berlin-Heidelberg, Springer, 1985· (β) ROBINSON: *Non-Standard Analysis*· (γ) A. KOCK: *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge, Cambridge

πρίσμα, σήμερα, για τη φιλοσοφία των μαθηματικών, οι παλαιότερες μαθηματικές συλλήψεις, όπως εκείνη του Κωσύ, αλλά και οι φιλοσοφικές κριτικές, όπως, μεταξύ άλλων, εκείνη του Χέγκελ, ενδέχεται να παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

Όπως και να έχει, ο Χέγκελ, από τη μεριά του, σε σχέση με το ζήτημα της θεμελίωσης της ανάλυσης, υιοθετεί στην εποχή του μια θέση την οποία σήμερα θα τείναμε να χαρακτηρίσουμε ριζικά περατοκρατική (φινιτιστική). Απορρίπτει τόσο το δυνάμει άπειρο όσο και το ενεργεία άπειρο, μικρό ή μεγάλο. Πέρα από τα απείρως μικρά μεγέθη, ο Χέγκελ ρητά απορρίπτει την παράσταση ενός άπειρου πλήθους, π.χ. ενός άπειρου πλήθους σημείων –ή απειροστών γραμμών– σε μια γραμμή (βλ. GW 21, σ. 300-301, 308). Για τον Χέγκελ, η έννοια του ορίου δεν παραπέμπει σε μεγέθη που διατρέχουν είτε ένα άπειρο πλήθος τιμών είτε άπειρα μικρές τιμές. Αντίθετα, η κατανόηση της παραγώγου ως ορίου οδηγεί, σύμφωνα με τα παραπάνω, στην κατανόηση του dx ως ποιοτικού ποσοτικού προσδιορισμού και του dy/dx ως ποιοτικής ποσοτικής σχέσης.

Πάντως, σε ό,τι αφορά την κριτική του στον Κωσύ, ο Χέγκελ, όπως επισημάνθηκε ήδη παραπάνω, αγνοεί τη μαθηματική πρόοδο που συνιστούν οι ορισμοί του Κωσύ, οι ορισμοί του ορίου και της παραγώγου. Σε τι συνίσταται αυτή η πρόοδος; Ο Κωσύ, πολύ απλά, δεν έχει πια τα μαθηματικά προβλήματα των προηγούμενων: δεν χρειάζεται, κατά τη συναγωγή των παραγώγων, να αγνοεί σχετικά μικρούς όρους. Ο Χέγκελ αγνοεί επίσης τη σημασία του ορισμού της συνέχειας τον οποίο δίνει ο Κωσύ. Αγνοεί, μάλιστα, αυτά τα αναμφισβήτητα επιτεύγματα του Κωσύ, παρότι τα επισημαίνει ο Ντίρκσεν, ο μαθηματικός και φίλος του Χέγκελ, στη βιβλιοκρισία η οποία, κατά τα φαινόμενα, αποτέλεσε την πηγή της γνώσης του Χέγκελ για τον Κωσύ.³⁵

Από την άλλη, ο Χέγκελ αναγνωρίζει ότι ο διαφορικός λογισμός έχει να κάνει με συναρτήσεις και όχι απλώς με μεταβλητά μεγέθη (βλ. GW 21, σ. 277). Αυτή είναι και πάλι μια μοντέρνα αντίληψη, που δεν ήταν αυτονόητη την εποχή του Χέγκελ, αφού καθιερώνεται εκείνα ακριβώς τα χρόνια, με τον Λαγκράνζ και με τον Κωσύ.³⁶ Ωστόσο, ο Χέγκελ έχει μια ιδιότυπη κατανόηση της συνάρτησης, καθώς δεν διαθέτει την έννοια της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής, αλλά σκέφτεται τα μεγέθη ως «[...] συναρτήσεις το ένα του άλλου» (GW 21, σ. 277). Επίσης, έχει μια στενή αντίληψη για το ποιες συναρτήσεις είναι αντικείμενο της ανάλυσης.³⁷ Η ανάλυση έχει να κάνει, για τον Χέγκελ, όπως για τον Λαγκράνζ, με τις λεγόμενες αναλυτικές συναρτήσεις, δηλαδή κατά βάση με πολυώνυμα, εκθετικές συναρτήσεις και λογαριθμικές συναρτήσεις (βλ.

University Press, 2006· J. L. BELL: *A Primer in Infinitesimal Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

³⁵ Βλ. σχετικά WOLFF: «Hegel und Cauchy», σ. 253-254, 260-261.

³⁶ Βλ. N. BOURBAKI: *Elements of the History of Mathematics* (1984), μτφρ. J. Meldrum, Berlin-Heidelberg, Springer, 1994, σ. 197.

³⁷ Βλ. σχετικά WOLFF: «Hegel und Cauchy», σ. 217-223, 257-260.

GW 21, σ. 275-276). Όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι, βέβαια, παντού συνεχείς και παραγωγίσιμες. Υπό αυτή την προϋπόθεση, δεν υφίσταται ανάγκη διάκρισης των συνεχών από τις ασυνεχείς συναρτήσεις. Επομένως, γίνεται κατανοητό γιατί ο Χέγκελ δεν ήταν σε θέση να εκτιμήσει την πρόοδο που πέτυχε ο σύγχρονός του Κωσύ σε σχέση με την έννοια της συνέχειας.

7. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η εργασία δεν θα σταθεί περισσότερο στον τρόπο που ο Χέγκελ προσέλαβε ή, σε έναν βαθμό, απέτυχε να προσλάβει την καινοτόμο θεώρηση του Κωσύ. Θα προσπεράσουμε, επίσης, την εκτενή πραγμάτευση του Λαγκράνζ εκ μέρους του Χέγκελ. Δεν θα επιχειρηθεί εδώ να εξηγηθεί γιατί ο Χέγκελ πίστευε ότι «η κατανόηση [...] της απλής φύσης του πράγματος» (GW 21, σ. 309), δηλαδή του ποιοτικού χαρακτήρα των προσδιορισμών, αρκεί προκειμένου να παραμεριστούν οι μαθηματικές δυσκολίες σχετικά με το όριο όσο και με την ανάγκη αγνόησης όρων ως αμελητέων. Κύριο μέλημα της εργασίας δεν είναι, άλλωστε, να αναδείξει το όποιο ενδιαφέρον μπορεί να έχει η θεώρηση του Χέγκελ για τη φιλοσοφία των μαθηματικών, αλλά να αναδείξει τις συνέπειες που έχει η θεώρηση του Χέγκελ επί του απειροστικού λογισμού για τη φιλοσοφία του εν γένει (βλ. παρακάτω ενότητα 9).

