Ν Ε Υ Σ Ι Σ

ΕΞΑΜΗΝΙΑΙΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΟΜΟΣ 30 / ΤΕΥΧΟΣ 2 / ΙΟΥΛΙΟΣ 2024

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΦΩΤΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑ ΑΙΝΙΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΩΝ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΩΝ ΕΠΙΛΥΣΕΩΝ

ΓΙΑΝΝΗΣ ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ. Στην εργασία προτείνεται η χρήση των αναλογιών προκειμένου να εξηγηθούν οι τεχνικές που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος κατά τις επιλύσεις των εξισώσεων με δύο αγνώστους. Ταυτόχρονα, διατυπώνονται μια σειρά επιχειρήματα εναντίον της ερμηνείας των ίδιων τεχνικών μέσω της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας. Η ερμηνεία δια των αναλογιών είχε προταθεί για πρώτη φορά από τον Βυζαντινό Μάξιμο Πλανούδη στο σχόλιό του στο πρόβλημα Β.8 των *Αριθμητικών*. Τέλος, σε παράρτημα παρουσιάζονται επιστολές που έλαβε ο συγγραφέας από τους R. Rashed, I. G. Bashmakova, J. Høyrup, D. Fowler και S. Unguru, στις οποίες οι εν λόγω ιστορικοί διατυπώνουν τις απόψεις τους για την προτεινόμενη ερμηνεία.

ABSTRACT. In this paper it is proposed that the techniques employed by Diophantus is his solutions of the equations with two unknowns can be explained by means of the theory of proportions. At the same time, a number of arguments are advanced against interpreting the same techniques through modern algebraic geometry. The interpretation by means of proportions was proposed for the first time by Maximus Planudes in his commentary on problem II.8 of the *Arithmetica*. Finally, an appendix presents letters received by the author from R. Rashed, I. G. Bashmakova, J. Høyrup, D. Fowler and S. Unguru, in which these historians express their views on the proposed interpretation.

Τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου περιλαμβάνονται χωρίς αμφιβολία στα έργα εκείνα της αρχαιότητας που επηρέασαν σημαντικά την ιστορία των μαθηματικών στην περίοδο από τον ένατο ως τον δέκατο όγδοο αιώνα. Ως μέτρο της επίδρασης που άσκησαν θα μπορούσε κανείς να παραθέσει τη μακρά λίστα των μαθηματικών που ασχολήθηκαν με αυτό το

* Ο Γ. Χριστιανιδης είναι Ομότιμος Καθηγητής στο Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Το κείμενο αυτό αποτελεί ενημερωμένη εκδοχή μιας ομιλίας με τίτλο «Les équations $F(x,y) = 0$ dans les *Arithmétiques* et la méthode de Diophante» στο διεθνές συνέδριο «Histoire de la lecture des anciens en mathématiques», που διοργάνωσαν οι Karine Chemla, Jeanne Peiffer και Eberhard Knobloch στο Centre International des Rencontres Mathématiques (CIRM), Luminy (Μασσαλία, Γαλλία), 16–20 Οκτωβρίου 1995. Εκδοχές του κειμένου έχουν δημοσιευθεί στα περιοδικά *Νεύσις* 3 (1995), 109–132, με τίτλο «Οι ερμηνείες της μεθόδου του Διοφάντου», και *Historia Mathematica* 25 (1998), 22–28, με τίτλο «Une interprétation byzantine de Diophante».

έργο, είτε ως δάσκαλοι, μεταφραστές και σχολιαστές, είτε ως ερευνητές, οι οποίοι βρήκαν σε αυτό την πηγή έμπνευσης για τις δικές τους πρωτότυπες συνεισφορές στην ανάπτυξη των μαθηματικών.

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μια ανανέωση του ενδιαφέροντος για το έργο του Διόφαντου. Αυτή τη φορά, όμως, το ενδιαφέρον δεν προήλθε από τους μαθηματικούς αλλά από τους ιστορικούς των μαθηματικών. Οι αιτίες για αυτή την αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος είναι ποικίλες. Μία αιτία ήταν η ανακάλυψη, στα χρόνια γύρω στο 1970, τεσσάρων νέων βιβλίων των *Αριθμητικών*, σε αραβική μετάφραση, που θεωρούνταν ως τότε χαμένα. Αν και όχι χωρίς προηγούμενο στην ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, επρόκειτο για ένα γεγονός εξαιρετικής σημασίας διότι επανέφερε στην επικαιρότητα το ερώτημα για τη φύση και το εύρος των ερευνών του Αλεξανδρινού μαθηματικού (Rashed στο Διόφαντος 1984, 3, vi). Επιπλέον, ήταν οι έρευνες για να βρεθεί μια ενοποιητική, στο μέτρο του δυνατού, ερμηνεία των φαινομενικά ανόμοιων διαδικασιών που χρησιμοποιούσε ο μαθηματικός για να επιλύσει τα προβλήματα που συμπεριέλαβε στα *Αριθμητικά*. Στη διάρκεια των ετών 1960–70 διαπιστώθηκε ότι οι επιλυτικές διαδικασίες που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος μπορούν να υπαχθούν σε έναν περιορισμένο αριθμό γενικών μεθόδων που μας διδάσκει η σύγχρονη αλγεβρική γεωμετρία και πιο συγκεκριμένα η θεωρία των αριθμητικών ιδιοτήτων των αλγεβρικών καμπυλών και των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων διάστασης n. Αυτό το συμπέρασμα, που το οφείλουμε στην Isabella Grigoryevna Bashmakova (1921–2005),[1] προκάλεσε την εποχή εκείνη μεγάλη εντύπωση, σε σημείο ώστε να οδηγηθεί ο διάσημος μαθηματικός του Princeton André Weil (1906–1998) να δηλώσει ότι «η αλγεβρική γεωμετρία έχει τίτλους ευγενείας πολύ αρχαιότερους» από ό,τι πιστεύαμε (Weil 1981, 395), χωρίς να κρατήσει καμιά επιφύλαξη για το ενδεχόμενο οι ίδιες διαδικασίες να είναι δεκτικές και άλλων ερμηνειών, πέραν αυτής δια της αλγεβρικής γεωμετρίας, και παρά τις σημαντικές εργασίες του Paul Tannery (1843–1904) των ετών 1887 και 1888 (Tannery 1887· 1888). Η ίδια η Bashmakova, πιο συγκρατημένη στην εξαγωγή ιστορικών συμπερασμάτων, ήταν υποχρεωμένη παρόλα αυτά να υποστηρίξει την άποψη ότι ο Διόφαντος «είχε αντιληφθεί τις διασυνδέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις απροσδιόριστες εξισώσεις και στις αντίστοιχες αλγεβρικές καμπύλες» (στο Διόφαντος 1977, 341).[2] Την ιδέα της ερμηνείας των επιλύσεων του Διόφαντου μέσω της αλγεβρικής γεωμετρίας την υιοθέτησε αργότερα

[1] Ανακοινώθηκε για πρώτη φορά σε ένα άρθρο που δημοσιεύθηκε το 1966 στο ρωσσικό περιοδικό *Istoriko-matematicheskie issledovaniya*. Την ίδια χρονιά δημοσιεύθηκε, υπό τον τίτλο «Diophante et Fermat», γαλλική μετάφραση του άρθρου στο περιοδικό *Revue d'histoire des sciences* (τ. 19, 289–306). Βλ. επίσης το άρθρο της ίδιας «Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré», *Historia Mathematica* 8 (1981), 393–416.

[2] Στην κριτική που έγραψε το ίδιο έτος για αυτή την έκδοση ο Adolph P. Youschkevich (1906–1993) δεν συμμερίζεται αυτή την άποψη η οποία, όπως γράφει, «είναι υπερβολική και θα ήταν δύσκολο να υποστηριχθεί» (Youschkevich 1977, 341).

ο Roshdi Rashed και την ανέπτυξε περαιτέρω σε συνεργασία με τον Gilles Lachaud (1946–2018), για να φτάσει με την πέννα τους σε ένα πολύ πιο υψηλό επίπεδο αφαίρεσης και γενικότητας (Διόφαντος 1984, 3, lxxxv–cxxxvi, cxxxvii–ccvi· 4, v–cxxxiv). Επίσης, μία τρίτη αιτία, η οποία στα χρόνια γύρω στο 1990 έδωσε και αυτή προσωρινά ώθηση στο να αναπτυχθεί το ενδιαφέρον για τον Διόφαντο, προήλθε από έρευνες στα βαβυλωνιακά μαθηματικά, που σκοπό είχαν να εντοπίσουν στις επιλυτικές τεχνικές του Διόφαντου ίχνη πιθανής βαβυλωνιακής επίδρασης (Friberg 1991). Τέλος, την πιο ισχυρή ώθηση για το ενδιαφέρον για τον Διόφαντο έδωσε η πρόσφατη έρευνα σχετικά με την πρώιμη ιστορία της άλγεβρας και η διαπίστωση ότι το έργο του Διόφαντου ανήκει στην παράδοση της προ-μοντέρνας άλγεβρας (βλ., ενδεικτικά, τα Christianidis και Oaks 2023, και Χριστιανίδης και Oaks, υπό έκδοση).[3]

Το ερώτημα αν ο Διόφαντος έλυνε τα απροσδιόριστα προβλήματα με απλές δοκιμές ή με μια λίγο ως πολύ μεθοδική διαδικασία έχει απασχολήσει τους ιστορικούς των μαθηματικών ήδη από τον δέκατο όγδοο αιώνα. Ανάλογα με τις απαντήσεις που έχουν δώσει στο ερώτημα αυτό οι ιστορικοί μπορούν να καταταγούν σε δύο ριζικά αντίθετα μεταξύ τους στρατόπεδα. Από τη μία πλευρά είναι εκείνοι που υποστηρίζουν ότι στο έργο του Διόφαντου δεν υπάρχει κανένα ίχνος συστηματικής θεωρίας επίλυσης των απροσδιόριστων εξισώσεων. Σύμφωνα με τους ιστορικούς που υποστηρίζουν αυτή την άποψη ο Διόφαντος ήταν, ούτως ειπείν, ένας 'βιρτουόζος', εξαιρετικά επιδέξιος στη χρήση κομψών τεχνασμάτων, τα οποία, παρ' ότι του επέτρεπαν κάθε φορά να βρίσκει μια συγκεκριμένη λύση μιας απροσδιόριστης εξίσωσης, εν τούτοις δεν ήταν δεκτικά καμίας γενίκευσης. Μια τέτοια άποψη εκφυλίζει τον σκοπό των *Αριθμητικών*, όπως παρατήρησε ο Thomas L. Heath (1861–1940), από την παροχή μάθησης μεθόδων σε μια απλή εξαγωγή μιας πληθώρας αποτελεσμάτων (Heath 1910, 55). Από την άλλη βρίσκονται οι ιστορικοί εκείνοι οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι επιλυτικές διαδικασίες που ακολουθεί ο Διόφαντος είναι ενιαίες και έχουν γενικότητα, και επομένως, όπως σημειώνει ο Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann (1811–1881), «όλη η προσοχή του είναι στραμμένη στην εξήγηση της *μεθόδου* και για τον σκοπό αυτό τα αριθμητικά παραδείγματα χρησιμεύουν μόνο ως το μέσον».[4] Ας μου επιτραπεί στη συνέχεια να παραθέσω μερικές απόψεις από τους οπαδούς τόσο του ενός στρατοπέδου όσο και του άλλου.

---

[3] Είναι προφανές ότι η τελευταία αυτή πρόταση, η οποία προστέθηκε στην παρούσα εκδοχή του κειμένου, δεν ήταν δυνατόν να περιλαμβάνεται σε καμία από τις παλαιότερες εκδοχές του των ετών 1995 και 1998.

