FREGE: ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ, ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΟΥ RUSSELL, ΚΑΙ Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ. Το παρόν άρθρο αφορά την ιστορία των αντικειμένων της Λογικής, της Φιλοσοφίας, και των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, θα επικεντρωθούμε στον ύστερο Frege. Κατά κύριο λόγο, στο σύστημα που αναπτύσσει στο έργο του 'Νόμοι της Αριθμητικής' (Grundgesetze der Arithmetik), στην ανάδυση, εντός αυτού, του παραδόξου του Russell, και στις προσπάθειες του να συμβιβαστεί με το πώς ήρθαν τα πράγματα. Μερικά από τα ερωτήματα που θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε είναι: ποιοι οι παράγοντες που καθοδηγούν τη στάση του ως προς το παράδοξο, στο γνωστό παράρτημα των Νόμων; Ποιες οι φιλοσοφικές και μεθοδολογικές παραδοχές που βρίσκονται από πίσω; Ποια η στάση που υιοθέτησε προς το τέλος της ζωής του, και γιατί;

ABSTRACT. This article is primarily concerned with Logic, Philosophy, Mathematics, and their history. Specifically, we delve into the emergence of Russell's paradox within Frege's Basic Laws of Arithmetic, Frege's initial attempts to address the paradox, and his eventual rejection of extensions in favor of embracing Geometry as the foundational basis for mathematical objects. The article begins by outlining the basic characteristics of Frege's Laws system, and then investigates the paradox's emergence. We then examine Frege's efforts to come to terms with this fact and deal with the paradox. His stance is particularly revealing, as specific aspects of his approach, that distinguish him from later thinkers, become evident here. These features will eventually lead him to adopt a distinctive, geometricocentric approach, which we briefly explore in the concluding sections of the article.

1. Εισαγωγη

Η διαπίστωση, από τον Bertrand Russell, το 1902, ότι το σύστημα των *Νόμων της Αριθμητικής* του Frege δεν είναι συνεπές, φέρνει στο προσκήνιο τα λεγόμενα συνολοθεωρητικά (και όχι μόνο) παράδοξα και πυροδοτεί μια σειρά γόνιμων εξελίξεων, που οδηγούν, μεταξύ άλλων, στην αξιωματική συνολοθεωρία του Zermelo, και στο *Principia Mathematica* των Russell και Whitehead. Από την άλλη, ο Frege θα πορευτεί τον δικό του δρόμο, αγνοώντας τις θεωρήσεις που αναπτύσσονται, ή ίσως βλέποντάς

Ο Ε. Τριανταφυλλου είναι Διδάκτορας του Τμήματος Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και Διδάσκων στο Τμήμα Φιλοσοφίας του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

τες ως κάτι διαφορετικό από αυτό που ο ίδιος ήθελε να επιτύχει. Προκαλεί εντύπωση η αποτίμηση στην οποία καταλήγει, ως προς το έργο του, προς το τέλος της ζωής του. Όπως γράφει, εν έτει 1924, οπότε και έχει πλέον δημοσιευτεί όχι μόνο το *Principia Mathematica* των Russell και Whitehead (έργο μάλιστα το οποίο προκρίνεται από τους συγγραφείς του ως υπεράσπιση του προγράμματος του λογικισμού), αλλά και το *Investigations in the foundations of set theory* του Zermelo:

> Οι προσπάθειες μου να ρίξω φως στα ερωτήματα που περιβάλλουν τη λέξη 'αριθμός' καθώς και τις λέξεις και σύμβολα για μεμονωμένους αριθμούς, φαίνεται πως κατέληξαν σε πλήρη αποτυχία. Ωστόσο, αυτές οι προσπάθειες δεν ήταν εντελώς μάταιες. Ακριβώς επειδή απέτυχαν, μπορούμε να μάθουμε κάτι από αυτές.[1]

Πράγματι, τελικά αξιολογεί ως δραματική τη βαρύτητα του παραδόξου:

> Τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων, έχουν καταφέρει το θανάσιμο πλήγμα στην θεωρία συνόλων την ίδια.[2]

οπότε καταλήγει σε μια ιδιότυπη άποψη:

> Το σύνολο των μαθηματικών πηγάζει από μία και μοναδική πηγή γνώσης, τη γεωμετρική.[3]

Ποιοι ακριβώς οι παράγοντες που τον οδηγούν σε αυτή την θεώρηση; Τα διδάγματα που αντλεί είναι καινοφανή, πρωτότυπα, αλλά σε μεγάλο βαθμό ξεχωριστά αυτών της υπόλοιπης κοινότητας. Ο Dummett θα καταλήξει σε συγκεκριμένη αποτίμηση της κατάστασης, όσον αφορά τη στάση του Frege:

> Πιο αξιοσημείωτο ίσως και από τη συνέχεια των απόψεών του, είναι η πλήρης άγνοια που δείχνει για το έργο των άλλων. [...] ίσως είναι μάταιο να ευχόμαστε να είχε δώσει περισσότερη προσοχή στο έργο των διαδόχων του, στη λογική και τα θεμέλια των μαθηματικών: ίσως του ήταν αδύνατο να πλεύσει σε θάλασσες όπου ήταν ορατά άλλα πλοία.[4]

Είναι όμως έτσι τα πράγματα; Εδώ θα κάνουμε μια προσπάθεια ανίχνευσης των φιλοσοφικών λόγων που μπορεί να κρύβονται πίσω από τη στάση του ύστερου Frege.

Ας ξεκινήσουμε εξετάζοντας τη θεωρία εκτάσεων του Frege, τους λόγους που τον παρακινούν να την αναπτύξει με τον τρόπο που τελικά την ανέπτυξε και το πώς αυτό οδηγεί στην ανάδυση του γνωστού παραδόξου.

---

[1] Frege, *Posthumous Writings*, σελ. 265.
[2] Ibid., 269.
[3] Ibid., 279.
[4] Dummett, *Frege: Philosophy of Language*, 661.

2. Αριθμοι και Εκτασεις στο 'Νομοι της Αριθμητικης'

Δεδομένου του στόχου της αναγωγής των μαθηματικών στη λογική, ως σημείο εκκίνησης θα εξυπηρετήσει μια κατάλληλη λογική ανάλυση των προτάσεων που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς. Από φρεγκεανή σκοπιά, για κάθε φυσικό αριθμό n γίνεται να προσδιοριστεί κατάλληλη έννοια (concept)[5] δευτέρου επιπέδου, στην οποία υπάγονται οι έννοιες πρώτου επιπέδου που ικανοποιούνται από ακριβώς n αντικείμενα.[6]

Πράγματι, εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι μηχανισμοί ισοδύναμοι αυτών της γλώσσας της εννοιογραφίας[7] επαρκούν για τέτοιου τύπου αναλύσεις. Για παράδειγμα, $\exists x \exists y(Xx \wedge Xy \wedge \forall z(Xz \rightarrow x{=}z \vee y{=}z) \wedge x{\neq}y)$ είναι το αληθές αν και μόνο αν X είναι έννοια πρώτου επιπέδου που ικανοποιείται από ακριβώς δύο αντικείμενα.[8]

Βέβαια, δεν έχουμε έτσι δώσει ορισμό[9] συνάρτησης N: ο αριθμός των X, απλά έχουμε δείξει ότι ορισμένες αριθμητικές δηλώσεις γίνεται να αναλυθούν ως δηλώσεις που χαρακτηρίζουν με συγκεκριμένο τρόπο έννοιες πρώτου επιπέδου. Δεδομένου ρητού ορισμού (explicit definition) της N, θα μπορούμε να αποφανθούμε για τις αληθοτιμές μεικτών ταυτοτήτων,[10] και μια οριοθέτηση των φυσικών αριθμών εντός του πεδίου

[5] Συνάρτηση της οποίας η τιμή είναι είτε το αληθές είτε το ψευδές. Τα τελευταία αντιμετωπίζονται από τον Frege ως αντικείμενα. Βλέπε πχ: Frege, *Basic Laws of Arithmetic*, Vol. I, σελ. 7, 8. Οι συναρτήσεις-έννοιες τοποθετούνται από τον ύστερο Frege στο επίπεδο της αναφοράς, και χαρακτηρίζονται ως μη-κορεσμένες, ή ακόρεστες (unsaturated), οντότητες, σε ευθυγράμμιση με τις αντίστοιχες μη-κορεσμένες εκφράσεις. Βλέπε: "..αυτό του οποίου το σημάδι (όνομα) καταλαμβάνει αυτή τη θέση για κάποια συγκεκριμένη περίπτωση, το καλώ το *όρισμα* της συνάρτησης γι' αυτήν την περίπτωση. Η συνάρτηση συμπληρώνεται (The function is completed) από το όρισμα, και το αποτέλεσμα της συμπλήρωσης το καλώ *τιμή* της συνάρτησης για το όρισμα. [...] Οπότε το όρισμα δεν αντιμετωπίζεται ως μέρος της *συνάρτησης*, αλλά εξυπηρετεί μάλλον στο να συμπληρωθεί (complete) η *ακόρεστη* (unsaturated), από μόνη της, *συνάρτηση*." Frege, *Basic Laws* I, σελ. 5, 6. πχ: "για παράδειγμα, μέσω των λέξεων 'θετική τετραγωνική ρίζα του 2', *οι οποίες αναφέρονται σε μια έννοια*, σχηματίζουμε το κύριο όνομα 'η θετική τετραγωνική ρίζα του 2'. Εδώ υπάρχει ένα ρίσκο λογικής φύσης. Διότι αν σχηματίζαμε από τις λέξεις 'τετραγωνική ρίζα του 2' το κύριο όνομα 'η τετραγωνική ρίζα του 2', θα διαπράτταμε λογικό σφάλμα, αφού, αυτό το κύριο όνομα θα ήταν, αν δεν προβαίναμε σε περαιτέρω διευκρινήσεις, αμφίσημο, και γι' αυτόν τον λόγο χωρίς αναφορά. Αν δεν υπήρχαν άρρητοι αριθμοί, όπως έχει εξάλλου υποστηριχθεί από κάποιους, τότε το κύριο όνομα 'η θετική τετραγωνική ρίζα του 2' θα ήταν επίσης χωρίς αναφορά" *Basic Laws* I, 19 (έμφαση δικιά μου) . Επίσης, βλέπε: *Basic Laws* I, 45-51.

[6] Βλέπε σχετικά, για παράδειγμα: Frege, *Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*, 163, 164.

[7] Begriffsschrift

[8] Για τον τρόπο διατύπωσης ακολουθώ τον Frege: "Λέμε ότι το αντικείμενο Δ εμπίπτει στην έννοια Φ(Ξ) αν Φ(Δ) είναι το αληθές" Frege, *Basic Laws* I, 8.

[9] Για τον ρόλο των ορισμών βλέπε: Frege, *Basic Laws I*, §26-31, *Begriffsschrift*, §24-26, *Collected Papers*, σελ. 148, 274, 301-302, Blanchette, "Frege's Reduction", σελ. 4,5. Επίσης: Ebert, "Mathematical Creation in Frege's Grundgesetze", σελ. 326 στο Ebert & Rossberg, *Essays on Frege's Basic Laws of Arithmetic*.

[10] Βλέπε: Χριστοπουλου & Ψυλλος, "Η έννοια του αριθμού και ο αριθμός της έννοιας", 102.

της γλώσσας θα είναι εφικτή παρέχοντας τα κατάλληλα ορίσματα. Στη συνέχεια, βάσει αυτών θα γίνεται να προσδιοριστούν κατάλληλα οι ρητοί αριθμοί, οι πραγματικοί, και ούτω καθεξής.

Ποιες οι οντότητες που θα μπορούσαν να εκληφθούν ως τιμές της N; Ο Frege, σε διάφορα σημεία, επιχειρηματολογεί ότι οι αριθμοί είναι αντικείμενα, και μάλιστα ότι πρόκειται για συγκεκριμένη κατηγορία εκτάσεων,[11] δηλαδή αφηρημένων αντικειμένων των οποίων ο συσχετισμός με έννοιες-συναρτήσεις είναι σε κάθε περίπτωση άμεσος:[12]

> Αν το $\text{—}\overset{x}{\smile}\text{—}\ \Phi(x){=}\Psi(x)$ είναι το αληθές, τότε [...] μπορούμε επίσης να πούμε ότι η συνάρτηση $\Phi(\xi)$ έχει το ίδιο εύρος τιμών με τη συνάρτηση $\Psi(\xi)$; δηλ., μπορούμε να μετατρέψουμε μία καθολική ταυτότητα σε μια ταυτότητα για εύρη τιμών, και αντίστροφα. Αυτή η δυνατότητα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως νόμος της Λογικής.[13]

Έχουμε εδώ τη διατύπωση του περίφημου νόμου V: οι συνθήκες ταυτότητας μεταξύ εκτάσεων-ευρών τιμών είναι ισοδύναμες με τις συνθήκες καθολικής υλικής ισοδυναμίας μεταξύ των αντίστοιχων εννοιών-συναρτήσεων. Έπεται κατευθείαν, πρώτον, ότι για κάθε έννοια υπάρχει αντίστοιχη έκταση,[14] δεύτερον, ότι σε υλικά ισοδύναμες έννοιες αντιστοιχεί η ίδια έκταση (αντίστοιχα για συναρτήσεις – εύρη τιμών).

Μπορούμε να παραστήσουμε συμβολικά τον νόμο ως εξής:

$$\forall\Phi\forall\Psi[\forall x(\Phi(x){=}\Psi(x)) \leftrightarrow (\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon){=}\acute{\varepsilon}\Psi(\varepsilon))]^{15}$$

[11] Frege, *Θεμέλια*, §57.

[12] Ο Frege καλεί 'course of values' τις οντότητες που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις με πεδίο τιμών διάφορο του {True, False}, 'extensions' τις αντίστοιχες οντότητες για έννοιες: «Σε αυτό το σημείο, μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε μια έκφραση από τη Λογική: "η έννοια *τετραγωνική ρίζα του 4* έχει την ίδια έκταση με την έννοια *κάτι του οποίου το τετράγωνο τριπλασιασμένο είναι το 12*". Με τέτοιες συναρτήσεις, των οποίων οι τιμή είναι πάντα μια τιμή αλήθειας, μπορεί κανείς να πει, αντί για "εύρος τιμών της συνάρτησης", μάλλον "έκταση της έννοιας". (*Basic Laws* I, §3). Όπου δεν προκύπτει πιθανότητα σύγχυσης, εμείς θα χρησιμοποιούμε και για τις δύο περιπτώσεις τον όρο 'έκταση'.

[13] Frege, *Basic Laws* I, σελ. 14. Βλέπε επίσης σελ. 7, στο ίδιο.

[14] Αυτό προκύπτει και χωρίς επίκληση στο συγκεκριμένο νόμο, απλά από τον τρόπο που σχηματίζονται οι όροι εκτάσεων, και τους αντίστοιχους νόμους για την ταυτότητα και την ποσόδειξη. Πράγματι, έστω τυχούσα έννοια Φ, μπορούμε να σχηματίσουμε τον όρο 'έκταση των Φ', και να ισχυριστούμε την 'έκταση των Φ=έκταση των Φ', άρα $\exists x(x{=}$έκταση των Φ), οπότε $\forall F\exists x(x{=}$έκταση των $F)$.

[15] Ο νόμος V –επί της ουσίας– εμφανίζεται ως πρόταση *20.15 στο *Principia Mathematica* των Russell και Whitehead. Βασική διαφορά της προσέγγισης των τελευταίων είναι όμως, μεταξύ άλλων, το γεγονός ότι αντί για έννοιες, δηλαδή συναρτήσεις που κάθε φορά δίνουν ως τιμή κάποια εκ των αληθοτιμών αληθές, ψευδές, μιλούν για προτασιακές συναρτήσεις (propositional functions) που όταν συμπληρώνονται με κάποιο κατάλληλο όρισμα δίνουν ως τιμή κάποιο προτασιακό περιεχόμενο (proposition). Έπεται ότι έχουν τη δυνατότητα για πιο λεπτές, σε σύγκριση με τον Frege, συνθήκες εξατομίκευσης μεταξύ προτασιακών συναρτήσεων εντός λογικών πλαισίων. Δεδομένων δύο προτασιακών συναρτήσεων, υπάρχει περίπτωση να ισχύει ότι για κάθε δυνατό όρισμα τα προτασιακά

όπου $\acute{\varepsilon}...(\varepsilon)$ συνάρτηση ανώτερου επιπέδου που σε κάθε έννοια-συνάρτηση αναθέτει κάποια έκταση-εύρος τιμών.[16] Αν θεωρήσουμε ότι οι έννοιες-συναρτήσεις εξατομικεύονται βάσει καθολικής υλικής ισοδυναμίας-ταυτότητας τιμών,[17] αντίστοιχα, τότε η $\acute{\varepsilon}...(\varepsilon)$ γίνεται να ειδωθεί ως μονομορφισμός:

> ...η σύμπτωση όσον αφορά την έκταση είναι ένα αναγκαίο και επαρκές κριτήριο για την εμφάνιση μεταξύ εννοιών της σχέσης εκείνης που αντιστοιχεί στην σχέση της ταυτότητας μεταξύ αντικειμένων (εφόσον ταυτότητα, με την ορθή σημασία της λέξης, δεν υφίσταται μεταξύ εννοιών).[18]

Υπό αυτούς τους όρους, φαίνεται ότι το σύμπαν των εκτάσεων-ευρών τιμών θα πρέπει να αντιμετωπιστεί ως μεγαλύτερης ή ίσης πληθικότητας από αυτό των εννοιών-συναρτήσεων. Με αυτήν τη διατύπωση θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο νόμος χάνει μέρος της όποιας διαισθητικής προφάνειας μπορεί να είχε, αφού, αν επικεντρωθούμε πχ στις έννοιες πρώτου επιπέδου, θέτει ως απαίτηση οντότητες στο επίπεδο των αντικειμένων να είναι τουλάχιστον του ίδιου πλήθους με οντότητες υψηλότερου

περιεχόμενα που αυτές δίνουν διέπονται από την ίδια αληθοτιμή, οπότε και οι Russell και Whitehead λένε ότι αυτές είναι υλικά ισοδύναμες, και παρόλα αυτά για κάποια από αυτά τα ορίσματα να ισχύει ότι το προτασιακό περιεχόμενο που δίνει η μία προτασιακή συνάρτηση να μην είναι το ίδιο με αυτό που δίνει η άλλη. Έτσι, η υλική ισοδυναμία εκφράζεται με σύμβολο διαφορετικό από αυτό της ταυτότητας.

Στον συμβολισμό που χρησιμοποιούν, ο οποίος φέρει έντονη την επιρροή του Peano, η συγκεκριμένη πρόταση σχηματίζεται ως: $\vdash:.yx.\equiv_x.Xx:\equiv.\check{z}(yz)=\check{z}(Xz)$ η οποία, χρησιμοποιώντας σημερινό συμβολισμό, το $\acute{}\varepsilon\acute{}$ του Frege, και ξεδιπλώνοντας κατάλληλα το περιεχόμενο του '$.\equiv_x.$', που δηλώνει υλική ισοδυναμία, των Russell και Whitehead δίνει ακριβώς τη διατύπωση που δώσαμε πιο πάνω, με σύγχρονο συμβολισμό, του νόμου V. Όπως γράφουν, στη σελίδα 187 του πρώτου τόμου: «Τα χαρακτηριστικά μιας κλάσης είναι ότι αποτελείται από όλους τους όρους που ικανοποιούν κάποια προτασιακή συνάρτηση, οπότε, κάθε προτασιακή συνάρτηση καθορίζει μια κλάση, και δύο συναρτήσεις που είναι υλικά ισοδύναμες (δηλ. τέτοιες ώστε όποτε η μία είναι αληθής, είναι αληθής και η άλλη) καθορίζουν την ίδια κλάση, και, αντίστροφα, δύο συναρτήσεις που καθορίζουν την ίδια κλάση είναι υλικά ισοδύναμες.»

Σημειώνουμε, πάνω στη διατύπωση του 20.15, το γεγονός ότι έχει διατηρηθεί στο *Principia* η χρήση του συμβόλου '$\vdash$', ως σύμβολο ισχυρισμού εντός της γλώσσας αντικείμενο, κατά τα φρεγκεανά πρότυπα.

[16] Ανάλογα και για την περίπτωση συναρτήσεων – courses of values. Ανακύπτει εδώ και το ζήτημα του επιπέδου της συγκεκριμένης συνάρτησης. Είναι πχ επιπέδου ω τέτοιου ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}, n<\omega$; Ή πρέπει να αντιμετωπίσουμε τη γενική διατύπωση του νόμου ως αμφίσημη, και άρα ως να συνεπάγεται ύπαρξη τέτοιας συνάρτησης ξεχωριστά για το κάθε επίπεδο; Τέτοια ζητήματα παραμερίζονται, όπως θα δούμε, στους *Νόμους της Αριθμητικής*, μέσω κατάλληλης χρήσης του μηχανισμού των εκτάσεων.

[17] Όπως θα συμβαίνει εδώ εξάλλου, αφού αντικατάσταση πχ εννοιακής έκφρασης (concept word, βλέπε για παράδειγμα: *Basic Laws* I, σελ. 19) με εννοιακή έκφραση που έχει μεν διαφορετικό νόημα (Fregean Sense), αλλά της οποίας η έννοια είναι υλικά ισοδύναμη, δεν θα οδηγεί σε αλλαγή αληθοτιμής. Βλέπε επίσης, Burge, "Frege on Extensions of Concepts, from 1884 to 1903", σελ. 23, Danielle Macbeth, "Frege's Logic", σελ. 169.

[18] Frege, *Collected Papers*, 200. Φυσικά, υπό αυτό το πρίσμα τα ανάλογα έπονται και για την περίπτωση των συναρτήσεων.

επιπέδου. Βέβαια, το αν προβληματισμοί αυτής της φύσης έχουν βάση είναι κάτι που θα εξαρτάται με τη σειρά του από τη γενικότερη θεώρηση του Frege περί εννοιών και συναρτήσεων. Πρέπει εδώ να έχουμε κατά νου ότι αντιλαμβάνεται τις τελευταίες ως πρωταρχικές οντότητες, όχι ως σύνολα. Θα μπορούσε λοιπόν να αρνηθεί ότι το πλήθος πχ των εννοιών πρώτου επιπέδου ταυτίζεται με την πληθικότητα του δυναμοσυνόλου του σύμπαντος των αντικειμένων.

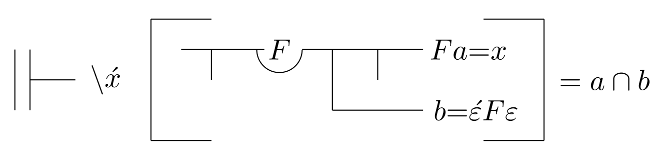
Σε κάθε περίπτωση, πρόκειται για νόμο που παίζει κεντρικό ρόλο στη θεώρηση του Frege, όχι μόνο σε τεχνικό επίπεδο, αλλά και όσον αφορά τις φιλοσοφικές παραδοχές από τις οποίες εκκινεί. Τον κατατάσσει μάλιστα ως νόμο της λογικής.[19] Όπως γράφει:

> Αυτή η δυνατότητα πρέπει να θεωρηθεί ως νόμος της λογικής, ένας νόμος που κατά κανόνα χρησιμοποιείται, έστω και σιωπηρά, κάθε φορά που γίνεται λόγος για τις εκτάσεις εννοιών. Όλη η Λογική των Leibniz-Boole στηρίζεται σε αυτόν.[20]

Σίγουρα πρόκειται για νόμο που έχει μεγάλα θέλγητρα από πρακτική άποψη, αφού επιτρέπει τον περιορισμό των εννοιών-συναρτήσεων σε πρώτου, δεύτερου και τρίτου επιπέδου. Όπως αναφέρει κατά την έκθεση του συστήματος των *Νόμων*:

> ...αντί για συναρτήσεις δευτέρου επιπέδου θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις πρώτου επιπέδου. [...] αυτό καθίσταται δυνατό αντιπροσωπεύοντας τις συναρτήσεις που εμφανίζονται ως ορίσματα συναρτήσεων δευτέρου επιπέδου με τις αντίστοιχες εκτάσεις, αν και, φυσικά, όχι με τρόπο τέτοιο ώστε αυτές απλώς να παραχωρούν τις θέσεις τους σε εκείνες, διότι αυτό είναι αδύνατο.
> [21]

Πράγματι, η συγκεκριμένη δυνατότητα προκύπτει από τον τρόπο που γίνεται κατανοητή η αντίστοιχη σχέση ανήκειν (μέλους). Ο ορισμός που δίνεται, στους *Νόμους της Αριθμητικής*, είναι ο εξής:[22]



Τι λέει αυτός ο σχηματισμός; Καταρχάς, σημειώνουμε ότι το σύμβολο '\' λειτουργεί ως οριστικό άρθρο, έχουμε λοιπόν εδώ ισχυρισμό μιας

[19] "Χρησιμοποιώ τις λέξεις 'η συνάρτηση $\Phi(\xi)$ έχει το ίδιο εύρος τιμών με τη συνάρτηση $\Psi(\xi)$' πάντα ως ομοαναφορική με τις λέξεις 'οι συναρτήσεις $\Phi(\xi)$ και $\Psi(\xi)$ πάντα έχουν την ίδια τιμή για το ίδιο όρισμα' ". *Basic Laws* I, σελ. 7.

[20] Frege, *Basic Laws* I, σελ. 14.

[21] Ibid., σελ. 52.

[22] Ibid., 53.

ισότητας όπου το τμήμα στα αριστερά καταλαμβάνεται από μία οριστική περιγραφή. Το συγκεκριμένο σύμβολο αναλογεί στον τελεστή i (iota operator) του Russell, αν και η θεωρία περιγραφών είναι εδώ διαφορετική. Δεδομένης έννοιας F, και εφόσον η $\acute{\varepsilon}...(\varepsilon)$ είναι πλήρης συνάρτηση του κατάλληλου επιπέδου, αν η F ικανοποιείται από ένα και μοναδικό αντικείμενο, τότε $\backslash\acute{\varepsilon}F\varepsilon$ είναι ακριβώς το συγκεκριμένο αντικείμενο. Από την άλλη, αν το τελευταίο δεν ισχύει, τότε $\backslash\acute{\varepsilon}F$ε, ή, ισοδύναμα, $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$, είναι η έκταση της F.[23]

Αν, για λόγους εξοικείωσης, μας επιτραπεί εδώ η χρήση του τελεστή iota του Russell, και λαμβάνοντας υπόψη ότι σε φρεγκεανά πλαίσια μια οριστική περιγραφή αντιμετωπίζεται ως σύνθετο όνομα –που μπορεί μάλιστα να αναφέρεται στο αληθές ή το ψευδές– ο ορισμός γίνεται:

$$ix[\sim\forall F(b{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon \to \sim(Fa{=}x))] = a \cap b$$

ή, ισοδύναμα:

$$ix[\exists F(b{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon \wedge Fa{=}x)] = a \cap b.$$ [24]

Αν λοιπόν θεωρήσουμε πχ μια έννοια πρώτου επιπέδου G, τότε $c \cap \acute{\varepsilon}G\varepsilon$ είναι το αληθές αν και μόνο αν το c είναι G. Μπορούμε εδώ να διαβάσουμε το '$c \cap \acute{\varepsilon}G\varepsilon$' ως 'το c ανήκει στην έκταση των G'.[25] Από την άλλη, αν η G δεν είναι έννοια, τότε $c \cap \acute{\varepsilon}G\varepsilon$ είναι το $G(c)$. Δεδομένων a, b, αν το b δεν είναι έκταση, τότε $a \cap b$ είναι το ψευδές.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε πλέον να συνάγουμε ότι για κάθε έννοια πρώτου επιπέδου F, θα ισχύει ότι κάτι είναι F αν και μόνο αν αυτό ανήκει στην αντίστοιχη έκταση.[26] Δεδομένου λοιπόν του ορισμού της σχέσης

---

[23] Ibid., 19.

[24] Επισημαίνουμε ότι ο Frege χρησιμοποιεί λατινικούς χαρακτήρες όπως τα 'a', 'b' προκειμένου να εκφράσει καθολική γενικότητα εντός της εμβέλειας της οποίας βρίσκεται ολόκληρη η πρόταση που ακολουθεί το σημάδι του ισχυρισμού. Χρησιμοποιεί την κοιλότητα της καθολικής ποσόδειξης κυρίως σε περιπτώσεις όπου πρέπει να τεθούν περιορισμοί όσον αφορά την εμβέλεια της εκάστοτε έκφρασης γενικότητας. Βλέπε: Van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, *A Source Book in Mathematical Logic*, 25, 26. Οι πιο πάνω παραστάσεις βάσει σύγχρονου συμβολισμού θα ήταν ορθότερο να γραφούν ως εξής:

$$\forall a\forall b(ix[\sim\forall F(b{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon \to \sim(Fa{=}x))] = a \cap b)$$

όπου εδώ, αν η F είναι πρώτου επιπέδου τότε οι αρχικοί δύο ποσοδείκτες είναι πρωτοβάθμιοι. Ισοδύναμα, ως:

$$\forall a\forall b(ix[\exists F(b{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon \wedge Fa{=}x)] = a \cap b).$$

Για λόγους ευκολίας όμως, καθολικοί ποσοδείκτες υπό την εμβέλεια των οποίων βρίσκεται ολόκληρο το υπόλοιπο της πρότασης μπορούν να παραλείπονται.