Ωστόσο, η παρούσα ενότητα θα σταθεί σε μια μόνο γενική παρατήρηση για τον τρόπο με τον οποίο ο Χέγκελ προσέλαβε το πρόγραμμα του Λαγκράνζ. Κι αυτό γιατί η στάση του Χέγκελ απέναντι στον Λαγκράνζ έχει, όπως θα φανεί, μια ευρύτερη σημασία. Το πρόγραμμα του Λαγκράνζ στηριζόταν στην ανάπτυξη των συναρτήσεων σε σειρές Τέιλορ: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$. Στηριζόταν, άρα, για τον Χέγκελ, στην ακατάλληλη μορφή της άπειρης σειράς (βλ. GW 21, σ. 245). Ωστόσο, ο Χέγκελ επαινεί τον Λαγκράνζ για έναν συγκεκριμένο λόγο, χωρίς να υιοθετεί συνολικά το πρόγραμμά του (βλ. GW 21, σ. 298-299).³⁸ Ποιος είναι αυτός ο λόγος; Ο λόγος είναι ότι ο Λαγκράνζ αποσυνδέει το ζήτημα της ανάλυσης από γεωμετρικές και κινηματικές θεωρήσεις (πβ. GW 21, σ. 286-287). Το ζήτημα της ανάλυσης είναι, σε ένα πρώτο βήμα, απλώς και μόνο το εξής: να προσδιοριστεί ο διαφορικός συντελεστής, δηλαδή η παράγωγος για μια συνάρτηση. Σε ένα δεύτερο, ανεξάρτητο βήμα, δείχνεται κατόπιν σε τι αντιστοιχεί αυτός ο συντελεστής. Γεωμετρικά, ο συντελεστής σημαίνει την κλίση της εφαπτομένης και αυτό μπορεί πλέον να δειχτεί χωρίς την προσφυγή σε ελάχιστα τμήματα και

³⁸ Είναι μάλλον παραπλανητικός ο ισχυρισμός ότι «[η] φιλοσοφία των μαθηματικών του Χέγκελ οφείλει να διαβαστεί σε μεγάλο βαθμό ως σχόλιο, σε πνεύμα έγκρισης και συμφωνίας, στις εργασίες του Λαγκράνζ» (STEKELER-WEITHOFER: *Philosophie des Selbstbewußtseins*, σ. 264).

σε απειροστά. Σε μια εμπειρική εφαρμογή, ο συντελεστής μπορεί να σημαίνει την ταχύτητα μιας κίνησης ή εν γένει τον ρυθμό μεταβολής του ενός ή του άλλου φυσικού μεγέθους.

Ο Χέγκελ θεωρεί κρίσιμη αυτή την αποσύνδεση της ανάλυσης από τις εφαρμογές της. Οφείλει κανείς να διαχωρίζει τη μαθηματική έκφραση, από τη μια μεριά, και ό,τι αφορά μια φυσική ύπαρξη, επομένως αντλείται από την εμπειρία, από την άλλη. Αυτόν τον «γνήσια επιστημονικό δρόμο» (GW 21, σ. 286) άνοιξε ο Λαγκράνζ. Ο Χέγκελ στηρίζει σε αυτό το σημείο την κριτική του σε μια ολόκληρη παράδοση (βλ. GW 21, σ. 270-273), στην οποία συμπεριλαμβάνει και τον Νεύτωνα (βλ. GW 21, σ. 272· πβ. σ. 340-341). Η παράδοση αυτή, σύμφωνα με τον Χέγκελ, αξίωνε να αποδεικνύονται με το εργαλείο της μαθηματικής ανάλυσης φυσικοί νόμοι, δηλαδή σχέσεις ανάμεσα σε φυσικά μεγέθη. Συχνά, το αποτέλεσμα ήταν να αποδεικνύονται κατ' επίφαση σχέσεις που στην πραγματικότητα είχαν συναχθεί από την εμπειρία. Κατά τον Χέγκελ, η επίφαση της απόδειξης δίνεται «[...] προπάντων με τη συνδρομή της αχλής του απείρους μικρού» (GW 21, σ. 272), που συγκάλυπτει τη διαφορά ανάμεσα στη μαθηματική έκφραση και στην πραγματική αναφορά. Στη συγκάλυψη αυτή εδράζεται μια «στρεβλή μεταφυσική» (schiefe Metaphysik) (GW 21, σ. 291): για παράδειγμα, η αστήριχτη παραδοχή για τη σύσταση της επιταχυνόμενης κίνησης από ελάχιστες (στοιχειώδεις) ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις.

[...]α μαθηματικά δεν είναι καθόλου σε θέση να αποδεικνύουν ποσοτικούς προσδιορισμούς της φυσικής, στο βαθμό που πρόκειται για νόμους, των οποίων υπόκειται η ποιοτική φύση των στιγμών.

GW 21, σ. 272.

Επομένως, για τον Χέγκελ, η «υπεράσπιση της τιμής των μαθηματικών», η αξίωσή τους να αποδεικνύουν αυστηρά όλες τους τις προτάσεις, δεν θα πρέπει να τα κάνει «να ξεχνούν το όριό τους» (GW 21, σ. 272). Τα μαθηματικά έχουν το όριό τους στην εμπειρία. Σε αυτό ακριβώς το όριο—δηλαδή στο γεγονός πως η δικαιοδοσία τους εκτείνεται σε ένα σαφώς οριοθετημένο πεδίο, όπου τίποτε δεν την απειλεί—οφείλουν την υψηλή τους περιωπή.

[...] Η υπεράσπιση της τιμής των μαθηματικών, ότι όλες οι προτάσεις που εμφανίζονται σε αυτά οφείλουν να έχουν αποδειχτεί αυστηρά, τα έκανε συχνά να ξεχνούν το όριό τους. Έμοιαζε λοιπόν να αντιβαίνει στην τιμή τους το να αναγνωρίζει κανείς για εμπειρικές προτάσεις απλώς την εμπειρία ως πηγή και ως μοναδική απόδειξή τους. Αργότερα, διαμορφώθηκε μεν καλύτερα η συνείδηση επ' αυτού·

όσο όμως αυτή η συνείδηση δεν έχει ξεκαθαρίσει τη διαφορά ανάμεσα σε εκείνο που μπορεί να αποδειχτεί μαθηματικά και σε εκείνο που μπορεί μόνο να ληφθεί από κάπου αλλού, όπως και τη διαφορά ανάμεσα σε εκείνα που αποτελούν απλώς όρους μιας αναλυτικής ανάπτυξης και σε εκείνα που είναι φυσικές υπάρξεις, είναι αδύνατο να διαμορφωθεί η επιστημονικότητα [Wissenschaftlichkeit] ως μια αυστηρή και καθαρή στάση.