[4] Παρατίθεται από τον Heath, *ό.π.*

Η θέση σύμφωνα με την οποία οι υποθέσεις[5] που εισάγει ο Διόφαντος για να φτάσει κάθε φορά στην επίλυση μιας απροσδιόριστης εξίσωσης είναι απλώς ευφυή τεχνάσματα, είχε διατυπωθεί ήδη το 1758 από τον Jean-Étienne Montucla (1725–1799) στην περίφημη *Histoire des Mathématiques*: «Ο Διόφαντος – έγραφε ο Montucla – ξέρει να αποφεύγει αυτόν τον σκόπελο [του να καταλήγει σε άρρητες λύσεις] με μεγάλη επιδεξιότητα, μέσω μερικών ψευδο-εξισώσεων,[6] με ένα τέχνασμα που αξίζει να εξάρουμε» (Montucla 1966, I, 321). Στους αιώνες που ακολούθησαν πλήθος ιστορικών εξέφρασαν απόψεις παρόμοιες με αυτή του Montucla. Πολύ γνωστές είναι οι ρήσεις του Γερμανού μαθηματικού και ιστορικού των Μαθηματικών Hermann Hankel (1839–1873) ότι «είναι [...] δύσκολο για έναν σύγχρονο μαθηματικό ακόμα και αν έχει διαβάσει 100 διοφαντικές λύσεις να λύσει το 101ο πρόβλημα» και ότι «Ο Διόφαντος περισσότερο μαγεύει παρά προσφέρει απόλαυση»,[7] με τις οποίες ήθελε να δείξει με εμφαντικό τρόπο ότι από το έργο του Διόφαντου απουσιάζουν οι γενικές μέθοδοι. Έκτοτε οι φράσεις αυτές επαναλαμβάνονται συχνά από άλλους ιστορικούς (βλ., ενδεικτικά, Vogel 1971, 116· Scott 1975, 56). Λιγότερο εκφραστικός, μα εξίσου απόλυτος με τον Hankel, ο Florian Cajori (1859–1930) γράφει: «Αλλά ακόμα πιο μεγάλη ποικιλία από τα προβλήματα παρουσιάζουν οι λύσεις. Οι γενικές λύσεις είναι σχεδόν άγνωστες στον Διόφαντο»· και «ένα άλλο μεγάλο μειονέκτημα [των *Αριθμητικών*] είναι η απουσία γενικών μεθόδων. Οι νεότεροι μαθηματικοί, όπως ο L. Euler, ο J. Lagrange, ο K. F. Gauss, έπρεπε να αρχίσουν τη μελέτη της απροσδιόριστης ανάλυσης από την αρχή, χωρίς να έχουν καμία άμεση βοήθεια από τον Διόφαντο στη διατύπωση των μεθόδων» (Cajori 1919,

---

[5] Με τον όρο «υπόθεση» (position) πρέπει να νοούνται τα αλγεβρικά ονόματα που αποδίδει ο Διόφαντος στους ζητούμενους αριθμούς, δηλαδή στους μη ονοματισμένους αγνώστους του προβλήματος. Στην παρούσα εργασία οι «υποθέσεις», αναφέρονται συνήθως ως «αντικαταστάσεις» (εντός εισαγωγικών). Παρά το γεγονός ότι ο όρος «αντικατάσταση» είναι λανθασμένος – για τον ίδιο λόγο όπως λανθασμένο θα ήταν αν λέγαμε, φερ' ειπείν, ότι η λέξη «Πόλη» (Κωνσταντινούπολη) στη φράση «η Πόλη έχει σήμερα πληθυσμό μεγαλύτερο των δεκαπέντε εκατομμυρίων» *αντικαθιστά* τη λέξη «πόλη» της φράσης «μια πόλη με πληθυσμό μεγαλύτερο των δεκαπέντε εκατομμυρίων» – τον διατηρούμε διότι είναι συμβατός με την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία. Αντίθετα, οι όροι «όνομα» (name), «ονοματισμός», «ονοματοδοσία» (naming), που αποδίδουν ακριβώς την ενέργεια που κάνει ο Διόφαντος όταν εισάγει τους αλγεβρικούς όρους στις επιλύσεις του, είναι τελείως ασύμβατοι με την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία. Το θέμα συζητείται στο Επίμετρο, στο τέλος του παρόντος κειμένου.

[6] Λέγοντας «ψευδο-εξίσωση» ο Montucla εννοεί, για παράδειγμα, την «υπόθεση» $y = mx - a$, που κάνει ο Διόφαντος κατά την επίλυση του προβλήματος Β.8, το οποίο θα το γράφαμε με σύγχρονη γλώσσα ως $x^2 + y^2 = a^2$. Όπως είπαμε προηγουμένως, άλλοι ιστορικοί αναφέρονται σε αυτή την ενέργεια του Διόφαντου χρησιμοποιώντας τον όρο «αντικατάσταση», ενώ για τον ίδιο σκοπό βρίσκουμε επίσης να χρησιμοποιείται και ο όρος «μετασχηματισμός». Στο Επίμετρο εξηγούμε γιατί όλοι αυτοί οι όροι, με εξαίρεση τον όρο «υπόθεση» (position), είναι παραπλανητικοί και, επομένως, λανθασμένοι. Πρβλ. την προηγούμενη υποσημείωση.

[7] Παρατίθενται από τον Heath, *ό.π.*

62). Κατά τον Jacob Klein (1899–1978), επίσης, ο Διόφαντος αντιπροσωπεύει ένα πρώιμο στάδιο της άλγεβρας που συνίσταται, σε ό,τι αφορά στην απροσδιόριστη ανάλυση, «στο να θέτει προβλήματα που ανήκουν στην απροσδιόριστη ανάλυση [...], αλλά να μετατρέπει πάντοτε αυτά τα προβλήματα σε ορισμένες εξισώσεις μέσω αυθαίρετων παραδοχών που επιτρέπουν μια μονοσήμαντη (αν και όχι κατ' ανάγκην ακέραιη) λύση». Ο Klein, εν τούτοις, διατηρεί μια επιφύλαξη όσον αφορά στον «ανάστροφο υπολογισμό [...], ο οποίος καλείται γενικώς μέθοδος της "ψευδούς παραδοχής"», καθώς «και για τον κανόνα επίλυσης της λεγόμενης "διπλής ισότητας"», που έχουν, όπως γράφει, «γενικό χαρακτήρα» (Klein 1968, 133). Ο van der Waerden (1903–1996), επίσης, γράφει για τις μεθόδους του Διόφαντου: «Η μέθοδός του ποικίλει από τη μία περίπτωση στην άλλη. Στο έργο του δεν υπάρχει ίχνος συστηματικής θεωρίας των διοφαντικών εξισώσεων» (2000, 326). Παρόμοια είναι η άποψη που έχει εκφράσει ο Jean Itard (1902–1979): «Ο Διόφαντος, εξάλλου, αρκείται γενικώς σε μια μεμονωμένη λύση, η οποία συχνά λαμβάνεται με κομψά τεχνάσματα που δεν επιδέχονται γενίκευσης» (1957, 352). Τέλος, ο Alexander Jones γράφει στην *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* ότι «οι μέθοδοι που εφαρμόζει [ο Διόφαντος] είναι μάλλον τυχαίες» (1994, 56).

Η άποψη περί απουσίας μεθοδικής πραγμάτευσης των απροσδιόριστων προβλημάτων στο έργο του Διόφαντου είναι κυρίαρχη στις μελέτες των ιστορικών των μαθηματικών.[8] Έχουν υπάρξει εν τούτοις στο παρελθόν εργασίες στις οποίες οι συγγραφείς υποστήριζαν τη θέση ότι

[8] Αξίζει να υπογραμμίσουμε εδώ ότι αντίθετα με τους ιστορικούς, οι ίδιοι οι μαθηματικοί που εργάστηκαν πάνω στο έργο του Διόφαντου δεν συμμερίζονταν συνήθως την άποψη περί απουσίας γενικών μεθόδων. Έτσι, γράφοντας στα 1756–57, ο Leonhard Euler (1707–1783) σημείωνε: «Ο ίδιος ο Διόφαντος δίνει, είναι αλήθεια, μόνο τελείως συγκεκριμένες λύσεις σε όλα τα προβλήματα που πραγματεύεται και αρκείται γενικώς στο να υποδεικνύει αριθμητικές τιμές που του παρέχουν μια μεμονωμένη λύση. Αλλά δεν πρέπει να υποθέσουμε ότι η μέθοδός του περιοριζόταν σε αυτές τις ειδικές λύσεις [...]. Ωστόσο, οι πραγματικές μέθοδοι που χρησιμοποιεί για να επιλύσει οποιοδήποτε από τα προβλήματά του είναι εξίσου γενικές όπως αυτές που χρησιμοποιούμε σήμερα» (παρατίθεται από τον Heath, ό.π., σ. 56). Σύμφωνα με τον Euler, εκείνο που εμπόδιζε τον Διόφαντο να δίνει γενικές λύσεις ήταν η απουσία κατάλληλου συμβολισμού. Ίδια είναι επίσης η άποψη που διατυπώνει ο Joseph Louis Lagrange (1736–1813) σε μια εργασία του με τίτλο *Projet d'une nouvelle édition de l'Arithmétique de Diophante* που υπέβαλε στην Ακαδημία του Βερολίνου στις 21 Αυγούστου 1777: «Από τη μία, καθώς οι λύσεις των απροσδιόριστων προβλημάτων του Διόφαντου περικλείουν συγκεκριμένα τεχνάσματα που αξίζουν όλης της προσοχής των γεωμετρών και που είναι δύσκολο να συλλάβουμε μέσα στο ίδιο το έργο του Διόφαντου, εξαιτίας του ότι οι λύσεις του είναι καθαρά αριθμητικές, θα έπρεπε να αντικαταστήσουμε τα σχόλια του Bachet με μια σύντομη αλγεβρική ανάλυση κάθε προβλήματος, η οποία θα μας έκανε να αντιληφθούμε το πνεύμα των μεθόδων που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος και με την οποία θα μπορούσαμε να κρίνουμε τη γενικότητα των μεθόδων αυτών και τη χρησιμότητά τους σε άλλα προβλήματα» (στο Rashed 1988, 49). Εν τούτοις, η άποψη ότι από το έργο του Διόφαντου απουσιάζουν οι γενικές μέθοδοι είναι και αυτή καταγεγραμμένη σε κείμενα μαθηματικών. Για παράδειγμα ο Édouard Lucas (1842–1891) έγραφε στα τέλη του δέκατου

ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε σταθερούς κανόνες και ότι διαχειριζόταν τις επιλύσεις των προβλημάτων με έναν περιορισμένο αριθμό μεθόδων. Στους πιο επιφανείς εκπροσώπους αυτής της άποψης περιλαμβάνονται οι P. Tannery, Hieronymus Georg Zeuthen (1839–1920) και T. L. Heath. Σύμφωνα με τον Heath (1910, 67–94) ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε σταθερούς κανόνες για να επιλύσει μερικές περιπτώσεις της εξίσωσης δεύτερου βαθμού. Συγκεκριμένα, για να επιλύσει την εξίσωση $y^2 = a^2x^2 + bx + c$ έκανε χρήση της «αντικατάστασης» $y = ax - m$. Ομοίως, για να λύσει την εξίσωση $y^2 = ax^2 + bx + c^2$ χρησιμοποιούσε την «αντικατάσταση» $y = c - mx$. Τέλος, για τις εξισώσεις της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c$, υπό τον όρο ότι $D = \frac{1}{4}b^2 - ac = \Box$, η μέθοδός του συνίσταται στο να κάνει αρχικά την «αντικατάσταση» $y = mx$ και να επιλύσει στη συνέχεια την εξίσωση $D + cm^2 = y^2$ που θα προκύψει. Εκτός από αυτές τις τρεις περιπτώσεις ο Διόφαντος γνώριζε επίσης, σύμφωνα με τον Heath, πώς επιλύεται κάθε εξίσωση της μορφής $y^2 = ax^2 \pm c$, όταν είναι γνωστή μία αρχική λύση αυτής, καθώς και κάθε διπλή εξίσωση πρώτου βαθμού και μερικές περιπτώσεις διπλών εξισώσεων δεύτερου βαθμού. Όσο για τις εξισώσεις ανώτερου βαθμού, γράφει, «οι μέθοδοί του στερούνται γενικότητας» (Heath 1910, 96).

Λίγα χρόνια νωρίτερα ο Zeuthen απέδιδε γενικότητα στα τεχνάσματα του Διόφαντου και θεωρούσε ότι «βλέποντας τον Διόφαντο να πραγματεύεται μια σειρά συγκεκριμένων προβλημάτων [...] μπορούμε να συλλάβουμε τη γενική του μέθοδο» (Zeuthen 1902, 212). Έτσι, κατά τον Zeuthen, μέσω της «αντικατάστασης» $y = ax + z$ ο Διόφαντος μπορούσε να επιλύσει κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού της μορφής $y^2 = a^2x^2 + bx + c$, ενώ με την «αντικατάσταση» $y = zx + c$ μπορούσε να επιλύσει κάθε εξίσωση της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c^2$. Με την ίδια μέθοδο μπορούσε επίσης να επιλύσει την κυβική εξίσωση $y^3 = a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1$. Επιπλέον, σύμφωνα με τον ίδιο, ο Διόφαντος κατείχε επίσης γενικές μεθόδους για να επιλύει τις διπλές εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού.

Η πραγμάτευση των επιλυτικών διαδικασιών του Διόφαντου από τον Zeuthen και τον Heath που μόλις παρουσιάσαμε αφήνει ένα σημείο θολό. Οι δύο μελετητές, αν και δέχονται ότι ο Διόφαντος χρησιμοποιεί «αντικαταστάσεις», που του επιτρέπουν να κάνει τις κατάλληλες κάθε φορά απαλοιφές, προκειμένου να φτάσει τελικά σε μια ρητή θετική λύση, είναι πολύ φειδωλοί όσον αφορά στο ερώτημα πώς οδηγήθηκε ο Διόφαντος ώστε να κάνει κάθε φορά την κατάλληλη «αντικατάσταση». Ως προς αυτό το ερώτημα ο Zeuthen αρκείται απλώς στο να υποθέσει ότι «ο Διόφαντος έπρεπε να εκτελεί από στήθους και να διατυπώνει με λόγια αυτό που λέμε *απαλοιφές*» και «αυτό αποτελούσε μια συγκεκριμένη άσκηση που του έδινε τη δυνατότητα να επιλέγει τους αγνώστους του κατά τρόπο ώστε η απαλοιφή να ήταν η απλούστερη δυνατή» (Zeuthen

ένατου αιώνα ότι «ο Διόφαντος δεν εξέτασε το ζήτημα [της επίλυσης των απροσδιόριστων εξισώσεων] από γενικής απόψεως και δεν έδινε κατά κανόνα παρά την ελάχιστη λύση της προτεινόμενης εξίσωσης» (Lucas 1873, 8).

1902, 209–210). Ενδέχεται την ίδια ερμηνεία να υιοθετούσε και ο Heath. Φαίνεται, λοιπόν, ότι τόσο για τον Zeuthen όσο, πιθανώς, και για τον Heath,[9] η στρατηγική του Διόφαντου κάθε φορά που εισήγαγε τις «αντικαταστάσεις» της μορφής $y = px \pm q$, ήταν να αναγνωρίσει, αναλογιζόμενος τη μορφή της προς επίλυση εξίσωσης, πώς οι εν λόγω «αντικαταστάσεις» μπορούν να οδηγήσουν στις κατάλληλες απαλοιφές, ώστε να προκύψει μια γραμμική συνθήκη ως προς x και, τελικά, μια θετική ρητή τιμή για τον x.