[25] Σημειώνουμε ότι αποφεύγουμε μια ανάγνωση του όρου '$\acute{\varepsilon}F\varepsilon$' ως 'η έκταση της F', δεδομένου ότι η τελευταία παραπέμπει σε μεταγλωσσική οπτική, ή μια ανάγνωσή του ως 'τα F', εφόσον οδηγούμαστε τότε σε αντιμετώπισή του όχι ως ενικού όρου αλλά ως plural.

[26] Πράγματι, έστω τυχούσα έννοια πρώτου επιπέδου F και αντικείμενο c. Θέλουμε να δείξουμε ότι το c θα ανήκει στην έκταση της F αν και μόνο αν ισχύει ότι Fc.
Για την κατεύθυνση από αριστερά προς τα δεξιά, και δεδομένου ότι βάσει των παραδοχών που έχουμε κάνει θα υπάρχει έκταση $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$ που αντιστοιχεί στην F, ας υποθέσουμε ότι το c ανήκει σε αυτήν. Από τον τρόπο που ορίστηκε η σχέση του 'ανήκειν', έχουμε

$a \cap b$, και χαρακτηριστικών των εκτάσεων όπως αυτά που διαφαίνονται μέχρι εδώ, ο Frege έχει κάθε φορά τη δυνατότητα αντί πχ του '$F(a)$', να γράψει ισοδύναμα '$a \cap \acute{\varepsilon} F\varepsilon$', και ούτω καθεξής.[27] Οι όποιες διακρίσεις μεταξύ συναρτήσεων - εννοιών πρώτου επιπέδου μπορεί να έχουν σημασία από άποψη λογικής δεν θα είναι λεπτότερες των όσων μπορεί να γίνουν μεταξύ των εκτάσεων που τους αντιστοιχούν, αφού οι σχετικές επαναδιατυπώσεις δεν πρόκειται να επιφέρουν αλλαγή αληθοτιμής.

$ix[\exists G(\acute{\varepsilon}F\varepsilon{=}\acute{\varepsilon}G\varepsilon \wedge Gc{=}x)]{=}c{\cap}\acute{\varepsilon}F\varepsilon$. Από την υπόθεση, έπεται ότι $c{\cap}\acute{\varepsilon}F\varepsilon$ είναι το αληθές, και άρα, το ίδιο ισχύει και για το $ix[\exists G(\acute{\varepsilon}F\varepsilon{=}\acute{\varepsilon}G\varepsilon \wedge Gc{=}x)]$. Άρα, συμπεραίνουμε ότι $\exists G(\acute{\varepsilon}F\varepsilon{=}\acute{\varepsilon}G\varepsilon \wedge Gc)$. Έστω λοιπόν C έννοια τέτοια ώστε $\acute{\varepsilon}F\varepsilon{=}\acute{\varepsilon}C\varepsilon$ και Cc. Αφού οι εκτάσεις των F, C ταυτίζονται, έπεται κατευθείαν από τον νόμο V ότι για κάθε κατάλληλο όρισμα οι F, C θα συμφωνούν μεταξύ τους ως προς τις τιμές που αναθέτουν. Όμως, είναι Cc, δηλαδή η έννοια C έχει τιμή το αληθές για όρισμα το c, άρα θα είναι και Fc.

Βλέπουμε εδώ ότι ο νόμος V παίζει καθοριστικό ρόλο στο να συναχθεί ότι δεδομένου αντικειμένου c, αν αυτό ανήκει στην έκταση κάποιας έννοιας F, τότε θα ισχύει ότι Fc. Αντιθετοανάστροφα, αν δεν ισχύει ότι Fc, έπεται από τον νόμο V ότι το c δεν θα ανήκει στην έκταση της F. Είναι μάλιστα η κατεύθυνση $\forall\Phi\forall\Psi[(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon){=}\acute{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)) \rightarrow \forall x(\Phi(x){=}\Psi(x))]$ του νόμου V, η οποία ισοδυναμεί με παραδοχή ότι η συνάρτηση ανώτερου επιπέδου $\acute{\varepsilon}...(\varepsilon)$ είναι 1-1, που επιστρατεύεται εδώ.

Για την κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά, ας υποθέσουμε πως ισχύει ότι Fc. Δεδομένου τώρα ότι σε κάθε έννοια αντιστοιχεί κάποια έκταση, $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$ η έκταση της F. Θα ισχύει άρα η σύζευξη των $\acute{\varepsilon}F\varepsilon{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon$ και Fc, και αφού έχουμε θεωρήσει την F ως μια τυχούσα έννοια, από τους νόμους για την ποσόδειξη μπορούμε να συνάγουμε ότι $\exists G(\acute{\varepsilon}G\varepsilon{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon{\wedge}Gc)$. Άρα, $ix[\exists G(\acute{\varepsilon}G\varepsilon{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon{\wedge}Gc)]$ είναι το αληθές, και αφού $ix[\exists G(\acute{\varepsilon}G\varepsilon{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon{\wedge}Gc)]{=}c{\cap}\acute{\varepsilon}F\varepsilon$, το ίδιο θα ισχύει και για $c{\cap}\acute{\varepsilon}F\varepsilon$. Έχουμε έτσι καταλήξει στο συμπέρασμα ότι θα ισχύει πως $c{\cap}\acute{\varepsilon}F\varepsilon$, δηλαδή, το c ανήκει στην έκταση της έννοιας F.

[27] Σημειώνουμε ότι ανάλογα θα ισχύουν και για τις περιπτώσεις σχέσεων ή συναρτήσεων. Αν θεωρήσουμε πχ το ελλιπές σύμβολο '$F(\ ,\ )$', τότε γίνεται και πάλι να σχηματιστεί όρος που αναφέρεται στην έκταση που αντιστοιχεί στη συνάρτηση στην οποία αυτό αναφέρεται. Πράγματι, βάσει αυτού γίνεται πχ να σχηματιστεί το επίσης ελλιπές σύμβολο '$\acute{\varepsilon}F(\ ,\varepsilon)$'. Αν υποθέσουμε πχ ότι F σχέση, τότε η συνάρτηση $\acute{\varepsilon}F(\ ,\varepsilon)$ για όρισμα a του κατάλληλου τύπου θα έχει ως τιμή την έκταση με μέλη ακριβώς εκείνες τις οντότητες για τις οποίες ισχύει ότι, για κάθε μία b από αυτές είναι $F(a,b)$. Βάσει τώρα του '$\acute{\varepsilon}F(\ ,\varepsilon)$' γίνεται να σχηματιστεί το '$\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\alpha,\varepsilon)$', το οποίο αναφέρεται στην έκταση της σχέσης F, και ούτω καθεξής. Κατά παρόμοιο τρόπο με προηγούμενες περιπτώσεις, μπορούμε βάσει του συμβόλου '$\cap$' να διατυπώσουμε προτάσεις που εκφράζουν ισχυρισμούς όσον αφορά το τι ανήκει εντός της έκτασης που αντιστοιχεί σε κάποια σχέση. Έτσι, προκειμένου να εκφράσουμε τον ισχυρισμό ότι το διατεταγμένο ζεύγος $\langle\alpha,\beta\rangle$ ανήκει στην έκταση της σχέσης $F(,)$, και έστω ότι $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ εκφράσεις που αναφέρονται στις οντότητες α, β αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε εντός της εννοιογραφίας τη συμβολοσειρά '$\underline{\beta}{\cap}(\underline{\alpha}{\cap}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\alpha,\varepsilon))$'. Το ίδιο εννοιολογικό περιεχόμενο γίνεται ισοδύναμα να εκφραστεί και ως '$\underline{\alpha}{\cap}(\underline{\beta}{\cap}\acute{\varepsilon}\acute{\alpha}F(\alpha,\varepsilon))$'. Από την άλλη, προκειμένου να εκφραστεί ο ισχυρισμός ότι το διατεταγμένο ζεύγος $\langle\beta,\alpha\rangle$ ανήκει στην έκταση της συγκεκριμένης σχεσιακής έννοιας θα μπορούσαμε να γράψουμε '$\underline{\alpha}{\cap}(\underline{\beta}{\cap}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\alpha,\varepsilon))$', ή '$\underline{\beta}{\cap}(\underline{\alpha}{\cap}\acute{\varepsilon}\acute{\alpha}F(\alpha,\varepsilon))$'. Τέλος, αν το '$F(,)$' δεν αναφέρεται σε έννοια, τότε η συμβολοσειρά '$\underline{\beta}{\cap}(\underline{\alpha}{\cap}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\alpha,\varepsilon))$' αναφέρεται στην τιμή της F για το διατεταγμένο ζεύγος $\langle\alpha,\beta\rangle$, η '$\underline{\alpha}{\cap}(\underline{\beta}{\cap}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\alpha,\varepsilon))$' στην τιμή για το διατεταγμένο ζεύγος $\langle\beta,\alpha\rangle$, και ούτω καθεξής.

Δεδομένης έννοιας δευτέρου επιπέδου F, $\exists g(x{=}\acute{\varepsilon}g\varepsilon \wedge Fg)$ είναι το αληθές για x έκταση συνάρτησης πρώτου επιπέδου που είναι F.[28] Δεδομένης έννοιας τρίτου επιπέδου G, $\exists F(x{=}\acute{\alpha}\exists g(\alpha{=}\acute{\varepsilon}g\varepsilon \wedge Fg) \wedge GF)$ είναι το αληθές για x έκταση εκτάσεων που αντιστοιχεί σε συνάρτηση δευτέρου επιπέδου που είναι G. Κάθε φορά, η σύνδεση μεταξύ εννοιών και εκτάσεων μας εγγυάται ότι τα χαρακτηριστικά που οριοθετούνται από την εκάστοτε έννοια υψηλότερου επιπέδου θα βρίσκονται σε ευθυγράμμιση με αυτά που απομονώνονται από την αντίστοιχη έννοια πρώτου επιπέδου.

Γενικότερα, δεν προκύπτει εντός των *Νόμων* ανάγκη για επίκληση εκτάσεων που περιέχουν έννοιες, ή εννοιών επιπέδου ανώτερου του τρίτου. Κάθε φορά μπορούμε να διατυπώσουμε ανάλογες προτάσεις που μιλάνε για εκτάσεις εκτάσεων, και ούτω καθεξής. Η επέκταση του σύμπαντος των αντικειμένων επιτρέπει έτσι τη συμπίεση του αντίστοιχου σύμπαντος των συναρτήσεων. Εντός των *Νόμων*, κάθε ποσόδειξη είναι είτε πρωτοβάθμια, είτε δευτεροβάθμια. Οι αρχικοί ποσοδείκτες στη διατύπωση του νόμου V, καθώς και αυτός εντός της εμβέλειας του τελεστή '\' (iota στις δικές μας διατυπώσεις), στον ορισμό της $a{\cap}b$, είναι δευτεροβάθμιοι. Η συνάρτηση $\acute{\varepsilon}...(\varepsilon)$ είναι δευτέρου επιπέδου.

Σε αυτό το σημείο το σύστημα των *Νόμων της αριθμητικής* έχει εμπλουτιστεί με μηχανισμούς που επαρκούν ώστε να δοθεί ρητός ορισμός της συνάρτησης N. Ο Frege θα παρεκκλίνει όμως από τον αντίστοιχο ορισμό που είχε σκιαγραφήσει στα *Θεμέλια της αριθμητικής*, και πιο συγκεκριμένα, θα παρεκκλίνει όχι μόνο όσον αφορά το τι ακριβώς είναι αυτό που δέχεται ως όρισμα η προαναφερθείσα συνάρτηση, αλλά και όσον αφορά τη φύση των τιμών της.

Στα *Θεμέλια*, δεδομένης πχ κάποιας έννοιας πρώτου επιπέδου F, ως $N(F)$ λαμβάνεται η έκταση που περιλαμβάνει ακριβώς εκείνες τις έννοιες πρώτου επιπέδου που είναι ισοπληθικές με την F.[29]

Δεδομένης όμως της εκτενέστερης χρήσης του μηχανισμού των εκτάσεων, η N αντιμετωπίζεται εντός των *Νόμων* ως συνάρτηση μεταξύ εκτάσεων. Ως $N(\acute{\varepsilon}F\varepsilon)$ θεωρείται πλέον η έκταση των εκτάσεων που είναι ισοπληθικές της $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$.

Η N ορίζεται λοιπόν εδώ ως συνάρτηση πρώτου επιπέδου. Βέβαια, δεδομένης κάποιας έννοιας, μας ενδιαφέρει να μπορούμε να μιλήσουμε για τον αριθμό που της αντιστοιχεί. Βάσει των συνεπειών του νόμου V όμως αυτό επιτυγχάνεται εύκολα, απλά λαμβάνοντας ως αριθμό της εκάστοτε έννοιας πρώτου επιπέδου αυτόν που ανατίθεται στην έκταση που της αντιστοιχεί. Αν λοιπόν F κάποια έννοια πρώτου επιπέδου, τότε ως αριθμός των F αντιμετωπίζεται η $N(\acute{\varepsilon}F\varepsilon)$, με $N(\acute{\varepsilon}...\varepsilon)$ την αντίστοιχη συνάρτηση δευτέρου επιπέδου.

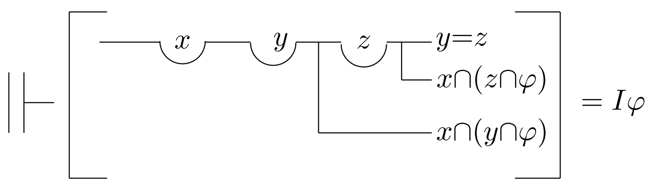
Απαραίτητο βήμα, πριν φτάσουμε σε αυτό το σημείο, είναι φυσικά να ξεκαθαριστεί ο όρος 'ισοπληθικές'. Μπορούμε να θεωρήσουμε μια έννοια

[28] Heck, "The development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik", 582.

[29] Frege, *Θεμέλια*, §68-§73.

πρώτου επιπέδου F ως ισοπληθική κάποιας έννοιας, επίσης πρώτου επιπέδου, G, αν και μόνο αν ισχύει ότι σε κάθε αντικείμενο που ανήκει στην έκταση της F γίνεται να αντιστοιχηθεί ακριβώς ένα αντικείμενο που ανήκει στην έκταση της G, και αντίστροφα. Όπως το διατυπώνει ο Frege: ‘υπάρχει σχέση φ που αντιστοιχίζει ένα προς ένα τα αντικείμενα που υπάγονται στη F με τα αντικείμενα που υπάγονται στη G’.[30] Ο σχετικός ορισμός θα βασίζεται λοιπόν με τη σειρά του στην έννοια της ένα προς ένα αντιστοίχισης. Δεδομένης σχέσης φ, και εννοιών πρώτου επιπέδου F, G, η φ θα είναι 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ των F, G αν και μόνο αν η φ είναι συνάρτηση που σε κάθε αντικείμενο εντός της έκτασης της F αναθέτει κάποιο αντικείμενο που ανήκει στην έκταση της G, και η αντίστροφη της φ είναι επίσης συνάρτηση, που σε κάθε αντικείμενο που ανήκει στην έκταση της G αναθέτει κάποιο αντικείμενο που ανήκει στην έκταση της F.

Πρέπει άρα, σε πρώτο στάδιο, να δοθεί ορισμός βάσει του οποίου καθορίζεται πότε κάποια σχέση είναι συνάρτηση. Το ζητούμενο μπορεί να ειδωθεί ως να αφορά τον προσδιορισμό έννοιας που ικανοποιείται ακριβώς από τα κατάλληλα εύρη τιμών:[31]



Βάσει σύγχρονου συμβολισμού ο συγκεκριμένος ορισμός γίνεται να παρασταθεί ισοδύναμα ως:

$$\forall x \forall y(\langle x, y\rangle \in \varphi \rightarrow \forall z(\langle x, z\rangle \in \varphi \rightarrow y{=}z)) = I\varphi$$

ή, ισοδύναμα, ως:

$$\forall x \forall y \forall z((\langle x, y\rangle \in \varphi \wedge \langle x, z\rangle \in \varphi) \rightarrow y{=}z) = I\varphi$$

Δεδομένης σχεσιακής έννοιας F, $I(\acute{\varepsilon}F\varepsilon)$ είναι το αληθές αν και μόνο αν η F είναι συνάρτηση. Από την άλλη, αν F δεν είναι σχεσιακή έννοια, $I(\acute{\varepsilon}F\varepsilon)$ το αληθές.[32]

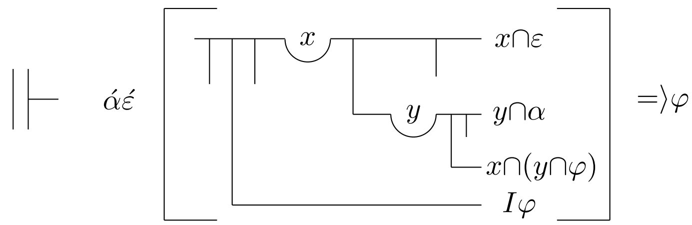
Βάσει αυτών ορίζεται στη συνέχεια η συνάρτηση πρώτου επιπέδου $\rangle\varphi$. Αν φ είναι έκταση σχεσιακής έννοιας πρώτου επιπέδου Φ, που είναι συνάρτηση, τότε $\rangle\varphi$ είναι η έκταση που περιλαμβάνει όλα τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής $\langle \acute{\varepsilon}F\varepsilon, \acute{\alpha}G\alpha\rangle$, για τα οποία ισχύει ότι σε κάθε αντικείμενο εντός της $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$ η Φ αναθέτει κάποιο αντικείμενο εντός της $\acute{\alpha}G\alpha$. Από την άλλη, αν η Φ δεν είναι συνάρτηση τότε το $\rangle\varphi$ είναι η κενή έκταση:[33]

[30] Ibid., §72.

[31] Frege, *Basic Laws* I, σελ. 55.

[32] Πρόκειται για χαρακτηριστικό που έπεται από τον τρόπο που έχει οριστεί από τον Frege η σχέση του ‘ανήκειν’. Όπως έχουμε δει, αν β δεν είναι έκταση τότε $\alpha \cap \beta$, δηλ. $\alpha \in \beta$, είναι το ψευδές. Αν λοιπόν το φ δεν είναι έκταση, τότε, δεδομένων x, y, z, $(\langle x, y\rangle \in \varphi \wedge \langle x, z\rangle \in \varphi) \rightarrow y{=}z$ το αληθές.

[33] Frege, *Basic Laws* I, 56.



Χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό, συνδυασμένο με φρεγκεανούς όρους για εκτάσεις, ο παραπάνω ορισμός γίνεται να παρασταθεί ως εξής:

$$\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}[{\sim}(I\varphi \to {\sim}\forall x(\forall y(\langle x, y\rangle{\in}\varphi \to {\sim}y{\in}\alpha) \to {\sim}x{\in}\varepsilon))] = \rangle\varphi$$

το οποίο και γίνεται να απλοποιηθεί στο παρακάτω:

$$\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}[I\varphi \wedge \forall x(x{\in}\varepsilon \to \exists y(\langle x, y\rangle{\in}\varphi \wedge y{\in}\alpha))] = \rangle\varphi.$$

Ας επικεντρωθούμε εδώ στη δεύτερη συνιστώσα της σύζευξης εντός της αγκύλης. Η $\forall x(x{\in}\varepsilon \to \exists y(\langle x, y\rangle{\in}\varphi{\wedge}y{\in}\alpha))$ ικανοποιείται από ακριβώς εκείνα τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής $\langle\varepsilon, \alpha\rangle$ όπου για κάθε x που ανήκει στο ε υπάρχει y που ανήκει στο α τέτοιο ώστε το $\langle x, y\rangle$ να ανήκει στην έκταση της Φ. Έστω λοιπόν ότι έχουμε συνάρτηση πρώτου επιπέδου Φ, έκταση της οποίας είναι το φ, καθώς και έννοιες πρώτου επιπέδου F, G. Ο ισχυρισμός ότι, σε κάθε αντικείμενο εντός της έκτασης της F η Φ αναθέτει κάποιο αντικείμενο εντός της έκτασης της G, γίνεται πλέον να εκφραστεί ως:

$$\vdash \acute{\varepsilon}F\varepsilon{\cap}(\grave{\alpha}G\alpha{\cap}\rangle\varphi).$$

Σε αυτό το σημείο, το επόμενο εμπόδιο που πρέπει να ξεπεραστεί είναι να οριστεί συνάρτηση που σε κάθε σχεσιακή έννοια αναθέτει την αντίστροφή της. Ο μηχανισμός των εκτάσεων μας επιτρέπει να την αντιμετωπίσουμε ως έννοια πρώτου επιπέδου, η οποία, σε κάθε έκταση σχεσιακής έννοιας αναθέτει την έκταση που αντιστοιχεί στην αντίστροφή της. Το ζητούμενο επιτυγχάνεται πολύ απλά μέσω του ορισμού:

$$\Vdash \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\alpha{\cap}(\varepsilon{\cap}\varphi)){=}C\varphi.$$ [34]

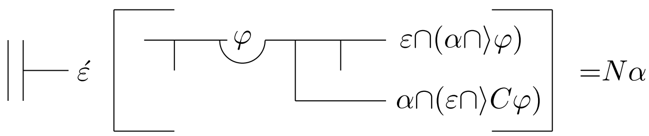
Αν λοιπόν φ η έκταση κάποιας σχεσιακής έννοιας, τότε $C\varphi$ θα είναι η έκταση της αντίστροφης έννοιας. Πράγματι, έστω σχεσιακή έννοια r, και έστω ότι ισχύει πως $\underline{\alpha}{\cap}(\underline{\beta}{\cap}Cr)$. Από αντικαταστασιμότητα των ταυτιζομένων (substitutivity of identicals), προκύπτει, βάσει του ορισμού, ότι $\underline{\alpha}{\cap}(\underline{\beta}{\cap}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\alpha{\cap}(\varepsilon{\cap}r)))$, δηλαδή: $\underline{\beta}{\cap}(\underline{\alpha}{\cap}r)$. Έπεται άρα ότι είναι $\underline{\alpha}{\cap}(\underline{\beta}{\cap}Cr)$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $\underline{\beta}{\cap}(\underline{\alpha}{\cap}r)$.

Πλέον, μπορούμε να εκφράσουμε εντός της γλώσσας ισχυρισμούς ισοπληθικότητας. Μια έννοια πρώτου επιπέδου F θα είναι ισοπληθική με μια έννοια πρώτου επιπέδου G αν και μόνο αν υπάρχει έκταση φ, σχεσιακής έννοιας πρώτου επιπέδου, τέτοια ώστε να ισχύει $\acute{\varepsilon}F\varepsilon{\cap}(\grave{\alpha}G\alpha{\cap}\rangle\varphi)$ και $\grave{\alpha}G\alpha{\cap}(\acute{\varepsilon}F\varepsilon{\cap}\rangle C\varphi)$. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει έκταση φ συνάρτησης που σε κάθε αντικείμενο εντός της $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$ αναθέτει κάποιο εντός της $\grave{\alpha}G\alpha$,

[34] Ibid., 57. Σημειώνουμε ότι ο Frege χρησιμοποιεί εδώ διαφορετικό σύμβολο από το ‘C’.

με την $C\varphi$ να είναι επίσης συνάρτηση, που σε κάθε αντικείμενο εντός της $\acute{\alpha}G\alpha$ αναθέτει κάποιο αντικείμενο εντός της $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$. Φυσικά, μπορούμε να προβούμε και στον ισοδύναμο ισχυρισμό 'η έκταση $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$ είναι ισοπληθική με την έκταση $\acute{\alpha}G\alpha$', αντιμετωπίζοντας την έννοια της ισοπληθικότητας ως πρώτου επιπέδου. Βάσει αυτών, είναι εύκολο πλέον να οριστεί έννοια N: ο αριθμός των (...).

Ο Frege δίνει λοιπόν τον επόμενο ορισμό:[35]



Παρέχοντας εκτάσεις κατάλληλων εννοιών ως ορίσματα της N προσδιορίζονται οι πληθικοί αριθμοί, όπου ως $\exists y(Ny{=}x)$ μπορούμε να δούμε την έννοια των πληθικών αριθμών,[36] με τους φυσικούς να ορίζονται ως οι πεπερασμένοι πληθικοί.[37] Επιπλέον, γίνεται εδώ να συναχθεί βάσει αυτών η αρχή του Hume (Hume's Principle).[38]

3. Η Ανάδυση Του Παραδόξου

Ο Frege, στην προσπάθεια του να πετύχει τη στέρεα θεμελίωση των μαθηματικών (εκτός γεωμετρίας), εξαρχής βρέθηκε αντιμέτωπος με χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας που εξέλαβε ως μειονεκτήματα σε σχέση με τον στόχο του. Διαπίστωσε ότι εντός αυτής είναι πολλές φορές δύσκολο να διακριθεί η λογική δομή της εκάστοτε πρότασης ή επιχειρήματος, και σχεδόν αδύνατο να διατυπωθούν αποδείξεις και ορισμοί με απόλυτη καθαρότητα. Η φυσική γλώσσα βρίθει χαρακτηριστικών όπως είναι η αμφισημία, η αοριστία, και η ασάφεια, χαρακτηριστικών που συχνά την καθιστούν δύσχρηστη όταν κάποιος αποπειράται να διατυπώσει

[35] Ibid.

[36] Ibid., §42.

[37] Αφού οριστεί πρώτα έκταση f με $x\cap(y\cap f)$ το αληθές αν και μόνο αν y αμέσως επόμενος του x πληθικός, δηλ $\langle x,y\rangle\in f \leftrightarrow \exists u\exists\alpha[N(\acute{y}(y\in u \wedge y\neq\alpha))=x \wedge \alpha\in u \wedge N(u)=y]$ (*Basic Laws* I, §43), για την οποία έπεται ότι για κάθε πληθικό x υπάρχει το πολύ ένα τέτοιο y (§66-77), ορίζεται η έκταση $\dot{-}f$ με $x\cap(y\cap\dot{-}f)$ το αληθές αν και μόνο αν ο y έπεται του x στη σειρά που προκύπτει βάσει της f (§45), δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει αλυσίδα σχετιζόμενων βάσει της f πληθικών από το x στο y, δηλαδή τέτοια ώστε $\langle x,y\rangle\in\dot{-}f \leftrightarrow \forall F[\forall d(F(d)\to\forall\alpha(\langle d,\alpha\rangle\in f\to F(\alpha))) \to (\forall\alpha(\langle x,\alpha\rangle\in f\to F(\alpha))\to F(y))]$. Τέλος, $x\cap(y\cap\backsim f)$ είναι το αληθές αν και μόνο αν $x\cap(y\cap\dot{-}f)$ ή $y=x$ (§46), οπότε $0\cap(y\cap\backsim f)$ το αληθές αν και μόνο αν y έπεται του 0 στη σειρά που προκύπτει βάσει της f, ή ταυτίζεται με αυτό. Με άλλα λόγια, αν και μόνο αν y ανήκει στη σειρά που προκύπτει βάσει της f με έναρξη το $0=N(\acute{\varepsilon}(\varepsilon\neq\varepsilon))$, δηλαδή, αν και μόνο αν y φυσικός αριθμός. Δεδομένου πληθικού n, ο Sn, τέτοιος ώστε $n\cap(Sn\cap f)$, γίνεται να προσδιοριστεί απλά τροφοδοτώντας την N με την έκταση της $n\cap\backsim f$, αφού $x\cap(n\cap\backsim f)$ το αληθές αν και μόνο αν το x είναι μέλος της f σειράς που τελειώνει με τον n.

[38] Frege, *Basic Laws* I, §53-69, η μία κατεύθυνση εμφανίζεται ως πρόταση 32, η άλλη ως πρόταση 49.

πολύπλοκα επιχειρήματα, ή προτάσεις, με απολύτως ξεκάθαρο τρόπο. Όπως γράφει, στον πρόλογο του *Begriffsschrift*:

> Προκειμένου να αποτρέψω οτιδήποτε το διαισθητικό να υπεισέλθει εδώ, έπρεπε να καταβάλλω κάθε προσπάθεια προκειμένου να κρατήσω τις αλυσίδες των συναγωγών χωρίς κενά. Στην προσπάθεια μου να τηρήσω αυτή την απαίτηση με την μέγιστη δυνατή αυστηρότητα, βρήκα την ανεπάρκεια της γλώσσας εμπόδιο. Ανεξάρτητα του πόσο δύσχρηστες και πολύπλοκες γίνονταν οι εκφράσεις που ήμουν πρόθυμος να δεχτώ, ήμουν όλο και λιγότερο ικανός, καθώς οι σχέσεις γίνονταν όλο και πιο πολύπλοκες, να επιτύχω την ακρίβεια που απαιτούσε ο στόχος μου. Ήταν αυτή η ανεπάρκεια που με οδήγησε στην ιδέα της παρούσας ιδεογραφίας. [39]

Οδηγείται λοιπόν στη διαμόρφωση μιας συμβολικής, ιδεατής γλώσσας.[40] Σε μια εν μέρει υλοποίηση των ονείρων του Leibniz για μια characteristica universalis. Μιας γλώσσας που φέρνει στη συντακτική επιφάνεια βαθιές λογικές συσχετίσεις, και εντός της οποίας γίνεται να ασκηθεί εκείνο το μέρος του επιστημονικού έργου που απαιτεί απόλυτη σαφήνεια και καθαρότητα από την εκάστοτε διατύπωση και συναγωγή.