GW 21, σ. 272-273.

«[Τ]αύτα [...] λέγει ο Έγγελος μετά σαφηνείας και θετικότητος ουχί πάντοτε αυτώ συνήθους», έγραφε ο Εμμανουήλ Ροϊδης, παραθέτοντας κάποιο αντίστοιχα διαυγές χωρίο από τις παραδόσεις του Χέγκελ για την Αισθητική.³⁹ Εν προκειμένω, στο τέλος της πρώτης παρέμβασης της *Επιστήμης της Λογικής* για την ανάλυση, ο Χέγκελ, ούτε λίγο ούτε πολύ, υπερασπίζεται το δίκαιο της εμπειρίας απέναντι στον Νεύτωνα, όσο και αν πάλι πιθανότατα εκπλήσσονται οι αναγνώστριες και οι αναγνώστες.

Πάντως, ο Χέγκελ θεωρεί ότι η φιλοσοφία είναι εκείνη που εν μέρει επιτυγχάνει εκεί όπου αποτυγχάνουν τα μαθηματικά. Η φιλοσοφία είναι, δηλαδή, κατά τον Χέγκελ, σε θέση να δείξει την αναγκαιότητα κάποιων προσδιορισμών εκ της εννοίας, χωρίς να είναι υποχρεωμένη να προσφύγει απλώς στην εμπειρία και να επικαλεστεί άμεσα εμπειρικά δεδομένα (πβ. GW 21, σ. 272, 340-341). Με αυτό τον τρόπο, ο Χέγκελ συνεχίζει μια παράδοση που ξεκινά με τις *Μεταφυσικές πρώτες αρχές της φυσικής επιστήμης* του Καντ και περνά μέσα από τη φιλοσοφία της φύσης του Σέλλινγκ (Schelling). Ο Καντ ήταν εκείνος που στις μαθηματικές αρχές της φυσικής του Νεύτωνα είχε αντιτάξει, ή μάλλον προτάξει, εκείνες τις μεταφυσικές, δηλαδή εννοιολογικές, αρχές που αποτελούν όρο για την ίδια την εφαρμογή των μαθηματικών στην εμπειρία.⁴⁰ Ποιες είναι, σύμφωνα με τη θεώρηση του Χέγκελ, οι αξιώσεις που εγείρει η φιλοσοφία σχετικά με τη γνώση της φύσης και ποια τα όρια αυτών των αξιώσεων; Ποια μπορεί να είναι η σχέση ανάμεσα στη φιλοσοφική θεώρηση της φύσης και στη μαθηματική φυσική; Τα ερωτήματα υπερβαίνουν τον ορίζοντα αυτής της εργασίας.

8. Ο ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΠΡΙΝ ΤΟΝ ΧΕΓΚΕΛ

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο Χέγκελ, σε σχέση με τον απειροστικό λογισμό, δέχεται ορισμένες αξιοσημείωτα μοντέρνες θέσεις. Με άλλα λόγια, δέχεται θέσεις που συνάδουν με τις κατοπινές εξελίξεις της θεωρίας. Συγκεκριμένα, επισημάνθηκε στα προηγούμενα πως ο Χέγκελ αναγνωρίζει: (α) ότι το σύμβολο dy/dx οφείλει να κατανοηθεί ως αδιαίρετο

³⁹ Ε. Ροϊδης: «Περί συγχρόνου εν Ελλάδι κριτικής» (1877). Στο: *Απαντα*, επιμ. Α. Αγγέλλου, τ. 2, Αθήνα, Ερμής, 1978, 246-285, στη σ. 259.

⁴⁰ Πβ. το τέλος του Προλόγου στις *Μεταφυσικές πρώτες αρχές της φυσικής επιστήμης*, Ι. ΚΑΝΤ: ΑΑ τ. 4, σ. 478-479.

σύμβολο και όχι ως λόγος κάποιων μεγεθών (βλ. ενότητα 4), (β) ότι καθοριστική για την ανάλυση είναι η έννοια του ορίου και όχι έννοιες όπως εκείνη των ελάχιστων μεταβολών, οι οποίες παραπέμπουν σε απειροστά μεγέθη και άρα οφείλουν να παραμεριστούν (βλ. ενότητα 5), (γ) ότι ο διαφορικός και ο ολοκληρωτικός λογισμός είναι κατ' ουσίαν θεωρίες συναρτήσεων και όχι θεωρίες περί μεταβλητών μεγεθών (όσο και αν ο Χέγκελ δεν κατάφερε να εκτιμήσει τα επιτεύγματα του Κωσύ στη θεωρία των συναρτήσεων, βλ. ενότητα 6).

Ωστόσο, η κεντρική ιδέα του Χέγκελ που συζητήθηκε παραπάνω (βλ. κυρίως ενότητα 2), δηλαδή η ιδέα ότι το μαθηματικό άπειρο έχει να κάνει με έναν ποιοτικό προσδιορισμό της ποσότητας, είναι μια ιδέα που σήμερα πιθανότατα ξενίζει. Δεν φαίνεται να συναντιέται με τις κατοπινές αντιλήψεις για το άπειρο είτε στα ίδια τα μαθηματικά είτε στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Από την άλλη, πάντως, είναι μια ιδέα που είχε σημαντικούς προδρόμους και που είχε αποκτήσει μια σημασία στη μετακαντιανή γερμανική φιλοσοφία ήδη πριν τον Χέγκελ.

Η ιδέα ότι η έννοια του απείρου είναι κατά βάση μια έννοια σχέσης και όχι ένας προσδιορισμός μεγέθους, υπάρχει, με έναν τρόπο, ήδη στο έργο του Λάιμπνιτς, δηλαδή εκείνου που, παράλληλα με τον Νεύτωνα, εισήγαγε τον απειροστικό λογισμό. Στο κεφάλαιο «για την απειρία» (de l'infinité) του δεύτερου βιβλίου των *Nouveaux Essais*, ο Λάιμπνιτς εξηγεί ότι η αληθινή έννοια του απείρου δεν είναι η έννοια ενός απείρου όλου που συντίθεται από πεπερασμένα μέρη, καθώς αυτή είναι μια έννοια αντιφατική.⁴¹ Η έννοια του απείρου έχει την πηγή της στην έννοια της «ομοιότητας» (similitude) ή «του ίδιου λόγου» (la même raison).⁴² Σε μια γεωμετρική ακολουθία $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$, το άπειρο δεν βρίσκεται σε κάποιον έσχατο όρο ή στο άθροισμα των όρων, αλλά στην «ομοιότητα», δηλαδή στη σχέση που υφίσταται ανάμεσα σε διαδοχικούς όρους, όποιο και αν είναι το μέγεθός τους, καθώς αυτή η σταθερή σχέση είναι εκείνη που καθιστά αδύνατη την ολοκλήρωση της ακολουθίας. Πάντως, για τον Λάιμπνιτς, η έννοια του απειροστού, δηλαδή του απείρως μικρού μεγέθους, που εμφανίζεται στον λογισμό, δεν είναι η αληθινή έννοια του απείρου, αλλά μια έννοια αντίστοιχη με εκείνην του απείρου όλου. Αυτές οι έννοιες χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά, χωρίς όμως να αναφέρονται σε κάτι πραγματικό. Είναι, για τον Λάιμπνιτς, χρήσιμες πλασματικές κατασκευές, όπως οι φανταστικοί αριθμοί: «ακριβώς όπως οι φανταστικές ρίζες [les racines imaginaires] της Άλγεβρας».⁴³