Μια παρόμοια άποψη διατύπωσε στην εποχή μας ο Jacques Sesiano. Όπως γράφει, «η γενική εντύπωση που αφήνουν τα *Αριθμητικά* είναι ότι ο Διόφαντος, έχοντας στη διάθεσή του μία μόνο μέθοδο, μπορούσε να γεμίσει τις σελίδες οσωνδήποτε βιβλίων επινοώντας προβλήματα κατά βούληση – μια άλλη όψη της μαθηματικής του ιδιοφυίας» (Sesiano 1982, 84). Αυτή η «μία μόνο» μέθοδος ήταν, στην περίπτωση της εξίσωσης $Ax^2 + Bx + C = \Box$, και με τη συμπληρωματική συνθήκη ότι ο ένας από τους συντελεστές A και C είναι μηδέν ή τετράγωνος αριθμός, να θέτει «$\Box = h^2$ ή $\Box = h^2x^2$ αν $A = 0$ και $C = 0$, αντίστοιχα, και $\sqrt{\Box} = (\sqrt{A}x+h)^2$ ή $\Box = (hx + \sqrt{C})^2$ για A ή C τετράγωνο. Η παράμετρος h της γραμμικής εξίσωσης που προκύπτει επιλέγεται έτσι ώστε να δίνει θετική λύση» (Sesiano 1982, 7).

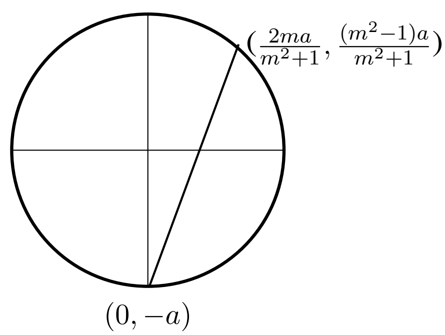
Ο Tannery, τέλος, στην εργασία των ετών 1887–8 έχει προτείνει δύο αρχές που θα μπορούσαν να αποτελούν τη βάση των «αντικαταστάσεων» του Διόφαντου. Οι αρχές αυτές συνοψίζονται στα εξής: Αν $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι μια αρχική λύση της εξίσωσης $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, τότε κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x_1 = a_1 y, x_2 = a_2 + z_1 y, \ldots, x_n = a_n + z_{n-1} y$. Αν αντίθετα οι τιμές $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ μηδενίζουν τους όρους υψηλότερου βαθμού, σε αυτή την περίπτωση κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x_1 = a_1 y, x_2 = a_2 y + z_1, \ldots, x_n = a_n y + z_{n-1}$. Σύμφωνα με τον Tannery, «τέτοιες είναι οι δύο θεμελιώδεις αρχές που διέπουν εκ περιτροπής και με τους πιο διαφορετικούς συνδυασμούς τις αντικαταστάσεις που πραγματοποιεί ο Διόφαντος και που εφαρμόζονται τόσο στην απαλοιφή για την αναγωγή των διαφόρων συνθηκών του προβλήματος σε μία μόνο εξίσωση, όσο και στην επίλυση αυτής της τελικής εξίσωσης» (Tannery 1887–8/1912, 379).

Στη δεκαετία του 1960 η Isabella Grigoryevna Bashmakova πρότεινε μια άλλη ερμηνεία των «αντικαταστάσεων» του Διόφαντου, η οποία δεν ανάγει τη στρατηγική που ακολουθούσε ο Διόφαντος όταν εισήγαγε τις

[9] Φαίνεται ότι ο Heath θα ήταν ως έναν βαθμό διατεθειμένος να δεχθεί μια ενοποιητική ερμηνεία των «αντικαταστάσεων» του Διόφαντου, αν υπήρχε όντως τέτοια ερμηνεία, διότι γράφει, ασκώντας κριτική στον Nesselmann, ο οποίος είχε συμπεριλάβει στις επιλυτικές μεθόδους του Διόφαντου «την έξυπνη υπόθεση των αγνώστων»: «Υποθέτοντας ότι έχει προταθεί ένας αριθμός ουσιωδώς διαφορετικών προβλημάτων, οι διαφορές καθιστούν απολύτως αναγκαία τη διαφορετική επιλογή αγνώστου στην κάθε περίπτωση. Τούτου δοθέντος, πώς θα ήταν δυνατόν να δοθεί ένας κανόνας για όλες τις περιπτώσεις;» (Heath 1910, 57).

«αντικαταστάσεις» σε έναν απλό στοχασμό για τη μορφή της προς επίλυση εξίσωσης και σε δοκιμές. Η ερμηνεία της Bashmakova συνοψίζεται στα παρακάτω. Οι «αντικαταστάσεις» του Διόφαντου επιδέχονται μιας απλής γεωμετρικής ερμηνείας. Οι εξισώσεις που τις εισάγουν ορίζουν ρητές ευθείες που περνούν στην κάθε περίπτωση από ένα γνωστό ρητό σημείο της αλγεβρικής καμπύλης που ορίζεται από την αρχική εξίσωση του προβλήματος. Κάθε μία από αυτές τις ευθείες τέμνει την καμπύλη σε ένα άλλο σημείο το οποίο είναι επίσης ρητό. Με αυτή τη μέθοδο βρίσκουμε, για τις καμπύλες δεύτερου βαθμού (τις καμπύλες γένους $g = 0$ στην ορολογία της αλγεβρικής γεωμετρίας), όλα τα ρητά σημεία αν ξέρουμε ένα αρχικό ρητό σημείο, ενώ για τις καμπύλες γένους $g = 1$ βρίσκουμε ένα νέο ρητό σημείο αν ξέρουμε ένα ή δύο αρχικά σημεία.

Ας πάρουμε ως παράδειγμα το πρόβλημα Β.8 για να ερμηνεύσουμε με αυτή τη μέθοδο τη διαδικασία που ακολουθεί ο Διόφαντος για να το επιλύσει. Το πρόβλημα ισοδυναμεί με την εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ $(a = 4)$. Αυτή η εξίσωση ορίζει έναν κύκλο με κέντρο το σημείο $(0, 0)$ και ακτίνα ίση με a. Η «αντικατάσταση» του Διόφαντου είναι $x = t$, $y = mt - a$ $(m = 2)$ και αντιπροσωπεύει γεωμετρικά μια ρητή ευθεία με συντελεστή διευθύνσεως m, η οποία περνά από το 'προφανές' γνωστό σημείο $(0, -a)$ του κύκλου, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε ένα δεύτερο σημείο, το οποίο είναι κατ' ανάγκην και αυτό ρητό και έχει συντεταγμένες $x = \frac{2ma}{m^2+1}$ και $y = \frac{(m^2-1)a}{m^2+1}$. Αν θέσουμε σε αυτούς τους τύπους τις τιμές $m = 2$ και $a = 4$, θα βρούμε τη λύση της αρχικής εξίσωσης $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{12}{5}$, δηλαδή τη λύση του Διόφαντου.

Η εξίσωση του προβλήματος Β.8 είναι της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c^2$, αλλά η ερμηνεία που περιγράψαμε καλύπτει επίσης τις εξισώσεις της μορφής $y^2 = a^2x^2 + bx + c$, δηλαδή τον δεύτερο τύπο των εξισώσεων για τις οποίες ο Διόφαντος κατείχε, σύμφωνα με τους Zeuthen και Heath, ενιαία μέθοδο επίλυσης. Η μόνη διαφορά σε αυτή την περίπτωση είναι ότι τώρα το γνωστό σημείο της καμπύλης είναι το λεγόμενο «επ' άπειρον σημείο» και επομένως η ευθεία $y = ax + m$ με την οποία τέμνουμε την καμπύλη για να βρούμε ένα ρητό σημείο αυτής περνά από το «επ' άπειρον σημείο» της καμπύλης.

Δεχόμενοι αυτή την ερμηνεία της επιλυτικής διαδικασίας του Διόφαντου μέσω της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε τις εξής δύο βασικές παραδοχές: Ότι ο Διόφαντος είχε διακρίνει τη σύνδεση μεταξύ μιας απροσδιόριστης εξίσωσης και της αντίστοιχης αλγεβρικής καμπύλης, αφενός, και ότι θεωρούσε, και επομένως πραγματευόταν, κάθε εξίσωση με δύο αγνώστους στη γενική της μορφή και όχι ως ειδική εκδοχή αυτής. Έτσι, η εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ του προβλήματος Β.8 είναι, για όσους υποστηρίζουν την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία, μια εξίσωση της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c$, της οποίας γνωρίζουμε ένα προφανές ρητό σημείο. Ομοίως, η εξίσωση $y^2 = 9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x$ του προβλήματος Δ.28 θεωρείται ότι έχει απλά τη μορφή $y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Το ότι μπορεί να γραφεί με την πολύ ειδική μορφή $y^2 = (3x^2 + 1)^2 - 4x^3 - 12x$ δεν θεωρείται ότι έχει οποιαδήποτε σημασία. Αν η πρώτη παραδοχή είναι δύσκολο να υποστηριχθεί, η δεύτερη, όπως θα δούμε, είναι παραπλανητική.

Αν και πέρασαν σχεδόν τριάντα χρόνια από τότε που προτάθηκε για πρώτη φορά η αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία των επιλυτικών τεχνικών του Διόφαντου,[10] και παρά ότι είναι ευφυέστατη και ιδιαίτερα γοητευτική, δεν υιοθετήθηκε από την πλειονότητα των ιστορικών των μαθηματικών. Ο λόγος για την απόρριψή της περιγράφεται με τρόπο λιτό και σαφή από τον Jöran Friberg: «Η προσέγγιση [μέσω της αλγεβρικής γεωμετρίας] είναι μαθηματικώς ενδιαφέρουσα αλλά τελείως ανιστορική και αναχρονιστική» (Friberg 1991, 2). Το γεγονός, επίσης, ότι παρά τον μεγάλο αριθμό των μαθηματικών που για πολλούς αιώνες, από την ύστερη αρχαιότητα και μετά, εργάστηκαν πάνω στο έργο του Διόφαντου, δεν υπάρχουν μαρτυρίες που να την επιβεβαιώνουν, δεν συνηγορεί υπέρ της βασιμότητας αυτής της ερμηνείας ως ιστορικά έγκυρης. Προκύπτει, λοιπόν, το συμπέρασμα ότι το πρόβλημα της ερμηνείας των διοφαντικών επιλύσεων, και πιο συγκεκριμένα των «αντικαταστάσεων» που περιλαμβάνονται σε αυτές, εξακολουθεί να είναι ανοικτό για νέες έρευνες.[11]

Η αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία, όμως, δεν είναι η μόνη ερμηνεία που μπορεί να εξηγήσει με τρόπο ενιαίο τις υποθέσεις που κάνει ο Διόφαντος κατά τη διαδικασία επίλυσης κάποιων από τα απροσδιόριστα προβλήματα που πραγματεύεται στα *Αριθμητικά*.[12] Στη συνέχεια

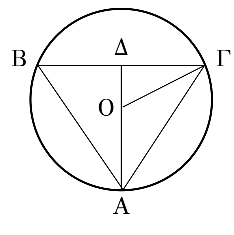
[10] Υπενθυμίζεται ότι το παρόν κείμενο παρουσιάστηκε στο διεθνές συμπόσιο «Histoire de la lecture des anciens en mathématiques», το 1995.

[11] Οι έρευνες αυτές έγιναν στις δεκαετίες που ακολούθησαν μετά την ανακοίνωση του παρόντος κειμένου το 1995, τόσο από τον συγγραφέα όσο και από τον ιστορικό των αραβικών μαθηματικών Jeffrey Oaks. Καρπός των ερευνών αυτών είναι το βιβλίο (Christianidis και Oaks 2023), το οποίο θα κυκλοφορήσει και σε ελληνική μετάφραση (βλ. Χριστιανίδης και Oaks υπό έκδοση).

[12] Ας σημειώσουμε στο σημείο αυτό και μία ελάχιστα πειστική ερμηνεία για την «αντικατάσταση» που εφαρμόζει ο Διόφαντος στο πρόβλημα Β.8, την οποία έχει προτείνει ο Friberg (1991). Η ερμηνεία βασίζεται σε μια επίλυση που απαντά σε ένα πρόβλημα μιας πινακίδας της παλαιοβαβυλωνιακής περιόδου (Bruins και Rutten 1961, 22–23). Το κείμενο συνοδεύεται από το παρακάτω διάγραμμα (χωρίς τα γράμματα):

θα αναπτύξουμε μια νέα ερμηνεία, η οποία βρίσκει εφαρμογή σε μια μεγάλη κλάση προβλημάτων των *Αριθμητικών*. Αυτή η κλάση περιλαμβάνει ιδιαίτερα όλες τις εξισώσεις στην πορεία επίλυσης των οποίων ο Διόφαντος εισάγει τις υποθέσεις χρησιμοποιώντας το ρήμα «πλάσσω».[13] Η νέα ερμηνεία έχει, όσον αφορά στη γενικότητα, την ίδια εμβέλεια με την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία. Σε σύγκριση με εκείνη, όμως, έχει μερικά πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα. Δεν παραβιάζει τις εννοιολογικές προϋποθέσεις που χαρακτηρίζουν τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, δεν χρησιμοποιεί έννοιες ξένες προς τον Διόφαντο και την εποχή του και επικυρώνεται από μαρτυρίες Βυζαντινών συγγραφέων.