Δεδομένων των στόχων που καλείται να εκπληρώσει η ιδεογραφία εντός των *Νόμων*, απόλυτη απαίτηση που θα πρέπει να πληρείται από κάθε όρο που σχηματίζεται είναι αυτός να διέπεται από νόημα και αναφορά. Είναι ενδεικτικός ο βαθμός στον οποίο εμμένει στη συγκεκριμένη απαίτηση ο Frege. Όπως γράφει, στο άρθρο *Function and concept*:

> Οι απαιτήσεις για επιστημονική αυστηρότητα φαίνεται να οδηγούν στην ανάγκη για ασφαλιστικές δικλείδες έναντι του ενδεχομένου μια έκφραση να μην έχει νόημα. Πρέπει να διασφαλιστεί ότι ποτέ δεν κάνουμε υπολογισμούς με κενά σύμβολα, ενώ βρισκόμαστε κάτω από την πίστη ότι έχουμε να κάνουμε με αντικείμενα. [...] Αυτό περιλαμβάνει την απαίτηση, όσον αφορά έννοιες, ότι δεδομένου ενός ορίσματος, αυτές έχουν μία αληθοτιμή ως τιμή. Ότι είναι ξεκάθαρο, για το εκάστοτε αντικείμενο, αν αυτό εμπίπτει στην έννοια ή όχι. Με άλλα λόγια, όσον αφορά τις έννοιες έχουμε την απαίτηση για σαφή όρια. Χωρίς αυτό θα ήταν αδύνατο να διακριθούν οι σχετικοί λογικοί νόμοι. [...] Η απαίτηση για σαφή οριοθέτηση των εννοιών, φέρει μαζί της την απαίτηση γενικά οι συναρτήσεις να έχουν τιμή για κάθε όρισμα.[41]

Ανάλογα, στο *On sense and meaning*:

---

[39] Van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, 5-6.

[40] Ορισμένα δείγματα της οποίας έχουμε μέχρι εδώ δει.

[41] Frege, *Collected Papers*, 148.

> Μια λογικά τέλεια γλώσσα (εννοιογραφία) θα πρέπει να πληροί τις συνθήκες ότι κάθε καλώς σχηματισμένη έκφραση, που έχει κατασκευαστεί ως όνομα από σημάδια που έχουν ήδη εισαχθεί, θα πρέπει να αναφέρεται σε κάποιο αντικείμενο, και ότι κανένα σημάδι δεν πρόκειται να εισαχθεί ως όνομα χωρίς πρώτα να έχει διασφαλιστεί το νόημά του. Τα βιβλία Λογικής περιέχουν προειδοποιήσεις για τα λάθη που προκύπτουν λόγω αοριστίας και ασάφειας των εκφράσεων. Θεωρώ εξίσου σημαντική την προειδοποίηση εναντίον των κενών ονομάτων που δεν διέπονται από νόημα.[42]

στο *Introduction to Logic*:

> Υπάρχουν πολλές προτάσεις που γίνεται να αναλυθούν σε πλήρες τμήμα, το οποίο είναι με τη σειρά του ένα κύριο όνομα, και σε ακόρεστο τμήμα, το οποίο σημαίνει κάποια έννοια. [...] Αν το τελευταίο είναι να έχει σημασία, τότε το αποτέλεσμα συμπλήρωσής του με ένα οποιοδήποτε κύριο όνομα που σημαίνει κάτι, θα πρέπει και πάλι να είναι ένα κύριο όνομα με σημασία. [...] Το ακόρεστο τμήμα της πρότασης, του οποίου τη σημασία είπαμε έννοια, θα πρέπει να έχει την ιδιότητα να αποδίδει μια γνήσια πρόταση, δηλαδή όνομα αληθοτιμής, κάθε φορά που συμπληρώνεται με ένα κύριο όνομα που έχει σημασία. Για μια δεδομένη έννοια, κάθε αντικείμενο θα πρέπει ή να εμπίπτει σε αυτήν ή όχι, tertium non datur.[43]

ενώ, στο *Laws of Arithmetic*:

> Ωστόσο, όχι μόνο αναφορά, αλλά και νόημα, χαρακτηρίζει όλα τα ονόματα που έχουν ορθά σχηματιστεί βάσει των συμβόλων μας. Κάθε τέτοιο όνομα αληθοτιμής εκφράζει ένα νόημα, μια σκέψη. Δηλαδή, από τους όρους που έχουμε θέσει καθορίζεται κάτω υπό ποιες συνθήκες το όνομα αναφέρεται στο αληθές. Το νόημα αυτού του ονόματος –η σκέψη– είναι η σκέψη ότι αυτές οι συνθήκες πληρούνται. Τώρα, ένας ισχυρισμός, στην εννοιογραφία, αποτελείται από το σημάδι της κρίσης, και ένα όνομα, ή ρωμαϊκό σημάδι, μιας αληθοτιμής. [...] Δηλώνεται, από έναν τέτοιο ισχυρισμό, ότι αυτό το όνομα αναφέρεται στο αληθές. Εφόσον αυτό εκφράζει ταυτόχρονα μια σκέψη, έχουμε σε κάθε ορθά σχηματισμένο ισχυρισμό της εννοιογραφίας, μια κρίση ότι μια σκέψη είναι αληθής, κι εδώ σίγουρα δεν μπορεί να εκλείπει μια σκέψη.[44]

[42] Ibid., 169.

[43] Frege, *Posthumous Writings*, 195.

[44] Frege, *Basic Laws I*, §32.

Όπως γράφει ο τίτλος του σχετικού υποκεφαλαίου: ‘every proposition of Begriffsschrift expresses a thought’. Κάθε ορθά σχηματισμένη πρόταση της εννοιογραφίας θα πρέπει να διέπεται από νόημα, να εκφράζει κάποια σκέψη, και να έχει ως αναφορά κάποια αληθοτιμή. Δεδομένης της ανάγκης διασφάλισης αυτών των συνθηκών, κάθε ελλιπής-ακόρεστη (unsaturated) έκφραση που γίνεται να απομονωθεί από πρόταση της εννοιογραφίας θα πρέπει να αναφέρεται σε πλήρη έννοια.

Όμως, αφού οι εκτάσεις λογίζονται ως αντικείμενα, έπεται άμεσα εδώ το ερώτημα: ποια η τιμή έννοιας πρώτου επιπέδου για την έκτασή της; Ισοδύναμα, αφού για κάθε έννοια πρώτου επιπέδου F υπάρχει η αντίστοιχη έκταση $\acute{\varepsilon}F\varepsilon$, και κάτι ανήκει σε αυτήν αν και μόνο αν είναι F: η έκταση μιας έννοιας πρώτου επιπέδου ανήκει στον εαυτό της; Ή όχι; Σίγουρα, σε κάποιες περιπτώσεις, η απάντηση θα φαινόταν προφανής. Αν πχ $A(\ )$ η έννοια στην οποία υπάγονται ακριβώς τα αφηρημένα αντικείμενα, τότε $A(\acute{\varepsilon}A(\varepsilon)) = \acute{\varepsilon}A(\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}A(\varepsilon)$ = το Αληθές. Από την άλλη, αν το $\Phi(\ )$ η έννοια στην οποία υπάγονται ακριβώς τα φυσικά αντικείμενα, τότε $\Phi(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = \acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ = το Ψευδές, ενώ $\top\Phi(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = \top\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ = το Αληθές.[45] Σε πολλές περιπτώσεις το ζήτημα μπορεί να μην είναι ιδιαίτερης σημασίας, οπότε ο αντίστοιχος ορισμός θα μπορεί πολύ απλά να συμπληρωθεί βάσει σύμβασης, είτε προς τη μία κατεύθυνση, είτε προς την άλλη. Θα μπορούσε όμως να προκύψει περίπτωση όπου κάθε δυνατή απάντηση είναι κατά κάποιον τρόπο προβληματική;

Προτάσεις όπως ‘$\acute{\varepsilon}A(\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}A(\varepsilon)$’ και ‘$\top\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$’ επισύρουν τώρα την προσοχή στις έννοιες $x\cap x$ και $\top x\cap x$. Ποια η τιμή τους για όρισμα τις $\acute{\varepsilon}(\varepsilon\cap\varepsilon)$ και $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$, αντίστοιχα; Ποια η αναφορά προτάσεων όπως ‘$\acute{\varepsilon}(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}(\varepsilon\cap\varepsilon)$’, την οποία θα μπορούσαμε να διαβάσουμε ως ‘η έκταση των αντικειμένων που ανήκουν στον εαυτό τους ανήκει στον εαυτό της’, και ‘$\top\acute{\varepsilon}(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}(\varepsilon\cap\varepsilon)$’, την οποία θα μπορούσαμε να διαβάσουμε ως ‘η έκταση των αντικειμένων που ανήκουν στον εαυτό τους δεν ανήκει στον εαυτό της’; Ποια η αναφορά προτάσεων όπως ‘$\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$’, η οποία διαβάζεται ως ‘η έκταση των αντικειμένων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους ανήκει στο εαυτό της’ και ‘$\top\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$’, την οποία θα μπορούσαμε να διαβάσουμε ως ‘η έκταση των αντικειμένων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους δεν ανήκει στο εαυτό της’;

Ας επικεντρωθούμε στις ‘$\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$’ και ‘$\top\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$’. Ποια η αναφορά τους; Έχουμε εδώ δύο δυνατότητες. Έστω λοιπόν ότι η πρώτη από αυτές αναφέρεται στο αληθές, οπότε η δεύτερη στο ψευδές. Αν $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ είναι το αληθές, τότε η $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ ανήκει στον εαυτό της. Όμως, έχουμε δείξει πως ένα αντικείμενο θα ανήκει στην έκταση έννοιας F αν και μόνο αν είναι F. Βάσει της κατεύθυνσης από τα αριστερά προς τα δεξιά –για τη συναγωγή της οποίας έπρεπε να επικαλεστούμε το νόμο V– έπεται ότι η $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ θα ικανοποιεί την $\top x\cap x$. Άρα, η πρόταση

[45] Εδώ το ‘$\top$’ παριστάνει τον συνδυασμό του content stroke (horizontal) με το σημάδι της άρνησης.

‘$\top\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$’, που σχηματίζεται αν εντός της ελλιπούς έκφρασης ‘$\top x\cap x$’ αντικαταστήσουμε τις εμφανίσεις του ‘x’ με τον όρο ‘$\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$’, θα αναφέρεται στο αληθές. Σε αυτό το σημείο, έχουμε βάσει της υπόθεσης οδηγηθεί σε αντίφαση. Από την υπόθεση ότι η $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ είναι το αληθές, προέκυψε ότι $\top\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ επίσης το αληθές. Από την άλλη, έστω ότι $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ το ψευδές, οπότε $\top\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ το αληθές. Η $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ δεν ανήκει στην $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$, οπότε –βάσει του αντιθετοανάστροφου της κατεύθυνσης από τα αριστερά προς τα δεξιά στον προηγούμενο νόμο– η $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ δεν ικανοποιεί την $\top x\cap x$. Άρα, η πρόταση ‘$\top\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$’, που σχηματίζεται αν στην ελλιπή έκφραση ‘$\top x\cap x$’ γράψουμε, στις θέσεις του ‘x’, τον όρο ‘$\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$’, θα αναφέρεται στο ψευδές. Είχαμε όμως υποθέσει ότι αναφέρεται στο αληθές. Από την υπόθεση ότι $\top\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ είναι το αληθές προκύπτει έτσι ότι $\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)\cap\acute{\varepsilon}\top(\varepsilon\cap\varepsilon)$ επίσης το αληθές.

Σε αυτό το σημείο έχει αναδειχθεί ένα μείζον πρόβλημα για τον Frege. Έχουμε διαπιστώσει ότι και οι δύο πλευρές ενός διλήμματος καταλήγουν σε αντίφαση, οπότε βάσει του νόμου της έκρηξης –που είναι φυσικά θεώρημα του φρεγκεανού συστήματος–[46] το τελευταίο καθίσταται τετριμμένο. Μάλιστα, ενώ τίθεται ως θεμελιώδες ζητούμενο, ως βασικό προαπαιτούμενο για την άσκηση επιστήμης, κάθε ελλιπής έκφραση να ορίζεται με τρόπο που διασφαλίζει ότι αυτή αναφέρεται σε κατάλληλου επιπέδου πλήρη έννοια, δεν κατέστη εφικτό αυτό να τηρηθεί ούτε καν εντός των στενών πλαισίων της λογικής, όπως τουλάχιστον αντιλαμβάνεται τα τελευταία ο Frege. Τι πήγε στραβά;

4. Η Αντιμετωπιση του Παραδοξου

Κεντρικό ρόλο στην όλη θεώρηση του Frege και στην ανάδυση του παραδόξου έχει η θεωρία του περί εκτάσεων. Σε ένα πρώτο επίπεδο, θεωρεί πως η θεωρία εκτάσεων πρέπει να οικοδομηθεί πάνω στη βάση της θεωρίας του περί εννοιών:

> Στην πραγματικότητα, υποστηρίζω ότι η έννοια είναι λογικά πρότερη της έκτασης. Θεωρώ μάταιη την προσπάθεια να αντιμετωπιστεί η έκταση μιας έννοιας ως κλάση, η οποία στηρίζεται όχι στην έννοια, αλλά σε μεμονωμένα πράγματα. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε έναν λογισμό πεδίου, όχι μια λογική. [...] Ο λογισμός πεδίου, στον οποίο θεμελιώδης σχέση είναι αυτή μεταξύ μέρους και όλου, πρέπει να διαχωρίζεται πλήρως από τη λογική. Για τη λογική, τα διαγράμματα του Euler είναι απλώς μια αφελής αναλογία. [...] Η έκταση μιας έννοιας δεν συνίσταται από τα αντικείμενα που εμπίπτουν σε αυτή, με τον τρόπο,

[46] Frege, *Basic Laws* I, §49, proposition Ia.

> π.χ., που ένα δάσος αποτελείται από δέντρα. Αλλά προσδένεται στην έννοια, και σε αυτήν μόνο. Η έννοια έχει επομένως λογική προτερότητα έναντι της έκτασης.[47]

Ο μηχανισμός μέσω του οποίου επιτυγχάνεται αυτό, είναι η θεωρία του για τις οριστικές περιγραφές. Όπως γράφει, στο άρθρο *On Schoenflies: Die Logischen Paradoxien der Mengenlehre*:

> Με τη βοήθεια του οριστικού άρθρου, η γλώσσα σχηματίζει κύρια ονόματα από τις λέξεις για έννοιες. [...] Αν ο σχηματισμός ονόματος με αυτόν τον τρόπο είναι να είναι νόμιμος, η έννοια της οποίας η έκφραση χρησιμοποιείται προκειμένου αυτό να σχηματιστεί, θα πρέπει να ικανοποιεί δύο συνθήκες:
>
> 1. Να μην είναι κενή.
> 2. Μόνο ένα αντικείμενο να εμπίπτει σε αυτήν.
>
> Εάν η πρώτη συνθήκη δεν ικανοποιείται, τότε δεν υπάρχει κανένα αντικείμενο στο οποίο να αποδίδεται το κύριο όνομα. Εάν η δεύτερη δεν ικανοποιείται, τότε πράγματι υπάρχουν πολλά τέτοια αντικείμενα, αλλά κανένα από αυτά δεν καθορίζεται ως αυτό στο οποίο προοριζόταν να αποδοθεί το κύριο όνομα. Στην επιστήμη, ο σκοπός ενός κύριου ονόματος είναι να αναφερθεί με καθορισμένο τρόπο σε ένα αντικείμενο. Αν αυτός ο σκοπός μένει ανεκπλήρωτος, τότε το όνομα δεν έχει θέση εντός της επιστήμης.[48]

Σκιαγραφείται εδώ η φρεγκεανή θεωρία για τις οριστικές περιγραφές, η οποία εμφανώς διαφέρει έντονα από την αντίστοιχη θεωρία του Russell. Οι οριστικές περιγραφές λογίζονται από τον Frege ως σύνθετα κύρια ονόματα, και όχι ως εκφράσεις που λένε κάτι γενικό για το σύμπαν της ποσόδειξης, ρόλος που αναδεικνύεται, σύμφωνα με τον Russell, μέσω κατάλληλων πλαισιακών ορισμών.[49]

---

[47] Frege, *Collected Papers*, 228.

[48] Frege, *Posthumous Writings*, 178.

[49] Όπως γράφουν οι Russell και Whitehead: "Με τον όρο «ελλιπές» σύμβολο (incomplete symbol), εννοούμε ένα σύμβολο που δεν υποτίθεται πως έχει κάποιο νόημα όταν εμφανίζεται από μόνο του, αλλά ορίζεται μόνο εντός ορισμένων πλαισίων. [...] Αυτό τα διακρίνει από εκείνα που θα μπορούσαμε να καλέσουμε κύρια ονόματα: το «Σωκράτης», για παράδειγμα, αναφέρεται σε συγκεκριμένο άνθρωπο και άρα έχει κάποιο νόημα από μόνο του, χωρίς να χρειάζεται ένα πλαίσιο. Αν προσδιορίσουμε κάποιο πλαίσιο, όπως στο «Ο Σωκράτης είναι θνητός», τότε αυτές οι λέξεις εκφράζουν ένα γεγονός του οποίου συστατικό είναι ο ίδιος ο Σωκράτης. [...] Σε άλλες περιπτώσεις όμως, αυτός ο απλός τρόπος ανάλυσης αποτυγχάνει. Ας υποθέσουμε ότι λέμε: «Το στρογγυλό τετράγωνο δεν υπάρχει». Φαίνεται ξεκάθαρο ότι αυτό είναι ένα αληθές προτασιακό περιεχόμενο, παρόλα αυτά, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό ως να αρνείται την ύπαρξη κάποιου συγκεκριμένου αντικειμένου που καλείται «το στρογγυλό τετράγωνο» [...] Όποτε το γραμματικό υποκείμενο κάποιου προτασιακού περιεχομένου μπορεί να θεωρηθεί ως μη υπαρκτό, χωρίς το αντίστοιχο περιεχόμενο να καθίσταται

Όμως, μια κατά Frege αυστηρή θεμελίωση της επιστήμης βασίζεται, κατά κύριο λόγο, στην τήρηση δύο βασικών απαιτήσεων από τη γλώσσα εντός της οποίας αυτή επιτελείται. Οι ακόρεστες εκφράσεις πρέπει να διασφαλίζεται ότι αναφέρονται σε πλήρεις έννοιες με σαφή όρια,[50] το κάθε όνομα (άρα, στους *Νόμους* και η κάθε πρόταση) σε συγκεκριμένο κάθε φορά αντικείμενο (άρα απαίτηση πληρότητας και για τις συναρτήσεις). Πρόκειται εξάλλου για απαιτήσεις που προκύπτουν αλληλένδετες, αφού ακόρεστες εκφράσεις που αναφέρονται σε μη πλήρεις έννοιες θα υπήρχε περίπτωση να οδηγήσουν στο σχηματισμό προτάσεων, και άρα ονομάτων, χωρίς αναφορά, ενώ, από την άλλη, ονόματα χωρίς αναφορά στον σχηματισμό ακόρεστων εκφράσεων που δεν επιτυγχάνουν να αναφερθούν σε έννοιες.

Στην περίπτωση των οριστικών περιγραφών, η απαίτηση καθορισμένης αναφοράς ισοδυναμεί ακριβώς με τη σύζευξη των συνθηκών που απαριθμούνται πιο πάνω, όσον αφορά τον σχηματισμό τους. Χρήση του οριστικού άρθρου εντός επιστημονικών πλαισίων είναι νόμιμη μόνο αν έχει διασφαλιστεί ότι αυτό συνδυάζεται με ακόρεστη έκφραση που αναφέρεται σε έννοια η οποία, πρώτον, δεν είναι κενή, και δεύτερον, ικανοποιείται από ένα το πολύ αντικείμενο. Οριστικές περιγραφές της μορφής 'ο βασιλιάς της Γαλλίας', που σχηματίζονται βάσει ακόρεστων εκφράσεων που είναι κενές, τίθενται εκτός των ορίων της επιστήμης, και η όποια ανάλυσή τους χαρακτηρίζεται από αυτήν την άποψη ως αδιάφορη:[51]

> Το πώς μπορεί να είναι τα πράγματα στη συνηθισμένη γλώσσα δεν μας ενδιαφέρει εδώ.[52]

χωρίς νόημα, είναι ξεκάθαρο ότι το γραμματικό υποκείμενο δεν είναι ένα κύριο όνομα". Van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, 217, 218.

[50] Για παράδειγμα, σχετικά: "Αλλά αν ρωτήσουμε, υπο ποιες συνθήκες είναι μια έννοια αποδεκτή στην επιστήμη, το πρώτο πράγμα που πρέπει να τονιστεί είναι ότι η συνέπεια δεν είναι μεταξύ αυτών. Η μόνη απαίτηση που πρέπει να τεθεί είναι αυτή να έχει σαφή όρια. Δηλαδή, για κάθε αντικείμενο να ισχύει είτε ότι αυτό εμπίπτει στην έννοια, είτε όχι", *Posthumous writings*, 179. Βλέπε επίσης: *Grundgesetze*, §28.

[51] Σημειώνουμε, ότι βάσει των μηχανισμών στους *Νόμους*, αν το αντίστοιχο του οριστικού άρθρου σύμβολο '$\backslash$' συνδυαστεί με ελλιπή έκφραση που αναφέρεται σε έννοια η οποία δεν πληροί κάποια εκ των δύο πιο πάνω προϋποθέσεων, τότε το πλήρες σύμβολο που σχηματίζεται λογίζεται ως όνομα που αναφέρεται στην έκταση της αντίστοιχης έννοιας. Παρακάμπτεται έτσι το σχετικό ζήτημα χωρίς να προκύπτει ανάγκη περιπλοκής των κανόνων που αφορούν το ποιες οι επιτρεπτές περιπτώσεις χρήσης του '$\backslash$', αν και αυτό επιτυγχάνεται βάσει επίκλησης στον προβληματικό –όπως τελικά αποδείχτηκε– μηχανισμό των φρεγκεανών εκτάσεων. Δεδομένης έννοιας F που δεν πληροί κάποια εκ των δύο προϋποθέσεων, ο όρος που σχηματίζεται μέσω χρήσης του '$\backslash$' δεν μπορεί τώρα να αναγνωστεί ως 'το F', αλλά ως 'η έκταση των F'. Επιπλέον, βλέπουμε ήδη εδώ να αναδύεται ένα εμπόδιο προς μία από τις δυνατές κατευθύνσεις αποφυγής του παραδόξου, μέσω οριοθέτησης συγκεκριμένων εννοιών ως χωρίς αντίστοιχη έκταση. Που η αναφορά του κατ' αυτόν τον τρόπο σχηματιζόμενου όρου αν η εμπλεκόμενη έννοια είναι κενή και χωρίς να της αντιστοιχεί κάποια έκταση;

[52] Frege, *Posthumous Writings*, 178-179.

Σε κάθε περίπτωση, η απαίτηση της πληρότητας, για τις διάφορες έννοιες, διασφαλίζει ότι το ζήτημα του αν οι σχετικές συνθήκες πληρούνται ή όχι, και άρα του αν ο σχηματισμός του αντίστοιχου σύνθετου ονόματος είναι νόμιμος ή όχι, θα έχει κάθε φορά καθορισμένη απάντηση. Επιπλέον, ότι κάθε πρόταση που εμπλέκει το σχηματιζόμενο όνομα θα έχει καθορισμένη αληθοτιμή,[53] και οι σχετικές συνθήκες ταυτότητας θα είναι κάθε φορά καθορισμένες.

Σε αυτές ακριβώς τις βάσεις κτίζεται η φρεγκεανή θεωρία των εκτάσεων. Πράγματι, έστω για παράδειγμα ότι F τυχούσα έννοια, 'F' η αντίστοιχη ακόρεστη έκφραση. Μπορούμε τώρα να σχηματίσουμε την οριστική περιγραφή '$\backslash x(x{=}\acute{\varepsilon}F\varepsilon)$', η οποία διαβάζεται ως 'η έκταση των F'. Προκειμένου ο σχηματισμός αυτού του ονόματος να είναι νόμιμος θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό αντικείμενο που εμπίπτει στην $x{=}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon)$. Τόσο η ύπαρξη, όμως, όσο και η μοναδικότητα, αυτού του αντικειμένου έπονται άμεσα από τον νόμο V, βάσει του οποίου, όπως είδαμε, η $\acute{\varepsilon}(...)\varepsilon$ προκύπτει πλήρης συνάρτηση δεύτερου επιπέδου. Μάλιστα, ο νόμος V κωδικοποιεί πέραν αυτών και τον επιπλέον ισχυρισμό ότι αν πχ έννοιες F, G δεν είναι εκτασιακά ισοδύναμες τότε $\acute{\varepsilon}(F)\varepsilon \neq \acute{\varepsilon}(G)\varepsilon$.

Υπό το φως αυτών των παρατηρήσεων φαίνεται πλέον εύλογη η αρχική προσπάθεια αντιμετώπισης του παραδόξου από τον Frege, όταν έλαβε το περίφημο γράμμα από τον Russell. Είναι εμφανές ότι η δυνατότητα που καλύτερα συνάδει με τις προαναφερθείσες θεμελιώδεις απαιτήσεις, είναι να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $\acute{\varepsilon}(...)\varepsilon$ δεν πληροί ακριβώς το τελευταίο κριτήριο. Ο Frege, στο παράρτημα των *Νόμων της αριθμητικής*, θέτει το ζήτημα ως εξής:

> [...] ακόμη και τώρα, δεν βλέπω πώς μπορεί να θεμελιωθεί επιστημονικά η αριθμητική, πως γίνεται οι αριθμοί να συλληφθούν ως λογικά αντικείμενα και να τεθούν υπό μελέτη, αν δεν μας επιτραπεί –έστω υπό συνθήκες– η μετάβαση από μια έννοια στην έκταση της. Είναι πάντα επιτρεπτό να μιλήσουμε για την έκταση μιας έννοιας, για μια κλάση; Και αν όχι, τότε πως αναγνωρίζουμε τις ειδικές περιπτώσεις; Μπορούμε πάντα να συνάγουμε από τη σύμπτωση της έκτασης μιας έννοιας με αυτήν μιας άλλης, ότι κάθε αντικείμενο που εμπίπτει στην πρώτη, εμπίπτει επίσης στη δεύτερη; Αυτά είναι τα ερωτήματα που τίθενται από την επικοινωνία με τον κύριο Russell.[54]

Στο ίδιο παράρτημα, εξετάζει ορισμένες από τις υπόλοιπες δυνατότητες αντιμετώπισης του παραδόξου, πριν κατασταλάξει στην ανάγκη τροποποίησης του νόμου V. Ποιες οι δυνατότητες που ανοίγονται, σε γενικές γραμμές, αν εξετάσουμε το ζήτημα από καθαρά τεχνική άποψη;

[53] Frege, *Basic Laws I*, §31.

[54] Frege, *Basic Laws*, Vol. II, σελ. 253.

Ένας πρώτος τρόπος επίλυσης θα ήταν φυσικά να θέσουμε περιορισμούς όσον αφορά ζητήματα ύπαρξης των εκτάσεων. Να θεωρήσουμε δηλαδή ότι για κάποιες έννοιες δεν υπάρχει αντίστοιχη τιμή της $\acute{\varepsilon}(\ldots)\varepsilon$. Αυτή είναι μη πλήρης συνάρτηση, οπότε δεν ισχύει για κάθε F ότι η $x{=}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon)$ πληροί την πρώτη από τις προαναφερθείσες απαιτήσεις του Frege για τον σχηματισμό ονομάτων. Πρέπει εδώ να προχωρήσουμε σε κατάλληλο περιορισμό της αρχής $\forall F \exists x(x = \acute{\varepsilon}F(\varepsilon))$. Ένας τρόπος, είναι να εμμείνουμε στις απαιτήσεις του Frege όσον αφορά τον σχηματισμό ονομάτων, προβαίνοντας όμως σε κατάλληλες τροποποιήσεις ώστε να μην επιτρέπεται ο σχηματισμός όρων εκτάσεων για έννοιες όπως η $\top x \cap x$.