⁴¹ Βλ. G. W. LEIBNIZ: *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain* (1704). *Philosophische Schriften*, τ. 3 (γαλλ.-γερμ.), επιμ. και μτφρ. W. von Engelhardt & H. H. Holz, Frankfurt/M., Suhrkamp, 1996, βιβλίο II, κεφ. 17, §3 (τ. 3.1, σ. 214).

⁴² LEIBNIZ: *Nouveaux Essais*, βιβλίο II, κεφ. 17, §3 (τ. 3.1, σ. 212). – Για τον Λάιμπνιτς και για τη σύνδεση που επιχειρεί, σε άλλα κείμενα, ανάμεσα στην έννοια της «ομοιότητας» και σε εκείνην της «μορφής» ή της «ποιότητας» βλ. WOLFF: «Hegel und Cauchy», σ. 245-249.

⁴³ LEIBNIZ: *Nouveaux Essais*, βιβλίο II, κεφ. 17, §3 (τ. 3.1, σ. 214).

Ωστόσο, η ιδέα ότι το άπειρο της μαθηματικής ανάλυσης ανάγεται σε έναν ποιοτικό προσδιορισμό, απαντά κατόπιν στα κατάλοιπα του Καντ: «Ό,τι ισχύει για ένα μέγεθος [von einem quanto], ισχύει επίσης για το όριο του μεγέθους [von dem limite quanti], διότι η ποιότητα παραμένει».⁴⁴ Στη μετακαντιανή συζήτηση, η ιδέα στάθηκε καθοριστική για την προσέγγιση στο μαθηματικό άπειρο του μαθηματικού και φιλοσόφου Λάζαρου Μπενντάβιντ (Lazarus Bendavid) (*Απόπειρα λογικής ανάλυσης του μαθηματικού απείρου*, 1789):

[...] σε σχέση με τον λογισμό [...ένα μέγεθος γίνεται] άπειρο όταν θεωρείται ως σκέτη ποιότητα [bloße Qualität], ως μη-μετρήσιμη ποσότητα, και εντούτοις, κατ' αναλογίαν, συγκαταλέγεται στις μετρήσιμες ποσότητες.⁴⁵

Η ιδέα ότι το άπειρο της ανάλυσης έχει να κάνει με μια ποιότητα που διατηρείται όταν ένα μέγεθος τείνει να μηδενιστεί, στάθηκε ιδιαίτερα καθοριστική για τη φιλοσοφική σύλληψη του Σάλομον Μάιμον (Salomon Maimon). Ο Μάιμον υπήρξε ένας σημαντικός κρίκος στην εξέλιξη της μετακαντιανής κλασικής γερμανικής φιλοσοφίας, μεταξύ άλλων χάρη στον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε τη σχέση μεταξύ διάνοιας και αισθητικότητας, πέρα από το καντιανό μοντέλο της υπαγωγής ενός εποπτικού υλικού στις διανοητικές μορφές. Σε σχέση με αυτό το ζήτημα, ο Μάιμον επιχείρησε, στο *Δοκίμιο για την υπερβατολογική φιλοσοφία* (1790), να εισαγάγει «[...] τις μαθηματικές έννοιες του απείρου στη φιλοσοφία».⁴⁶ Συγκεκριμένα, σκέφτηκε τα διαφορικά της συνείδησης (Differentialle des Bewusstseins) ως εκείνες τις στοιχειώδεις ποιότητες η σύνθεση των οποίων από τη διάνοια συγκροτεί την οποιαδήποτε ποσότητα, το οποιοδήποτε εκτατικό ή εντατικό μέγεθος, που μπορεί να δίνεται σε μια εποπτεία.⁴⁷ Κατά τρόπο που μοιάζει ως έναν βαθμό να προλαμβάνει τη θεώρηση του Χέγκελ, ο Μάιμον σκέφτηκε το dx ως έναν ποιοτικό προσδιορισμό και το dy/dx ως μια ποιοτική σχέση. Ενδεικτικά, ο Μάιμον γράφει ότι ο λόγος των κάθετων πλευρών στο χαρακτηριστικό τρίγωνο, δηλαδή η γεωμετρική έκφραση της παραγώγου dy/dx , «[...] δεν είναι μια σχέση αριθμού προς αριθμό, [...] μεταξύ των γραμμών στον

⁴⁴ I. KANT: Refl. 5815, AA τ. 18: σ. 361. Πβ. Refl. 5973, AA τ. 18: σ. 410.

⁴⁵ L. BENDAVID: *Versuch einer logischen Auseinandersetzung des Mathematischen Unendlichen*, Berlin, Petit & Schöne, 1789, σ. 44. – Ο Μπενντάβιντ διαδραμάτισε έναν σημαντικό ρόλο αφενός στη διάδοση της καντιανής φιλοσοφίας, κυρίως στην Αυστρία, με τις σχετικές παραδόσεις του τα χρόνια 1791-1797 στη Βιέννη, και αφετέρου στο πνευματικό κίνημα της εβραϊκής χειραφέτησης, αφότου, εκδιωγμένος από την Αυστρία, επέστρεψε στη γενέτειρά του το Βερολίνο.

⁴⁶ S. MAIMON: *Versuch über die Transzendentalphilosophie* (1790), επιμ. F. Ehrensperger, Hamburg, Meiner, 2004, σ. 21 υποσημ.

⁴⁷ Βλ. MAIMON: *Versuch über die Transzendentalphilosophie*, σ. 21. Πβ. στο ίδιο, σ. 193: «Το μεταφυσικό απείρως μικρό είναι πραγματικό [reell], επειδή η ποιότητα μπορεί πράγματι να θεωρηθεί καθαυτή κατ' αφαίρεση από κάθε ποσότητα».