Η οδός για αυτή την ερμηνεία, την οποία θα ονομάζουμε εφεξής «ερμηνεία δια των αναλογιών» (ο λόγος για αυτή την ονομασία θα γίνει σύντομα φανερός), είχε υποδειχθεί το 1932, σε μια διάλεξη του Πολωνού ιστορικού των επιστημών Aleksander Birkenmajer (1890–1967). Στη διάλεξή του ο Birkenmajer είχε θέσει το ερώτημα «αν ο Διόφαντος έλυνε τα απροσδιόριστα προβλήματα με μια μεθοδική ανάλυση ή όχι». Απορρίπτοντας τη θέση του Γερμανού μαθηματικού και ιστορικού των μαθηματικών Edmund Hoppe (1854–1928), διατύπωσε τη δική του θέση ως εξής: «Η προέλευσή τους [δηλ. των «αντικαταστάσεων» που εισάγει ο Διόφαντος] δεν είναι (υποστηρίζει [ο Hoppe]) παρά καθαρά διαισθητική, ήτοι εμπειρική. Δεν μπορώ να συμμεριστώ αυτή την άποψη, τουλάχιστον κατά τρόπο απόλυτο. Κατ' εμέ, αυτές οι σχεδόν αυθαίρετες υποθέσεις αποτελούν πολύτιμα κατάλοιπα αυτού που ο Διόφαντος σκόπιμα παρέλειψε, κατά το παράδειγμα του Ευκλείδη, δηλαδή τα τελευταία ίχνη της ανάλυσης» (Birkenmajer 1970, 582). Το κείμενο της διάλεξης του Birkenmajer δημοσιεύθηκε μόλις το 1970, σε μια συλλογή των εργασιών



Το ύψος διαιρείται από το κέντρο του κύκλου σε δύο μέρη, από τα οποία το ένα φέρει τον αριθμό $8^\circ\ 45'$ στο εξηκονταδικό σύστημα, ενώ η ακτίνα του κύκλου είναι $31^\circ\ 15'$. Στο τμήμα ΟΑ του ύψους αναγράφεται: «$\langle 40^\circ \rangle$ το συνολικό πλάτος», ενώ το τμήμα ΔΓ της βάσης φέρει την ένδειξη 30°, που σημαίνει ότι ολόκληρη η βάση ΒΓ είναι $60^\circ = 1$ SAG. Τέλος, στην πλευρά ΑΓ είναι σημειωμένος ο αριθμός 50°. Σύμφωνα με τον Friberg τα δεδομένα του προβλήματος είναι η ακτίνα του κύκλου, έστω a, και ο λόγος m του τριγώνου, δηλ. ο λόγος του ύψους h προς το μισό της βάσης, και ζητούνται η βάση και τα δύο μέρη του ύψους. Αν θέσουμε $\Delta\Gamma = x$ και $\mathrm{O}\Delta = y$ θα έχουμε $m = \frac{h}{x}$, οπότε $h = mx$ και επομένως $y = mx - a$, που είναι η «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

[13] Για τη χρήση του ρήματος «πλάσσω» αξίζει να σημειωθεί η ακόλουθη παρατήρηση του Tannery: «Ο όρος 'πλάσσειν' (ελληνικά στο κείμενο) φαίνεται [...] ότι ήταν ένας τεχνικός όρος της λογιστικής, όπως ήταν το πορίζειν στη γεωμετρία, προς το οποίο αντιστοιχεί πραγματικά». Ως παράδειγμα ο Tannery παραθέτει την έκφραση του Πάππου «πλάσσεται ἡ ἁρμονικὴ μεσότης» (Tannery 1882/1912, 278 υποσ.)

του, αλλά πέρασε, εξ όσων γνωρίζω, απαρατήρητο από την πλειονότητα των ιστορικών των μαθηματικών. Ο Birkenmajer εφαρμόζει την ερμηνεία του δια των αναλογιών μόνο στα προβλήματα 8 και 9 του δεύτερου βιβλίου των *Αριθμητικών*, ωστόσο μπορεί να εφαρμοστεί σε μια ολόκληρη κλάση εξισώσεων με δύο αγνώστους που πραγματεύεται ο Διόφαντος, όπως αναφέραμε.[14]

Ας εξετάσουμε πάλι την εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ του προβλήματος Β.8, ενός προβλήματος που δικαίως μπορεί να χαρακτηριστεί θεμελιώδες, λόγω της σημασίας του για την κατανόηση της μεθοδικής ανάλυσης με την οποία ενδέχεται να πραγματευόταν ο Διόφαντος έναν αριθμό των απροσδιόριστων προβλημάτων του. Ο Διόφαντος προτείνει για αυτό το πρόβλημα δύο λύσεις, που παραδίδονται από το σύνολο της χειρόγραφης παράδοσης των *Αριθμητικών* και, επομένως, η αυθεντικότητά τους όχι μόνο δεν αμφισβητείται,[15] αλλά επιπλέον επιβεβαιώνεται από το σχόλιο του Μάξιμου Πλανούδη (στο Διόφαντος 1893–95, II, 212–213). Επίσης, λαμβανομένου υπόψιν ότι το πρόβλημα Β.8 είναι το πρώτο απροσδιόριστο πρόβλημα των *Αριθμητικών* – τα προβλήματα του βιβλίου Α και τα πρώτα επτά προβλήματα του βιβλίου Β είναι προσδιορισμένα από την εκφώνησή τους ή μετατρέπονται σε προσδιορισμένα στην αρχή της επίλυσης – δεν είναι παράλογο να υποθέσουμε ότι η παράθεση αυτών των δύο λύσεων είχε ειδική σημασία για την αποσαφήνιση των τεχνικών που ενδέχεται να χρησιμοποιούσε ο Διόφαντος στην επίλυση των απροσδιόριστων προβλημάτων. Το κρίσιμο ερώτημα στο οποίο οφείλουμε να απαντήσουμε είναι το ακόλουθο: Η διαδικασία που ακολουθεί ο Διόφαντος στην καθεμία από τις δύο επιλύσεις του Β.8 είναι η ίδια ή στην κάθε επίλυση προχωρεί ακολουθώντας διαφορετική στρατηγική; Οι σύγχρονοι σχολιαστές φαίνεται ότι συμμερίζονται την πρώτη εκδοχή. Έτσι ο Heath, χωρίς κανέναν δισταγμό, έχει παραλείψει στην παράφρασή του των προβλημάτων των *Αριθμητικών* τη δεύτερη λύση· χωρίς αμφιβολία τη θεωρούσε ταυτόσημη με την πρώτη. Ο Paul Ver Eecke (1867–1959) από την πλευρά του, στη γαλλική μετάφραση των *Αριθμητικών*, αρκείται απλώς στο να παρατηρήσει ότι «αυτή η παραλλαγή της επίλυσης του προβλήματος δεν διαφέρει από την πρώτη επίλυση παρά στους όρους που χρησιμοποιεί για να δηλώσει τις ίδιες εκφράσεις» (στο Διόφαντος 1959, 55 υποσ.). Για τον Sesiano, επίσης, αυτή η δεύτερη λύση «είναι ουσιαστικά ταυτόσημη με την πρώτη» (Sesiano 1982, 54). Σύμφωνα με τους τρεις ιστορικούς, λοιπόν, η δεύτερη λύση δεν είναι στην πραγματικότητα διαφορετική από την πρώτη, παρά το γεγονός ότι ο Διόφαντος την εισάγει με τη λέξη «Ἄλλως». Έτσι, είμαστε υποχρεωμένοι, για να απαντήσουμε στο ερώτημα που θέσαμε προηγουμένως, να εξετάσουμε προσεκτικά τις δύο επιλύσεις που προτείνει ο Διόφαντος.

[14] Όλα τα παραδείγματα που θα συζητήσουμε στη συνέχεια προέρχονται από τα ελληνικά βιβλία των *Αριθμητικών*.

[15] Βλ. το κριτικό υπόμνημα για αυτό το πρόβλημα στην έκδοση του Tannery.

Στην πρώτη επίλυση ο Διόφαντος θεωρεί, σε σύγχρονη γλώσσα, την εκδοχή $x^2 + y^2 = 16$ του προβλήματος. Θέτει $x^2 = t^2$, στη συνέχεια μετατρέπει το πρόβλημα στο $y^2 = 16 - t^2$ (*) και το επιλύει θέτοντας $y = mt - 4$, μια έκφραση για την οποία υιοθετεί για το m την τιμή $m = 2$. Έτσι, αντικαθιστώντας την έκφραση $4t^2 + 16 - 16t$ αντί του y^2 στην (*) βρίσκει $5t^2 = 16t$, από όπου προκύπτει ότι $t = \frac{16}{5}$, οπότε προκύπτει η λύση $x^2 = \frac{256}{25}$ και $y^2 = \frac{144}{25}$. Στη δεύτερη επίλυση ο Διόφαντος θεωρεί και πάλι το πρόβλημα $x^2 + y^2 = 16$, αλλά αυτή τη φορά θέτει συγχρόνως $x = t$ και $y = mt - 4$ ($m = 2$). Άρα $x^2 = t^2$, $y^2 = 4t^2 + 16 - 16t$ και η εξίσωση που καταστρώνεται είναι η $5t^2 + 16 - 16t = 16$, από την οποία προκύπτει πάλι ότι $t = \frac{16}{5}$. Άρα $x^2 = \frac{256}{25}$ και $y^2 = \frac{144}{25}$.

Είναι φανερό ότι στη δεύτερη επίλυση ο Διόφαντος εργάζεται με τρόπο άμεσο. Αναγνωρίζει ευθύς εξαρχής ότι αν θέσει $x = t$ και $y = mt - 4$ ο σταθερός όρος της εξίσωσης που θα προκύψει απαλείφεται και επομένως, διαιρώντας με t, η εξίσωση θα γίνει γραμμική ως προς t. Έτσι εργάζεται και στο πρόβλημα Β.19 για να λύσει τη σχέση $y^2 = t^2 + 8t + 4$, διότι γράφει: «Σχηματίζω τον τετράγωνο από (πλευράς) $\langle 1 \rangle$ Αριθμού, προκειμένου να έχω τη δύναμη, και τόσων μονάδων επιπλέον, ώστε τα άλλα είδη που σχηματίζονται στον τετράγωνο – των Αριθμών και των μονάδων – να μην υπερβαίνουν κατά το πλήθος τους το ένα τους 8 Αριθμούς και το άλλο τις 4 μονάδες, αλλά το ένα να υπολείπεται και το άλλο να πλεονάζει». Θέτει, λοιπόν, $y = t + m$ ($m = 3$) για να απαλείψει, αυτή τη φορά, τον δευτεροβάθμιο όρο από τα δύο μέλη, προκειμένου τελικά να καταλήξει σε μια γραμμική εξίσωση ως προς t. Προκύπτει, επομένως, το συμπέρασμα ότι εισάγοντας τις «αντικαταστάσεις» $y = mt \pm n$ ο Διόφαντος ακολουθεί συχνά μια στρατηγική η οποία συνίσταται στο να αναγνωρίσει, αναλογιζόμενος τη μορφή της προς επίλυση σχέσης, πώς αυτές οι «αντικαταστάσεις» μπορούν να οδηγήσουν στις κατάλληλες απαλοιφές προκειμένου να προκύψει μια γραμμική εξίσωση ως προς t και τελικά μια θετική ρητή τιμή του t. Η δεύτερη λύση του προβλήματος Β.8 εκφράζει αυτήν ακριβώς τη στρατηγική. Αλλά, ακολουθεί ο Διόφαντος την ίδια στρατηγική και στην πρώτη λύση; Κάτι τέτοιο μας φαίνεται όχι πολύ πιθανό, καθώς σε αυτή την περίπτωση οι δύο επιλύσεις θα ήταν ταυτόσημες, οπότε η ένδειξη «Ἄλλως» για να δηλώσει τη δεύτερη επίλυση δεν θα είχε κανένα νόημα. Πιο πιθανό φαίνεται ότι στην πρώτη λύση ο Διόφαντος βρήκε την αντικατάσταση $y = mt - 4$ μετά από κάποιου είδους ανάλυση της συνθήκης του προβλήματος. Ποια, όμως, θα μπορούσε να είναι αυτή η ανάλυση, για την οποία άλλωστε το διοφαντικό κείμενο δεν κάνει καμία νύξη; Η «αντικατάσταση» $y = mt - 4$, λοιπόν, μπορεί εύκολα να εξηγηθεί αν γράψουμε τη σχέση $y^2 = 16 - t^2$ με μορφή αναλογίας. Πράγματι, η σχέση γράφεται διαδοχικά:

(1) $16 - y^2 = t^2,$

(2) $(4 + y) \cdot (4 - y) = t^2,$

(3) $(4 + y) : t = t : (4 - y).$

Οι αριθμοί y, t, 4 είναι θετικοί ρητοί, επομένως το ίδιο ισχύει και για την αριθμητική έκφραση του λόγου $(4 + y) : t$, η οποία στην ορολογία της εποχής λεγόταν «πηλικότης». Μπορούμε λοιπόν να αποδώσουμε στην «πηλικότητα» του λόγου μια οποιαδήποτε αριθμητική τιμή m (ο Διόφαντος επιλέγει την τιμή $m = 2$), οπότε θα έχουμε $(4 + y) : t = m$, από όπου $y = mt - 4$, δηλαδή η υπόθεση («αντικατάσταση») του Διόφαντου.

Η ερμηνεία που μόλις προτείναμε για τη διαδικασία που ενδέχεται να ακολούθησε ο Διόφαντος στην πρώτη λύση του προβλήματος Β.8 για να βρει την «αντικατάσταση» $y = 2t - 4$ ενισχύεται να συνυπολογίσουμε τα παρακάτω.

(1) Κατ' αρχάς αυτήν ακριβώς τη διαδικασία αποδίδει στην εκτενή εξήγησή του τού προβλήματος Β.8 ο Βυζαντινός σχολιαστής Μάξιμος Πλανούδης, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Επί του παρόντος αρκούμαστε να σημειώσουμε ότι η εξήγηση του Πλανούδη καλύπτει επτά ολόκληρες σελίδες της έκδοσης Tannery, εκ των οποίων περισσότερες από τρεις αφορούν στην εξήγηση της κρίσιμης φράσης «Σχηματίζω τον τετράγωνο από οσουσδήποτε Αριθμούς με έλλειψη τόσων μονάδων όσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων», με την οποία ο Διόφαντος περιγράφει την «αντικατάσταση».