Ως παράδειγμα αυτής της προσέγγισης (σε πρωτοβάθμια εκδοχή) μπορεί να θεωρηθεί η αξιωματική θεωρία συνόλων του Zermelo. Μέσω του αξιώματος του διαχωρισμού[55] τίθεται κατάλληλος περιορισμός όσον αφορά τις συνθήκες ύπαρξης συνόλων, οπότε η συναγωγή του παραδόξου μετατρέπεται σε απόδειξη μη ύπαρξης για το σύνολο όλων των συνόλων. Από εδώ μπορούμε κατευθείαν να δούμε, βάσει πχ του αξιώματος θεμελίωσης[56] ότι δεν θα υπάρχει και σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους, αφού αν υπήρχε τέτοιο τότε αυτό θα ήταν και σύνολο όλων των συνόλων. Αν μεταξύ των μοντέλων της εκδοχής ZFC της θεωρίας επικεντρωθούμε στον κόσμο του von Neumann,[57] ως πεδίο δράσης των ποσοδεικτών λαμβάνονται τα μέλη μιας αθροιστικής ιεραρχίας (cumulative hierarchy). Αυτή θα μπορούσε να γίνει αντιληπτή ως τελικό προϊόν μιας, έντονα εξιδανικευμένης, αέναης διαδικασίας "κατασκευής",[58] εφόσον η δομή της κωδικοποιεί αντίστοιχες διαισθήσεις, οι οποίες με τη σειρά τους εκφράζονται από τα αξιώματα του κενού συνόλου, του απείρου, του δυναμοσυνόλου, και της ένωσης.

Πρόκειται για μια προσέγγιση που θα μπορούσε να ειδωθεί ως σε μεγάλο βαθμό ασύμβατη με τις θέσεις του Frege, για την ανάγκη θεώρησης των εκτάσεων ως λογικών αντικειμένων. Είναι εντέλει εξωλογικές αρχές

[55] Βλέπε Van Heijenoort, *Source Book*, σελ. 202, Μοσχοβακης, *Σημειώσεις*, σελ. 27, 28.

[56] Το οποίο ο Zermelo υιοθετεί το 1930: "Αξίωμα της θεμελίωσης [Fundierung]: Κάθε φθίνουσα [ruckschreitendel] αλυσίδα στοιχείων, εντός της οποίας κάθε όρος είναι μέλος του όρου που προηγείται, διακόπτεται με πεπερασμένο δείκτη σε κάποιο άτομο (urelement). Ή ισοδύναμα: Κάθε μερικό πεδίο T περιέχει τουλάχιστον ένα μέλος t_0, κανένα μέλος του οποίου δεν είναι στο T. Αυτό το τελευταίο αξίωμα, που αποκλείει όλα τα 'κυκλικά' σύνολα, και άρα όλα τα 'σύνολα που περιέχουν τον εαυτό τους', και, γενικά, όλα τα 'αβάσιμα' σύνολα, ανέκαθεν ικανοποιούνταν σε όλες τις πρακτικές εφαρμογές της συνολοθεωρίας. Έτσι, προς το παρόν, δεν εμφανίζεται ως ουσιαστικός περιορισμός της θεωρίας." Ewald, *From Kant to Hilbert* (Vol. II), 1220.

[57] $V{=}\bigcup_\alpha V_\alpha$, όπου α διατακτικός. Μοσχοβακης, *Σημειώσεις στη συνολοθεωρία*, 220-221.

[58] Εφαρμογών των συναρτήσεων της ένωσης και του δυναμοσυνόλου (όπως το θέτει ο Gödel: 'by iterated application of the operation «set of»', *Collected Works* (Vol. II), 180). Η συγκεκριμένη έκφραση δεν γίνεται λοιπόν εδώ κατανοητή υπό όρους κατασκευασιοκρατικών μαθηματικών. Για αντίστοιχη χρήση της βλέπε: Μοσχοβακης, *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, 196, 222.

που παρέχουν τα κριτήρια εκείνα βάσει των οποίων –αν μας επιτραπεί να περιγράψουμε με φρεγκεανούς όρους τη σημασιολογία– συγκεκριμένες έννοιες οριοθετούνται ως εκείνες για τις οποίες δεν υπάρχει η αντίστοιχη έκταση.[59] Αποκλείεται έτσι, εντός της θεωρίας, ο σχηματισμός αντίστοιχων ονομάτων (περιορισμός που συχνά παρακάμπτεται ως ένα βαθμό μέσω της χρήσης ψευδο-όρων, επί της ουσίας συντομογραφιών ανοικτών τύπων). Με αυτόν τον τρόπο όμως, παρότι όντως φαίνεται να αποφεύγεται η ανάδυση παραδόξων, οι εκτάσεις καταλήγουν να λογίζονται ως άλλο ένα είδος μαθηματικών αντικειμένων, μάλιστα, το πιο θεμελιώδες, και όχι ως λογικά αντικείμενα των οποίων η ύπαρξη συνδέεται κάθε φορά ευθέως με αντίστοιχες έννοιες.

Τη σύνδεση μεταξύ εννοιών και εκτάσεων θα μπορούσε ίσως να θεωρηθεί ότι αποκαθιστούν σε έναν βαθμό θεωρίες συνόλων όπως οι NBG,[60] MK.[61] Βάσει της τελευταίας έπεται η ύπαρξη κλάσης για κάθε έννοια, αλλά, ενώ κάθε σύνολο είναι κλάση, δεν ισχύει και το ανάποδο. Η γλώσσα της θεωρίας επιτρέπει για κάθε ελλιπή έκφραση τον σχηματισμό όρου που αναφέρεται στην αντίστοιχη κλάση. Απλά, σε κάποιες περιπτώσεις, η τελευταία δεν είναι σύνολο. Μπορούμε εντός των πλαισίων της θεωρίας να μιλήσουμε για την κλάση όλων των συνόλων, αλλά αυτή δεν είναι σύνολο, και δεν μπορεί να είναι μέλος άλλης οντότητας. Η συναγωγή του παραδόξου μετατρέπεται όχι σε απόδειξη μη ύπαρξης, αλλά σε απόδειξη ότι συγκεκριμένη κλάση δεν είναι σύνολο. Θα μπορούσε ίσως να υποστηριχθεί πως θεωρίες του τύπου προσφέρονται περισσότερο για μια πλατωνική θεώρηση των μαθηματικών αντικειμένων, αφού δεν είναι εδώ οι αντίστοιχες συνθήκες ύπαρξης που εδράζονται σε διαισθήσεις όπως αυτές που κρύβονται πίσω από μία αθροιστική ιεραρχία.[62]

---

[59] "οι αντίστοιχοι περιορισμοί έχουν μαθηματικό και όχι λογικό χαρακτήρα", Αναπολιτανος, *Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, σελ. 230.

[60] Θεωρία Von Neumann-Bernays-Gödel. Η πρώτη διατύπωση θεωρίας που διαχωρίζει μεταξύ συνόλων και κλάσεων εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της, δόθηκε στο: Von Neumann, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematix*, 154 (1925), 219-240. Βλέπε: Van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, 393-413.
Στο άρθρο, ο von Neumann διαχωρίζει μεταξύ ορισμάτων (αντικείμενα I), συναρτήσεων που μπορούν να παίξουν τον ρόλο ορίσματος (αντικείμενα I-II), και συναρτήσεων που δεν εμφανίζονται ως ορίσματα (αντικείμενα II). Δηλαδή, μεταξύ ορισμάτων, συνόλων και κλάσεων, αντίστοιχα.

[61] Θεωρία Morse-Kelley. Βλέπε σχετικά: Kelley, *General Topology*, 250-281. Επίσης: Rubin, *Set theory for the mathematician*. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 291.

[62] Θα μπορούσαμε μάλιστα να εικάσουμε πως πρόκειται για έναν από τους λόγους που ο Gödel, δεδομένης της αντιμετώπισης εκ μέρους του των κλάσεων και των εννοιών ως οντοτήτων που υπάρχουν ανεξαρτήτως ορισμών και κατασκευών (βλέπε πχ. *Collected Works* (Vol. II), 128, 129), βασίζεται σε θεωρίες της συγκεκριμένης κατηγορίας σε μια σειρά άρθρων του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου το (όπου βέβαια, πέραν των φιλοσοφικών λόγων, προς τη συγκεκριμένη κατεύθυνση παρακινούν και πρακτικά ζητήματα που έχουν να κάνουν με τον προσδιορισμό συγκεκριμένης συλλογής συνόλων ως το πρότυπο των κατασκευάσιμων συνόλων): *The consistency of the axiom of choice and of the*

Και πάλι όμως, είναι σε μεγάλο βαθμό οι ίδιες βασικές αρχές με αυτές της ZFC που κωδικοποιούνται από τα αξιώματα της θεωρίας,[63] και βάσει των οποίων καθορίζεται εντέλει πότε, δεδομένης ελλιπούς έκφρασης, ο σχηματιζόμενος όρος έκτασης αναφέρεται σε σύνολο, και πότε όχι. Ενώ λοιπόν, δεδομένης ελλιπούς έκφρασης μπορούμε πάντα να αναφερθούμε σε αντίστοιχη κλάση, το ποιες από αυτές είναι σύνολα και ποιες όχι, και κατά συνέπεια το ποιες οι επιτρεπτές συσχετίσεις μεταξύ των εκτάσεων, καθορίζεται και πάλι βάσει εξωλογικών αρχών. Δεδομένης ελλιπούς έκφρασης μπορούμε να σχηματίσουμε όρο που αναφέρεται σε αντίστοιχη κλάση, εξωλογικές όμως αρχές, που κωδικοποιούνται από συγκεκριμένα αξιώματα, εμπλέκονται πλέον στους σχετικούς ορισμούς για τη σχέση του 'ανήκειν'. Διαρρηγνύεται έτσι η απευθείας σύνδεση με τη σχέση της υπαγωγής σε έννοια, και κατά συνέπεια υποβαθμίζεται η δυνατότητα θεώρησης των κλάσεων ως λογικών αντικειμένων.

Τέτοιοι τρόποι επίλυσης αντιμετωπίζουν τελικά το παράδοξο ως μια απαγωγή σε άτοπο, όσον αφορά την ύπαρξη συνάρτησης που αναθέτει στις έννοιες αντικείμενα ως προς τα οποία συνθήκες ύπαρξης και γνωσιολογική πρόσβαση θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ζήτημα λογικής και μόνο. Ο Frege δίνει προτεραιότητα στην έννοια, το αν συγκεκριμένη κατηγορία κορεσμένων οντοτήτων γίνεται να αντιμετωπιστεί ως αυτή των εκτάσεων, ή όχι, θα εξαρτάται από τους ανάλογους διακατηγορικούς συσχετισμούς.[64] Δηλαδή, από τη διασύνδεση μεταξύ των αντίστοιχων συνθηκών ύπαρξης και εξατομίκευσης, καθώς και αυτήν μεταξύ της σχέσης του 'ανήκειν' με την αντίστοιχη σχέση υπαγωγής σε έννοια. Σε τελική ανάλυση, το ζητούμενο είναι η ύπαρξη αφηρημένων αντικειμένων που βρίσκονται υπό καθεστώς οντολογικής εξάρτησης ως προς συγκεκριμένους μηχανισμούς της λογικής, οπότε και θεμελιώνεται η δυνατότητα a priori γνωσιολογικής πρόσβασης.[65] Αυτό που απασχολεί τον Frege δεν είναι απλώς η αποφυγή της ανάδυσης μιας αντινομίας, αλλά το να επιτευχθεί αυτό με τρόπο που οδηγεί σε επίλυση των σχετικών γνωσιολογικών ζητημάτων.

Οι προσεγγίσεις του τύπου, από την άλλη, πορεύονται απλά αλλάζοντας το ζητούμενο σε αυτό της διατύπωσης μιας θεωρίας συνόλων-κλάσεων ως άλλο ένα είδος μαθηματικών αντικειμένων. Παρέχουν ένα ξεκαθάρισμα των οντολογικών εξαρτήσεων, μεταξύ κλάσεων και λοιπών μαθηματικών αντικειμένων, με τρόπο που αναδεικνύει τις τελευταίες ως τα άτομα του μαθηματικού σύμπαντος. Προκύπτει όμως το ζήτημα του αν θα μπορούσε να υπάρξει χώρος, εντός της ευρύτερης φιλοσοφικής

---

generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory. Βλέπε: Gödel, *Collected Works* (Vol. 2), 35-39.

[63] Εξάλλου, αν κ απρόσιτος πληθάριθμος τότε το $\langle V_\kappa, \in \rangle$ είναι πρότυπο-μοντέλο της ZFC, το $\langle V_\kappa, \in, V_{\kappa+1} \rangle$, της MK, με το V_κ ως πεδίο των συνόλων.

[64] Για τη σημασία της σύνδεσης με τις έννοιες, βλέπε: Ruffino, "Why Frege would not be a neo-Fregean", σελ. 71-73, Burge, "Frege on Extensions", σελ. 19-21.

[65] Frege, *Θεμέλια*, §87.

θεώρησης του Frege, για κάποιον μηχανισμό, ξέχωρο της λογικής, που να εξηγεί το πώς αποκτούμε σχετική γνώση με a priori τρόπο.[66] Αν δεν υπάρχει πηγή γνώσης που θα μπορούσε ίσως να θεωρηθεί ότι συνδέεται απευθείας με τέτοιου τύπου θεμελιώδη μαθηματικά αντικείμενα, τότε το ζήτημα του πώς αποκτούμε γνωσιολογική πρόσβαση σε αυτά παραμένει ανοικτό, με την όποια προσπάθεια επίλυσής του να καθιστά και πάλι αναγκαίο τον συσχετισμό τους με αντικείμενα-οντότητες διαφορετικής κατηγορίας.[67]

Έχει σημασία εδώ, ότι ο Frege δεν μπορεί γενικότερα να δεχτεί ως λύση του ζητήματος μια προσέγγιση που αντιμετωπίζει το νόημα συγκεκριμένων εκφράσεων ως κάτι που συνίσταται εντέλει αποκλειστικά μέσω του ρόλου που αυτές παίζουν εντός προτάσεων που γίνονται αντιληπτές ως αξιώματα. Απορρίπτει τη μοντελοθεωρητική θεώρηση, οι ρίζες

---

[66] Σχετικά με τους πρωταρχικούς τύπους/πηγές γνώσης, βλέπε: Frege, *Θεμέλια*, §88-§91. *Posthumous Writings*, 267-279.

[67] Μία αποδοχή των κατά Frege επιταγών για αντιμετώπιση των γλωσσικών όρων που δύνανται να πλαισιώσουν το σημάδι της ταυτότητας, εντός αντίστοιχων προτάσεων, ως αναφερόμενων σε αντικείμενα, και άρα των σχετικών προτάσεων ως γνήσιων της αυτής μορφής, σε συνδυασμό με μια θεώρηση του τρόπου με τον οποίο προσδιορίζεται η σχετική μη πλήρης συνάρτηση ως εδραζόμενου σε δυνατότητα πρωταρχικής γνωσιολογικής πρόσβασης σε αντίστοιχες μαθηματικές οντότητες οδηγεί στην φιλοσοφική αντιμετώπιση των σχετικών ζητημάτων που εξετάζει ο Gödel: «Μου φαίνεται ότι η παραδοχή τέτοιων αντικειμένων είναι εξίσου νόμιμη με αυτήν των φυσικών αντικειμένων, και ότι είναι εξίσου εύλογο να πιστεύουμε στην ύπαρξή τους. Είναι με τον ίδιο τρόπο απαραίτητα προκειμένου να αποκτήσουμε ένα ικανοποιητικό σύστημα μαθηματικών, όπως και τα φυσικά αντικείμενα για μια ικανοποιητική θεωρία των αισθητηριακών αντιλήψεων.» Gödel, *Collected Works* (Vol. II), 128, 129.
Ενώ, αλλού, προσθέτει τα παρακάτω, επεκτείνοντας τον παραλληλισμό μεταξύ μαθηματικών και φυσικών επιστημών: «Παρά την απόστασή τους από την αισθητηριακή εμπειρία, έχουμε κάποιο είδος αντίληψης και όσον αφορά τα αντικείμενα της θεωρίας συνόλων, όπως φαίνεται από το γεγονός ότι αυτά μας επιβάλλονται ως αληθή. Δεν βλέπω κανέναν λόγο γιατί θα έπρεπε να έχουμε λιγότερη εμπιστοσύνη σε αυτό το είδος αντίληψης, δηλαδή στη μαθηματική διαίσθηση, παρά στην αισθητηριακή αντίληψη, η οποία μας παρακινεί να διαμορφώσουμε φυσικές θεωρίες και να περιμένουμε ότι μελλοντικές παρατηρήσεις θα συμφωνούν με αυτές, και, επιπλέον, ότι η όποια ερώτηση για την οποία δεν μπορούμε να αποφανθούμε τώρα έχει νόημα και η απάντηση θα καθοριστεί στο μέλλον. [...] Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μαθηματική διαίσθηση δεν χρειάζεται να εκληφθεί ως να παρέχει άμεση γνώση των σχετικών αντικειμένων. Μάλλον, φαίνεται ότι, όπως και στην περίπτωση της φυσικής εμπειρίας, διαμορφώνουμε τις ιδέες μας γι αυτά τα αντικείμενα επί της βάσης κάτι άλλου, που μας δίνεται με άμεσο τρόπο. Μόνο που αυτό το κάτι άλλο δεν είναι εδώ οι αισθήσεις. [...] Σε καμία περίπτωση δεν έπεται, ωστόσο, ότι τα δεδομένα αυτού του δεύτερου τύπου, επειδή δεν γίνεται να συσχετιστούν με επιδράσεις συγκεκριμένων πραγμάτων επί των αισθητήριων οργάνων μας, είναι κάτι το καθαρά υποκειμενικό (subjective), όπως ισχυρίστηκε ο Καντ. Μάλλον, αντιπροσωπεύουν επίσης μια πτυχή της αντικειμενικής πραγματικότητας, αλλά, σε αντίθεση με τις αισθήσεις, η παρουσία τους σε εμάς μπορεί να οφείλεται σε κάποιο άλλο είδος σχέσης μεταξύ μας και της πραγματικότητας». Gödel, *Collected Works* (Vol. II), 267-269.

της οποίας εντοπίζονται στην αξιωματικοποίηση του Hilbert για την Ευκλείδεια γεωμετρία.[68] Κατά συνέπεια, δεν έχει την ευχέρεια να θέσει τα όποια ζητήματα γνωσιολογικής πρόσβασης, όσον αφορά τα σχετικά αντικείμενα, στο παρασκήνιο. Ερωτήματα –μη σχετικοποιημένης– αλήθειας, και άρα πρόσβασης σε αυτήν, παραμένουν σε πρώτο πλάνο. Όπως γράφει, στο άρθρο 'Logic in Mathematics':

> Είναι απαίτηση της επιστήμης, να αποδεικνύουμε οτιδήποτε επιδέχεται απόδειξης, και να μην επαναπαυόμαστε μέχρι να βρεθούμε απέναντι σε κάτι που δεν γίνεται να αποδειχτεί. Προσπάθεια πρέπει να καταβάλλεται προκειμένου το σύνολο των πρωταρχικών αληθειών να καταστεί όσο το δυνατόν μικρότερο, εφόσον όλα τα μαθηματικά περιέχονται σε αυτές τις πρωταρχικές αλήθειες, σαν σε έναν πυρήνα. Η ουσία των μαθηματικών πρέπει να οριστεί βάσει αυτού του πυρήνα από αλήθειες, και μέχρι να μάθουμε ποιες είναι αυτές οι πρωταρχικές αλήθειες, δεν μπορούμε να είμαστε ξεκάθαροι όσον αφορά τη φύση των μαθηματικών. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε καταφέρει να ανακαλύψουμε αυτές τις πρωταρχικές αλήθειες, και ότι τα μαθηματικά έχουν αναπτυχθεί βάσει αυτών, τότε θα εμφανίζονται ως ένα σύστημα από αλήθειες που συνδέονται μεταξύ τους μέσω λογικών συναγωγών.[69]

Για τον Frege, τα αξιώματα πρέπει να είναι αληθή, δεν αφήνεται χώρος για μια έννοια αλήθειας που είναι σχετικοποιημένη ως προς μοντέλο. Έπεται ότι πρέπει κάθε φορά να καταβάλλεται προσπάθεια προκειμένου να διασφαλίζεται ότι οι εκφράσεις που εμφανίζονται εντός των σχετικών διατυπώσεων έχουν όχι μόνο καθορισμένη αναφορά, αλλά και καθορισμένο νόημα, οι σχηματιζόμενες προτάσεις να εκφράζουν συγκεκριμένες σκέψεις, και μάλιστα, αληθείς σκέψεις:

> Τα αξιώματα είναι αλήθειες, όπως και τα θεωρήματα, αλλά είναι αλήθειες για τις οποίες δεν γίνεται να δοθεί απόδειξη εντός του συστήματός μας, και για τις οποίες δεν χρειάζεται απόδειξη. Έπεται από αυτό ότι δεν υπάρχουν ψευδή αξιώματα, καθώς και ότι δεν μπορούμε να δεχτούμε μια σκέψη ως αξίωμα αν τρέφουμε αμφιβολίες για την αλήθεια της. Γιατί είτε αυτή είναι ψευδής, και άρα όχι αξίωμα, ή είναι αληθής αλλά χρήζει απόδειξης, και άρα όχι αξίωμα. [...] Γι αυτόν τον λόγο δεν χρησιμοποιώ το 'Lehrsatz' αλλά το 'θεώρημα', και όχι το 'Grundsatz'

[68] Χριστοπουλου & Ψυλλος, "Νεολογικισμός: Προβλήματα και Προοπτικές", σελ. 24, 25. Blanchette, "Axioms in Frege", 34-44. Επίσης, βλέπε και τα άλλα άρθρα της ίδιας: "Frege and Hilbert on Consistency", "Frege on consistency and conceptual analysis".

[69] Frege, *Posthumous Writings*, 204, 205.

> αλλά το 'αξίωμα', κατανοώντας ως αξιώματα και θεωρήματα αληθείς σκέψεις.[70]

Ενώ, πιο κάτω:

> Ένα αξίωμα, ωστόσο, είναι πάντα μια αληθής σκέψη. Επομένως, ό,τι δεν εκφράζει κάποια σκέψη, δεν μπορεί να εκφράσει ούτε ένα αξίωμα.[71]

Τα αξιώματα αντιμετωπίζονται λοιπόν ως σκέψεις, οι γλωσσικές διατυπώσεις των οποίων είναι όροι που αναφέρονται στο αληθές. Έτσι:

> Ένα αξίωμα δεν πρέπει να περιέχει κανέναν όρο με τον οποίο δεν είμαστε εξοικειωμένοι.[72]

Δεν υπάρχει θέση εδώ για μια θεώρησή τους ως σχημάτων, ή για μια στάση που αντιμετωπίζει ως οντότητες του κατάλληλου τύπου οτιδήποτε μπορεί να είναι αυτό που κάθε φορά απαρτίζει το όποιο μοντέλο τέτοιων σχημάτων. Τελικά, αν δούμε τον μοντελοθεωρητισμό από φρεγκεανή σκοπιά, αυτό που επί της ουσίας έχουμε είναι μία αλλαγή εστίασης. Μια προαγωγή ελλιπών εκφράσεων που πληρούν συγκεκριμένα κριτήρια σε αξιώματα, συνοδευόμενη από την ανάλογη αλλαγή οπτικής όσον αφορά τα σχετικά ζητήματα αλήθειας.[73]

Οι διαφορές μεταξύ των δύο θεωρήσεων έρχονται στο προσκήνιο στα σχόλιά του για τη γεωμετρική θεμελίωση του Hilbert:

> Τώρα, στο Grundlagen der Geometrie, ο Hilbert ασχολείται με ζητήματα συνέπειας και ανεξαρτησίας των αξιωμάτων. Αλλά, εδώ, η έννοια της λέξης «αξίωμα» έχει μεταβληθεί. Γιατί, αν ένα αξίωμα πρέπει αναγκαστικά να είναι αληθές, τότε είναι αδύνατο για αξιώματα να είναι ασυνεπή μεταξύ τους. Οπότε, οποιαδήποτε συζήτηση εδώ θα ήταν σπατάλη λέξεων.[74]

Είναι όμως ακριβώς η συγκεκριμένη προσέγγιση που ξεκάθαρα υιοθετείται από τον Zermelo, και η οποία καθιστά δυνατή τη στάση του όσον αφορά την αντιμετώπιση των συνολοθεωρητικών παραδόξων. Πράγματι, αυτό είναι εμφανές ήδη από την αρχή του άρθρου του, "Investigations in the foundations of set theory". Για παράδειγμα:

> Δεν έχω ακόμη καν καταφέρει να αποδείξω με αυστηρότητα ότι τα αξιώματά μου είναι συνεπή, αν και αυτό είναι σίγουρα κάτι πολύ ουσιώδες.[75]

---

[70] Ibid., 205, 206.

[71] Ibid., 248.

[72] Ibid., 244.

[73] Βλέπε σχετικά και: Blanchette, "Frege's Reduction", σελ. 94, 95.

[74] Frege, *Posthumous Writings*, 247.

[75] Van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, 200-201.

Ανάλογοι λόγοι οδηγούν τον Frege και στο να μην ερευνήσει περαιτέρω τη δυνατότητα θεμελίωσης της αριθμητικής βάσει δευτεροβάθμιας λογικής και της αρχής του Hume, χωρίς να γίνεται άμεση επίκληση σε εκτάσεις.[76] Παράλειψη που έρχεται σε πρώτο πλάνο, δεδομένου ότι ο Frege έχει φυσικά γνώση της συγκεκριμένης αρχής,[77] αλλά και του ότι αυτή συνάγεται εντός των *Νόμων*, όπως έχουμε αναφέρει, άπαξ και έχει οριστεί η συνάρτηση πρώτου επιπέδου $N(...)$. Προκειμένου εκεί να προβούμε σε ισχυρισμό της αντίστοιχης αφαιρετικής αρχής πρέπει πρώτα να έχει διασφαλιστεί ότι ο σχηματισμός οριστικών περιγραφών βάσει της '$N(...)$' είναι σε κάθε περίπτωση νόμιμος. Αυτό, με τη σειρά του, γίνεται να εξακριβωθεί μόνο εφόσον υφίσταται κατάλληλος, επαρκώς άμεσος, συσχετισμός μεταξύ των εμπλεκόμενων οντοτήτων.[78]

Τα βήματα, εντός των *Νόμων*, που οδηγούν στον ορισμό της $N(...)$ μπορούν λοιπόν να ειδωθούν ως διασφάλιση ότι τα συγκεκριμένα κριτήρια σχηματισμού ονομάτων πληρούνται, επί τη βάσει της ύπαρξης οντοτήτων που άμεσα αναγνωρίζονται ως λογικά αντικείμενα, χάρη στον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται με αντίστοιχες έννοιες. Αυτό γιατί οι σχετικές συνθήκες εξατομίκευσης όχι μόνο συνδέονται ευθέως με σχέση ισοδυναμίας (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική) μεταξύ εννοιών, αλλά, επιπλέον, με εκείνη που αναγνωρίζεται κατευθείαν και πρωταρχικά ως σχέση λογικού περιεχομένου. Μάλιστα, στους *Νόμους* η σχέση καθολικής υλικής ισοδυναμίας μεταξύ εννοιών αντιμετωπίζεται ως καθολική γενίκευση ταυτότητας μεταξύ αληθοτιμών. Με αυτόν τον τρόπο, η σύνδεση μεταξύ αληθοτιμών, από τη μία, και εκτάσεων, από την άλλη, έρχεται σε πρώτο πλάνο, οπότε τα σχετικά ζητήματα ύπαρξης γίνεται εντέλει να αντιμετωπιστούν ως ζήτημα λογικής,[79] οι σχετικές οντότητες ως λογικά αντικείμενα που μπορούν να αντιπροσωπεύσουν έννοιες εντός κάθε

---

[76] Βλέπε: Wright, *Frege's conception of Numbers as Objects*, 158-169. Επίσης: Χριστοπουλου, "Οι Αφαιρετικές αρχές του Frege ως διέξοδος από το δίλημμα του Benacerraf" (στο Αναπολιτανος, *Στιγμές και Διάρκειες*), καθώς και Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, 123.

[77] *Θεμέλια της Αριθμητικής*, §63.

[78] Βλέπε: Heck, *Reading Frege's Grundgesetze*, 178. Ο ίδιος, στο άρθρο του "Julius Caesar and Basic Law V" γράφει, στη σελ. 174: "Ο Frege λοιπόν εμμένει ότι η γνώση μας για την αλήθεια της αρχής του Hume (HP) εξαρτάται από τη γνώση μας για τα αντικείμενα εκείνα με τα οποία οι αριθμοί εξισώνονται. Για να το θέσουμε σε πιο Φρεγκεανή γλώσσα, η άποψή του δεν είναι ότι συλλαμβάνουμε (apprehend) τους αριθμούς ως λογικά αντικείμενα επειδή αναγνωρίζουμε την HP ως μια αλήθεια της Λογικής. Η άποψή του είναι ότι αναγνωρίζουμε την HP ως μια αλήθεια της Λογικής επειδή συλλαμβάνουμε τους αριθμούς ως λογικά αντικείμενα, και αναγνωρίζουμε ότι η HP είναι αληθής ως προς αυτά."

[79] Weiner, "Caesar, Section 10, and the Context Principle", σελ. 118-120.