βαθμό που είναι μετρήσιμες, αλλά μόνο στον βαθμό που είναι προσδιορισμένες ως προς την ποιότητά τους (τη θέση τους).»⁴⁸

9. Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΟΥ ΧΕΓΚΕΛ

Σε κάθε περίπτωση, η ιδέα του Χέγκελ ότι το μαθηματικό άπειρο έχει να κάνει με έναν ποιοτικό προσδιορισμό της ποσότητας και μια ποιοτική ποσοτική σχέση, δεν είναι κάποια καθαρά δική του επινόηση, αλλά η προέκταση μιας γραμμής σκέψης γύρω από τον απειροστικό λογισμό που είχε αναπτυχθεί ήδη πριν από αυτόν. Για τη φιλοσοφία του Χέγκελ, η ιδέα έχει μια κεντρική συστηματική σημασία: (α) Η ιδέα είναι καθοριστική για τον τρόπο με τον οποίο ο Χέγκελ συλλαμβάνει την κατηγορία του μέτρου, της «ποιοτικής ποσότητας», η οποία έχει μια κομβική θέση και λειτουργία στην *Επιστήμη της Λογικής*. (β) Η ιδέα είναι καθοριστική για την –εμβληματική για την εγελιανή φιλοσοφία– έννοια του αληθινού απείρου. (γ) Η πρόσληψη του απειροστικού λογισμού είναι καθοριστική για τη –θεμελιώδη για την εγελιανή διαλεκτική– έννοια της στιγμής (Moment).

(α) Οι εκτενείς παρατηρήσεις για την ανάλυση, στο τέλος του κεφαλαίου για την κατηγορία του μεγέθους, στην *Επιστήμη της Λογικής* δεν είναι απλές παρεκβάσεις. Οι παρατηρήσεις εξηγούν τι ακριβώς συμβαίνει στο κεφάλαιο που προηγείται, για την «απειρία του μεγέθους» (GW 21, σ. 233-236). Σε αυτές τις παρατηρήσεις στηρίζεται, όμως, κατά βάση και το κεφάλαιο που ακολουθεί, το κεφάλαιο για την κατηγορία της «ποσοτικής σχέσης» (quantitativen Verhältniß) (GW 21, σ. 310-322), όπως ρητά αναγνωρίζει ο Χέγκελ (GW 21, σ. 311). Ο Χέγκελ εκθέτει εκεί πώς μέσα στην ποσοτική σχέση αναδύεται σταδιακά –από την ευθεία αναλογία ($y/x = c$) στην αντίστροφη αναλογία ($y \cdot x = c$) και από εκεί σε μια σχέση δυνάμεων ($y/x = c \cdot x$, δηλαδή $y = c \cdot x^2$)– ένας ποιοτικός χαρακτήρας (πβ. στα προηγούμενα ενότητα 3) και πώς εντέλει η κατηγορία μεταβαίνει στην κατηγορία του μέτρου (Maß), που σημαίνει την «ποιοτική ποσότητα» (GW 21, σ. 329). Η κατηγορία του μέτρου είναι κρίσιμη για την εγελιανή Λογική, καθώς επιτελεί τη μετάβαση από το πρώτο βιβλίο, τη Λογική του Είναι, στο δεύτερο βιβλίο, τη Λογική της Ουσίας.

Η κατηγορία του μέτρου έχει να κάνει με τον τρόπο που ποσοτικοποιούμε, που συλλαμβάνουμε ως μέγεθος, τη μία ή την άλλη ποιότητα. Έχει, επομένως, να κάνει με εκείνο που ο Χέγκελ ονομάζει «μαθηματικά της φύσης» (Mathematik der Natur) (GW 21, σ. 327, 340), δηλαδή με το ζήτημα της μαθηματικοποίησης στις φυσικές επιστήμες. Με άλλα λόγια,

⁴⁸ MAIMON: *Versuch über die Transzendentalphilosophie*, σ. 213-214. Πβ. στο ίδιο σ. 213: «[...] η ποιότητα, κατ' αφαίρεση από κάθε εκτατική ποσότητα, μπορεί εντούτοις να νοηθεί σε μια σχέση της εκτατικής ποσότητας.» – Για την πρόσληψη του απειροστικού λογισμού από τον Μάιμον και τον Μπενντάβιντ πβ. M. GIOVANELLI: *Reality and Negation – Kant's Principle of Anticipations of Perception. An Investigation of its Impact on the Post-Kantian Debate*, Dordrecht, Springer, 2011, σ. 60-66. Για τη θεώρηση του Χέγκελ στο πλαίσιο της μετακαντιανής συζήτησης πβ. στο ίδιο, σ. 124-144.

η κατηγορία του μέτρου έχει να κάνει με το ζήτημα της σχέσης μεταξύ εμπειρίας, έννοιας και μαθηματικών, ζήτημα που θίχτηκε στα προηγούμενα (βλ. ενότητα 7), αλλά υπερβαίνει τα όρια αυτής της εργασίας. Ας γίνει απλώς μια νύξη στον νεοκαντιανό Ερνστ Κασίρερ (Ernst Cassirer), που στις αρχές του 20ού αιώνα, παρά τη σφόδρα κριτική στάση του απέναντι στην εγελιανή φιλοσοφία της φύσης, υπογράμμιζε τη σημασία και τη γονιμότητα της εγελιανής θεωρίας του μέτρου για τη φιλοσοφία των φυσικών επιστημών.⁴⁹

(β) Αν κάποια ή κάποιος γνωρίζει έστω και λίγα πράγματα για την εγελιανή φιλοσοφία, πιθανότατα θα γνωρίζει ότι ο Χέγκελ αντιπαραθέτει το αληθινό άπειρο στο κακό άπειρο. Τι σημαίνει, όμως, αυτή η διάκριση; Δεν συμπίπτει με την κλασική (αριστοτελική) διάκριση ανάμεσα στο ενεργεία άπειρο και το δυνάμει άπειρο, παρότι συχνά ερμηνεύεται με αυτό τον τρόπο.⁵⁰ Ενίοτε, μάλιστα, βάσει μιας ταύτισης του εγελιανού αληθινού απείρου με το ενεργεία άπειρο, ο Χέγκελ παρουσιάζεται σαν πρόδρομος του Κάντορ.⁵¹ Ο ίδιος ο Κάντορ δικαίως αμύνθηκε απέναντι σε αυτή τη σύνδεση, η οποία είχε επιχειρηθεί ήδη στην εποχή του, επισημαίνοντας ότι ο Χέγκελ δεν γνωρίζει διακρίσεις ή διαβαθμίσεις εντός του αληθινού απείρου, ότι δεν γνωρίζει κάτι ανάλογο με τις διαφορετικές πληθικότητες (Mächtigkeiten) απείρων συνόλων. Μάλιστα, για τον Κάντορ, το πρόβλημα με την αντίληψη του Χέγκελ για το αληθινό άπειρο ήταν ότι είναι πανθεϊστική ή σπινοζιστική, δηλαδή ότι αποκλείει έναν υπερβατικό Θεό.⁵²

Πράγματι, για τον Χέγκελ, το κακό άπειρο –ή, σύμφωνα με τα παραπάνω (βλ. ενότητα 3), το απλό άπειρο– είναι το άπειρο ως επέκεινα του πεπερασμένου. Είτε το σκεφτούμε ως δυνάμει άπειρο, π.χ. ως άπειρη αναδρομή σε μια σειρά, είτε ως ενεργεία άπειρο, π.χ. ως δεδομένο άπειρο

⁴⁹ Βλ. E. CASSIRER: *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*. τ. 3: *Die nachkantischen Systeme* (21923), Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1994, σ. 341-342.