(2) Από την άλλη, υπάρχει μέσα στα *Αριθμητικά* ένα πρόβλημα στο οποίο μια σχέση της μορφής $y = mt + a$, που είναι η πιο συνηθισμένη μορφή των «αντικαταστάσεων» που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος, πηγάζει σαφώς από μια ισότητα της μορφής $(y - a) : t = m$. Πρόκειται για το πρόβλημα Α.3, η εκφώνηση του οποίου είναι η εξής: «Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος αριθμός σε δύο αριθμούς με λόγο και δεδομένη διαφορά». Οι νεότεροι μεταφραστές έχουν αντικαταστήσει αυτή την κάπως δυσνόητη διατύπωση με άλλες πιο σαφείς, όπως για παράδειγμα, «Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος αριθμός σε δύο αριθμούς οι οποίοι, παρά μια δεδομένη διαφορά, να είναι σε λόγο» (Ver Eecke στο Διόφαντος 1959, 10) ή «Να διαιρεθεί ένας δεδομένος αριθμός σε δύο αριθμούς έτσι ώστε ο ένας να είναι ένας δεδομένος λόγος του άλλου συν μια δεδομένη διαφορά» (Heath 1910, 132). Ο Heath σχολιάζει αυτή τη φράση ως εξής: «Το νόημα της φράσης, μολονότι δεν είναι τόσο σαφές, είναι το ίδιο με την έκφραση "δοθέντι μείζον ἢ ἐν λόγῳ" του Ευκλείδη. Σύμφωνα με τον ορισμό του Ευκλείδη ένα μέγεθος είναι "κατά (ορισμένο) λόγο μεγαλύτερο ενός μεγέθους κατά μια (επιπλέον) δεδομένη ποσότητα" όταν το υπόλοιπο του πρώτου μεγέθους, μετά την αφαίρεση της δεδομένης ποσότητας, έχει προς το δεύτερο μέγεθος τον συγκεκριμένο λόγο. Αυτό σημαίνει ότι, αν x και y είναι τα μεγέθη, d είναι η δεδομένη ποσότητα, και k ο λόγος, $x - d = ky$ ή $x = ky + d$» (Heath 1910, 132 υποσ.). Πράγματι, οι δύο εκφράσεις του Ευκλείδη, «δοθέντι μείζον ἢ ἐν

λόγῳ» και «δοθέντι ἔλασσον ἢ ἐν λόγῳ» (Ευκλείδης 1896, 4), αντιστοιχούν στις δύο ισότητες $(y-a):t=m$ και $(y+a):t=m$, και κατά συνέπεια στις $y=mt\pm a$. Είναι εύλογο, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι ο Διόφαντος εξάγει σε μερικές περιπτώσεις τις «αντικαταστάσεις» της μορφής $y=mt\pm a$ αποδίδοντας στην «πηλικότητα» ενός λόγου της μορφής $(y\pm a):t$ μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή m.

(3) Δεν είναι άνευ σημασίας, τέλος, να προσθέσουμε ότι ο Διόφαντος πραγματεύεται συχνά στα *Αριθμητικά* αναλογίες και λόγους, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

α. Σε μερικά προβλήματα, όπως τα Δ.21 και Ε.1–2, εμφανίζεται ήδη από την εκφώνηση ο όρος «ἀναλογία» ή «ἀνάλογον». Σε πολλά άλλα προβλήματα οι εκφωνήσεις περιέχουν την έννοια του «λόγου» (Α.7–8, Α.10–12, Β.19 κ.λπ.).

β. Υπάρχει στα *Αριθμητικά* ένας αριθμός προβλημάτων στην πορεία επίλυσης των οποίων ο Διόφαντος εφαρμόζει διάφορες ιδιότητες των αναλογιών. Έτσι, στο πρόβλημα Δ.21 διατυπώνει την ιδιότητα της γεωμετρικής μεσότητας: «Αλλά αν τρεις αριθμοί είναι σε αναλογία, το γινόμενο των άκρων είναι ίσο προς τον τετράγωνο του μέσου». Στο επόμενο πρόβλημα (Δ.22) χρησιμοποιεί την ιδιότητα της εναλλαγής των μέσων όρων στην αναλογία $t^2:4t=2t:9$, για να τη γράψει $t^2:2t=4t:9$. Στο πρόβλημα Δ.32 γράφει την αναλογία $(t+1):(t-1)=4:1$, με μορφή εξίσωσης, $4t-4=t+1$. Στο πρόβλημα Δ.39 από τη σχέση $(6t+12):(t^2-3)<2:1$ εξάγει τη σχέση $(6t+12)\cdot 1<2\cdot(t^2-3)$, και ομοίως, στο πρόβλημα Ε.10, από τη διπλή ανισότητα $\frac{17}{12}<\frac{6t}{t^2+1}<\frac{19}{12}$ εξάγει τις δύο ανισότητες $6t\cdot 12>(t^2+1)\cdot 17$ και $6t\cdot 12<19\cdot(t^2+1)$.

γ. Υπάρχουν, τέλος, στα *Αριθμητικά* μερικά προβλήματα στα οποία είναι εμφανής μια τάση του Διόφαντου να ανατρέχει στη βοήθεια των αναλογιών όταν συμβαίνει να συναντά μια εξίσωση που δεν έχει ρητή λύση. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι το Ε.29: «Να βρεθούν τρεις τετράγωνοι ώστε ο (αριθμός) που απαρτίζεται από τους τετραγώνους τους να σχηματίζει τετράγωνο». Ο Διόφαντος θέτει τους τρεις τετραγώνους να είναι οι t^2, 4 και 9, οπότε πρέπει $t^4+97=\square$· δέχεται για τη ρίζα του τετραγώνου την έκφραση t^2-10, οπότε ανάγεται στην εξίσωση $20t^2=3$, η οποία δεν έχει ρητή λύση. Επιστρέφει, τότε, στις αρχικές υποθέσεις που έκανε για τους τρεις τετραγώνους και αναδιατυπώνει την εξίσωση στην οποία σκόνταψε, αλλά τώρα γράφοντάς τη σαν να ήταν αναλογία. Γράφει: «Και αν ο καθένας ήταν τετράγωνος το ζητούμενο θα είχε ικανοποιηθεί. Ανάγεται, λοιπόν, στο να βρεθούν δύο τετράγωνοι και ένας ορισμένος αριθμός ⟨ώστε⟩ ο τετράγωνος αυτού, αν ελαττωθεί κατά τους τετραγώνους από τους ζητούμενους (τετραγώνους), να σχηματίζει κάποιον ⟨αριθμό⟩ ο οποίος να έχει προς το διπλάσιο του αρχικού αριθμού τον λόγο ενός τετράγωνου αριθμού προς έναν τετράγωνο αριθμό». Σε σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα, αν θέσουμε τους τρεις τετραγώνους t^2, a^2, b^2 και τη ρίζα του τετραγώνου που ισούται προς το άθροισμα των τετραγώνων τους $t^2 - u$, θα προκύψει η εξίσωση $2u \cdot t^2 = u^2 - (a^4 + b^4)$. Είναι φανερό ότι ο Διόφαντος αντιλαμβάνεται αυτή την εξίσωση κατά τον ίδιο τρόπο σαν την αναλογία $[u^2 - (a^4 + b^4)] : 2u = m^2 : n^2$.

Με αυτές τις σκέψεις ας επανέλθουμε στο πρόβλημα Β.8. Από την ανάλυση που προηγήθηκε συνάγεται ότι ο μετασχηματισμός της σχέσης $y^2 = 16 - t^2$ στην αναλογία $(4 + y) : t = t : (4 - y)$ δεν είναι ασύμβατος με την πρακτική του Διόφαντου. Απομένει ωστόσο ένα τελευταίο ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί. Η ερμηνεία της μεθόδου του Διόφαντου που προτείναμε αναπτύσσεται σε δύο φάσεις: η πρώτη φάση είναι η παραγοντοποίηση και η δεύτερη φάση είναι αναδιατύπωση με μορφή αναλογίας, ή, έστω, ο σχηματισμός του ενός από τους δύο λόγους της αναλογίας. Αλλά αυτή η δεύτερη φάση δεν είναι πρακτικά περιττή; Δεν θα μπορούσε ο Διόφαντος να βρει την «αντικατάσταση» $y = mt - 4$ απευθείας από την παραγοντοποίηση, δηλαδή αμέσως μετά τη γραφή της σχέσης με τη μορφή $t^2 = (4 + y) \cdot (4 - y)$; Πράγματι, ο Διόφαντος θα μπορούσε να παρατηρήσει ότι, σε αυτή τη σχέση, καθώς το γινόμενο των δύο αριθμών $4 - y$ και $4 + y$ ισούται προς t^2, θα μπορούσε να θέσει τον μεγαλύτερο αριθμό $4 + y = mt$ (οπότε $y = mt - 4$) και, συγχρόνως, τον μικρότερο αριθμό $4 - y = \frac{1}{m}t$, και να αξιοποιήσει στη συνέχεια τις πληροφορίες που περιέχονται στις δύο εξισώσεις για να βρει

$4 = \frac{1}{2}(mt + \frac{1}{m}t)$, από όπου συνάγεται η τιμή του t, και

$y = \frac{1}{2}(mt - \frac{1}{m}t)$.

Πράγματι, έτσι εργάζεται λίγο μετά, στο πρόβλημα Β.11, όπου πραγματεύεται για πρώτη φορά τη διπλή ισότητα. Στο πρόβλημα Β.8, πάντως, δεν ακολουθεί αυτή τη διαδικασία.

Η ερμηνεία που προτείναμε μπορεί να εφαρμοστεί για να εξηγήσει τις «αντικαταστάσεις» που κάνει ο Διόφαντος σε μια ευρεία κλάση εξισώσεων δεύτερου βαθμού που πραγματεύεται στα *Αριθμητικά*, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια.

(1) Στις εξισώσεις της μορφής $y^2 = a^2t^2 + bt + c$, ο Διόφαντος εφαρμόζει την «αντικατάσταση» $y = at + m$, η οποία μπορεί εύκολα να εξηγηθεί αν γράψουμε την εξίσωση ως αναλογία, $(y - at) : 1 = (bt + c) : (y + at)$. Αν θεωρήσουμε τον πρώτο λόγο και θέσουμε $y - at = m$, θα έχουμε $y = at + m$.

(2) Στις εξισώσεις της μορφής $y^2 = at^2 + bt + c^2$, ο Διόφαντος εφαρμόζει την «αντικατάσταση» $y = mt + c$. Αν γράψουμε την εξίσωση ως $(y - c) : t = (at + b) : (y + c)$ και θέσουμε $y - c = mt$, θα έχουμε την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.
(3) Στην εξίσωση $x^2+y^2 = a^2+b^2$ $(a^2+b^2 = 13)$ του προβλήματος B.9, ο Διόφαντος θέτει $x = t + a, y = mt - b$. Πράγματι, η εξίσωση γράφεται διαδοχικά, $x^2 - a^2 = b^2 - y^2, (x - a)(x + a) = (b - y)(b + y)$, από την οποία προκύπτει η αναλογία $(b + y) : (x - a) = (x + a) : (b - y)$. Αρκεί, τώρα, να θέσουμε τον πρώτο λόγο ίσο προς m, δηλαδή $(b + y) : (x - a) = m$, οπότε $y = m(x - a) - b$, και στη συνέχεια να θέσουμε $x - a = t$, για να βρούμε $x = t + a$ και $y = mt - b$, όπως ο Διόφαντος.
(4) Στην εξίσωση της μορφής $y^2 = ax^2 + b$, με τη συνθήκη $a + b = \square = k^2$, ο Διόφαντος θέτει $x = t + 1$ και $y = mt - k$. Αυτές οι «αντικαταστάσεις» εξηγούνται εύκολα αν γράψουμε την εξίσωση ως αναλογία και θέσουμε $k^2 - a$ αντί του b. Συγκεκριμένα, η εξίσωση γίνεται $y^2 = ax^2 + k^2 - a$, και στη συνέχεια $(y - k)(y + k) = a(x - 1)(x + 1)$, οπότε προκύπτει η αναλογία $(y+k) : (x-1) = a(x + 1) : (y - k)$. Αρκεί, τώρα, να θέσουμε τον πρώτο λόγο ίσο προς m, δηλαδή $(y + k) : (x - 1) = m$, οπότε $y = m(x - 1) - k$, και να θέσουμε στη συνέχεια $x - 1 = t$, για να έχουμε $x = t + 1$ και $y = mt - k$. Ο Διόφαντος επιλύει αυτή την εξίσωση στο λήμμα που προηγείται του προβλήματος ΣΤ.12.
(5) Στις εξισώσεις της μορφής $y^2 = at^2 + b$, ο Διόφαντος θέτει $y = mt$, μια «αντικατάσταση» που εξηγείται εύκολα αν γράψουμε την εξίσωση με τη μορφή $y : t = (at + b) : y$.