πλαισίου.[80] Εν συνεχεία έπεται βάσει αυτών η αλήθεια σκέψεων όπως πχ εκείνης που εκφράζεται από μια πρόταση όπως η:

$$`\forall\Phi\forall\Psi[(N(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))=N(\acute{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)) \leftrightarrow \Phi\approx\Psi]'.$$ [81]

Όλα αυτά δείχνουν πως για τον Frege η συσχέτιση μεταξύ αριθμών και εννοιών δεν είναι πρωταρχική, τουλάχιστον στον βαθμό και με τον τρόπο που είναι αυτή μεταξύ εκτάσεων και εννοιών. Δεδομένου λοιπόν ότι το παράδοξο του Russell οδηγεί σε κατάρριψη της στάσης του ως προς τις εκτάσεις και τον νόμο V, πώς θα μπορούσε να μην προκύψουν πρόσθετες αμφιβολίες όσον αφορά το αν το επιστημολογικό ζητούμενο του προγράμματος θεμελίωσης θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσω μιας αλλαγής εστίασης, από τον νόμο V στην αρχή του Hume; Σε κάθε περίπτωση, η ανάδυση του παραδόξου έχει οδηγήσει σε κατάρριψη της δυνατότητας να ειδωθεί ως αλήθεια το ότι για κάθε σχέση ισοδυναμίας θα υπάρχουν

---

[80] Βλέπε Ruffino, "Why Frege would not be a neo-Fregean", σελ. 56, 63-70. Επίσης, Schirn, "Concepts, Extensions, and Frege's Logicist Project", σελ. 997. Όπως γράφει ο Frege: "Αν υπάρχουν έστω κάποια Λογικά αντικείμενα –και τα αντικείμενα της αριθμητικής είναι τέτοια– τότε πρέπει επίσης να υπάρχει ένας τρόπος να αποκτήσουμε πρόσβαση σε αυτά (to grasp them), να τα αναγνωρίσουμε. Ο βασικός νόμος της Λογικής που επιτρέπει τον μετασχηματισμό της καθολικότητας μιας ισότητας σε μια ισότητα (the transformation of the generality of an equality into an equality) εξυπηρετεί αυτόν τον σκοπό." *Basic Laws* II, §147. Οντότητες γίνεται να συναχθούν αναδιατάσσοντας κάποιο αληθές περιεχόμενο ("αν ανακατανείμουμε", *Grundlagen* §64, "by re-carving a content", πχ βλ Blanchette, "Realism and Paradox", σελ. 231), για να είναι όμως αυτές με ξεκάθαρο τρόπο λογικά αντικείμενα θα πρέπει και τα αρχικό περιεχόμενο να εμπλέκει έννοιες που είναι ξεκάθαρα λογικής φύσης. Το ότι δεν βλέπει με τον ίδιο τρόπο άλλες αφαιρετικές αρχές γίνεται εμφανές στην αλληλογραφία του με τον Russell. Στο γράμμα της 28ης Ιουλίου 1902 (Frege, Philosophical and Mathematical Correspondence, σελ. 140-141): "Αλλά οι δυσκολίες εδώ δεν είναι ίδιες όπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού μιας καθολικής ταυτότητας σε μια ταυτότητα που εμπλέκει εύρη τιμών". Βλέπε επίσης: Blanchette, "Frege on Caesar and Hume's Principle", σελ. 23.

[81] Όπου εδώ ως αναφορά του συμβόλου '$\approx$' θεωρούμε τη συνάρτηση που αναθέτει σε ζεύγος εννοιών πρώτου επιπέδου την αλήθεια αν και μόνο αν αυτές είναι ισοπληθικές μεταξύ τους. Ο νόμος του Hume μπορεί να επαναδιατυπωθεί και χωρίς να επικαλείται εκτάσεις στο αριστερό τμήμα. Επισημαίνουμε επίσης ότι είναι ακριβώς τα σχετικά ζητήματα όσον αφορά την επίτευξη ακριβούς οριοθέτησης των ανατιθέμενων –από τη σχετική συνάρτηση N– οντοτήτων που εμφανίζονται ως πρόβλημα του 'Ιούλιου Καίσαρα' στα *Θεμέλια της Αριθμητικής* (§55–§66). Αν δεν έχει επιτευχθεί η εξακρίβωση του ακριβούς πεδίου τιμών, τότε δεν έχει επιτευχθεί και ο προσδιορισμός της ζητούμενης συνάρτησης. Αν δεν δίνεται απάντηση στο 'πρόβλημα του Καίσαρα', αν δεν είναι καθορισμένες οι συνθήκες αλήθειας μεικτών ταυτοτήτων που εμπλέκουν αριθμητικούς όρους, τότε δεν έχει δοθεί απάντηση και στο πρόβλημα της φύσης των αριθμών. Αν η αρχή του Hume δεν είναι ικανή να δώσει απάντηση σε σχετικά ζητήματα, τότε μέρος της γνώσης μας περί αριθμών τελικά δεν κωδικοποιείται σε αυτή. Βλέπε: Heck, "Julius Caesar and Basic Law V", σελ. 171-172, επίσης: Χριστοπουλου, "Τα διλήμματα του Benacerraf", σελ. 106-113. Ανάλογα ζητήματα εγείρονται και στην περίπτωση του νόμου V, ο Frege όμως θεωρεί ότι αυτά γίνεται εδώ να ξεπεραστούν, δεδομένου ότι οι πρώτες συναρτήσεις που ορίζονται εντός των *Νόμων* εμπλέκουν μόνο αληθοτιμές και εκτάσεις, βλέπε §10 του *Grundgesetze*.

αντικείμενα των οποίων οι σχέσεις εξατομίκευσης ευθυγραμμίζονται κατάλληλα με τις συνθήκες εφαρμογής της. Άρα, της δυνατότητας γενικά να ειδωθεί όχι απλά ως αλήθεια, αλλά μάλιστα αλήθεια της λογικής, η όποια αφαιρετική αρχή, χωρίς να παρασχεθεί κάποιου τύπου επιπλέον δικαιολόγηση.[82]

Ποιες οι σχετικές δυνατότητες αποφυγής του παραδόξου αν διατηρήσουμε την καθολική δυνατότητα σχηματισμού όρων εκτάσεων, αλλά επιχειρήσουμε να υποχωρήσουμε από την απαίτηση αυτοί να έχουν πάντα καθορισμένη αναφορά; Οδηγούμαστε εδώ στο ζήτημα της κατά Frege σημασιολογίας των κενών σύνθετων ονομάτων. Αντιμετωπίζοντας κάποιους από τους σχηματιζόμενους όρους εκτάσεων ως ονόματα χωρίς αναφορά, θα έπρεπε, αν οι σχετικές αρχές συνθεσιακότητας διατηρηθούν ως έχουν, να δεχτούμε κάθε πρόταση που περιλαμβάνει τέτοιους ως χωρίς αληθοτιμή. Βέβαια, κάτι τέτοιο θα καθιστούσε αναγκαία την εισαγωγή ευρύτατων τροποποιήσεων στη μαθηματική πρακτική. Εξάλλου, πρόκειται για μια προσέγγιση που βρίσκεται σε πλήρη αντίθεση με τις απαιτήσεις του Frege όσον αφορά τη γλώσσα της επιστήμης.

Αντί αυτού, θα μπορούσαμε να επιμείνουμε ότι οι όροι εκτάσεων έχουν μεν αναφορά, αλλά να υποχωρήσουμε από την απαίτηση πληρότητας για τις διάφορες έννοιες. Υπό αυτές τις συνθήκες συγκεκριμένοι όροι εκτάσεων θα γινόταν να αντιμετωπιστούν όχι ως κενοί, αλλά ως αναφερόμενοι σε αντικείμενα που από κάποιες απόψεις είναι ιδιότυπα. Υπό την έννοια ότι ο προσδιορισμός αληθοτιμής δεν γίνεται να επιτευχθεί ως προς αυτά πάντα με μη προβληματικό τρόπο.

Μια υλοποίηση της συγκεκριμένης επιλογής μπορεί και πάλι να πάρει τη μορφή της επιβολής περιορισμών όσον αφορά την εφαρμοσιμότητα ορισμένων από τους νόμους που μέχρι εκείνο το σημείο λαμβάνονται ως νόμοι της λογικής. Μία απομόνωση συγκεκριμένων αντικειμένων ως 'προβληματικών', ως προς τα οποία ορισμένες έννοιες δεν αποκρίνονται, θα εμφανιστεί ως περιορισμός στην εφαρμοσιμότητα της αρχής του αποκλειόμενου τρίτου. Με άλλα λόγια, ως υποχώρηση σε σχέση με το ζήτημα της καθολικότητας από την οποία αυτή διέπεται. Αντί προτάσεων όπως '$\forall F \forall x(Fx \vee \sim Fx)$', θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε μόνο κατάλληλες τροποποιήσεις που προκύπτουν θέτοντας τη διάζευξη υπό την εμβέλεια συνεπαγωγής. Αν προβούμε εδώ σε αφαίρεση του πρώτου ποσοδείκτη, απομονώνουμε την ελλιπή έκφραση '$\forall x(Xx \vee \sim Xx)$', η οποία αναφέρεται σε έννοια δευτέρου επιπέδου, τιμή της οποία είναι το αληθές αν και μόνο αν η X είναι πλήρης. Δεδομένης μιας παραδοχής ορισμένων αντικειμένων ως προβληματικών, η τιμή της '$\forall x(Xx \vee \sim Xx)$ δεν θα είναι για κάθε X το αληθές, επομένως πρέπει είτε να δεχτούμε ότι είναι

[82] Blanchette, "Realism and Paradox", σελ. 239. Επίσης: "The breadth of the Paradox", σελ. 15.

τότε το ψευδές, οπότε καθίσταται αναγκαία η επιβολή περαιτέρω τροποποιήσεων προκειμένου να μην οδηγηθούμε και πάλι σε κατάρρευση της θεωρίας, είτε κάποια τρίτη, ενδιάμεση, 'προβληματική' αληθοτιμή.

Από την άλλη, θα μπορούσαμε να κάνουμε μια απόπειρα μετριασμού –κατά το δυνατόν– τέτοιων συνεπειών, μέσω κατάλληλης διαμέρισης των διαφόρων επιπέδων συναρτήσεων (οπότε και των ποσοδεικτών) σε τύπους, επί της ουσίας, θέτοντας κατάλληλους περιορισμούς όσον αφορά τα αντίστοιχα πεδία ορισμού. Ο Frege θα αναλογιστεί τα χαρακτηριστικά και τις ευρύτερες συνέπειες μιας τέτοιας προσέγγισης, θα απορρίψει όμως την συγκεκριμένη οδό διαφυγής λόγω της διαφαινόμενης πολυπλοκότητάς της. Όπως γράφει:

> Αλλά τώρα θα προέκυπτε μια μεγάλη ποικιλία συναρτήσεων πρώτου επιπέδου, δηλαδή (1) εκείνες που θα μπορούσαν να λάβουν μόνο γνήσια αντικείμενα ως ορίσματα, (2) εκείνες που θα μπορούσαν να λάβουν τόσο γνήσια όσο και μη γνήσια αντικείμενα, και (3) εκείνες που θα μπορούσαν να λάβουν μόνο μη γνήσια αντικείμενα ως ορίσματα. Θα προέκυπτε επιπλέον άλλος ένας τύπος διάκρισης, με βάση τις τιμές των συναρτήσεων, σύμφωνα με την οποία θα έπρεπε να διακρίνουμε (1) συναρτήσεις των οποίων οι τιμές θα ήταν γνήσια αντικείμενα και μόνο, (2) εκείνες που θα είχαν τόσο γνήσια όσο και μη γνήσια αντικείμενα ως τιμές, και (3) εκείνες των οποίων οι τιμές θα ήταν αποκλειστικά μη γνήσια αντικείμενα. Και οι δύο αυτές υποδιαιρέσεις συναρτήσεων θα έπρεπε να ισχύουν ταυτόχρονα, με αποτέλεσμα να καταλήγουμε σε εννέα τύπους. Σε αυτά θα αντιστοιχούσαν, με τη σειρά τους, εννέα τύποι πεδίων τιμών, δηλαδή μη γνήσιων αντικειμένων, μεταξύ των οποίων θα έπρεπε να κάνουμε λογικές διακρίσεις. Κλάσεις γνήσιων αντικειμένων θα έπρεπε να διαχωριστούν από κλάσεις κλάσεων γνήσιων αντικειμένων [...] Αλλά φαίνεται εξαιρετικά δύσκολο να σχηματιστεί πλήρης νομοθεσία, η οποία θα καθόριζε ποια αντικείμενα είναι κάθε φορά επιτρεπτά ως όρισμα σε ποιες συναρτήσεις.[83]

Δεδομένου ότι θα ήταν σε μια τέτοια περίπτωση εξαιρετικά δύσκολο να θεσπιστούν κατάλληλοι νόμοι και κανόνες που επιτρέπουν κατάλληλο χειρισμό της προκύπτουσας ιεραρχίας, ανακύπτει το ζήτημα της βάσης επί της οποίας η σχετική νομοθεσία θα μπορούσε να δικαιολογηθεί φιλοσοφικά. Είναι εδώ εύλογο να υποψιαστεί κανείς ότι κάτι τέτοιο δεν θα μπορούσε εντέλει να γίνει με τρόπο που θα επέτρεπε ισχυρισμούς για το a priori της μαθηματικής γνώσης ως κάτι που προκύπτει λόγω αναλυτικότητας. Ποιες οι θεμελιώδεις λογικές αρχές που θα μπορούσαν να

---

[83] FREGE, *Basic Laws*, Vol. II, σελ. 254, 255.

δικαιολογήσουν διαχωρισμούς μεταξύ γνήσιων και μη γνήσιων αντικειμένων και σχετικούς περιορισμούς –έστω και κρυμμένους ως απόρριψη της δυνατότητας για ενιαίο πεδίο, προκειμένου να σωθούν τα φαινόμενα- όσον αφορά το πώς γίνεται κατανοητή η καθολικότητα που χαρακτηρίζει την αρχή του αποκλειόμενου τρίτου;

Σε κάθε περίπτωση, αυτή, καθώς και η συγγενική της αρχή της δισθένειας, λαμβάνονται όχι μόνο ως αλληλένδετες με την έννοια του γνήσιου αντικειμένου, αλλά, επιπλέον, η τήρησή τους ως βασικό κριτήριο επιστημονικότητας, θεμελιώδης απαίτηση που τίθεται ως προς τις έννοιες που επικαλείται η επιστήμη. Tertium non datur, είναι το δόγμα που επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά:

> Στο μύθο και τη φαντασία μπορεί να εμφανιστούν σκέψεις που δεν είναι ούτε αληθείς ούτε ψευδείς. Η λογική δεν έχει τίποτα να κάνει με αυτά. Στη λογική ισχύει ότι κάθε σκέψη είναι ή αληθής ή ψευδής, tertium non datur.[84]

Τέλος, μια δυνατότητα θα ήταν να επιτρέψουμε μεν τον σχηματισμό κενών ονομάτων, αλλά μετριάζοντας κατά το δυνατόν τις σχετικές επιπτώσεις, μέσω αναθεώρησης των αντίστοιχων αρχών συνθεσιακότητας. Αυτό θα έπρεπε να γίνει με τρόπο ώστε να είναι δυνατός ο σχηματισμός προτάσεων που αναφέρονται σε μία εκ των δύο αληθοτιμών, παρά το γεγονός ότι συστατικά τους μέρη στερούνται αναφοράς. Οδηγούμαστε έτσι σε προσεγγίσεις όπου ο χειρισμός των σύνθετων ονομάτων που εμπλέκουν εκτάσεις επιτυγχάνεται μέσω πλαισιακών ορισμών. Όπως γράφει:

> Αν αυτές οι δυσκολίες μας αποτρέψουν από το να θεωρήσουμε τις κλάσεις (και άρα τους αριθμούς) ως μη γνήσια αντικείμενα, και παρόλα αυτά δεν είμαστε πρόθυμοι να τις αναγνωρίσουμε ως γνήσια αντικείμενα, δηλαδή ως αποδεκτά ορίσματα για κάθε συνάρτηση πρώτου επιπέδου, τότε όντως δεν υπάρχει άλλη εναλλακτική από το να θεωρήσουμε τα ονόματα κλάσεων ως ψευδο-ονόματα, τα οποία επομένως δεν έχουν αναφορά. Σε αυτήν την περίπτωση, θα έπρεπε να θεωρηθούν τμήματα σύνθετων συμβόλων, που αναφέρονται σε κάτι μόνο όταν παίρνονται ως όλο.[85]

Βάσει αυτής της προσέγγισης λοιπόν, οι όροι εκτάσεων αντιμετωπίζονται ως ψευδο-ονόματα, που από μόνα τους δεν αναφέρονται σε κάτι, αλλά παρόλα αυτά μπορεί να μετέχουν στον σχηματισμό προτάσεων με καθορισμένη αναφορά.

> Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν, ακόμη και αυτό που έχουμε συνηθίσει να θεωρούμε ως ένα σημάδι για κάποιο αριθμό δεν θα ήταν στην πραγματικότητα καθόλου σημάδι, αλλά συγκατηγορηματικό τμήμα ενός συμβόλου.

[84] Frege, *Posthumous Writings*, 198.
[85] Frege, *Basic Laws* II, 255.

> Μια εξήγηση για το σημάδι «2» θα ήταν αδύνατη. Αντί αυτού, θα έπρεπε να εξηγήσουμε πολλά σημάδια, που περιέχουν το «2» ως συγκατηγορηματικό τμήμα, αλλά τα οποία δεν σχηματίζονται ως λογικά σύμπλοκα του «2» και κάποιου άλλου τμήματος.[86]

Με άλλα λόγια, σκιαγραφείται μια λύση όπου οι εκτάσεις, και κατ' επέκταση οι αριθμοί, αντιμετωπίζονται ως logical fictions, όπως θα έλεγαν οι Russell-Whitehead:

> Τα σύμβολα για τις κλάσεις, όπως και αυτά για τις περιγραφές, είναι, στο σύστημά μας, ελλιπή σύμβολα: οι χρήσεις τους ορίζονται, αλλά αυτά τα ίδια δεν αντιμετωπίζονται ως να σημαίνουν κάτι. Δηλαδή, η χρήση τέτοιων συμβόλων ορίζεται με τρόπο τέτοιο, ώστε όταν το *definiens* αντικαθιστά το *definiendum*, δεν απομένει κανένα σύμβολο που θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει μια κλάση. Έτσι, οι κλάσεις, στον βαθμό που τις εισάγουμε, είναι απλώς συμβολικές ή γλωσσικές διευκολύνσεις, όχι γνήσια αντικείμενα, όπως είναι τα μέλη τους όταν πρόκειται για μεμονωμένα αντικείμενα.[87]

Δεδομένης πρότασης που περιέχει όρο έκτασης, δεν θα μπορούσαμε βάσει αυτής της προσέγγισης να αντιμετωπίσουμε το τμήμα που προκύπτει αφαιρώντας τον συγκεκριμένο όρο ως αναφερόμενο σε κάποια έννοια πρώτου επιπέδου, και άρα, τη συμβολοσειρά που προκύπτει αν συμπληρώσουμε με αυτό κάποια εννοιακή έκφραση δευτέρου επιπέδου ως αναφερόμενη σε κάποια αληθοτιμή. Προτάσεις όπου κάποιο κατηγόρημα αποδίδεται σε όρο έκτασης θα έπρεπε να αντιμετωπιστούν ως όροι που, παρά τη συντακτική τους πολυπλοκότητα, σε επίπεδο αναφοράς είναι σημασιολογικά απλοί. Επιτυγχάνουν να αναφερθούν σε αληθοτιμή παρά το γεγονός ότι η όποια συντακτική συμπλήρωση δεν αντικατοπτρίζεται σε επίπεδο αναφοράς από ανάλογο συσχετισμό μεταξύ οντοτήτων. Εξακρίβωση των όποιων συσχετισμών υφίστανται σε αυτό θα γινόταν κάθε φορά να επιτευχθεί μόνο μέσω κατάλληλης παράφρασης σε προτάσεις που διέπονται από οντολογικά αντικατοπτριζόμενη συντακτική πολυπλοκότητα. Η σύνταξη της γλώσσας αντιμετωπίζεται έτσι ως να δρα, υπό περιπτώσεις, παραπλανητικά, σχετικά με το ποιες από τις δυνατότητες διαχωρισμού σε πλήρες και ελλιπές τμήμα, στην εκάστοτε πρόταση, όντως αντιστοιχούν σε διαχωρισμούς οντολογικής υφής. Χαρακτηριστικό που δεν μπορεί να υπερκεράσει ούτε καν μια γλώσσα όπως αυτή της εννοιογραφίας, που προκρίνεται ως όργανο για την άσκηση επιστήμης. Όπως παρατηρεί:

> Δεν θα ήταν τότε νόμιμο να αντικατασταθεί ένα τέτοιο συγκατηγορηματικό τμήμα με κάποιο γράμμα, διότι, όσον

[86] Frege, *Basic Laws* II, 255.

[87] Whitehead & Russell, *Principia* (Vol. I), 71, 72.

> αφορά το περιεχόμενο, δεν θα υπήρχε καμιά συμπλοκή-πολυπλοκότητα. Έτσι, η γενικότητα των αριθμητικών προτάσεων θα χανόταν.[88]

Ο χειρισμός των ισχυρισμών για εκτάσεις θα επιτυγχάνεται μέσω μετατροπής τους σε ισχυρισμούς για τις αντίστοιχες έννοιες, με τη διαίρεση των τελευταίων σε επίπεδα να επιφέρει τελικά και αντίστοιχες διακρίσεις όσον αφορά τους όρους για εκτάσεις και αριθμούς. Το παράδοξο αποφεύγεται,[89] αλλά ισχυρισμοί για αριθμούς εκτάσεων δεν θα λογίζονται τώρα ως του ίδιου επιπέδου με αντίστοιχους ισχυρισμούς για αριθμούς αντικειμένων, και ούτω καθεξής. Ζητήματα όπως αυτά θα έσπρωχναν προς μία αντιμετώπιση των προτάσεων που εκφράζουν αριθμητικούς νόμους ως αμφίσημων. Τέλος, θα έκλεινε η φρεγκεανή οδός προς έναν καθορισμό συγκεκριμένου επιπέδου για την έκταση των φυσικών αριθμών, αφού μέσω επίκλησης κάποιας ακολουθίας όπως η:

$$\acute{\varepsilon}(\varepsilon{\neq}\varepsilon), \acute{\alpha}(\alpha{=}N(\acute{\varepsilon}(\varepsilon{\neq}\varepsilon))), \acute{\eta}[\eta{=}N(\acute{\varepsilon}(\varepsilon{\neq}\varepsilon)){\vee}\eta{=}\acute{\alpha}(\alpha{=}N(\acute{\varepsilon}(\varepsilon{\neq}\varepsilon)))], \ldots$$

θα οδηγούμασταν, με το κάθε βήμα, και σε ανώτερο επίπεδο. Ο όποιος ισχυρισμός απειρίας για το εκάστοτε επίπεδο θα έπρεπε να επικαλεστεί κατάλληλα διατυπωμένο αξίωμα απείρου.[90]

Σε κάθε περίπτωση, όλες οι προσεγγίσεις που έχουμε μέχρι εδώ εξετάσει, εντέλει προσπαθούν να αποφύγουν το παράδοξο υποβαθμίζοντας είτε τη δυνατότητα θεώρησης των λογικών αντικειμένων ως γνήσιων, αυθύπαρκτων αντικειμένων (proper objects), με κάθε έννοια-συνάρτηση να διέπεται από καθορισμένη τιμή για κάθε τέτοιο όρισμα, είτε τη δυνατότητα θεώρησης των μαθηματικών αντικειμένων ως λογικών αντικειμένων. Αυτό όμως σημαίνει ότι τέτοιες προσεγγίσεις πολύ απλά δεν συμβιβάζονται εύκολα με την κατά Frege αντιμετώπιση των αντικειμένων, και δη

[88] Frege, *Basic Laws* II, 255.

[89] Βλέπε και: Quine, "On Frege's way out", 148.

[90] Επί της ουσίας οι λόγοι που σπρώχνουν προς την εισαγωγή τέτοιου αξιώματος στο *Principia*, όπου εμφανίζεται ως πρόταση 120.03, σελ. 203, Vol. II, στη δεύτερη έκδοση. Όπως θέτουν το ζήτημα, στη σελίδα 183: «Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι, αν και το αξίωμα του απείρου δεν γίνεται (απ'όσο φαίνεται) να αποδεχθεί ότι είναι a priori, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε επαγωγικός πληθικός υπάρχει σε έναν επαρκώς υψηλό τύπο. Διότι, αν ο συνολικός αριθμός ατόμων είναι n, οι αριθμοί των αντικειμένων στους επόμενους τύπους είναι 2^n, 2^{2^n}, κτλ., και αυτοί οι αριθμοί αυξάνουν πέρα από τον οποιονδήποτε εκάστοτε επαγωγικό πληθικό. Λόγω όμως του γεγονότος ότι δεν μπορούμε να προσθέσουμε έναν άπειρο αριθμό κλάσεων των οποίων οι τύποι αυξάνονται χωρίς όριο, δεν μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει τύπος που περιέχει κάθε επαγωγικό πληθικό, αν και μπορούμε για κάθε επαγωγικό πληθικό να δείξουμε ότι υπάρχει τύπος που τον περιέχει». Στη σελίδα 203, αμέσως μετά τη διατύπωση του αξιώματος, φανερώνουν τις επιφυλάξεις τους όσον αφορά τον χαρακτήρα του συγκεκριμένου αξιώματος: «Η πρόταση $InfinAx$ είναι μια αριθμητική υπόθεση που κάποιοι θα θεωρήσουν ως αυτονόητη, αλλά προτιμούμε να τη διατηρήσουμε ως υπόθεση». Ανάλογα, στη σελίδα 183: «Αυτή η πρόταση θα δίνεται ως υπόθεση όποτε αυτό είναι σχετικό. Φαίνεται ξεκάθαρο ότι δεν υπάρχει τίποτε στη Λογική που να καθιστά αναγκαία την αλήθεια ή ψεύδος της, και ότι μπορεί θεμιτά να γίνει πιστευτή ή όχι μόνο επί εμπειρικής βάσης»

των λογικών, καθώς και τον ρόλο που αυτά καλούνται να παίξουν εντός της επιστήμης:

> Αν θέλουμε έστω και λίγο να ξεφύγουμε από το υποκειμενικό, πρέπει να αντιληφθούμε τη νόηση (cognition) ως μια δραστηριότητα που δεν δημιουργεί αυτό που νοείται (cognised), αλλά που συλλαμβάνει αυτό που είναι ήδη εκεί.[91]

> Το πρώτιστο πρόβλημα της αριθμητικής είναι το ερώτημα, με ποιον τρόπο μπορούμε να συλλάβουμε τα λογικά αντικείμενα, και πιο συγκεκριμένα, τους αριθμούς; Τι είναι αυτό που καθιστά δικαιολογημένη την αναγνώριση των αριθμών ως αντικειμένων;[92]

Έτσι, έχοντας ερευνήσει εν συντομία τις διάφορες προοπτικές, κατασταλάζει σε εκείνη την οδό, προς αποφυγή του παραδόξου, που φαίνεται ίσως να συνάδει λίγο καλύτερα με τις γενικότερες πτυχές της φιλοσοφικής θεώρησης που έχει αναπτύξει. Την τροποποίηση του νόμου V, ώστε να επιτρέπεται σε μη ισοδύναμες εκτασιακά συναρτήσεις-έννοιες να έχουν παρόλα αυτά την ίδια έκταση. Φυσικά, προκύπτει εδώ μια πλειάδα τεχνικών δυσκολιών, αφού αυτό θα πρέπει να γίνει με τρόπο που, πρώτον, επιτρέπει και πάλι να προβούμε στις απαραίτητες αποδείξεις, και, δεύτερον, όντως αποφεύγει το παράδοξο, δεν μεταθέτει απλώς λίγο παρακάτω την εκ νέου ανάδυσή του.

Στο παράρτημα των *Νόμων*, αφού εξετάσει ενδελεχώς τον τρόπο που προκύπτει το παράδοξο, ερευνά περαιτέρω τις δύο κατευθύνσεις του νόμου V, και διαπιστώνει ότι εντός του συστήματος των *Νόμων* προκύπτει το εξής:

> για κάθε συνάρτηση δεύτερου επιπέδου, του ενός ορίσματος τύπου 2, υπάρχουν έννοιες τέτοιες ώστε, όταν λαμβάνονται ως ορίσματα γι αυτήν την συνάρτηση η τιμή είναι η ίδια, και αυτή η τιμή εμπίπτει στην πρώτη από αυτές τις έννοιες, αλλά όχι στη δεύτερη.[93]

Έπεται κατευθείαν ότι το ίδιο θα ισχύει και για τη συνάρτηση $\acute{\varepsilon}(...)\varepsilon$. Δηλαδή, θα υπάρχουν δύο έννοιες πρώτου επιπέδου του ενός ορίσματος, στις οποίες αυτή αναθέτει την ίδια έκταση, με την μία να ικανοποιείται από αυτήν, ενώ η άλλη όχι. Έχουμε άρα ότι:

> Εάν είναι γενικά επιτρεπτό, για οποιαδήποτε έννοια πρώτου επιπέδου, να μιλήσουμε για την έκτασή της, τότε προκύπτει η περίπτωση εννοιών που έχουν την ίδια έκταση,

[91] Frege, *Basic Laws* I, XXIV.