⁵⁰ Πβ. ενδεικτικά G. KREIS: *Negative Dialektik des Unendlichen*. Kant, Hegel, Cantor, Berlin, Suhrkamp, 2015, σ. 296-310· PRIEST: *Beyond the Limits of Thought*, σ. 105-109.

⁵¹ Πιο αποφασιστικά από τους MORETTO: «L'Influence de la 'Mathématique de l'Infini'», σ. 177, 196 και PRIEST: *Beyond the Limits of Thought*, σ. 109· πιο διστακτικά από τον KREIS: *Negative Dialektik des Unendlichen*, σ. 309-310.

⁵² Βλ. G. CANTOR: «Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktuelle Unendliche» (1885). Στο: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, επιμ. E. Zermelo, Berlin-Heidelberg, Springer, 1932, 370-377, στη σ. 376· G. CANTOR: «Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten» (1887). Στο: *Gesammelte Abhandlungen*, 378-439, στη σ. 391. – Για την έννοια του αληθινού μαθηματικού απείρου, στην πρώτη παρέκβαση για την ανάλυση, ο Χέγκελ παραπέμπει στον Σπινόζα (Spinoza). Βλ. GW 21, σ. 247-249. Μια συζήτηση της σχέσης του Χέγκελ με τον Σπινόζα θα διαρρήγνυε, ωστόσο, τα όρια αυτής της εργασίας. – Ας δοθεί για άλλη μια φορά ο λόγος στον Εμμανουήλ Ροΐδη, που, ενάντια σε αφελείς αντιλήψεις της εποχής του περί 'ιδεαλισμού', έγραφε για τον Χέγκελ ότι «[...] ο μέγας πανθεϊστής [...] ουδ' υπέρ αυτού του Θεού παρεδέχετο άλλον τινά υπέρτερον κόσμον· αλλ' ένα μόνον επίστευε, τον χοϊκόν τούτον εφ' ού πατούμεν» (Ροΐδης: «Περί συγχρόνου εν Ελλάδι κριτικής», σ. 259).

πλήθος, το άπειρο κατά την απλή του κατανόηση παραμένει, για το πεπερασμένο, ένα ανέφικτο δέον. Τέτοιο, κακό άπειρο είναι κατεξοχήν το λεγόμενο «μεταφυσικό άπειρο» (GW 21, σ. 237). Οι υποστηρικτές του, βέβαια, το αντιπαραθέτουν στο μαθηματικό άπειρο. Ισχυρίζονται ότι το μαθηματικό άπειρο είναι τάχα μονάχα σχετικό, ενώ το μεταφυσικό άπειρο είναι τάχα το απόλυτο άπειρο, αφού διακρίνεται ριζικά και υπερέχει ποιοτικά έναντι του πεπερασμένου. Στην πραγματικότητα, γράφει ο Χέγκελ, το μεταφυσικό άπειρο είναι εκείνο που είναι σχετικό, καθώς θέτει απέναντί του το πεπερασμένο και προσδιορίζεται αρνητικά σε σχέση με αυτό (βλ. GW 21, σ. 246-247). Διαχωρίζεται, δηλαδή, από το πεπερασμένο και είναι ό,τι είναι μόνο χάρη σε αυτό τον διαχωρισμό, άρα μόνο σε σχέση με το πεπερασμένο. Όντας επέκεινα του πεπερασμένου, έχει το δικό του πέρας στο πεπερασμένο. Αντίθετα, στο μαθηματικό άπειρο υπόκειται η έννοια του αληθινού απείρου. Το αληθινό άπειρο είναι η ενότητα απείρου και πεπερασμένου.⁵³ Το άπειρο της ανάλυσης είναι η ενότητα της πεπερασμένης ποσότητας και του αληθινού της επέκεινα, της ποιότητας.

Από φιλοσοφική άποψη, όμως, το μαθηματικό άπειρο είναι σημαντικό για το λόγο ότι όντως υπόκειται σε αυτό η έννοια του αληθινού απείρου και ότι στέκει πολύ ψηλότερα από το συνήθως ούτως καλούμενο μεταφυσικό άπειρο, από τη σκοπιά του οποίου διατυπώνονται οι αντιρρήσεις ενάντια στο πρώτο.

GW 21, σ. 237.

(γ) Η έννοια της στιγμής (Moment) είναι μια θεμελιώδης έννοια για τη φιλοσοφία του Χέγκελ, δηλαδή για τη διαλεκτική ή ολιστική του σύλληψη: Οι έννοιες προβάλλουν ως αυτοτελείς προσδιορισμοί, αλλά δείχνονται να είναι μονάχα στιγμές ενός όλου· οι έννοιες προσδιορίζονται η καθεμιά μόνο σε σχέση με την άρνησή της και παραπέμπουν εντέλει, για τον πλήρη προσδιορισμό τους, σε ένα σύστημα των λογικών σχέσεων μεταξύ των εννοιών.

Για την έννοια της στιγμής, ο Χέγκελ ανατρέχει, λοιπόν, σύμφωνα με τα παραπάνω (βλ. ενότητα 5), στον Νεύτωνα. Μάλιστα, δεν ανατρέχει στον Νεύτωνα μονάχα στις παρεκβάσεις όπου συζητά τη μαθηματική ανάλυση. Ήδη στην αρχή της *Επιστήμης της Λογικής*, όταν εκθέτει την περίφημη τριάδα Είναι–Μηδέν–Γίνεσθαι (Sein-Nichts-Werden) και εξηγεί πώς το Είναι και το Μηδέν υποβιβάζονται από τάχα αυτοτελείς προσδιορισμοί σε «εξαφανιζόμενες» στιγμές ενός όλου, της ενότητας μεταξύ τους (GW 21, σ. 92), ο Χέγκελ υπενθυμίζει τις επιθέσεις ενάντια στην «[...] έννοια των απείρως μικρών μεγεθών που δίνει η ανώτερη ανάλυση» (GW 21, σ. 91). Ο Χέγκελ έχει κατά νου την κριτική του Ντ'Αλαμπέρ

⁵³ Για μια ενδελεχή ανάλυση του κεφαλαίου της *Επιστήμης της Λογικής* για το ποιοτικό άπειρο (GW 21, σ. 126-143) βλ. Γ. ΦΑΡΑΚΛΑΣ: *Γνωσιοθεωρία και μέθοδος στον Έγελο*, Αθήνα, Εστία, 2000, σ. 82-185.