Εφαρμόζοντας την ίδια τεχνική μπορούμε να εξηγήσουμε επίσης τις «αντικαταστάσεις» που κάνει ο Διόφαντος σε εξισώσεις με δύο αγνώστους, βαθμού ανώτερου του δεύτερου. Συγκεκριμένα, μπορεί να εφαρμοστεί:

(6) Στις εξισώσεις της μορφής $y^2 = at^3 + bt^2 + ct + d$. Στα *Αριθμητικά* περιέχεται μόνο μία τέτοια εξίσωση, στο πρόβλημα ΣΤ.18, η οποία όμως έχει την ειδική μορφή $y^2 = at^3 + bt^2 + ct + d^2$. Ο Διόφαντος θέτει $y = mt + d$ και επιλέγει την τιμή του m κατά τρόπο ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του t στην εξίσωση που θα προκύψει $(m = \frac{c}{2d})$. Αν γράψουμε την εξίσωση ως αναλογία θα γίνει $(y - d) : t = (at^2 + bt + c) : (y + d)$, οπότε αρκεί να θέσουμε $y - d = mt$ για να βρούμε την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.
(7) Στις εξισώσεις της μορφής $y^3 = at^3 + bt^2 + ct + d$. Στα *Αριθμητικά* περιέχεται μόνο η ειδική μορφή $y^3 = a^3t^3 + bt^2 + ct + d^3$ αυτής της εξίσωσης, η οποία εμφανίζεται στα προβλήματα Δ.26 και Δ.27. Ο Διόφαντος θέτει $y = mx + d$ και επιλέγει την τιμή του m με τρόπο ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του t^3 στην εξίσωση που προκύπτει $(m = a)$. Αν γράψουμε την εξίσωση με μορφή

αναλογίας, θα έχουμε $(y-d):t=(a^3t^2+bt+c):(y^2+dy+d^2)$. Αν θέσουμε $y-d=mt$, θα έχουμε αμέσως την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

(8) Στην εξίσωση $t(a-\ t)=y^3-y$, η οποία εμφανίζεται στο πρόβλημα Δ.24, ο Διόφαντος θέτει $y=mt-1$ και επιλέγει την τιμή του m κατά τρόπο ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του t στην εξίσωση που προκύπτει ($m=\frac{a}{2}$). Πράγματι, η εξίσωση γράφεται $(y+1):t=(a-t):y(y-1)$. Αν θέσουμε $y+1=mt$ θα έχουμε την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

(9) Στην εξίσωση $y^2=a^2t^4+2abt^2+b^2-ct^3-dt$, η οποία εμφανίζεται στο πρόβλημα Δ.28, ο Διόφαντος θέτει $y=at^2+b-mt$ και επιλέγει την τιμή του m ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του t στην εξίσωση που προκύπτει ($m=\frac{d}{2b}$). Η εν λόγω εξίσωση είναι τέταρτου βαθμού αλλά πολύ ειδικής μορφής, αφού γράφεται ως $y^2=(at^2+b)^2-ct^3-dt$ και, ως αναλογία, $(at^2+b-y):t=(ct^2+d):(at^2+b+y)$. Αν θέσουμε $at^2+b-y=mt$, θα έχουμε αμέσως την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

(10) Στην εξίσωση $y^2=t^6-at^3+bt+c^2$, η οποία εμφανίζεται στο πρόβλημα Δ.18, ο Διόφαντος θέτει $y=t^3+m$, και επιλέγει την τιμή του m έτσι ώστε να μηδενίζεται ο σταθερός όρος στην εξίσωση που προκύπτει ($m=c$). Αν γράψουμε την εξίσωση με μορφή αναλογίας θα έχουμε $(y-t^3):1=(c^2-at^3+bt):(y+t^3)$. Αρκεί τώρα να θέσουμε $y-t^3=m$ για να έχουμε την «αντικατάσταση» του Διόφαντου.

Από την ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι «αντικαταστάσεις» που κάνει ο Διόφαντος κατά την επίλυση των απροσδιόριστων εξισώσεων με δύο αγνώστους που εμφανίζονται στα *Αριθμητικά*, μπορούν να ερμηνευθούν χωρίς να χρειάζεται να προσφύγουμε στη σύγχρονη θεωρία των αριθμητικών ιδιοτήτων των αλγεβρικών καμπυλών. Αρκούν μόνο:

1) Η γνώση ορισμένων αριθμητικών ταυτοτήτων, όπως είναι οι:

$$m^2\pm 2mn+n^2=(m\pm n)^2,$$
$$m^2-n^2=(m+n)(m-n),$$
$$m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2),$$
$$m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2).$$

2) Η γνώση της παραγοντοποίησης των πολυωνύμων. Ότι ο Διόφαντος γνώριζε και χρησιμοποιούσε την παραγοντοποίηση αποδεικνύεται από το γεγονός ότι την αναφέρει ρητά στα προβλήματα 6 και 8 του βιβλίου ΣΤ των *Αριθμητικών*. Χρησιμοποιούσε μάλιστα την ειδική έκφραση «μέτρησις [...] κατὰ [...]», για να δηλώσει τους δύο παράγοντες. Έτσι, στο πρόβλημα ΣΤ.6 αναφέρει: «Η διαφορά είναι 1 Δύναμη με έλλειψη 14 Αριθμών. Η μέτρηση: ο 1 Αριθμός (τα μετρεί) κατά 1 Αριθμό με έλλειψη 14 μονάδων»,

δηλαδή, σε σύγχρονη γλώσσα, «η διαφορά είναι $t^2 - 14t$. Οι παράγοντες είναι ο t και ο $t - 14$». Επίσης, στο πρόβλημα ΣΤ.8: «Η διαφορά είναι 14 Αριθμοί. Η μέτρηση: (τους μετρούν) οι 2 Αριθμοί κατά 7 μονάδες», δηλαδή, «η διαφορά είναι $14t$. Οι παράγοντες είναι ο $2t$ και οι 7 μονάδες».

3) Η γνώση της αριθμητικής θεωρίας των αναλογιών και η ταύτιση εξίσωσης και αναλογίας βάσει της ιδιότητας $a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$.

Αξίζει να θυμίσουμε στο σημείο αυτό ότι οι μαθηματικοί του δέκατου έκτου και του δέκατου έβδομου αιώνα χρησιμοποιούσαν συχνά τους δύο όρους, εξίσωση και αναλογία, ως ταυτόσημους. Για παράδειγμα, ο François Viète (1540–1603), όπως σημειώνει ο Jacob Klein, «μιλάει πάντοτε για "εξισώσεις" και "αναλογίες" μαζί, π.χ. στο τέλος του κεφαλαίου II [του κειμένου του *Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη*]: "Μια αναλογία μπορεί να ονομαστεί 'η κατασκευή μιας εξίσωσης' και μια εξίσωση 'η λύση μιας αναλογίας'"»· και καταλήγει στο συμπέρασμα: «Δηλαδή η 'καθαρή' άλγεβρα είναι για αυτόν όχι μόνο μια 'γενική θεωρία των εξισώσεων' αλλά ταυτόχρονα μια 'γενική θεωρία των αναλογιών'» (Klein 1968, 160 υποσ. 14).

Η ερμηνεία που προτείναμε είναι γενική, υπό την έννοια ότι εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις εξισώσεων με δύο αγνώστους που πραγματεύεται ο Διόφαντος. Είναι, επίσης, εξαιρετικά απλή και δεν χρησιμοποιεί γνώσεις που ξεφεύγουν από τον ορίζοντα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Για αυτούς και μόνο τους λόγους, η ερμηνεία δια των αναλογιών είναι προτιμητέα ως ιστορική ερμηνεία έναντι της αλγεβρογεωμετρικής. Ωστόσο, και αυτή η ερμηνεία θα παρέμενε μια απλή υπόθεση, αν δεν τεκμηριωνόταν ιστορικά. Όμως, υπάρχουν ιστορικές μαρτυρίες που την επιβεβαιώνουν. Προέρχονται από τη βυζαντινή σχολιαστική μαθηματική παράδοση, η οποία συχνά έχει αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμη για την αποσαφήνιση ορισμένων δυσνόητων σημείων των αρχαίων μαθηματικών κειμένων.

Κατ' αρχάς υπάρχει η μαρτυρία για τον Ιωάννη Δαμασκηνό που περιέχεται στον Βίο BHG 884. Τη συγκεκριμένη μαρτυρία τη συζητάμε στα δημοσιεύματά μας των ετών 1995 και 1998, όπου και παραπέμπουμε τον αναγνώστη.

Πολύ σημαντική, όμως, είναι η μαρτυρία του λόγιου μοναχού και εμβριθούς σχολιαστή του Διόφαντου Μάξιμου Πλανούδη (1255/60–1305/10). Η μαρτυρία περιέχεται στο σχόλιο του Πλανούδη στο πρόβλημα Β.8 των *Αριθμητικών*, το οποίο, όπως έχουμε αναφέρει, γράφεται σε σύγχρονη γλώσσα ως $x^2 + y^2 = a^2$, με $a^2 = 16$. Κατά την πορεία επίλυσης αυτού του προβλήματος, και αφού έχει θέσει τον x^2 να είναι «1 Δύναμη» (δηλ. $x^2 = t^2$), ο Διόφαντος βρίσκει στη συνέχεια τη σχέση $y^2 = a^2 - t^2$ και γράφει «σχηματίζω τον τετράγωνο (δηλ. τον y^2) από οσουσδήποτε

Αριθμούς (δηλ. από οσαδήποτε t) με έλλειψη τόσων μονάδων όσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων», εισάγοντας με αυτή τη φράση την «αντικατάσταση» $y = mt - a$. Ο Πλανούδης εξηγεί στο σημείο αυτό με σαφή τρόπο ότι αυτή η «αντικατάσταση» προκύπτει από την αναλογία $(a + y) : t = t : (a - y)$. Το κείμενο είναι το εξής:

> Γενικώς, (Α)[16] για όλους τους τετραγώνους οι οποίοι διαιρούνται σε δύο τετραγώνους, (Β) η πλευρά του διαιρούμενου (τετραγώνου), μαζί με την πλευρά οποιουδήποτε από τους (τετραγώνους που προκύπτουν) από τη διαίρεση, έχει προς την πλευρά του άλλου κάποιον λόγο. (Γ) Οποιοσδήποτε, λοιπόν, μεταξύ των (τετραγώνων που προκύπτουν) από τη διαίρεση και αν αφαιρεθεί, (Δ) η πλευρά του άλλου θα αποτελείται από τόσες μονάδες όσες ήταν, με έλλειψη της πλευράς του διαιρούμενου, (Ε) η πλευρά του αφαιρούμενου (τετραγώνου) λαμβανόμενη τόσες φορές[17] όσες η πλευρά του άλλου, μαζί με την πλευρά του διαιρούμενου, ήταν της πλευράς του αφαιρούμενου.
>
> Για παράδειγμα, επειδή ο 25 απαρτίζεται από τον 16 και τον 9 και διαιρείται σε αυτούς, και η πλευρά του 25, τα 5, μαζί με την πλευρά του 9, τα 3, είναι διπλάσια της πλευράς του 16, των 4, αν αφαιρέσω τον 16, η πλευρά του 9 θα είναι, εξαιτίας του διπλάσιου λόγου, δύο φορές η πλευρά του 16 με έλλειψη της πλευράς του 25, δηλαδή παρά 5 (μονάδες) 8 μονάδες, δηλαδή 3. Πάλι, επειδή η πλευρά του 25, τα 5, μαζί με την πλευρά του 16, τα 4, είναι τριπλάσια της πλευράς του 9, των 3, αν αφαιρέσω τον 9, η πλευρά του 16, εξαιτίας του τριπλάσιου λόγου, θα είναι τρεις φορές η πλευρά του 9 με έλλειψη της πλευράς του ⟨25⟩, δηλαδή παρά 5 μονάδες 9 μονάδες, το οποίο είναι 4 μονάδες.

Θα σχολιάσουμε αυτόν τον συλλογισμό του Πλανούδη χρησιμοποιώντας σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Ας γράψουμε τη διαίρεση του δεδομένου τετραγώνου σε δύο τετραγώνους ως $a^2 = x^2 + y^2$, έχοντας κατά νου ότι στην αλγεβρική επίλυση του προβλήματος το x θα αντιστοιχεί στην πλευρά του τετραγώνου που ορίζεται να είναι «1 Δύναμη», δηλαδή θα είναι $x = t$, και το y θα είναι η πλευρά που ορίζεται να είναι «2 Αριθμοί με έλλειψη 4 μονάδων», δηλαδή, σε σύγχρονο συμβολισμό και με γενικούς όρους, $y = mt - a$ για κάποιο m. Ο Πλανούδης ξεκινά από την (Α) $a^2 = x^2 + y^2$. Αναφέρει ότι (Β) το $(a + y) : x$ είναι ένας λόγος, του οποίου την αριθμητική έκφραση (δηλαδή την «πηλικότητα») θα αποκαλούμε m. Τότε, (Γ) αν υποθέσουμε ότι t είναι η πλευρά του αφαιρούμενου τετραγώνου, δηλαδή η πλευρά του τετραγώνου που ονομάστηκε «1 Δύναμη», ο οποίος θα αφαιρεθεί από τον 16 ($= a^2$), (Δ) «η

[16] Οι ενδείξεις (Α) , (Β), ..., (Ε) έχουν προστεθεί για να γίνει κατανοητό το επιχείρημα.

[17] Ο κώδικας Marc. gr. 308 (φ. 130r, γρ. 13) έχει εδώ τη λέξη «όσόλογος». Η λέξη αυτή δεν εμφανίζεται στα άλλα βασικά χειρόγραφα που παραδίδουν το κείμενο των *Αριθμητικών* και ο Tannery την έχει μεταφέρει στο κριτικό υπόμνημα.

πλευρά του άλλου (y) θα αποτελείται από τόσες μονάδες (mt), όσες ήταν, με έλλειψη της πλευράς του διαιρούμενου (a) η πλευρά του αφαιρούμενου (t)», ή $y = mt - a$, και εξηγεί τι σημαίνει το «τόσες μονάδες»: «η πλευρά του αφαιρούμενου (τετραγώνου) (t) λαμβανόμενη τόσες φορές (m) όσες η πλευρά του άλλου (y), μαζί με την πλευρά του διαιρούμενου (a), ήταν της πλευράς του αφαιρούμενου (t)», ή $m = (y + a) : t$.