[92] Frege, *Basic Laws* II, 265.

[93] Frege, *Basic Laws* II, 258. Τύπου 2 ορίσματα οι συναρτήσεις πρώτου επιπέδου του ενός ορίσματος.

> παρόλο που δεν ισχύει ότι όλα τα αντικείμενα που εμπίπτουν στη μία εμπίπτουν και στην άλλη.[94]

Με άλλα λόγια, δεδομένων εννοιών πρώτου επιπέδου F, G, από το γεγονός ότι έFε=έGε δεν μπορούμε να συνάγουμε ότι $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$, και άρα, η μία κατεύθυνση του νόμου V πρέπει να αναθεωρηθεί:

> οι εκτάσεις εννοιών, με τη ληφθείσα σημασία του όρου, με αυτόν τον τρόπο καταργούνται. Δεν μας επιτρέπεται να πούμε ότι, γενικώς, η έκφραση "η έκταση μιας έννοιας συμπίπτει με αυτή μιας άλλης" αναφέρεται στο ίδιο με την έκφραση "κάθε αντικείμενο που εμπίπτει στην πρώτη έννοια, εμπίπτει επίσης στη δεύτερη, και αντίστροφα". Από το αποτέλεσμα της συναγωγής μας, βλέπουμε ότι δεν γίνεται να εκλάβουμε τις λέξεις "η έκταση της έννοιας Φ(ξ)" ως να σημαίνουν ότι, γενικά, από την ταυτότητα έκτασης μεταξύ δύο εννοιών, θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι κάθε αντικείμενο που εμπίπτει στη μία από τις δύο θα εμπίπτει και στην άλλη.[95]

Σε αυτό το σημείο, ο Frege δέχεται ότι δεδομένου ζεύγους εννοιών που δεν ταυτίζονται υλικά, αλλά στις οποίες αντιστοιχεί η ίδια έκταση, η διαφορά τους όσον αφορά τις τιμές θα προκύπτει πάντα όταν ως όρισμα εξυπηρετεί η συγκεκριμένη έκταση. Προβαίνει λοιπόν σε ανάλογη τροποποίηση του νόμου V, θέτοντας ότι: [96]

$$\forall F \forall G(\acute{\varepsilon} F\varepsilon{=}\acute{\alpha} G\alpha \leftrightarrow \forall x[\sim(\sim(x{=}\acute{\alpha} G\alpha){\to}(x{=}\acute{\varepsilon} F\varepsilon)){\to}Fx{=}Gx])$$

δηλαδή:

$$\forall F \forall G(\acute{\varepsilon} F\varepsilon{=}\acute{\alpha} G\alpha \leftrightarrow \forall x[(\sim(x{=}\acute{\alpha} G\alpha){\wedge}\sim(x{=}\acute{\varepsilon} F\varepsilon)){\to}Fx{=}Gx]).$$

Από εδώ έπεται κατευθείαν ότι $\forall F \forall G(\forall x(Fx{=}Gx) \to \acute{\varepsilon} F\varepsilon{=}\acute{\alpha} G\alpha)$, αλλά, από την άλλη, δεν ισχύει ότι $\forall F \forall G(\acute{\varepsilon} F\varepsilon{=}\acute{\varepsilon} G\alpha \to \forall x(Fx{=}Gx))$. Εντός του τροποποιημένου νόμου, το πεδίο δράσης του ποσοδείκτη στο δεξί μέλος περιορίζεται σε αντικείμενα που δεν είναι εκτάσεις κάποιας από τις έννοιες που συγκεκριμενοποιούν τους αρχικούς δευτεροβάθμιους ποσοδείκτες, αφήνοντας έτσι το περιθώριο αυτές να διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την τιμή που αναθέτουν στην κοινή τους έκταση:

> Η έκταση μιας έννοιας συμπίπτει με εκείνη κάποιας άλλης, αν κάθε αντικείμενο που εμπίπτει στην πρώτη έννοια, εκτός από την έκταση της πρώτης έννοιας, επίσης εμπίπτει στη δεύτερη έννοια, και αν αντιστρόφως κάθε αντικείμενο που εμπίπτει στη δεύτερη έννοια, εκτός από την έκταση της δεύτερης έννοιας, εμπίπτει επίσης στην πρώτη έννοια.[97]

---

[94] Ibid., 260.
[95] Ibid., 260, 261.
[96] Ibid., 262.
[97] Ibid.

Βάσει της τροποποιημένης εκδοχής του νόμου V, δεν συνάγεται πλέον ότι για κάθε έννοια πρώτου επιπέδου F θα ισχύει ότι κάτι είναι F αν και μόνο αν αυτό ανήκει στην έκταση των F. Η κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά εξακολουθεί να ισχύει, αλλά δεν μπορεί πλέον να δοθεί απόδειξη για την κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά. Μπορούμε και πάλι να μιλήσουμε για έκταση όλων των εκτάσεων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους, η ανάδυση του παραδόξου όμως φαίνεται εκ πρώτης όψεως ως να εμποδίζεται, αφού υποθέσεις όσον αφορά το αν αυτή ανήκει στον εαυτό της, ή όχι, δεν αρκούν για να προβούμε σε ισχυρισμούς όσον αφορά τη συμπεριφορά της αντίστοιχης έννοιας.

Ο Frege συνεχίζει ερευνώντας εν συντομία ορισμένες από τις περαιτέρω τροποποιήσεις που θα πρέπει να εισαχθούν στους διάφορους ορισμούς και αποδείξεις των *Νόμων*, δεδομένων των παραπάνω αλλαγών στον νόμο V. Κλείνοντας, εκφράζει την πεποίθηση ότι κατάλληλα τροποποιημένες εκδοχές των αποδείξεων θα γίνεται και πάλι να δοθούν, παρά τις αλλαγές:

> Το να διερευνήσουμε εδώ περαιτέρω τις συνέπειες της αντικατάστασης του νόμου (V) από τον (V') θα ήταν πολύ μεγάλο εγχείρημα. Δεν μπορούμε παρά να αναγνωρίσουμε ότι υποσυνθήκες θα πρέπει να προστεθούν σε πολλές από τις αρχές και θεωρήματα του συστήματος. Σίγουρα όμως, δεν χρειάζεται να φοβηθούμε ότι αυτό θα εγείρει εμπόδια που στην πραγματικότητα μπλοκάρουν την πορεία των αποδείξεων. Ωστόσο, θα είναι και πάλι απαραίτητο να ελεγχθούν διεξοδικά όλες οι προτάσεις που έχουν μέχρι αυτό το σημείο ανακαλυφθεί. [...] Δεν αμφιβάλλω ότι η πορεία προς τη λύση έχει βρεθεί.[98]

Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να πει πως αυτό το βιαστικά γραμμένο παράρτημα των *Νόμων*, γραμμένο στη μέγγενη του πιεστηρίου,[99] κλείνει διαπνεόμενο από έναν αέρα αισιοδοξίας. Με την πεποίθηση ότι, παρόλο που τα πράγματα δεν ήρθαν ακριβώς όπως τα περίμενε, οι λύσεις που προτείνει βρίσκονται τελικά στον σωστό δρόμο και το όλο πρόγραμμα διασώζεται. Βέβαια, αν η θέση ότι ο αρχικός νόμος V είναι αλήθεια της Λογικής ήταν εξαρχής αμφίβολη, σίγουρα θα μπορούσε κάποιος να πει ότι το ίδιο ισχύει σε ακόμη μεγαλύτερο βαθμό για την πολυπλοκότερη νέα εκδοχή του, δεδομένης και της διάρρηξης που επιφέρει μεταξύ συνθηκών εμπίπτειν σε έννοια και ανήκειν στην αντίστοιχη έκταση.[100]

[98] Ibid., 265.

[99] Όπως το θέτει ο Quine: «In the jaws of the press», βλέπε: "On Frege's way out".

[100] Κάτι που έχει ήδη γίνει εμφανές στο τελευταίο απόσπασμα της προηγούμενης σελίδας. Ανάλογα γίνεται φυσικά να υποστηριχθούν και γι άλλες τροποποιήσεις του V που προσπαθούν να αποφύγουν την ανάδυση του παραδόξου, όπως πχ αυτές που έχουν προταθεί από τους Wright, Boolos, και άλλους. Σχετικά με αυτές τις εναλλακτικές βλέπε: Shapiro & Weir, "New V, ZF and Abstraction".

Πέραν αυτών όμως, το σύστημα του Frege παραμένει τελικά ασυνεπές ακόμη και στην περίπτωση που δεχτούμε τις τροποποιήσεις που ο τελευταίος προτείνει. Προκύπτει τώρα ότι το πεδίο της γλώσσας μπορεί να περιέχει το πολύ ένα αντικείμενο, οπότε, δεδομένης της θεώρησης, εκ μέρους του, του Αληθούς και του Ψευδούς ως αντικειμένων, συνάγεται και πάλι αντίφαση.[101] Βέβαια, μια κατάλληλη αλλαγή του νόμου V –που να οδηγεί σε συνεπές σύστημα– ίσως παραμένει δυνατή. Όπως όμως έχουμε δει είναι εμφανές από τα ύστερα γραπτά του πως αυτός –πιθανώς έχοντας διαπιστώσει ότι το σύστημα που προκύπτει με τις τροποποιήσεις του παραρτήματος είναι και πάλι ασυνεπές–[102] ή έχοντας χάσει την πίστη του στον λογικό χαρακτήρα των βασικών αρχών επί των οποίων αυτό οικοδομείται, έχει πλέον εγκαταλείψει την προσπάθεια για μια θεώρηση των αριθμών ως λογικών αντικειμένων. Το ζητούμενο της θεμελίωσης συνεχίζει όμως να τον απασχολεί. Στα τελευταία χρόνια της ζωής του, θα σκιαγραφήσει μια αρκετά διαφορετική –και πρωτότυπη– θεωρία, στην οποία λαμβάνει πλέον κεντρικό ρόλο η γεωμετρία. Προγραμματίζει μάλιστα τη συγγραφή ενός βιβλίου, όπου αυτή θα εκτίθεται λεπτομερώς, το οποίο όμως δεν πρόλαβε τελικά να ολοκληρώσει.

5. Η Υστατη Λυση: Μια Προσπαθεια Μερικης Ανακατασκευης

Όσον αφορά τη μελέτη του έργου του Frege, ένα ζήτημα που έχει προκαλέσει αρκετές διαφωνίες είναι η αξιολόγηση της επίδρασης που ασκεί ο Καντ. Σε τι βαθμό ξεκινά το πρώτο ως αντίδραση σε συγκεκριμένες πτυχές του τελευταίου; Σε κάθε περίπτωση, είναι εμφανές ότι ο Frege δέχεται αρκετές από τις θέσεις του σπουδαίου φιλοσόφου, και μάλιστα, τις δέχεται μέχρι τέλους. Για παράδειγμα, σε κανένα σημείο δεν εξετάζει έστω τη δυνατότητα μιας θεώρησης των προτάσεων της γεωμετρίας ως κάτι άλλο από συνθετικές a priori:

> Για τους σκοπούς της εννοιακής σκέψης, μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι ισχύει το αντίθετο κάποιου γεωμετρικού αξιώματος, χωρίς να εμπλακούμε σε αντιφάσεις καθώς προχωρούμε στην παραγωγή συμπερασμάτων,

[101] Βλέπε σχετικά: Quine, "On Frege's way out"; Landini, "The Ins and Outs of Frege's way out"; Sobociński, "L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski"; Επίσης: Cook, "Frege's Little Theorem and Frege's Way Out", στο *Essays on Frege's Basic Laws of Arithmetic*, (ed.) Ebert & Rossberg.

[102] Ενδείξεις για αυτό μπορεί κανείς να βρει σε διάφορες σημειώσεις του Frege. Για παράδειγμα, στις σημειώσεις του γύρω από το άρθρο *Die logischen Paradoxien der Mengenlehre*, του Schoenflies, γράφει, μεταξύ άλλων, τα εξής:

> Η αντίφαση του Russell δεν γίνεται να αποφευχθεί με τον τρόπο του Schoenflies. Έννοιες που συμπίπτουν σε έκταση, αν και αυτή η έκταση εμπίπτει στη μία, αλλά όχι στην άλλη. Αποφυγή των εκτάσεων για έννοιες δευτέρου επιπέδου αδύνατη. Η θεωρία συνόλων ερειπωμένη.

Η τελευταία φράση πρέπει εδώ να ληφθεί ως ενδεικτική του βαθμού στον οποίο ο Frege θεωρεί ότι γενικότερες φιλοσοφικές παραδοχές δρουν δεσμευτικά όσον αφορά τις όποιες απόπειρες αποφυγής του παραδόξου. *Posthumous Writings*, 176.

> παρ' όλο που οι υποθέσεις μας συγκρούονται με την εποπτεία μας. Το γεγονός ότι αυτό είναι δυνατό δείχνει ότι τα αξιώματα της γεωμετρίας είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, συνεπώς ότι πρόκειται για συνθετικές προτάσεις.[103]

Ενώ, αλλού:

> Θεωρώ λοιπόν ότι ο KANT πρόσφερε μεγάλες υπηρεσίες με το να διακρίνει τις κρίσεις σε αναλυτικές και συνθετικές. Με το να χαρακτηρίσει τις γεωμετρικές αλήθειες συνθετικές και a priori, αποκάλυψε την πραγματική τους φύση.[104]

Ούτε καν η διαπίστωση ότι μπορούμε να μιλήσουμε με συνεπή τρόπο για μη ευκλείδειες γεωμετρίες στάθηκε ικανή να τον σπρώξει σε αναθεώρηση των σχετικών απόψεών του. Εξάλλου, είναι παντού εμφανής η εχθρότητά του προς την κατά Hilbert αντιμετώπιση των αξιωμάτων, και προς κάθε σχετικοποιημένη έννοια αλήθειας:

> Οι σκέψεις είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς. Και είναι ακριβώς το ερώτημα του αν μια σκέψη είναι αληθής ή ψευδής που είναι συνήθως ο λόγος για τον οποίο στην επιστημονική έρευνα απασχολούμαστε με σκέψεις. [...] Κανένας άνθρωπος δεν μπορεί να υπηρετήσει δύο κυρίους. Δεν μπορεί κανείς να υπηρετήσει και την αλήθεια και το ψεύδος. Αν η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι αληθής, τότε η μη-Ευκλείδεια είναι ψευδής, και αν η μη-Ευκλείδεια είναι αληθής, τότε η Ευκλείδεια είναι ψευδής. [...] Τολμάμε να αντιμετωπίσουμε τα στοιχεία του Ευκλείδη, τα οποία έχουν ασκήσει αναμφισβήτητη επιρροή για 2000 χρόνια, με τον ίδιο τρόπο όπως και την αστρολογία; Είναι μόνο αν δεν τολμούμε να κάνουμε κάτι τέτοιο που μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε ως προτάσεις που δεν είναι ούτε ψευδείς ούτε αμφίβολες. Σε αυτήν την περίπτωση, η μη-Ευκλείδεια γεωμετρία θα πρέπει να συμπεριληφθεί στις ψευδοεπιστήμες, στη μελέτη των οποίων εξακολουθούμε να προσδίδουμε μία κάποια σημασία, αλλά μόνο ως ιστορικά αξιοπερίεργα.[105]

Δεδομένου του παραδόξου του Russell, και της υπονόμευσης που αυτό επέφερε στην θεώρηση του Frege περί λογικών αντικειμένων, το προς επίλυση ζήτημα που αναδύεται τώρα αφορά το από πού θα αντληθούν οι κατάλληλες πρωταρχικές οντότητες, επί των οποίων θα μπορούσε να διαμορφωθεί μια θεμελίωση των αριθμών. Από πού αντλείται, κατά βάση,

[103] Frege, *Θεμέλια*, σελ. 124.
[104] Ibid., 209.
[105] Frege, *Posthumous Writings*, 167, 169.

η γνώση περί αριθμών; Αν όχι από τη Λογική; Οι εναλλακτικές δυνατότητες διαφαίνονται βάσει της γενικότερης φιλοσοφικής θεώρησης του Frege:

> Όταν κάποιος καταλήγει να μάθει κάτι, το επιτυγχάνει αναγνωρίζοντας ότι μια σκέψη είναι αληθής. Για να γίνει αυτό, πρέπει πρώτα να συλλάβει τη σκέψη. Ωστόσο, δεν αναγνωρίζω την σύλληψη της σκέψης ως γνώση, αλλά μόνο την αναγνώριση της αλήθειας της, την κρίση καθαυτή. Αυτό που θεωρώ ως πηγή γνώσης είναι αυτό που δικαιολογεί (επικυρώνει) την αναγνώριση της αλήθειας, την κρίση.[106]

Στόχος του δεν είναι απλώς να δοθεί μια τυπική θεμελίωση της αριθμητικής, αλλά μια θεμελίωση που επιτυγχάνει να δείξει το στέρεο, την αλήθεια, των προτάσεων των σχετικών θεωριών μέσω αναγωγής τους σε κάποια πρωταρχική πηγή γνώσης, αναγνωρίζοντας τα αντικείμενα στα οποία αυτές αναφέρονται ως μεταξύ αυτών που ανήκουν στο πεδίο που σχετίζεται μ' αυτήν. Έχουμε εδώ να κάνουμε με ένα ευρύτερο φιλοσοφικό πρόγραμμα, και όχι με ένα στενά μαθηματικό. Ποιες είναι, σύμφωνα με τον Frege, οι θεμελιώδεις πηγές γνώσης; Όπως γράφει, πάνω σε αυτό:

> Διακρίνω τις ακόλουθες πηγές γνώσης:
> 1. Αισθητηριακή αντίληψη
> 2. Την Λογική πηγή της γνώσης
> 3. Την Γεωμετρική πηγή, και την Χρονική πηγή της γνώσης. [107]

Μεταξύ αυτών των υποψηφιοτήτων, εξαρχής απορρίπτεται η πρώτη κατηγορία ως πιθανό θεμέλιο. Η μαθηματική γνώση είναι a priori:[108]

> Όσον αφορά τα μαθηματικά από μόνα τους, δεν χρειαζόμαστε την αισθητηριακή αντίληψη ως πηγή γνώσης: γι αυτά, η Λογική και η Γεωμετρική πηγή αρκούν.[109]

Εξάλλου, τα αισθητηριακά δεδομένα δεν μπορούν να δώσουν πρόσβαση σε άπειρα αντικείμενα, και άρα δεν επαρκούν για να θεμελιωθεί πχ η απειρία των φυσικών αριθμών:

> Είναι εμφανές, ότι η αισθητηριακή αντίληψη δεν μπορεί να δώσει τίποτε το άπειρο. Όσα αστέρια και αν συμπεριλάβουμε στους καταλόγους μας, αυτά δεν θα είναι ποτέ απείρως πολλά, και το ίδιο ισχύει για εμάς και για τους κόκκους άμμου των ακτών. Έτσι, όπου θεμιτά μπορούμε

[106] Ibid., 267.

[107] Ibid. Βάσει όσων έχουμε αναφέρει, αν κάτι μπορεί να χαρακτηριστεί ως πηγή γνώσης τότε θα αντιμετωπίζεται και ως πηγή αληθών σκέψεων.

[108] Έρχονται φυσικά εδώ κατά νου και τα σχετικά επιχειρήματα που διατυπώνει κατά των θέσεων του Mill. Frege, *Θεμέλια*, §7-10.

[109] Frege, *Posthumous Writings*, 268.

> να υποστηρίξουμε ότι αναγνωρίζουμε το άπειρο, δεν το έχουμε προσλάβει από την αισθητηριακή αντίληψη.[110]

Σε αυτό το σημείο όμως έχει για τον Frege αποκλειστεί και η δεύτερη δυνατότητα. Φαίνεται, από τα όσα γράφει, ότι η ανάδυση του παραδόξου έχει γι αυτόν δείξει το αδύνατο μιας θεμελίωσης που να τηρεί συγκεκριμένα ελάχιστα κριτήρια, τέτοια ώστε αυτή να αναγνωρίζεται ως εμπίπτουσα στην εν λόγω κατηγορία. Καταλήγει έτσι σε συγκεκριμένη αποτίμηση της κατάστασης:

> Ένα χαρακτηριστικό της γλώσσας που απειλεί να υπονομεύσει την αξιοπιστία της σκέψης είναι η τάση της για σχηματισμό κύριων ονομάτων στα οποία δεν αντιστοιχεί κανένα αντικείμενο. Αν αυτό συμβαίνει στη μυθοπλασία, όπου όλοι καταλαβαίνουν ότι πρόκειται για μυθοπλασία, τότε δεν έχει επιβλαβή αποτελέσματα. Τα πράγματα όμως είναι διαφορετικά αν αυτό συμβαίνει σε μια δήλωση που υποστηρίζει τον εαυτό της ως αυστηρά επιστημονική. Ένα αξιοσημείωτο παράδειγμα αυτής της περίπτωσης, είναι ο σχηματισμός κύριων ονομάτων κατά τα πρότυπα του 'η έκταση της έννοιας α', π.χ. 'η έκταση της έννοιας αστέρι'. Λόγω του οριστικού άρθρου, η συγκεκριμένη έκφραση φαίνεται να προσδιορίζει κάποιο αντικείμενο, αλλά δεν υπάρχει αντικείμενο για το οποίο αυτή η φράση θα μπορούσε να θεωρηθεί γλωσσικά κατάλληλος προσδιορισμός. Είναι από αυτό που προέκυψαν τα παράδοξα της συνολοθεωρίας, τα οποία της επέφεραν το θανατηφόρο πλήγμα.[111]

Τελευταία δυνατότητα που φαίνεται να μένει, άρα, είναι η τρίτη κατηγορία, την οποία και αντιλαμβάνεται λίγο-πολύ υπό καντιανούς όρους. Η διάκριση που δίνει μεταξύ των τριών πηγών γνώσης αντιστοιχεί, θα μπορούσαμε να πούμε, στη διάκριση μεταξύ συνθετικών a posteriori, αναλυτικών a priori, και συνθετικών a priori κρίσεων του Καντ. Κατηγορίες που γίνονται βέβαια εδώ κατανοητές με κατάλληλα τροποποιημένο τρόπο, δεδομένων εξάλλου και των διαφορών ως προς την έννοια της αναλυτικότητας. Είναι εδώ σημαντική η απόρριψη, εκ μέρους του, της μοντελοθεωρητικής μεθόδου, με τη συνεπαγόμενη μεταφορά των σχετικών γνωσιολογικών ζητημάτων στο προσκήνιο, και την ανάδειξη έτσι της ανάγκης για άμεση σύνδεση των αξιωμάτων με κάποια πρωταρχική πηγή γνώσης:

> Από τη γεωμετρική πηγή της γνώσης απορρέουν τα αξιώματα της γεωμετρίας. [...] Ωστόσο, η λέξη 'αξίωμα' πρέπει εδώ να γίνει κατανοητή ακριβώς με την Ευκλείδεια σημασία της. Αλλά, ακόμη κι εδώ, πρόσφατες εργασίες

[110] Ibid., 274.
[111] Ibid., 269.

> έχουν θολώσει τα νερά, διαστρέφοντας –τόσο ελαφριά στην αρχή που να γίνεται ίσα ίσα αντιληπτό– την παλιά ευκλείδεια έννοια, με αποτέλεσμα να έχουν τελικά προσδώσει διαφορετική σημασία στις προτάσεις που μας έχουν κληροδοτηθεί ως αξιώματα.[112]

Επιπλέον, ξεκαθαρίζει ότι δέχεται τη συγκεκριμένη κατηγορία ως ικανή να δώσει απειρία αντικειμένων:

> Από τη γεωμετρική πηγή της γνώσης ρέει το άπειρο με τη γνήσια και αυστηρότερη σημασία της λέξης. [...] Έχουμε απείρως πολλά σημεία σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα, σε κάθε κύκλο, και άπειρες ευθείες διέρχονται από το κάθε σημείο.[113]

Καταλήγει έτσι σε βαθειά, και με ευρείες συνέπειες –αν αληθή– συμπεράσματα:

> Όσο περισσότερο σκέφτομαι το ζήτημα, τόσο πιο πεπεισμένος γίνομαι ότι η αριθμητική και η γεωμετρία έχουν αναπτυχθεί επί της ίδιας βάσης –τη γεωμετρική– έτσι ώστε τα μαθηματικά, στην πραγματικότητα, είναι στην ολότητά τους γεωμετρία. Μόνο υπό αυτό το πρίσμα παρουσιάζονται τα μαθηματικά ως εντελώς ομοιογενή στη φύση τους. Η καταμέτρηση, που προέκυψε ψυχολογικά μέσα από τις απαιτήσεις της επιχειρηματικής ζωής, οδήγησε τους λόγιους στην πλάνη.[114]

---

[112] Ibid., 273.

[113] Ibid.

[114] Ibid., 277. Έχει εδώ ενδιαφέρον ο τρόπος που οι ιδιαιτερότητες της γενικότερης προσέγγισης του Frege τον οδηγούν σε μια θεώρηση που φέρει μεν ορισμένες φιλοσοφικού περιεχομένου ομοιότητες με αυτήν του Brouwer (εφόσον δέχεται κάποιο είδος εποπτείας ως βάση για τους αριθμούς), διατηρεί όμως τη δυνατότητα του εν εκτάσει απείρου και την απόρριψη της όποιας δυνατότητας για θεώρηση των μαθηματικών αντικειμένων ως κατασκευές. Πράγματι, μία αποδοχή συγκεκριμένων σκέψεων ως αξιωμάτων προϋποθέτει την αναγνώρισή τους ως αληθών, κάτι που σε κάθε περίπτωση θα γίνει βάσει κάποιας θεμελιώδους πηγής γνώσης. Από τις θέσεις του περί αλήθειας και ψεύδους γενικότερα, και τα όσα λέει περί αλήθειας ή ψεύδους των γεωμετρικών προτάσεων ειδικότερα, έπεται πως ως πηγή γεωμετρικής γνώσης αναγνωρίζει μόνο την αντίστοιχη, ή, εν πάσει περιπτώσει, πως η πηγή των αισθητηριακών δεδομένων δεν μπορεί να δώσει γεωμετρική γνώση που διέπεται από διαφορετικές αρχές. Η προτερότητα άρα της γεωμετρικής πηγής, και η συνεπαγόμενη έμφαση σε αντίστοιχη καντιανού τύπου εποπτεία, τοποθετούν στο επίκεντρο την ευκλείδεια γεωμετρία, οδηγώντας στην αποδοχή των αντίστοιχων αρχών ως αληθών, και στην απόρριψη της όποιας θεώρησης σύμφωνα με την οποία η δυνατότητα για διατύπωση μη ευκλείδειων θεωριών συνιστά αντιπαράδειγμα στη θεμελίωση της γεωμετρίας επί τέτοιων βάσεων. Από την άλλη, ο Brouwer γράφει σχετικά: «Αλλά το πιο σοβαρό πλήγμα για την καντιανή θεωρία ήταν η ανακάλυψη της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας, μιας συνεπούς θεωρίας, ανεπτυγμένης από ένα σύνολο αξιωμάτων που διαφέρουν από αυτά της στοιχειώδους γεωμετρίας μόνο ως προς το ότι το αξίωμα των παραλλήλων αντικαταστάθηκε από την άρνησή του [...] Άρα, όχι μόνο είναι αδύνατο να επιμείνει κανείς ότι ο χώρος της εμπειρίας έχει τις ιδιότητες της

Είναι λοιπόν η γεωμετρική πηγή γνώσης που καλείται τελικά να παίξει τον ρόλο του θεμελίου επί του οποίου θα οικοδομηθούν οι διάφορες αριθμητικές θεωρίες. Ανακαλούνται άρα τα προηγούμενα επιχειρήματα που μπορεί να είχαν διατυπωθεί κατά της γεωμετρικής θεώρησης των αριθμών, δείχνοντας με αυτόν τον τρόπο προς τα πού κλείνει πλέον το σχετικό ισοζύγιο όσον αφορά την οριστικότητα των σχετικών συμπερασμάτων.

Ο Frege επιστρέφει έτσι σε μια προσέγγιση που είχε αναφέρει στα *Θεμέλια*, αν και απλώς για να την απορρίψει.[115] Σκιαγραφεί ορισμένες από τις σχετικές λεπτομέρειες, προς μια ενδελεχή υλοποίηση της, σε ένα σύντομο σημείωμα με τίτλο "*A new Attempt at a Foundation for Arithmetic*".[116] Θα βασιστούμε εδώ στα όσα γράφει, και θα αποπειραθούμε μια μερική συμπλήρωση των κενών, προκειμένου να επιτύχουμε μια –κατά το δυνατόν– ευλογοφανή ανακατασκευή.