(d'Alembert) στα εξαφανιζόμενα μεγέθη του Νεύτωνα.⁵⁴ Τι αντέτεινε ο Ντ'Αλαμπέρ, «ο εχθρός κάθε μυστικισμού στα μαθηματικά όσο και οπουδήποτε αλλού»,⁵⁵ στον Νεύτωνα; «[Ο]τι δεν υπάρχει ενδιάμεση κατάσταση [Mittelzustand] [...] μεταξύ Είναι και Μη-Είναι» (GW 21, σ. 92· πβ. σ. 252). Δεν έχει νόημα να μιλά ο Νεύτων για μια τέτοια «ενδιάμεση κατάσταση» (état moyen),⁵⁶ για μεγέθη πάνω στην εξαφάνισή τους. Ένα μέγεθος είτε είναι κάτι είτε είναι τίποτε. Είτε δεν έχει εξαφανιστεί, άρα είναι ακόμη κάτι, είτε έχει εξαφανιστεί, άρα δεν είναι τίποτε. Ο Χέγκελ αντιστρέφει την κριτική του Ντ'Αλαμπέρ: «δεν υπάρχει απολύτως τίποτε που να μην είναι μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ Είναι και Μηδενός» (GW 21, σ. 92). Ακριβέστερα –μιας και ο όρος 'κατάσταση' του Ντ'Αλαμπέρ παραπέμπει, για τον Χέγκελ, σε ένα τυχαίο συμβεβηκός, ενώ η εξαφάνιση και η γένεση είναι «η μόνη αλήθεια» του Είναι και του Μηδενός (GW 21, σ. 252· πβ. σ. 92)– «δεν υπάρχει πουθενά στον ουρανό και επί της γης κάτι που να μην περιέχει εντός του και τα δυο, Είναι και Μηδέν» (GW 21, σ. 71). Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει τίποτε που να μην είναι σχέση στιγμών και εξαφανιζόμενη στιγμή ενός όλου. Δεν θα ήταν υπερβολικός ο ισχυρισμός ότι σε αυτές τις διατυπώσεις περιέχεται in nuce η όλη φιλοσοφία του Χέγκελ.

Ήδη στη *Λογική της Ιένας* (1804), ένα πρώιμο χειρόγραφο σχεδίασμα του συστήματός του, ο Χέγκελ συζητά «[...] το αληθινό νόημα των εξαφανιζόμενων μεγεθών της ανάλυσης· το απείρως μικρό οφείλει να είναι μη-τίποτε [nicht nichts] και εντούτοις να μην έχει πια μέγεθος» (GW 7, σ. 18). Επιχειρεί λοιπόν να δείξει πώς το μέγεθος, «[...] αυτός ο εξωτερικός, τυχαίος προσδιορισμός μετατρέπεται σε προσδιορισμό του ίδιου του πράγματος [der Sache selbst] μέσα από τον εκμηδενισμό του ως μεγέθους στον διαφορικό λογισμό» (GW 7, σ. 22). Οπότε, καταλήγει σε μια φράση που συνοψίζει τη μεταφυσική του:

[...Τ]ο πράγμα [Ding] είναι μονάχα το σύστημα των στιγμών του [das System seiner Momente], κι αυτές είναι ό,τι είναι μόνο στη σχέση μεταξύ τους, και το ίδιο το πράγμα είναι αυτή η σχέση.

GW 7, σ. 22.⁵⁷

Για την κατακλείδα, ας δοθεί ο λόγος σε έναν ακόμη νεοκαντιανό, όχι φίλα προσκείμενο στον Χέγκελ, τον ιδρυτή της Σχολής του Μαρβούργου

⁵⁴ Πβ. WOLFF: «Hegel und Cauchy», σ. 250· «Science of Logic», σ. 89.

⁵⁵ BOURBAKI: *Elements of the History of Mathematics*, σ. 196.

⁵⁶ J. LE R. D'ALEMBERT: *Essai sur les éléments de philosophie, ou sur les principes des connaissances humaines* (1759), Paris, Fayard, 1986, σ. 345. Βλ. σ. 344-345 για την κριτική του Ντ'Αλαμπέρ στα εξαφανιζόμενα μεγέθη του Νεύτωνα. Το κεφάλαιο XIV (σ. 339-346) του έργου, των *Στοιχείων φιλοσοφίας* του Ντ'Αλαμπέρ, έχει τίτλο «Περί των μεταφυσικών αρχών του απειροστικού λογισμού».

⁵⁷ Για τη ριζικά σχεσιακή σύλληψη του Χέγκελ πβ. την κλασική εργασία του R.-P. HORSTMANN: *Ontologie und Relationen. Hegel, Bradley, Russell und die Kontroverse über interne und externe Beziehungen*, Königstein/Ts., Athenäum-Hain, 1984.

Χέρμαν Κόεν (Hermann Cohen). Ήδη το 1883, ο Κόεν διαπίστωνε ότι ο Χέγκελ «[...] θεμελίωσε τη Λογική του σε μια κριτική της έννοιας του απειροστού».⁵⁸ Οι τελευταίες, ιδιαίτερα, παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι αυτό ισχύει. Ωστόσο, σε μικρό βαθμό έχει προσεχτεί στην έρευνα μέχρι σήμερα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΧΕΓΚΕΛ

G. W. F. HEGEL: *Gesammelte Werke*. Έκδοση κατ' ανάθεση της Deutsche Forschungsgemeinschaft, Hamburg, Meiner, 1957 κ.εξ. [Παραπομπές εντός κειμένου με τη συντομογραφία GW, τον αριθμό του τόμου και τον αριθμό της σελίδας.]

ΕΡΓΑ ΑΛΛΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ

Ε. ΡΟΪΔΗΣ: «Περί συγχρόνου εν Ελλάδι κριτικής» (1877). Στο: *Απαντα*, επιμ. Α. Αγγέλου, τ. 2, Αθήνα, Ερμής, 1978, 246-285.