Στη δεύτερη παράγραφο του παραπάνω αποσπάσματος ο Πλανούδης διευκρινίζει τον συλλογισμό του με ένα αριθμητικό παράδειγμα.[18] Σε αυτό, ξεκινώντας από την ισότητα $25 = 16 + 9$ σημειώνει ότι $5 + 3 = 2 \cdot 4$, από την οποία, $3 = 2 \cdot 4 - 5$, ή, όπως στο κείμενο, «η πλευρά του 9 θα είναι, εξαιτίας του διπλάσιου λόγου, δύο φορές η πλευρά του 16 με έλλειψη της πλευράς του 25, δηλαδή παρά 5 (μονάδες) 8 μονάδες, δηλαδή 3». Κατόπιν, επαναλαμβάνει το ίδιο αντιστρέφοντας τους ρόλους των 3 και $4 : 5 + 4 = 3 \cdot 3$, από την οποία, $4 = 3 \cdot 3 - 5$, ή, όπως στο κείμενο, «η πλευρά του 16, εξαιτίας του τριπλάσιου λόγου, θα είναι τρεις φορές η πλευρά του 9 με έλλειψη της πλευράς του (25), δηλαδή παρά 5 μονάδες 9 μονάδες, το οποίο είναι 4 μονάδες». Μετά από αυτά τα παραδείγματα ακολουθούν δύο ακόμα παραδείγματα με τους τετραγώνους 25, 144 και 169.

Η ερμηνεία δια των αναλογιών είναι προτιμότερη ως ιστορική ερμηνεία της επιλυτικής στρατηγικής του Διόφαντου, συγκρινόμενη με την αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία. Επιπλέον, όπως κάθε αληθινά ιστορική ερμηνεία, είναι σε θέση να εξηγήσει διάφορα «μυστικά» των *Αριθμητικών*. Για παράδειγμα, με την ερμηνεία δια των αναλογιών εξηγείται γιατί ο Διόφαντος δεν πραγματεύεται όλες τις περιπτώσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων της μορφής $y^2 = ax^2 + bx + c$, ή άλλων εξισώσεων ανώτερου βαθμού, αλλά περιορίζεται μόνο σε εκείνες τις ειδικές περιπτώσεις αυτών των εξισώσεων στις οποίες μπορούν να εφαρμοστούν οι γνωστές αριθμητικές ταυτότητες, ώστε να παραγοντοποιηθούν και κατόπιν να γραφούν με μορφή αναλογίας.

Βιβλιογραφια

[1] I. G. Bachmakova «Diophante et Fermat». *Revue d'histoire des sciences* 19 (1966), 289–306.

[2] I. G. Bashmakova: «Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré». *Historia Mathematica* 8 (1981), 393–416.

[3] A. Birkenmajer: «Diophante et Euclide». Στο: A. Birkenmajer, *Études d'histoire des sciences et de la philosophie du Moyen Age* (Studia Copernicana I), Wroclaw, Zaklad Narodowy Imienia Ossolińskich, 1970, 575-585.

[4] E. M. Bruins & M. Rutten (επιμ.): *Textes mathématiques de Susse*. Paris, Librairie Orientaliste Paul Geuthner, 1961.

[5] F. Cajori: *A History of Mathematics*. New York, Macmillan, 1919.

[18] Μετά από αυτό το παράδειγμα ακολουθεί ένα δεύτερο παράδειγμα, με τους τετραγώνους 25, 144 και 169.

[6] J. Christianidis & J. Oaks: *The Arithmetica of Diophantus. A complete translation and commentary*. London, New York, Routledge, 2023.
[7] Γ. Χριστιανιδης & J. Oaks: *Τα Αριθμητικά του Διόφαντου*. Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (υπό έκδοση).
[8] Διοφαντος: *Diophantus Alexandrinus opera omnia*, έκδ. P. Tannery, 2 τ. Leipzig, B. G. Teubner, 1893-95.
[9] Διοφαντος: *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, μτφρ. P. Ver Eecke. Paris, A. Blanchard, 1959.
[10] Διοφαντος: *Diofant Alexandrinskij, Arifmetica I kniga o mnogougol'nykh chislakh*, μτφρ. I. N. Vesselovski, σχολιασμός I. G. Bashmakova. Moscow, Nauka, 1977.
[11] Διοφαντος: *Diophante. Les Arithmétiques*, έκδ. R. Rashed, τ. 3–4. Paris, Les Belles Lettres, 1984.
[12] Ευκλειδης: *Euclidis Data, cum commentario Marini et scholiis antiquis*, έκδ. H. Menge. Leipzig, B. G. Teubner, 1896.
[13] J. Friberg: «Traces of Babylonian influence in the *Arithmetica* of Diophantus». Department of Mathematics, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg, Nr. 19, 1991.
[14] J. Itard: «Mathématiques pures et appliquées». Στο: *Histoire générale des sciences*, επιμ. R. Taton, τ. I, 307–354. Paris, Presses Universitaires de France, 1957.
[15] A. Jones: «Greek Mathematics to AD 300». Στο: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, επιμ. I. Grattan-Guinness, τ. I, 46–57. London, New York, Routledge, 1994.
[16] J. Klein: *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, μτφρ. E. Brann. Cambridge, Mass., The M.I.T. Press, 1968.
[17] É. Lucas: *Recherches sur l'analyse indéterminée et l'Arithmétique de Diophante*. Paris, Moulins, 1873.
[18] J.-É. Montucla: *Histoire des mathématiques*, 4 τ. Paris, Blanchard, 1966. (Πρώτη έκδ. σε 2 τ. Paris, Agasse, 1799–1802).
[19] R. Rashed (επιμ.): *Sciences à l'époque de la révolution française*. Paris, Blanchard, 1988.
[20] J. F. Scott: *A History of Mathematics*. London, Taylor & Francis, 1975.
[21] J. Sesiano: *Books IV to VII of Diophantus Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qusṭā ibn Lūqā*. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982.
[22] P. Tannery: «De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide», *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* 4 (1982) 395–416. Ανατύπωση στο *Mémoires Scientifiques de Paul Tannery*, επιμ. J. L. Heiberg και H. G. Zeuthen, τ. 2 (1912), 254–280.
[23] P. Tannery: «Études sur Diophante», *Bibliotheca Mathematica* (n.s.), 1 (1887): 37–43, 81–88, 103–108· 2 (1888): 3–6. Ανατύπωση στο *Mémoires Scientifiques de Paul Tannery*, επιμ. J. L. Heiberg, και H. G. Zeuthen, τ. 2 (1912), 367–399.
[24] B. L. Van der Waerden: *Η αφύπνιση της επιστήμης. Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά*, μτφρ. Γ. Χριστιανίδης. Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.
[25] K. Vogel: «Diophantus of Alexandria». Στο: *Dictionary of Scientific Biography*, επιμ. C. C. Gillispie, τ. 4, 110–119. New York, Charles Scribner's Sons, 1971.
[26] A. Weil: «Sur les origines de la géométrie algébrique». *Compositio Mathematica* 44 (1981), 395–406.
[27] A. P. Youschkevich: «Une édition en langue russe des œuvres de Diophante». *Revue d'histoire des sciences* 30 (1977), 338–343.
[28] H. G. Zeuthen: *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*, μτφρ. J. Mascart. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

ΕΠΙΜΕΤΡΟ

Όταν ετοίμασα το κείμενο «Les équations $F(x, y) = 0$ dans les *Arithmétiques* et la méthode de Diophante» που θα παρουσίαζα στο διεθνές συμπόσιο «Histoire de la lecture des anciens en mathématiques», στο Centre International des Rencontres Mathématiques (CIRM) στη Γαλλία, το έστειλα – όπως είθισται για νέους, όπως ήμουν εγώ την εποχή εκείνη, ερευνητές – σε αναγνωρισμένους συναδέλφους από το εξωτερικό για να μου πουν τη γνώμη τους για τη ρηξικέλευθη ερμηνεία που πρότεινα των τεχνικών που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος κατά τις επιλύσεις των προβλημάτων των *Αριθμητικών*. Συγκεκριμένα, το έστειλα σε πέντε διακεκριμένους ιστορικούς των μαθηματικών: στον David Fowler (1937–2004), καθηγητή τότε στο Μαθηματικό Ινστιτούτο του Πανεπιστημίου του Warwick, στον Sabetai Unguru (1931–2024), καθηγητή τότε στο Πανεπιστήμιο του Τελ Αβίβ, στον Jens Høyrup, καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Roskilde, στον Roshdi Rashed, στο Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales (CNRS, Paris), και στην Isabella Grigoryevna Bashmakova, η οποία ήταν καθηγήτρια στο Πανεπιστήμιο Λομονόσοφ, στη Μόσχα. Μάλιστα στην Bashmakova έστειλα και την απάντηση που είχα λάβει ήδη από τον Rashed, καθώς ο τελευταίος μου είχε επιτρέψει να τη δημοσιοποιήσω. Στην απαντητική επιστολή του (με ημερομηνία 2/5/1995) ο Unguru έγραφε ότι ο φόρτος εργασιών του δεν του επέτρεπε να διαβάσει το κείμενο και να διατυπώσει τη γνώμη του, ενώ ο Fowler στη δική του επιστολή (με ημερομηνία 6/5/1995) έγραφε ότι: «Δεν γνωρίζω πολλά για τον Διόφαντο, όμως μου αρέσει η εναλλακτική ερμηνεία σου. Σε τι ποσοστό του Διόφαντου μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί; Τα παραδείγματα που μου έστειλες επελέγησαν ειδικά, ή μπορείς να κάνεις τα ίδια πράγματα σε πολλά ακόμα; Στα περισσότερα; Έχω την αίσθηση ότι το θέμα θα αναχθεί σε αυτό το είδος γενικής 'αίσθησης', της αίσθησης του πόσο φυσικό είναι. Επίσης, θα ήθελα να δω μερικά παραδείγματα της ερμηνείας γραμμένα χωρίς τον αλγεβρικό συμβολισμό, όσο το δυνατόν πλησιέστερα προς το ίδιο το κείμενο του Διόφαντου.»

Στη συνέχεια θα παραθέσω τις επιστολές των Høyrup, Rashed και Bashmakova, και θα ολοκληρώσω με κάποια σχόλια για την όλη συζήτηση.

Η απαντητική επιστολή του Jens Høyrup (1/4/1995)

Αγαπητέ Γιάννη,

Σε ευχαριστώ πολύ για την επιστολή σου και για το περιοδικό[19] του οποίου, δυστυχώς, μπορώ να εκτιμήσω μόνο την αισθητική του ποιότητα

[19] Στον Høyrup είχα αποστείλει και το πρώτο τεύχος του νεότευκτου τότε περιοδικού *Νεύσις*, που είχε εκδοθεί το Φθινόπωρο του 1994 από τις Εκδόσεις Νεφέλη.

– η έκδοση είναι πολύ ωραία, το χαρτί είναι επιπέδου βιβλιόφιλης έκδοσης. *Συγχαρητήρια*!

Δεν βρήκα ακόμα τον χρόνο να μελετήσω σε βάθος τη συζήτησή σου των διοφαντικών προβλημάτων, αλλά καθώς μπορεί να περάσει καιρός μέχρι να τον βρω, σπεύδω να σου γράψω τις προκαταρκτικές παρατηρήσεις μου. Όπως ίσως το φαντάζεσαι, είμαι πεπεισμένος ότι βρίσκεσαι σε καλό δρόμο. Η φράση του Althusser την οποία θυμάμαι περισσότερο, και με την οποία συμφωνώ περισσότερο σε σύγκριση με τα άλλα, είναι η ειρωνεία του ως προς «την ιστορία που είναι γραμμένη σε τετελεσμένο μέλλοντα» – ενώ εκείνη του Μαρξ που μου προκαλεί τη μεγαλύτερη δυσκολία είναι η ιδέα ότι η ανατομία του ανθρώπου είναι το κλειδί για την ανατομία του πιθήκου. Δεν είμαι σίγουρος ότι θα αποτελούσε πρόβλημα αν η ερμηνεία σου ήταν λιγότερο γενική από την ερμηνεία των Bashmakova/Rashed: η θεωρία των χώρων Hilbert καλύπτει τόσο τη συναρτησιακή ανάλυση του 19ου αιώνα όσο και το *Ausdehnungslehre* του Grassman, αλλά είναι σαφώς (και για αυτόν ακριβώς τον λόγο) μια κακή ιστορική ερμηνεία των δύο. Η θεωρία των αναλογιών είναι προφανώς πολύ πιο εύλογη ως ερμηνεία. Μπράβο!

Με τους εγκάρδιους χαιρετισμούς μου,

Jens

Η απαντητική επιστολή του Roshdi Rashed (14/6/1995)

Αγαπητέ φίλε,

Ευχαριστώ πολύ για το τελευταίο σας κείμενο, το οποίο διάβασα αμέσως μόλις το έλαβα. Τα μαθήματα, τα ταξίδια και τα λοιπά με έκαναν να καθυστερήσω να σας γράψω. Ένας προφανής λόγος για το ενδιαφέρον που έχει αυτό το κείμενο είναι ότι ανακινεί πάλι το ερώτημα της ανάγνωσης του Διόφαντου, την οποία εκθέτετε με μεγάλη σαφήνεια. Έχετε δίκιο, αυτό το ερώτημα δεν πρέπει πέσει στη λήθη. Μπορείτε να φανταστείτε, λοιπόν, τη μεγάλη μου χαρά, καθώς και το ενδιαφέρον μου να διαβάσω το κείμενό σας. Ελπίζω ότι στο μέλλον θα μπορέσετε να έρθετε για έναν χρόνο στο Παρίσι για να συνεχίσετε τις έρευνές σας.