Σε ένα πρώτο στάδιο ξεκαθαρίζει ποιες οι αρχές -από αυτές στις οποίες βασιζόταν το προηγούμενο έργο του– που θεωρεί ακόμη αληθείς, και ποιες όχι. Οι *Νόμοι της Αριθμητικής* ξεκινούν ως εξής:

> Στο *Θεμέλια της Αριθμητικής*, επιχείρησα να το καταστήσω εύλογο ότι η αριθμητική είναι ένας κλάδος της λογικής, και δεν χρειάζεται άρα να δανειστεί κάτι από την εμπειρία η την εποπτεία. Στον παρόν έργο αυτό θα επιβεβαιωθεί, συνάγοντας τους απλούστερους νόμους για τους αριθμούς μόνο με λογικά μέσα.[117]

όπου διακηρύττεται ως ζητούμενο το να δειχτεί με αυστηρότητα πως οι αποδείξεις της αριθμητικής δεν βασίζονται σε δεδομένα της εμπειρίας ή της εποπτείας (intuition). Αυτό όμως αναθεωρείται πλέον στο παρακάτω:

στοιχειώδους γεωμετρίας, αλλά δεν έχει καν νόημα να ρωτήσει κανείς ποια η γεωμετρία που θα ήταν αληθής για τον χώρο των εμπειριών μας [...] Όσο αδύνατη και αν φαινόταν η θέση του ιντουισιονισμού, έπειτα από αυτές τις μαθηματικές εξελίξεις, έχει ανακάμψει εγκαταλείποντας την Καντιανή θέση για το a priori του χώρου, αλλά διατηρώντας αποφασιστικά το a priori του χρόνου. Αυτός ο νέο-ιντουισιονισμός λαμβάνει τον διαχωρισμό στιγμών της ζωής σε ποιοτικά διαφορετικά μέρη, προς επανένωση μόνο όσο μένουν χρονικά διαχωρισμένα, ως το θεμελιώδες φαινόμενο της ανθρώπινης νόησης». Brouwer, *Collected works* (Vol.1), 84, 85.

[115] Frege, *Θεμέλια*, §19. Σε κάθε περίπτωση, το σχετικό επιχείρημα που ο Frege διατυπώνει στη συγκεκριμένη ενότητα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί κάπως ασθενικό, αφού επικεντρώνεται σε δυσκολίες που υποτίθεται ότι θα ανέκυπταν όσον αφορά τη σύνδεση της αντίστοιχης θεώρησης με το πώς αντιλαμβανόμαστε τα πράγματα σε επίπεδο καθημερινών εφαρμογών σε επιστημονικά και μη πλαίσια. Αν όμως διαπιστώνεται τελικά ότι στο τελευταίο παραπλανούμαστε με τρόπο που οδηγεί στον σχηματισμό μιας απατηλής εικόνας, if it is the case that we have been led astray, τότε αντιρρήσεις του τύπου ανακαλούνται. Βλέπε επίσης: *Basic Laws*, II, 156.

[116] Frege, *Posthumous Writings*, 278-281.

[117] Frege, *Basic Laws* I, σελ. 1.

> Η αριθμητική δεν χρειάζεται να επικαλεστεί την αισθητηριακή αντίληψη στις αποδείξεις της.[118]

Επιπλέον, ξεκαθαρίζει ότι εξακολουθεί να δέχεται πως:

> Μια αριθμητική δήλωση περιέχει έναν ισχυρισμό για κάποια έννοια.[119]

Οπότε, σε αυτό το σημείο, μπορεί κανείς να υποψιαστεί ποια η οδός που προτίθεται να ακολουθήσει. Θα πρέπει να επιστρατευτεί κάποια κατάλληλη αφαιρετική αρχή, βάσει της οποίας δηλώσεις για έννοιες θα μετατρέπονται σε δηλώσεις για αριθμούς, και η οποία θα δρα επί γεωμετρικής βάσης. Που θα επιτρέπει δηλαδή την αναδιάταξη γεωμετρικών περιεχομένων σε αριθμητικά. Η όποια δυνατότητα ισχυρισμού της θα θεμελιώνεται μέσω ακριβούς οριοθέτησης των αντικειμένων που μπορεί να εμπλέκονται στην εκάστοτε συγκεκριμενοποίηση μεταξύ αυτών που περιλαμβάνονται στο πεδίο της γεωμετρικής πηγής γνώσης, οπότε διασφαλίζεται η απαραίτητη γνωσιολογική πρόσβαση:

> Μέσω ενός ορισμού, δεν μπορούμε ούτε να δημιουργήσουμε αντικείμενα με όποιες ιδιότητες μας αρέσουν, ούτε με μαγικό τρόπο να αποδώσουμε όποιες ιδιότητες μας αρέσουν σε ένα κενό όνομα ή σύμβολο.
> Τα ερωτήματα του αν ένα κύριο όνομα σημαίνει κάτι, και του αν κάτι εμπίπτει εντός μιας έννοιας, πρέπει να κρατηθούν χωριστά. Κύρια ονόματα χωρίς νόημα δεν είναι θεμιτά εντός της επιστήμης, από την άλλη, οι κενές έννοιες δεν γίνεται να εξαλειφθούν.[120]

Προτίθεται λοιπόν για μια λογικό-γεωμετρική οικοδόμηση των αριθμών, με την ύπαρξη των αντικειμένων που θα επικαλείται η όποια αφαιρετική αρχή να προκύπτει από τη γεωμετρική πηγή της γνώσης. Τις σχετικές συνθήκες εξατομίκευσης να εδραιώνονται επί γεωμετρικής σχέσης ισοδυναμίας. Έτσι, η αριθμητική θα παρουσιάζεται ως να εκκινεί από γεωμετρικές βάσεις, και θα οικοδομείται μέσω της εφαρμογής μηχανισμών της λογικής επί γεωμετρικών εννοιών.

Πράγματι, όπως γράφει, ξεκαθαρίζοντας περαιτέρω τη νέα στάση του:

> Χρειάστηκε να εγκαταλείψω την άποψη ότι η αριθμητική δεν απαιτεί ούτε επίκληση στην εποπτεία στις αποδείξεις της, όπου εδώ ως εποπτεία εννοείται η γεωμετρική πηγή της γνώσης, δηλαδή, η πηγή απ' όπου ρέουν τα αξιώματα της γεωμετρίας. Πρόσφατα, έχει προκύψει μια επιβλαβής σύγχυση γύρω από τη χρήση της λέξης 'αξίωμα'. Υπογραμμίζω λοιπόν ότι χρησιμοποιώ τη συγκεκριμένη λέξη με την αρχική σημασία της.[121]

[118] Frege, *Posthumous Writings*, 278.
[119] Ibid.
[120] Frege, *Collected papers*, 228.
[121] Frege, *Posthumous Writings*, 278.

ενώ, όσον αφορά τη λογική πηγή της γνώσης:

> ...εμπλέκεται όταν συνάγονται συμπεράσματα, και επομένως είναι σχεδόν πάντα εμπλεκόμενη. Ωστόσο, φαίνεται ότι από μόνη της δεν μπορεί να μας δώσει αντικείμενα.[122]

και συνεχίζει:

> Στην περίπτωση της αριθμητικής, όπως και στην περίπτωση της γεωμετρίας, εξαιρώ μόνο την αισθητηριακή αντίληψη ως πηγή γνώσης. Ο καθένας θα δεχτεί ότι δεν υπάρχει μέγιστος ακέραιος αριθμός, δηλαδή, ότι υπάρχουν απείρως πολλοί ακέραιοι. [...] Αυτή η γνώση δεν γίνεται να προκύψει από την αισθητηριακή αντίληψη, εφόσον τίποτα το άπειρο, με ολόκληρη τη σημασία της λέξης, δεν μπορεί να ρεύσει από αυτή την πηγή. [...] Εφόσον, πιθανώς, ούτε η λογική πηγή της γνώσης μπορεί να δώσει αριθμούς, θα επικαλεστούμε τη γεωμετρική πηγή της γνώσης. Αυτό είναι σημαντικό, επειδή σημαίνει ότι η αριθμητική και η γεωμετρία, και επομένως το σύνολο των μαθηματικών, απορρέουν από μία και την αυτή πηγή γνώσης –και αυτή είναι η γεωμετρική. Αυτό ανυψώνεται λοιπόν στη θέση της πραγματικής πηγής της μαθηματικής γνώσης, με τη λογική πηγή, φυσικά, επίσης να εμπλέκεται παντού.[123]

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να προβεί στη διατύπωση των κατάλληλων ορισμών επί της βάσης συγκεκριμένων γεωμετρικών εννοιών,[124] μέσω των οποίων θα ξεκαθαρίζεται ο τρόπος που δηλώσεις οι οποίες γίνεται να εκληφθούν ως αριθμητικού περιεχομένου σχετίζονται με αντίστοιχες γεωμετρικές. Ο όποιος ισχυρισμός αφαιρετικής αρχής θα πρέπει να βασιστεί σε ακριβή προσδιορισμό κατάλληλης συνάρτησης $N(...)$, επί τη βάσει συγκεκριμένων γεωμετρικών αξιωμάτων που αναγνωρίζονται κατευθείαν ως αληθή μέσω της γεωμετρικής πηγής της γνώσης.[125] Έπειτα, δίνοντας τις κατάλληλες διατυπώσεις στη γλώσσα της εννοιογραφίας, θα μπορεί να αποδειχτεί με αυστηρότητα ότι αυτές οι γεωμετρικού χαρακτήρα βασικές αρχές, οι νέοι αυτοί βασικοί νόμοι, οδηγούν στη συναγωγή και των υπόλοιπων από τις προτάσεις της αριθμητικής.

Ένα σημείο που έχει εδώ ενδιαφέρον, είναι ότι αυτή η γεωμετρική θεώρηση θα οδηγεί κατευθείαν σε απόλυτα γενικό ορισμό της έννοιας του αριθμού, με τρόπο που εξαρχής περιλαμβάνει τους πραγματικούς και

[122] Ibid., 279.

[123] Ibid.

[124] Δηλαδή εννοιών-σχέσεων με κατάλληλες τιμές, όταν ως όρισμα εξυπηρετούν γεωμετρικές οντότητες.

[125] Επί της ουσίας, θα πρέπει να δοθεί ρητός ορισμός της συνάρτησης μέσω της οποίας σχηματίζονται οι εμπλεκόμενοι όροι.

τους μιγαδικούς αριθμούς, χωρίς να προκύπτει ανάγκη αντιμετώπισης των φυσικών αριθμών ως βάση γι αυτούς:

> Παρεκκλίνοντας από τη συνήθη πρακτική, δεν θέλω να ξεκινήσω από τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και να επεκτείνω σταδιακά το πεδίο των αριθμών. Γιατί δεν υπάρχει αμφιβολία ότι υποκύπτει κανείς σε λογικό σφάλμα όταν δεν χρησιμοποιεί τη λέξη 'αριθμός' με σταθερό νόημα, αλλά κάθε φορά καταλαβαίνει κάτι το διαφορετικό μέσω αυτής. [...] Έτσι, εξαρχής πηγαίνω κατευθείαν για τον τελικό στόχο, τους μιγαδικούς αριθμούς. [...] Το θεμελιώδες λάθος είναι ότι οι άνθρωποι ξεκινούν από τους αριθμούς που έμαθαν ως παιδιά, για παράδειγμα μέσω καταμέτρησης ενός σωρού μπιζελιών. Αυτοί οι αριθμοί μας οδηγούν σε δυσκολίες ήδη από τη στιγμή που ερχόμαστε αντιμέτωποι με τους άρρητους αριθμούς.[126]

Ως βάση λοιπόν, ως πεδίο της γεωμετρικής πηγής της γνώσης, ο Frege θεωρεί το ευκλείδειο επίπεδο, ενώ ως βασικές ιδέες, αυτήν της γραμμής, και αυτήν του σημείου. Βάσει αυτών, και της έννοιας της ταυτότητας, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του ζεύγους σημείων με αρχή και τέλος, δηλαδή την έννοια του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος, με τους αντίστοιχους όρους να σχηματίζονται κάθε φορά ως αλληλουχίες όρων για τα αντίστοιχα δύο σημεία. Επιπλέον, την έννοια του ζεύγους προσανατολισμένων τμημάτων με κοινή αρχή, όπου το ένα από τα δύο διακρίνεται ως βάση, με άλλα λόγια, την έννοια της προσανατολισμένης γωνίας, με τους αντίστοιχους όρους να σχηματίζονται κατάλληλα ως αλληλουχίες τριών όρων για σημεία, όπου πρώτο μέλος της αλληλουχίας ο όρος της κορυφής, ενώ πρώτο ζεύγος ο όρος της βάσης.

Έχει ενδιαφέρον, πάντως, η επιλογή εδώ από τον Frege της έκφρασης 'ιδέα', δεδομένου μάλιστα και του ότι στα σωζόμενα χειρόγραφα φαίνεται να είχε δοκιμάσει, πριν κατασταλάξει στον συγκεκριμένο όρο, να χρησιμοποιήσει αντί αυτής κάποια από τις εκφράσεις 'έννοια', ή 'βασικό αντικείμενο'. Φυσικά, ο όρος 'ιδέα' επανεμφανίζεται και σε άλλα σημεία του έργου του Frege, συνήθως όταν θέλει να διακρίνει πτυχές που μπορεί να χαρακτηρίζονται από μια υποκειμενική και νοητική διάσταση:

> Οι ιδέες είναι κάτι που έχουμε. Έχουμε αισθήσεις, συναισθήματα, διαθέσεις, κλίσεις, επιθυμίες. Μια ιδέα που κάποιος έχει ανήκει στο περιεχόμενο της συνείδησής του. [...] κάθε ιδέα χρειάζεται έναν ιδιοκτήτη. Τα πράγματα του εξωτερικού κόσμου, αντίθετα, είναι ανεξάρτητα. [...] κάθε ιδέα έχει έναν και μόνο ιδιοκτήτη. Για κανένα ζεύγος ανθρώπων δεν υπάρχει ιδέα που μοιράζονται.[127]

---

[126] Frege, *Posthumous Writings*, 279.
[127] Frege, *Collected papers*, 360.

Βέβαια, εντός των πλαισίων που εξετάζουμε, επιδίωξη του Frege δεν θα μπορούσε να είναι η χρήση του συγκεκριμένου όρου ακριβώς με αυτόν τον τρόπο.[128] Θα μπορούσαμε να εικάσουμε ότι επιλέγει τον όρο 'ιδέα' προκειμένου να προσδώσει έμφαση σε συγκεκριμένες πτυχές του τρόπου με τον οποίο μας δίνονται τα αντικείμενα αυτών των κατηγοριών. Παραλληλίζοντας ίσως τη χρήση του συγκεκριμένου όρου από τον Καντ,[129] μπορεί να επιδιώκει εδώ την υπογράμμιση ιδιαιτεροτήτων όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο γίνεται κατανοητό αυτό που καλεί 'γεωμετρική πηγή της γνώσης', σε σύνδεση με τις αντίστοιχες a priori μορφές στην *Κριτική του Καθαρού Λόγου*,[130] και τους μηχανισμούς βάσει των οποίων μας δίνονται επί αυτών οντότητες όπως είναι τα σημεία και οι γραμμές.[131] Σε κάθε περίπτωση, ανακύπτει εδώ και το ζήτημα της θέσης οντοτήτων όπως αυτές εντός του πολυώροφου φιλοσοφικού οικοδομήματος του Frege. Εφόσον όμως θεωρούμε ότι οι γεωμετρικές προτάσεις διέπονται από αληθοτιμή, η σημασιολογική θεώρηση του Frege μας οδηγεί κατευθείαν σε αντιμετώπιση των σχετικών οντοτήτων ως ευρισκόμενων στο επίπεδο της αναφοράς.

Επί του ευκλείδειου επιπέδου λοιπόν, ο Frege διακρίνει/επιλέγει δύο σημεία, την αρχή **O** (origin), και το τελικό σημείο **A** (endpoint). Επιπλέον, παίρνει ως βασική τη τριμελή σχέση συμμετρικότητας δύο σημείων ως προς ευθεία, η οποία είναι φυσικά συνάρτηση (κάτι που μπορεί εξάλλου να επιβεβαιωθεί επί της βάσης των Ευκλείδειων αξιωμάτων, χρησιμοποιώντας τις προτάσεις 12, 16 των στοιχείων). Δεδομένου σημείου A και ευθείας λ θα υπάρχει κάθε φορά μοναδικό σημείο B που είναι συμμετρικό (ανάκλαση) του A ως προς την λ. Συνεχίζει ορίζοντας βάσει αυτών πότε ένα σημείο βρίσκεται επί κάποιας ευθείας, και πότε ένα τρίγωνο $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ (προσανατολισμένη γωνία) είναι συμμετρικό (αντικατοπτρισμός) ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς ευθεία λ, ορισμό που θα μπορούσαμε να συντομογραφήσουμε ως:

---

[128] Διαφαίνεται εξάλλου, εκ μέρους του, μια διστακτικότητα ως προς το ποια η ορθή ορολογία εδώ, έχοντας πρώτα δοκιμάσει τους όρους 'πρωταρχικά αντικείμενα', και 'έννοιες', που σε κάθε περίπτωση τοποθετούνται σε επίπεδο αναφοράς, αλλά γίνονται κατανοητοί άνευ συσχετίσεων με υποκείμενο.

[129] Καντ, *Jasche Logic*, §3: «Ιδέα είναι μια έννοια του λόγου, της οποίας το αντικείμενο δεν μπορεί να δοθεί στην εμπειρία [...] Μια ιδέα περιέχει το αρχέτυπο για τη χρήση του νου, πχ την ιδέα της ολότητας του κόσμου [...] Επομένως, πρέπει να θεωρείται ως αναγκαία βασική έννοια, είτε προκειμένου να συμπληρωθούν αντικειμενικά οι πράξεις υπαγωγής του νου, είτε για να θεωρηθούν ως χωρίς όριο. Η ιδέα δεν γίνεται να προσληφθεί ούτε μέσω σύνθεσης, εφόσον το όλο προηγείται του μέρους. Υπάρχουν ιδέες, ωστόσο, ως προς τις οποίες προκύπτει μια προσέγγιση. Αυτό συμβαίνει με τις μαθηματικές ιδέες, ή τις ιδέες της μαθηματικής παραγωγής ενός όλου». Βλέπε επίσης και την χρήση του όρου εντός της υπερβατολογικής διαλεκτικής, στην *Κριτική του Καθαρού Λόγου*, A312-B389.

[130] Καντ, *Κριτική του Καθαρού Λόγου*, B37-B46.

[131] Βλέπε και τις παρατηρήσεις που κάνει πάνω στην Καντιανή έννοια της εποπτείας στα *Θεμέλια της αριθμητικής*, §12.

$$[Refl(\mathrm{A},\lambda)=\mathrm{A}'\wedge Refl(\mathrm{B},\lambda)=\mathrm{B}'\wedge Refl(\Gamma,\lambda)=\Gamma'] \equiv_{def} Mirroring(\mathrm{AB}\Gamma,\lambda,\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma')$$ [132]

όπου εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο '$Mirroring$' για την περίπτωση των τριγώνων, κρατώντας το '$Refl$' για την περίπτωση των σημείων, προκειμένου να σηματοδοτείται καθαρά ότι η μία περίπτωση λαμβάνεται ως πρωταρχική.

Βάσει αυτών, ορίζεται στη συνέχεια μια σχέση συμμετρίας μεταξύ τριγώνων:

$$\exists x[line(x) \wedge Mirroring(\mathrm{AB}\Gamma,x)=\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma'] \equiv_{def} \mathrm{AB}\Gamma \otimes \mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma'.$$

Σε αυτό το σημείο ορίζεται κατάλληλη σχέση σύμπτωσης (congruency):

$$\mathrm{AB}\Gamma \cong \mathrm{H}\Theta\mathrm{I} \equiv_{def} \exists x\exists y\exists z(point(x) \wedge point(y) \wedge point(z) \wedge \mathrm{AB}\Gamma \otimes xyz \wedge xyz \otimes \mathrm{AB}\Gamma)$$

βάσει της οποίας ορίζεται κατάλληλη σχέση $\approx$, ομοιότητας μεταξύ τριγώνων.[133] Δεδομένου του τρόπου που αναλύεται η $\otimes$ βάσει της $Mirroring(x,y)$, και εφόσον η απεικόνιση $Mirroring(Mirroring(x,y),z)$ είναι ισομετρία που διατηρεί τον προσανατολισμό (orientation preserving isometry), έπεται ότι η σχέση σύμπτωσης στην οποία αναφέρεται ο όρος '$\cong$' θα είναι ευαίσθητη στον προσανατολισμό των εκάστοτε τριγώνων (direct congruency).[134] Επιπλέον, πέρα από αυτοπαθής και αντιμεταθετική θα προκύπτει και μεταβατική, αφού η σύνθεση δύο συμπτώσεων θα προκύπτει ως γινόμενο άρτιου αριθμού αντικατοπτρισμών, οπότε είναι επίσης ισομετρία που διατηρεί τον προσανατολισμό, και άρα μπορεί να αναλυθεί ως γινόμενο δύο αντικατοπτρισμών. Πρόκειται άρα για μια σχέση ισοδυναμίας. Μάλιστα, εύκολα βλέπουμε ότι το ίδιο θα ισχύει και για την βάσει αυτής οριζόμενη σχέση ομοιότητας. Μπορεί λοιπόν να γίνει επίκλησή της εντός κατάλληλων προτάσεων με μορφή παραπλήσια αφαιρετικής αρχής:

[132] Προκύπτει κατευθείαν ότι η συγκεκριμένη σχέση είναι συνάρτηση, η έκφραση $Mirroring(\mathrm{AB}\Gamma,\lambda)$ είναι λοιπόν σύνθετος ενικός όρος, και μπορούμε αντί για $Mirroring(\mathrm{AB}\Gamma,\lambda,\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma')$ να γράφουμε $Mirroring(\mathrm{AB}\Gamma,\lambda)=\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma'$.

[133] Σημειώνουμε εδώ τους σχετικούς ορισμούς:

- $colinear(a,b,c) \Leftrightarrow point(a) \wedge point(b) \wedge point(c) \wedge \exists x(line(x) \wedge Refl(a,x)=a \wedge Refl(b,x)=b \wedge Refl(c,x)=c)$.
- $parallel(l,m) \Leftrightarrow line(l) \wedge line(m) \wedge \exists a\exists b\exists c(point(a) \wedge point(b) \wedge point(c) \wedge Refl(a,l)=b \wedge Refl(b,m)=c \wedge colinear(a,b,c))$.
- $intersection(a,l,m) \Leftrightarrow line(l) \wedge line(m) \wedge point(a) \wedge Refl(a,l)=a \wedge Refl(a,m)=a \wedge l\neq m$ (όπου σχέσεις-συναρτήσεις που δρουν επί ευθειών γίνεται να επεκταθούν και για περιπτώσεις ευθυγράμμων τμημάτων).
- Για μη επίπεδα τρίγωνα: $mab\approx pqr \Leftrightarrow point(a)\wedge point(m)\wedge point(b)\wedge point(p)\wedge point(q)\wedge point(r)\wedge\exists l_1\exists l_2\exists l_3\exists l_4\exists c\exists d(line(l_1)\wedge line(l_2)\wedge line(l_3)\wedge line(l_4)\wedge point(c)\wedge point(d)\wedge intersection(a,l_1,l_3)\wedge intersection(c,l_1,l_4)\wedge intersection(b,l_2,l_3)\wedge intersection(d,l_2,l_4)\wedge parallel(l_3,l_4)\wedge intersection(m,l_1,l_2)\wedge m\neq a\wedge m\neq b\wedge m\neq c\wedge mcd\cong pqr)$.

[134] Όπως αυτός εξακριβώνεται αν πχ διαβάσουμε τις κορυφές του εκάστοτε τριγώνου με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

> ...λέω τότε ότι το τρίγωνο MAB είναι όμοιο με το PQR, ή, εννοώντας το ίδιο, ότι ο λόγος του MA προς το MB είναι ο ίδιος με τον λόγο του PQ προς το PR.[135]

Προτού προβούμε σε αντίστοιχους ισχυρισμούς θα πρέπει βέβαια να έχει διασφαλιστεί ότι οι σύνθετοι όροι '*λόγος του* MA *προς το* MB' και '*λόγος του* PQ *προς το* PR' έχουν καθορισμένη αναφορά. Στην περίπτωσή μας, η γεωμετρική πηγή της γνώσης δίνει την ύπαρξη σημείων και ευθειών. Τι εξ αυτών μπορούμε να εκλάβουμε ως τον λόγο δύο προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων; Ποια τα αντικείμενα που αναθέτει κάθε φορά η αντίστοιχη συνάρτηση; Ο Frege θα θεωρήσει τους λόγους ως σημεία επί του επιπέδου, οπότε το ζήτημα τώρα είναι να δοθεί κατάλληλος ορισμός, βάσει του οποίου θα προσδιορίζεται συνάρτηση που αναθέτει σημεία σε ζεύγη προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων με κατάλληλο τρόπο.[136]

Ας θεωρήσουμε δύο τυχόντα ευθύγραμμα τμήματα επί του επιπέδου, ως προς τα οποία ξεχωρίζουμε το ένα άκρο ως αρχή και το άλλο ως τέλος. Έπεται κατευθείαν ότι μπορούμε επί της κορυφής του ενός να θεωρήσουμε ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο του άλλου και με ίσο μήκος. Δεδομένων ΑΒ, ΓΔ θέτουμε:[137]

$$F(\mathrm{AB},\Gamma\Delta) = \begin{cases} \Delta, & \text{αν } A{=}\Gamma \\ Refl(Refl(\Delta, l''), l'), & \text{αν όχι.} \end{cases}$$

Με $l' = ix[line(x) \wedge x \perp \mathrm{A}\Gamma \wedge intersection(\mathrm{A}, x, \mathrm{A}\Gamma)], l'' = ix[line(x) \wedge x \perp \mathrm{A}\Gamma \wedge Refl(\mathrm{A}, x){=}\Gamma]$ (ύπαρξη και μοναδικότητα προκύπτουν εύκολα), όπου, για l_1, l_2 γραμμές: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \sim parallel(l_1, l_2) \wedge \forall x(point(x) \rightarrow (x{\in}l_1 \rightarrow Refl(x, l_2){\in}l_1))$, ενώ, δεδομένου σημείου x και ευθείας α είναι $x \in \alpha \leftrightarrow Refl(x, \alpha) = x$ (παίρνουμε την αντίστοιχη σχέση μεταξύ σημείων και ευθυγράμμων τμημάτων ως βασική). Επί της βάσης των Ευκλείδειων αξιωμάτων, μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A}F(\mathrm{AB}, \Gamma\Delta)$ θα είναι παράλληλο του ΓΔ και με ίδιο μήκος. Λαμβάνοντας το ΑΒ ως βάση, σχηματίζεται τώρα το τρίγωνο $\mathrm{AB}F(\mathrm{AB},\Gamma\Delta)$.

Δεδομένου του $\mathrm{AB}F(\mathrm{AB},\Gamma\Delta)$, μπορούμε σε κάθε περίπτωση να θεωρήσουμε τρίγωνο $\mathbf{O}\mathrm{B}'\Delta'$, τέτοιο ώστε $\mathrm{AB}F(\mathrm{AB},\Gamma\Delta) \cong \mathbf{O}\mathrm{B}'\Delta'$, με το B' να βρίσκεται επί της $\mathbf{OA}+$, δηλαδή της ευθείας που εκτείνεται επ' άπειρον προς την κατεύθυνση του **Α**, με αρχή το **Ο**. Εξάλλου, το $\mathbf{O}\mathrm{B}'\Delta'$ μπορεί να ειδωθεί ως να προκύπτει από το $\mathrm{AB}F(\mathrm{AB},\Gamma\Delta)$ μέσω κατάλληλης σύνθεσης ισομετριών μεταφοράς και στροφής. Άρα, εφόσον κάθε μία από αυτές θα γίνεται με τη σειρά της να θεωρηθεί ως σύνθεση δύο αντικατοπτρισμών ως προς κατάλληλες δύο ευθείες, από την

[135] Frege, *Posthumous Writings*, 281.

[136] Οι πραγματικοί αριθμοί ορίζονται ως λόγοι μεγεθών (magnitude-ratio) και στους *Νόμους*, με τρόπο όμως που δεν βασίζεται στη γεωμετρία. Frege, *Basic Laws* II, 156-162.

[137] Βλέπε: Dodge, *Euclidean Geometry*, 63-76, Modenov & Parkhomenko, *Geometric Transformations*, 44-49.