J. LE R. D'ALEMBERT: *Essai sur les éléments de philosophie, ou sur les principes des connaissances humaines* (1759), Paris, Fayard, 1986.

J. L. BELL: *A Primer in Infinitesimal Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

L. BENDAVID: *Versuch einer logischen Auseinandersetzung des Mathematischen Unendlichen*. Berlin, Petit & Schöne, 1789.

G. BERKELEY: *The Analyst or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* (1734). Στο: *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne*, τ. 4, επιμ. Α. A. Luce, London-Edinburgh, Thomas Nelson, 1951, 53-102.

E. BISHOP & D. BRIDGES: *Constructive Analysis*, Berlin-Heidelberg, Springer, 1985.

H. J. M. Bos: «Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition». Στο: *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*, επιμ. I. Grattan-Guinness, Princeton, Princeton University Press, 1980, 49-93.

N. BOURBAKI: *Elements of the History of Mathematics* (1984), μτφρ. J. Meldrum, Berlin-Heidelberg, Springer, 1994.

C. B. BOYER: *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (1949). New York, Dover, 1959.

G. CANTOR: «Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktuelle Unendliche» (1885). Στο: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, επιμ. E. Zermelo, Berlin-Heidelberg, Springer, 1932, 370-377.

G. CANTOR: «Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten» (1887). Στο: *Gesammelte Abhandlungen*, επιμ. Zermelo, Berlin-Heidelberg, Springer, 1932, 378-439.

L. CARNOT: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Paris, Duprat,

⁵⁸ H. COHEN: *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. Ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntniskritik* (1883), Frankfurt/M., Suhrkamp, 1968, σ. 179.

1797.

A. CAUCHY: *Résumé des leçons données a l'École Royal Polytechnique sur le calcul infinitesimal* (1823), *Oeuvres complètes*, σειρά 2, τ. 4. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

H. COHEN: *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. Ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntniskritik* (1883), Frankfurt/M., Suhrkamp, 1968.

A. FRAENKEL: *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin, Springer, ³1928.

I. GRATTAN-GUINNESS: «The Emergence of Mathematical Analysis and its Foundational Progress, 1780-1880». Στο: *From the Calculus to Set Theory*, επιμ. Grattan-Guinness, Princeton, Princeton University Press, 1980, 94-148.

I. KANT: *Gesammelte Schriften*. Έκδοση της Ακαδημίας Επιστημών του Βερολίνου, Berlin, Reimer και κατόπιν de Gruyter, 1900 κ.εξ. [AA]

A. KOCK: *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, ²2006.

J. L. LAGRANGE: *Théorie des fonctions analytiques*. Paris, Bernard, 1797.

I. LAKATOS: «Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics» (1966). Στο: *Mathematics, science and epistemology*. Philosophical Papers τ. 2, επιμ. J. Worrall & G. Currie, Cambridge, Cambridge University Press, 1978, 43-60.

G. W. LEIBNIZ: *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain* (1704). *Philosophische Schriften*, τ. 3 (γαλλ.-γερμ.), επιμ. και μτφρ. W. von Engelhardt & H. Holz, Frankfurt/M., Suhrkamp, 1996.

P. LORENZEN: *Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*. Frankfurt/M., Akademische Verlagsgesellschaft, 1965.

S. MAIMON: *Versuch über die Transzendentalphilosophie* (1790), επιμ. F. Ehrensperger, Hamburg, Meiner, 2004.

I. NEWTON: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (³1726), επιμ. A. Koyré και I. B. Cohen, Cambridge Mass., Harvard University Press, 1972.

G. PRIEST: *Beyond the Limits of Thought*. Oxford, Oxford University Press, ²2002.

A. ROBINSON: *Non-Standard Analysis*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1966.

A. ROBINSON: «The Metaphysics of the Calculus» (1967). Στο: *Selected Papers of Abraham Robinson*, τ. 2: *Nonstandard Analysis and Philosophy*, επιμ. W. A. J. Luxemburg & S. Körner, Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland Publishing Company, 1979, 537-555.

B. RUSSELL: *Introduction to Mathematical Philosophy*. London, George Allen & Unwin, 1919.

CHR. WOLFF: *Elementa Matheseos Universae*, τ. I (1730), *Gesammelte Werke*, τόμος II, τ. 29. Hildesheim, Olms, 1968.

ΜΕΛΕΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΧΕΓΚΕΛ

Γ. ΦΑΡΑΚΛΑΣ: *Γνωσιοθεωρία και μέθοδος στον Έγελο*. Αθήνα, Εστία,

2000.

E. CASSIRER: *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*. τ. 3: *Die nachkantischen Systeme* (²1923). Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1994.

M. GIOVANELLI: *Reality and Negation – Kant’s Principle of Anticipations of Perception. An Investigation of its Impact on the Post-Kantian Debate*. Dordrecht, Springer, 2011.

R.-P. HORSTMANN: *Ontologie und Relationen. Hegel, Bradley, Russell und die Kontroverse über interne und externe Beziehungen*. Königstein/Ts., Athenäum-Hain, 1984.

G. KREIS: *Negative Dialektik des Unendlichen. Kant, Hegel, Cantor*. Berlin, Suhrkamp, 2015.

A. MORETTO: «L’Influence de la ‘Mathématique de l’Infini’ dans la formation de la Dialectique Hégélienne». Στο: *Hegels Philosophie der Natur. Beziehungen zwischen empirischer und spekulativer Naturerkenntnis*, επιμ. R.-P. Horstmann & M. J. Petry, Stuttgart, Klett-Cotta, 1986, 175-196.

T. PINKARD: «Hegel’s Philosophy of Mathematics». *Philosophy and Phenomenological Research* 41 (1981), 452-464.

P. STEKELER-WEITHOFER: «Mathematical Thinking in Hegel’s Science of Logic». Στο: *International Yearbook of German Idealism*, τ. 3: *German Idealism and Contemporary Analytic Philosophy*, επιμ. J. Stolzenberg & K. Ameriks, Berlin-New York, De Gruyter, 2005, 243-260.

P. STEKELER-WEITHOFER: *Philosophie des Selbstbewußtseins. Hegels System als Formanalyse von Wissen und Autonomie*. Frankfurt/M., Suhrkamp, 2006.

M. WOLFF: «Hegel und Cauchy. Eine Untersuchung zur Philosophie und Geschichte der Mathematik». Στο: *Hegels Philosophie der Natur*, επιμ. Horstmann & Petry, Stuttgart, Klett-Cotta, 1986, 197-263.

M. WOLFF: «Science of Logic». Στο: *The Bloomsbury Companion to Hegel*, επιμ. A. de Laurentis & J. Edwards, London-New York-New Delhi-Sydney, Bloomsbury, 2013, 71-101.