μεταβατικότητα της $\cong$ θα προκύπτει ότι ΑΒF(ΑΒ,ΓΔ) $\cong$ $\mathbf{O}$Β$'$Δ$'$. Πράγματι, δεδομένου του ΑΒF(ΑΒ,ΓΔ) και της αρχής $\mathbf{O}$, προσδιορίζεται το $\mathbf{O}\mathrm{B}^*\Delta^* = \mathbf{O}F(\mathbf{OA}, \mathrm{AB})F(\mathbf{OA}, \mathrm{A}F(\mathrm{AB}, \Gamma\Delta))$. Παρατηρούμε ότι το $\mathbf{O}\mathrm{B}'\Delta'$ θα προκύπτει από το $\mathbf{O}\mathrm{B}^*\Delta^*$ μέσω στροφής ως προς την αρχή $\mathbf{O}$ κατά τη γωνία $\mathbf{OA}\angle\mathrm{AB}$ που σχηματίζουν τα $\mathbf{OA}$, ΑΒ. Μπορούμε έτσι να θέσουμε $\mathbf{O}\mathrm{B}'\Delta' = R(\mathbf{O}\mathrm{B}^*\Delta^*, \mathbf{OA})$. Όπου, για τρίγωνο ΑΒΓ και τμήμα ΔΖ θα είναι R(ΑΒΓ, ΔΖ)=ΑΒΓ, αν Α$\neq$Δ, ενώ, αλλιώς, R(ΑΒΓ,ΔΖ) = R(ΑΒΓ,ΑΖ) = ΑRefl[Refl(Β,Bis(ΑΖ,ΑΒ)),ΑΖ]Refl[$Refl$(Γ,Bis(ΑΖ,ΑΒ)),ΑΖ], ενώ, για $xy, x'y'$ ευθύγραμμα τμήματα:

$$Bis(xy, x'y') = \begin{cases} xy, \text{αν } x{\neq}x' \\ \\ iz[line(z) \wedge (\forall h(point(h) {\wedge} h{\in}xy \rightarrow Refl(h,z){\in}x'y') \\ \vee \forall h(point(h) \wedge h{\in}x'y' \rightarrow Refl(h,z){\in}xy))], \\ \text{αν όχι.} \end{cases}$$

Όπου ύπαρξη και μοναδικότητα της $Bis(xy, x'y')$ προκύπτουν εύκολα.

Το τρίγωνο $\mathbf{O}\mathrm{B}'\Delta'$ θα γίνεται τώρα να συσχετιστεί με τρίγωνο $\mathbf{OA}\Delta''$ που έχει την ίδια αρχή, αλλά την $\mathbf{OA}$ ως βάση, μέσω της σχέσης ομοιότητας τριγώνων $\approx$. Πράγματι, δεδομένης της $\mathbf{OA}+$, αρκεί να θεωρήσουμε παράλληλη της Β$'$Δ$'$ που διέρχεται από το $\mathbf{A}$. Από την άλλη, αν το $\mathbf{O}\mathrm{B}'\Delta'$ είναι επίπεδο, αρκεί να θεωρήσουμε το $R(\mathbf{O}\Delta'\Delta', \mathbf{OB}) = \mathbf{O}\Delta^*\Delta^*$, όπου $\mathbf{OB}$ τυχόν κάθετο στο $\mathbf{OA}$ τμήμα, και να θεωρήσουμε την παράλληλη της Β$'$Δ* που διέρχεται από το $\mathbf{A}$. Αν Δ'' το σημείο όπου αυτή τέμνει το $\mathbf{OB}+$, τότε αρκεί να θεωρήσουμε το $\mathbf{O}\Delta'''\Delta''' = R(\mathbf{O}\Delta''\Delta'', \mathbf{OA})$ και να πάρουμε το $\mathbf{OA}\Delta'''$. Έτσι, κάθε ζεύγος προσανατολισμένων ευθύγραμμων τμημάτων, από τα οποία ξεχωρίζουμε το ένα ως βάση, γίνεται να συσχετιστεί με κατάλληλο σημείο επί του επιπέδου (σχέση ομοιότητας μεταξύ επίπεδων τριγώνων μπορεί με παρόμοιο τρόπο να ανάγεται κάθε φορά σε αυτήν μεταξύ των αντίστοιχων ορθογωνίων τριγώνων). Δεδομένου τέτοιου ζεύγους ΑΒ:ΓΔ, και σημείου Δ' που προσδιορίζεται με αυτόν τον τρόπο, θα λέμε ότι το Δ' αντιστοιχεί στον λόγο ΑΒ:ΓΔ. Έχουμε άρα:

το Δ' αντιστοιχεί στον λόγο ΑΒ:ΓΔ $\leftrightarrow$ ΑΒF(ΑΒ,ΓΔ) $\approx$ $\mathbf{OA}\Delta'$.

Διαπίστωση τώρα ότι η συγκεκριμένη σχέση αντιστοίχισης είναι συνάρτηση θα επέτρεπε κατάλληλη διατύπωση πρότασης που έχει μορφή αφαιρετικής αρχής βάσει λόγων προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Έχοντας προσδιορίσει συγκεκριμένη συνάρτηση, κάθε λόγος θα γίνεται να αντιμετωπιστεί ως σημείο κατάλληλα τοποθετημένο σε σχέση με την $\mathbf{OA}$, και θα έχει διασφαλιστεί ότι οι σχετικοί ενικοί όροι έχουν κάθε φορά συγκεκριμένη αναφορά.

Πράγματι, ο Frege κλείνει διατυπώνοντας ως θεώρημα πρόταση που συνεπάγεται ακριβώς ότι η παραπάνω σχέση αντιστοίχισης είναι συνάρτηση:

Για τρίγωνα PQR, $\mathbf{OA}\Gamma$, $\mathbf{OA}\Delta$, αν PQR$\approx\mathbf{OA}\Gamma$ και PQR$\approx\mathbf{OA}\Delta$ τότε Γ=Δ.

Σε κάθε ζεύγος προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων θα ανατίθεται έτσι συγκεκριμένο σημείο επί του επιπέδου. Μπορούμε βέβαια εδώ να δούμε ότι τόσο η αλήθεια της παραπάνω πρότασης, όσο και η πρόσθετη ιδιότητα ότι σε λόγους τριγώνων που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας αντιστοιχούν διαφορετικά σημεία, προκύπτουν κατευθείαν από τη συνολική πορεία προς τον ορισμό της σχέσης ομοιότητας. Πράγματι, αυτή μπορεί να ειδωθεί ως σύνθεση συνάρτησης που είναι σύνθεση άρτιου αριθμού αντικατοπτρισμών, και άρα ισομετρία που διατηρεί τον προσανατολισμό, με συνάρτηση που αναθέτει όμοιο τρίγωνο σε αυτό που προκύπτει βάσει της πρώτης (και άρα, από ορισμό, ευαίσθητη στον προσανατολισμό). Εύκολα βλέπουμε ότι αυτή η σύνθεση θα αναθέτει διαφορετικά σημεία σε διαφορετικές κλάσεις ομοιότητας. Μπορούμε λοιπόν να προβούμε σε ισχυρισμό της παρακάτω πρότασης με μορφή αφαιρετικής αρχής, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ είναι τυχόντα σημεία:

$$\mathrm{AB\Gamma} \approx \Delta\mathrm{EZ} \leftrightarrow \mathrm{AB{:}A\Gamma} = \Delta\mathrm{E}{:}\Delta\mathrm{Z}$$

ή αλλιώς:

$$\mathrm{AB\Gamma} \approx \Delta\mathrm{EZ} \leftrightarrow N(\mathrm{AB,A\Gamma}) = N(\Delta\mathrm{E},\Delta\mathrm{Z})$$ [138]

ενώ, γενικότερα:

$$\mathrm{AB}F(\mathrm{AB},\Gamma\Delta) \approx \mathrm{EZ}F(\mathrm{EZ,H\Theta}) \leftrightarrow N(\mathrm{AB},\Gamma\Delta) = N(\mathrm{EZ,H\Theta}).$$

Μάλιστα, δεδομένων τυχόντων τμημάτων, πχ ΑΒ, ΓΔ, μπορούμε κάθε φορά να θεωρήσουμε τα αντίστοιχα τρίγωνα $\mathbf{OA}F(\mathbf{OA},\mathrm{AB})$ και $\mathbf{OA}F(\mathbf{OA},\Gamma\Delta)$, τα οποία θα είναι όμοια μεταξύ τους αν και μόνο αν τα ΑΒ, ΓΔ έχουν κοινό μήκος και προσανατολισμό (παράλληλα και ίδια διεύθυνση από αρχή προς τέλος). Θα είναι:

$$\mathbf{OA}F(\mathbf{OA},\mathrm{AB}) \approx \mathbf{OA}F(\mathbf{OA},\Gamma\Delta) \leftrightarrow \mathbf{OA}F(\mathbf{OA},\mathrm{AB}) \cong \mathbf{OA}F(\mathbf{OA},\Gamma\Delta) \\ \leftrightarrow N(\mathbf{OA},\mathrm{AB}) = N(\mathbf{OA},\Gamma\Delta)$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε:

$$\mathbf{OA}F(\mathbf{OA},\mathrm{AB}) \cong \mathbf{OA}F(\mathbf{OA},\Gamma\Delta) \leftrightarrow N(\mathrm{AB}) = N(\Gamma\Delta)$$

ή αλλιώς:

$$\mathrm{AB} \cong \Gamma\Delta \leftrightarrow N(\mathrm{AB}) = N(\Gamma\Delta).$$

Δηλαδή, δύο τμήματα θα διέπονται από κοινό προσανατολισμό και μήκος, αν και μόνο αν ο αριθμός του ενός ταυτίζεται με τον αριθμό του άλλου.

Ανάλογα, αν δούμε ως διάνυσμα $\hat{=}_{\mathrm{AB}}\,(\ldots)$ του τμήματος ΑΒ την έννοια $(\ldots) \cong \mathrm{AB}$ –που ικανοποιείται από τα τμήματα με μήκος και προσανατολισμό ίδια με του ΑΒ– ενώ ως $N(\hat{=}_{\mathrm{AB}})$ το σημείο που αντιστοιχεί στον λόγο $\mathbf{OA}{:}\mathbf{O}F(\mathbf{OA},\mathrm{AB})$, δηλαδή το $F(\mathbf{OA},\mathrm{AB})$, τότε θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την αρχή ως να εμπλέκει έννοιες (όπου για x σημείο αυτό μπορεί απλά να αντιμετωπιστεί ως το τμήμα $\mathbf{O}x$):

$$\forall x(\hat{=}_{\mathrm{AB}}\,(x) \leftrightarrow \hat{=}_{\Gamma\Delta}\,(x)) \leftrightarrow N(\hat{=}_{\mathrm{AB}}) = N(\hat{=}_{\Gamma\Delta})$$

[138] Παρατηρούμε ότι ακριβώς επειδή η ταυτότητα στο δεξί μέλος αφορά κάθε φορά μεμονωμένα σημεία επί του επιπέδου, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι αυτού του είδους η «αφαιρετική» αρχή αποφεύγει ζητήματα που ο Frege διέκρινε ότι πλήττουν άλλες αφαιρετικές αρχές, που μπορεί να αφορούν πχ διευθύνσεις κτλ, και τα οποία έκαναν γι' αυτόν απαραίτητη την επιστράτευση των εκτάσεων.

με την N να αντιμετωπίζεται ως συνάρτηση ανώτερης τάξης που σε κάθε διανυσματική έννοια $\doteq_{\mathbf{X}}$, αναθέτει τον αριθμό της, δηλαδή, συγκεκριμένο σημείο επί του επιπέδου, κατάλληλα συσχετισμένο με το **OA**.

Τα σημεία – φυσικοί αριθμοί γίνεται εύκολα να προσδιοριστούν, κάνοντας χρήση της τριμελούς σχέσης συμμετρίας δύο σημείων ως προς ευθεία. Ας θεωρήσουμε το τμήμα **OA**. Θέτοντας $\perp\mathbf{A}$ την κάθετο που τέμνει την **OA**+ στο **A**, τότε ως **SA** μπορούμε να θεωρήσουμε το σημείο επί της **O**+ που είναι συμμετρικό του **O** ως προς την $\perp$**A**, αν $\perp\mathbf{SA}$ η κάθετος που τέμνει την **O**+ στο **SA** τότε ως **SSA** γίνεται να θεωρήσουμε το σημείο επί της **O**+ που είναι συμμετρικό του **A** ως προς την $\perp\mathbf{SA}$, και ούτω καθεξής. Επί της γεωμετρικής βάσης παρέχεται κατάλληλη απειρία αντικειμένων[139] ώστε να προσδιοριστεί η αναδρομή:[140]

$$\begin{aligned}&S^0\emptyset = \mathbf{O}\\ &S^1\emptyset = \mathbf{A}\\ &S^n\emptyset = Refl(\perp S^{n-1}\emptyset, S^{n-2}\emptyset).\end{aligned}$$

όπου εδώ $\perp x$ η κάθετος στην **O**+ που διέρχεται από το x. Δεδομένου ευθύγραμμου τμήματος, ο αριθμός του αντίστοιχου διανύσματος θα είναι φυσικός αν και μόνο αν γίνεται να προσδιοριστεί βάσει αυτής. Μια σχέση προγόνου ορίζεται εύκολα, θέτοντας ότι για σημείο N επί της **OA**+, το K είναι άμεσος πρόγονος του N αν και μόνο αν επίσης βρίσκεται επί της **OA**+, και δεδομένου του ισόπλευρου τριγώνου **A**NX με βάση την **A**N, το ισόπλευρο τρίγωνο **O**KΥ με βάση την **O**K είναι τέτοιο ώστε **A**NX $\cong$ **O**KΥ.[141] Βάσει όλων αυτών, δεδομένου πχ σημείου $S^n\mathbf{A}$ επί της **O**+, αυτό θα ταυτίζεται με το N ($\doteq_{\mathbf{O}S^n\mathbf{A}}$). Γενικότερα, αν υποθέσουμε ότι ΑΓ ευθύγραμμο τμήμα, και ΑΒ τμήμα αυτού τέτοιο ώστε μια διαίρεση του πρώτου με το δεύτερο δεν αφήνει υπόλοιπο, ο αριθμός του ΑΒΓ θα είναι το σημείο N($\doteq_{\mathbf{O}\Gamma'}$)=$\Gamma'$ επί της **OA**+ που αντιστοιχεί στον λόγο ΑΒ:ΑΓ, και θα προκύπτει φυσικός.

---

[139] Για τον Frege, η όποια αποδοχή πρότασης ως αξιώματος μπορεί να συμβεί μόνο αν έχει διασφαλιστεί ότι αυτό είναι αληθές. Αξιώματα απείρου πρέπει λοιπόν σε κάθε περίπτωση να εδράζονται επί πεδίου αντικειμένων-γνώσης σε σχέση με το οποίο έχουμε γνωσιολογική πρόσβαση με τρόπο που επιτρέπει άμεση αναγνώριση της αλήθειας της σχετικής σκέψης.

[140] Υπάρχει εδώ μια ομοιότητα με την περίπτωση της εικόνας που παράγεται αν αντικείμενο τοποθετηθεί στην μέση μεταξύ δύο κατόπτρων όπου το ένα βρίσκεται απέναντι του άλλου.

[141] Όσον αφορά την έννοια του ισόπλευρου τριγώνου, μπορεί να δοθεί ο ορισμός: $equilateral(abc) \Leftrightarrow point(a) \wedge point(b) \wedge point(c) \wedge \exists l_1 \exists l_2 \exists l_3 (refl(a,l_1){=}b \wedge c{\in}l_1 \wedge refl(a,l_2) {=}c \wedge b{\in}l_2 \wedge refl(b,l_3){=}c \wedge a{\in}l_3 \wedge \exists x(point(x) \wedge intersection(x,l_1,l_2) \wedge intersection(x,l_1,l_3) \wedge intersection(x,l_2,l_3)))$.

Όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό πραγματικών Α, Β, αρκεί να θεωρήσουμε πχ το παραλληλόγραμμο με πλευρές Α, Γ, όπου Γ ίσου μήκους με Β, και στη συνέχεια το παραλληλόγραμμο με ίδιο εμβαδόν αλλά το τμήμα **OA** ως μία από τις πλευρές. Πολλαπλασιασμός μιγαδικών βάσει της γνωστής κατασκευής μέσω ομοιότητας τριγώνων. Το όποιο πλέγμα συντεταγμένων, και περιγραφή που προκύπτει βάσει αυτού, λογίζονται ως να προκύπτουν από γεωμετρικές πρώτες ύλες.

6. Συμπερασματα

Έγινε εδώ μια απόπειρα σκιαγράφησης της πορείας του Frege, από τους *Νόμους της Αριθμητικής*, και την ανάδυση του παραδόξου του Russell, έως την υιοθέτηση, εκ μέρους του, της άποψης ότι οι αριθμοί θεμελιώνονται στη γεωμετρία. Πορεία κατά την οποία μπορούμε να διακρίνουμε ως σταθερές συγκεκριμένες θεμελιώδεις θέσεις για τη γλώσσα, την επιστήμη, και τις πηγές-κατηγορίες της γνώσης. Θέσεις βάσει των οποίων αντιλαμβάνεται μάλιστα το τι συνιστά θεμελίωση και τι όχι, οπότε περιορίζεται αντίστοιχα το εύρος των προς διερεύνηση δυνατοτήτων. Η προσέγγισή του διαφέρει έντονα των σημερινών τάσεων, φέροντας τις επιδράσεις μιας κλασικής, μη-μοντελοθεωρητικής, ευκλείδειας αντιμετώπισης της αξιωματικής μεθόδου, ενώ μάλιστα διατηρεί, με κατάλληλα τροποποιημένο τρόπο, ορισμένες διακρίσεις της καντιανής φιλοσοφίας. Ιδιαιτερότητες ως προς τις οποίες δεν φαίνεται πρόθυμος να υποχωρήσει, οπότε καταλήγει να πορεύεται μόνος, και να επανεστιάζει στη γεωμετρία. Η συνολική ιχνηλάτησή του θα μπορούσε έτσι να ειδωθεί ως μια σύγχρονη εκδοχή της διαπίστωσης από τους πυθαγόρειους της ασυμμετρίας της διαγωνίου του τετραγώνου ως προς την πλευρά του. Τα συμπεράσματα που αντλεί ως μια επανάληψη της στάσης που τήρησαν τελικά οι αρχαίοι Έλληνες σε σχέση με τη θέση της γεωμετρίας εντός των μαθηματικών.[142] Ο Frege καταλήγει έτσι σε μια αντιμετώπιση των αριθμών ως γεωμετρικών λόγων.[143] Δέχεται ως βάση όλων των μαθηματικών την ευκλείδεια γεωμετρία, συνδυάζει αρχαία υλικά με νέα λογική και οδηγείται σε ένα είδος γεωμετρικοκεντρισμού, όπου το υπαρξιακό βάρος θεμελιώνεται συναρτήσει μιας, Καντιανού λίγο πολύ, τύπου γεωμετρικής εποπτείας. Ελπίζει ότι εκκινώντας από συγκεκριμένες γεωμετρικές αρχές, θεμελιώδεις νόμους των οποίων η αλήθεια προκύπτει άμεσα από αυτό που καλεί 'γεωμετρική πηγή της γνώσης', και διατυπώνοντας κατάλληλους ορισμούς, θα γίνεται να συναχθούν εντός της εννοιογραφίας οι αλήθειες των αριθμών. Εξάλλου, από πολύ νωρίς είχε εκφράσει αισιοδοξία όσον αφορά την εφαρμοσιμότητα της εννοιογραφίας στη γεωμετρία:

> Μου φαίνεται ακόμα πιο εύκολο να επεκταθεί το πεδίο αυτής της τυπικής γλώσσας με τρόπο ώστε να συμπεριλάβει τη γεωμετρία. Θα χρειαζόταν μόνο να προσθέσουμε κάποια επιπλέον σύμβολα για τις διαισθητικές σχέσεις

[142] Βλέπε πχ τις παρατηρήσεις του Αριστοτέλη σχετικά με την κατηγορία της ποσότητας (*Κατηγορίαι* 4b20-5a14). Επίσης, την αποτίμηση του Van Der Waerden, στο *Η αφύπνιση της επιστήμης*, 141.

[143] Θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι έχει έτσι σκιαγραφηθεί μια εικόνα περί μαθηματικών που, παρά τις ιδιαιτερότητές της, παραμένει επίκαιρη και άξια μελέτης ακόμη και σήμερα, εφόσον δείχνει ίσως τον δρόμο για μια θεώρηση που, έπειτα από κατάλληλες προσθήκες και τροποποιήσεις, θα καθιστά λιγότερο μυστηριώδη τα της εφαρμοσιμότητας και αποτελεσματικότητας της συγκεκριμένης επιστήμης.

> (intuitive relations) που εμφανίζονται εκεί. Με αυτόν τον τρόπο θα αποκτούσαμε ένα είδος analysis situs.[144]

με τις εξελίξεις όπως διαμορφώθηκαν να τον σπρώχνουν τελικά στην αντιμετώπιση των αριθμών και της μελέτης τους γενικότερα ως ένα κομμάτι αυτής της analysis situs, όπου αρχές της γεωμετρίας συνδυάζονται με τη δύναμη της εννοιογραφίας προκειμένου να συναχθούν οι σχετικές αλήθειες. Τελευταία του ελπίδα για επίτευξη του γνωσιολογικού ζητουμένου, μιας θεμελίωσης που δεν θα αλλάζει τους όρους του παιχνιδιού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Δ. Α. Αναπολιτανος (επιμ): *Στιγμές και Διάρκειες, 13 κείμενα φιλοσοφίας και ιστορίας των μαθηματικών και της λογικής*. Αθήνα, Νεφέλη, 2009.

[2] Δ. Α. Αναπολιτανος: Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Αθήνα, Νεφέλη, 2009.

[3] Γ. Ν. Μοσχοβακης: *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*. Αθήνα, Νεφέλη, 1993.

[4] Δ. Χριστοπουλου: *Τα διλήμματα του Paul Benacerraf: Μια Προβληματική της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Οκτώ. 2017.

[5] Δ. Χριστοπουλου & Στ. Ψυλλος: "Η έννοια του αριθμού και ο αριθμός της έννοιας: Μια ανάλυση των Grundlagen του Gottlob Frege". *Νόησις* 3 (2008), 79–114.

[6] Δ. Χριστοπουλου & Στ. Ψυλλος: *Νεολογικισμός: Προβλήματα και Προοπτικές*. *Νεύσις* 14 (2005), 152–173.

[7] P. Blanchette: "Frege's Reduction". *History and Philosophy of Logic* 15 (1) (1994), 85–103.

[8] P. Blanchette: "Frege and Hilbert on Consistency". *The Journal of Philosophy* 93 (7) (1996), 317–336.

[9] P. Blanchette: "Realism and Paradox". *Notre Dame Journal of Formal Logic* 41 (3) (2000).

[10] P. Blanchette: "Frege on Consistency and Conceptual Analysis". *Philosophia Mathematica* 15 (3) (2007), 321–346.

[11] P. Blanchette: *Frege's Conception of Logic*. Oxford University Press. 2012.

[12] P. Blanchette: "Frege on Caesar and Hume's Principle". Στο: *Origins and Varieties of Logicism*, επιμ. F. Boccuni & A. Sereni, Routledge, 2021, 27–54.

[13] F. Boccuni & A. Sereni (eds.): *Origins and Varieties of Logicism. On the Logico-Philosophical Foundations of Mathematics*. Routledge. 2021.

[14] L. E. J. Brouwer: *Collected Works, Vol. I, Philosophy and Foundations of Mathematics*, επιμ. A. Heyting. North-Holland Publishing Company, 1975.

[15] T. Burge: "Frege on Extensions of Concepts, from 1884 to 1903". *The Philosophical Review* 93 (1) (1984), 3–34.

[16] H. S. M. Coxeter: *Introduction to Geometry*. 2nd edition. John Wiley & Sons Inc., 1969.

[17] C. W. Dodge: *Euclidean Geometry and Transformations*. Dover Publications, Inc., 1972.

[18] M. Dummett: *Frege, Philosophy of Language*. 2nd edition, Duckworth, 1981.

[19] M. Dummett: *Frege, Philosophy of Mathematics*. Duckworth, 1991.

[20] P. A. Ebert & M. Rossberg: *Essays on Frege's Basic Laws of Arithmetic*, Oxford University Press, 2019.

[21] W. Ewald: *From Kant to Hilbert, A source Book in the Foundations of Mathematics*. Vols. I, II. Oxford University Press, 1996.

[22] G. Frege: *The Foundations of Arithmetic*, μτφρ. J. L. Austin. New York, Harper, 1953.

[144] Van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, 7.

[23] G. Frege: *Philosophical and Mathematical Correspondence*, επιμ. Gottfried Gabriel et. al., Blackwell, 1980.

[24] G. Frege: *Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*, εισαγωγή, μετάφραση, επιμέλεια Γ. Ρουσόπουλος. Αθήνα, Νεφέλη, 2009.

[25] G. Frege: *The Basic Laws of Arithmetic*, μετάφραση και επιμέλεια P. A. Ebert & M. Rossberg. Oxford University Press, 2016.

[26] G. Frege: *Posthumous Writings*, επιμέλεια H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach. Oxford, Blackwell, 1979.

[27] G. Frege: *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. Oxford, Blackwell, 1984.

[28] P. T. Geach: "Discussion Note: On Frege's Way Out". *Mind* 65 (259) (1956), 408–409.

[29] P. T. Geach & M. Black: *Translations from the Writings of Gottlob Frege*. Oxford, Blackwell, 1960.

[30] K. Gödel: *Collected Works, vols. I-III*. επιμ. S. Feferman et al. Oxford University Press, 1986.

[31] R. G. Heck: "The Development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik". *The Journal of Symbolic Logic* (58) (2) (1993), 579–601.

[32] R. G. Heck: "Grundgesetze der Arithmetik I §§29-32". *Notre Dame Journal of Formal Logic* 38 (3) (1997), 437–474.

[33] R. G. Heck: "Grundgesetze der Arithmetik I §10". *Philosophia Mathematica* 7 (3) (1999), 258–292.

[34] R. G. Heck: "Julius Caesar and Basic Law V". *Dialectica* 59 (2) (2005), 161–178.

[35] R. G. Heck: *Reading Frege's Grundgesetze*. Oxford University Press, 2012.

[36] I. Kant: *Critique of Pure Reason* επιμ. P. Guyer & A. W. Wood. Cambridge University Press, 1998.

[37] I. Kant: *Lectures on Logic*, επιμ. J. M. Young. Cambridge University Press, 1992.

[38] J. L. Kelley: *General Topology*. D. Van Nostrand Company, 1955.

[39] G. Landini: "The Ins and Outs of Frege's Way Out". *Philosophia Mathematica* (III) 14 (2006), 1–25.

[40] D. Macbeth: *Frege's Logic*. Harvard University Press, 2005.

[41] E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*. 5th edition, Chapman & Hall, 2010.

[42] P. S. Modenov & A. S. Parkhomenko: *Geometric Transformations, Vol. I, Euclidean and Affine Transformations*. London, Academic Press, 1965.

[43] J. D. Monk: *Introduction to Set Theory*. McGraw-Hill Book Company, 1969.

[44] A. P. Morse: *A Theory of Sets*. 2nd edition, Academic Press Inc., 1986.

[45] C. Parsons: "Mathematical Intuition". *Proceedings of the Aristotelian Society, New Series* 80 (1979-1980), 145–168.

[46] W. V. O. Quine: *Mathematical Logic*. Revised edition, Harvard University Press, 1981.

[47] W. V. O. Quine: "On Frege's way out". *Mind* 64 (254) (1955), 145–159.

[48] M. D. Resnik: "The Context Principle in Frege's Philosophy". *Philosophy and Phenomenological Research* 27 (3) (1967), 356–365.

[49] J. E. Rubin: *Set Theory for the Mathematician*. Holden-Day, 1967.

[50] M. Ruffino: "Extensions as Representative Objects in Frege's Logic". *Erkenntnis* 52 (2) (2000), 239–252.

[51] M. Ruffino: "Why Frege would not be a neo-Fregean". *Mind* 112 (445) (2003), 57–78.

[52] B. Russell: *Principles of Mathematics*. Routledge Classics, 2010.

[53] M. Schirn: "Concepts, Extensions, and Frege's Logicist Project". *Mind* 115 (460) (2006), 983–1006.

[54] S. Shapiro & A. Weir: "New V, ZF and Abstraction". *Philosophia Mathematica* 7 (3) (1999), 293-321.

[55] H. D. Sluga: "Frege's Alleged Realism". *Inquiry: An interdisciplinary Journal of Philosophy* 20 (1-4) (1997), 227–242.

[56] H. D. Sluga: *Gottlob Frege*. Routledge, 1980.

[57] B. Sobociński: "L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski". *Methodos* 1 (1949), 99–104, 220–228, 308–316; and 2 (1950), 237–257.

[58] B. L. Van Der Waerden: *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007.

[59] J. Van Heijenoort: *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. 3d edition, Harvard University Press, 1976.

[60] J. Weiner: "What's in a Numeral? Frege's Answer". *Mind* 116 (463) (2007), 677–716.

[61] J. Weiner: "Why does Frege care whether Julius Caesar is a Number? Section 10 of Basic Laws and the Context Principle". Στο: *Origins and Varieties of Logicism*, επιμ. F. Boccuni & A. Sereni, 2021.

[62] A. N. Whitehead & B. Russell: *Principia Mathematica*, Vols. I, II. 2nd edition, Cambridge University Press, 1963.

[63] C. Wright: *Frege's conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, 1983.