Έχω διαβάσει το κείμενο του Birkenmajer (το οποίο, επομένως, δεν «πέρασε [...] απαρατήρητο από την πλειονότητα των ιστορικών των ελληνικών μαθηματικών». Απαιτώ δικαιοσύνη !!!). Ας επανέλθουμε, λοιπόν, σε αυτή την ερμηνεία· σας παραθέτω τα επιχειρήματά μου, τα οποία μπορείτε να αναπαράγετε, εφόσον το επιθυμείτε, σε επίμετρο στη μελέτη σας.

Δεν θεωρώ ότι είμαι σύμφωνος για να μιλήσω για μια ερμηνεία «δια των αναλογιών», για τους εξής λόγους:

1. Στο κείμενο του Διόφαντου δεν λαμβάνει χώρα σχηματισμός αναλογιών προκειμένου να γίνει η αλλαγή μεταβλητής. Ο Διόφαντος προβαίνει πάντοτε μέσω βοηθητικής μεταβλητής, η οποία δεν χρειάζεται *καθόλου* σε μια πραγμάτευση με τη βοήθεια των αναλογιών.
2. Αντίθετα, ο Διόφαντος μιλάει ρητά για αντικατάσταση, αναγωγή, προκειμένου να αναγάγει την εξίσωση σε «ένα είδος ίσο προς ένα είδος».
3. Ο Διόφαντος δεν χρησιμοποιεί κατ' ουδένα τρόπο την πληροφορία που περιέχεται στην αναλογία. Για παράδειγμα, η $x^2 + y^2 = a^2$ οδηγεί στην $\frac{x}{a+y} = \frac{a-y}{x} = m$, από όπου προκύπτουν οι $y = a - mx$ **και** $my = x - am$. Αντί να χρησιμοποιήσει αυτές τις δύο πληροφορίες ο Διόφαντος αρκείται να μεταφέρει την $y = a - mx$ στην αρχική εξίσωση. Αν είχε χρησιμοποιήσει την αναλογία θα μπορούσε να είχε αξιοποιήσει τη συμπληρωματική πληροφορία, και να επιλύσει το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.
4. Η μέθοδος της «συμπλήρωσης των τετραγώνων», ή των κύβων, που χρησιμοποιείται αλλού, και ρητά, από τον Διόφαντο, εξηγεί τέλεια τις επιλύσεις όλων των εξισώσεων που παραθέτετε στο άρθρο σας. Στην 3η περίπτωση, για παράδειγμα, η αλλαγή μεταβλητής $x = 1 + t$ ανάγει αμέσως το πρόβλημα στην περίπτωση υπ' αριθμ. 2 του άρθρου σας, άρα σε ένα πρόβλημα συμπλήρωσης τετραγώνων, $y^2 = ax^2 + b$· αν δώσουμε στο x την τιμή 1 θα έχουμε αμέσως $a + b =$ τετράγωνος· αν, τώρα, αντικαταστήσουμε το x με $1 + t$, βρίσκουμε $y^2 = at^2 + 2at + (a + b) = at^2 + 2at + k^2$· επομένως, αυτό που συμβαίνει είναι ότι εφαρμόζεται η μέθοδος της συμπλήρωσης των τετραγώνων. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει την τεχνική των αναλογιών, δεν θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί αυτή των αντικαταστάσεων. Άλλωστε και σεις ο ίδιος χρησιμοποιείτε την αντικατάσταση όπως ο Διόφαντος.
5. Οι ταυτότητες είναι αναγκαίες για τη συμπλήρωση των τετραγώνων και των κύβων και δεν συνιστούν επιχείρημα υπέρ της αναλογίας. Δεν βλέπω άλλωστε τι εξηγεί ή προσθέτει η αναλογία, ενώ, προ πάντων, ο Διόφαντος δεν χρησιμοποιεί καμία αριθμητική ιδιότητα των αναλογιών. Αυτή η μέθοδος των αναλογιών, ακόμα και αν είχε χρησιμοποιηθεί από τον Διόφαντο, θα ήταν στην καλύτερη περίπτωση μια εμπειρική τεχνική και όχι μια αληθινή μέθοδος για τα προβλήματα ανώτερης διάστασης – και επομένως δεν θα μπορούσε να απαντήσει στο ερώτημα: να βρεθούν οι περιορισμένου αριθμού μέθοδοι που εφάρμοζε ο Διόφαντος.

6. Όταν είχα αναφερθεί στην Αθήνα στην ιστορική διάσταση της ερμηνείας των *Αριθμητικών*[20], εννοούσα να βρούμε ικανό αριθμό στοιχείων διοφαντικής ανάλυσης πριν από τον Διόφαντο και την εποχή του. Οι εργασίες των Βυζαντινών μαθηματικών, οι οποίες είναι ενδιαφέρουσες αυτές καθαυτές, δεν μπορούν να φωτίσουν, όπως εξάλλου και οι εργασίες των Αράβων, τις αληθινές μεθόδους του Διόφαντου. (Θα επιθυμούσα με αυτή την ευκαιρία να προχωρούσατε σε μια εργασία για τον Διόφαντο στο Βυζάντιο.)

Αυτά είναι, συνοπτικά, μερικά από τα σημεία που ήθελα να θίξω. Απομένει να επαναλάβω ότι σας διαβάζω πάντοτε με χαρά και ενδιαφέρον, έστω και αν στην αλληλογραφία μου δεν είμαι συνεπής!

Με όλη μου τη φιλία,
Roshdi Rashed

Η απαντητική επιστολή της I. G. Bashmakova (1/10/1995)

Αγαπητέ Κύριε Χριστιανίδη, αγαπητέ συνάδελφε,

Σας ευχαριστώ θερμά για την επιστολή και για το άρθρο σας. Διάβασα το κείμενό σας για μια νέα ερμηνεία των μεθόδων του Διόφαντου με μεγάλο ενδιαφέρον. Εκθέτετε την ιστορία του θέματος με μεγάλη σαφήνεια.

Η γνώμη μου, όμως, για την ερμηνεία σας συμπίπτει με αυτή του κ. Roshdi Rashed. Δεν μπορώ να δεχθώ την άποψή σας. Σε αυτή την επιστολή θέλω να κάνω μερικές ουσιαστικές παρατηρήσεις αναφορικά με την ερμηνεία σας.

1. Ο ίδιος ο Διόφαντος παρέχει μαρτυρία ενάντια σε αυτή την ερμηνεία. Στην εισαγωγή του στο βιβλίο I των *Αριθμητικών* εκθέτει τις αρχές μιας νέας άλγεβρας – αυτής των εξισώσεων. Εισάγει σύμβολα για τον άγνωστο και τις δυνάμεις του, δίνει τους κανόνες των πράξεων με εξισώσεις, κ.λπ. Ούτε λέξη για αναλογίες!
2. Πώς θα μπορούσε, λοιπόν, να γράφει ο Διόφαντος αναλογίες σαν τις
$$(a+y) : x = x : (a-y)$$
$$(y-x^3) : 1 = (c^2 - ax^3 + bx) : (y + x^3);$$
Με λέξεις; Μα αυτό θα ήταν ένα βήμα προς τα πίσω. Ούτε ο Ήρων ακόμα δεν χρησιμοποιεί αναλογίες.
3. Όλοι οι Άραβες μαθηματικοί, όπως και οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί των XVI–XVII αιώνων (Bombelli, Stevin, Viète, Fermat και πολλοί άλλοι), κατανοούσαν τις μεθόδους του Διόφαντου ως καθαρά αλγεβρικές, που αφορούσαν στη θεωρία των εξισώσεων.

[20] Ο Rashed αναφέρεται εδώ στην επίσκεψή του στην Αθήνα, την άνοιξη του 1995, κατόπιν πρόσκλησής μου, προκειμένου να δώσει μια διάλεξη στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ.

4. Με τη μέθοδο των αναλογιών δεν μπορούν να επιλυθούν οι «διπλές ισότητες».

Παρουσίασα μερικά σημεία αναφορικά με την ερμηνεία σας. Από την άλλη θα ήθελα πολύ να συνεχίσετε τις έρευνές σας για τον Διόφαντο στο Βυζάντιο. Κάτι τέτοιο θα ήταν πολύ σημαντικό για την ιστορία της επιστήμης. Κατά τη γνώμη μου κανείς άλλος δεν θα μπορούσε να το κάνει καλύτερα από εσάς.

Δεχθείτε τις καλύτερες ευχές μου για εσάς και την οικογένειά σας,

Ημέτερη,
Isabella Bashmakova

Σχόλια και διευκρινήσεις για το πλαίσιο της συζήτησης

Η συζήτηση που προηγήθηκε για τις ερμηνείες της μεθόδου που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος στις επιλύσεις των αριθμητικών προβλημάτων που έχει συμπεριλάβει στα *Αριθμητικά*, για να είναι γόνιμη και ουσιαστική, πρέπει να εκκινεί από μια βασική παραδοχή που να τη συμμερίζονται όλα τα εμπλεκόμενα μέρη. Πρέπει, συγκεκριμένα, όλοι οι συμμετέχοντες στη συζήτηση, όταν χρησιμοποιούν στα κείμενά τους τεχνικούς όρους, να αντιλαμβάνονται πίσω από αυτούς τους όρους τις ίδιες έννοιες. Δυστυχώς, φαίνεται ότι αυτή η προϋπόθεση δεν ισχύει στην προκειμένη περίπτωση. Υπάρχει σύγχυση ως προς τη χρήση των βασικών όρων «πρόβλημα», «εξίσωση» και «μέθοδος», συνέπεια της οποίας είναι η τελείως άστοχη χρήση μιας σειράς άλλων όρων όπως είναι οι όροι «αντικατάσταση», «μετασχηματισμός» και «αλλαγή μεταβλητής», που συναντήσαμε στα κείμενα που παρατέθηκαν προηγουμένως.

Για να διαλυθεί η σύγχυση θα χρησιμοποιήσω ως παράδειγμα το κείμενο του προβλήματος Β.8 των *Αριθμητικών*, το οποίο αναφέρθηκε συχνά στο κείμενο που προηγήθηκε. Για λόγους ευκολίας θα εξετάσω μόνο την πρώτη από τις δύο λύσεις του προβλήματος που παραθέτει ο Διόφαντος. Θα παραθέσω, λοιπόν, αρχικά τη μετάφραση του προβλήματος, αριθμώντας τα μέρη στα οποία χωρίζεται η κειμενική ενότητα του προβλήματος, προκειμένου να διευκολυνθούν οι αναφορές στη συζήτηση που θα ακολουθήσει.

Πρόβλημα Β.8

1	Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος τετράγωνος σε δύο τετραγώνους.
2	Έστω, λοιπόν, ότι έχει προταθεί να διαιρέσουμε τον 16 σε δύο τετραγώνους.
3	Και έστω ότι ο πρώτος έχει οριστεί να είναι 1 Δύναμη.
4	Άρα ο άλλος θα είναι 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης.
5	Άρα, 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης θα πρέπει να είναι ίσες προς έναν τετράγωνο.
6	Σχηματίζω τον τετράγωνο από οσουσδήποτε Αριθμούς με έλλειψη τόσων μονάδων όσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων. Έστω (από) 2 Αριθμούς με έλλειψη 4 μονάδων.
7	Άρα ο ίδιος ο τετράγωνος θα είναι 4 Δυνάμεις, 16 μονάδες με έλλειψη 16 Αριθμών.
8	Αυτά είναι ίσα προς 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης.
9	Ας προστεθεί αυτό που λείπει από κοινού και (ας αφαιρεθούν) τα όμοια από τα όμοια. Άρα, 5 Δυνάμεις είναι ίσες προς 16 Αριθμούς, οπότε ο Αριθμός γίνεται 16 πέμπτα.
10	Ο ένας θα είναι 256 25α, ο άλλος 144 25α, και όταν προστεθούν οι δύο γίνονται 400 25α, ήτοι 16 μονάδες, και ο καθένας είναι τετράγωνος.

Το πρώτο σημείο που πρέπει να διευκρινίσουμε είναι ότι στο κείμενο αυτό ο Διόφαντος διατυπώνει και επιλύει ένα *αριθμητικό πρόβλημα και όχι μια αλγεβρική εξίσωση*. Το πρόβλημα διατυπώνεται στη γραμμή 1 με γενικούς όρους, ενώ στη γραμμή 2 διατυπώνεται μια συγκεκριμένη εκδοχή του, στην οποία έχει εκχωρηθεί η αριθμητική τιμή 16 στον δεδομένο τετράγωνο. Αν γράφαμε εμείς σήμερα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας συμβολική γλώσσα θα το γράφαμε ως $x^2 + y^2 = a^2$, στη γενική περίπτωση (γραμμή 1) και ως $x^2 + y^2 = 16$, στη συγκεκριμενοποιημένη εκδοχή του (γραμμή 2). Θα γράφαμε δηλαδή το πρόβλημα ως αλγεβρική εξίσωση με δύο αγνώστους (διοφαντική εξίσωση). Κάνοντας, όμως, αυτό, θα είχαμε κάνει δύο ενέργειες που *δεν περιέχονται στο κείμενο*: θα είχαμε δώσει ονόματα στους δύο ζητούμενους τετραγώνους, αποκαλώντας τον έναν x^2 και τον άλλο y^2. Αυτή η απόδοση ονομάτων μετατρέπει το πρόβλημα από ένα πρόβλημα αριθμητικής σε μια αλγεβρική εξίσωση με δύο αγνώστους. Αυτή η μετατροπή, όμως, παραβιάζει τον τρόπο που σκέπτεται ο Διόφαντος. Ο Διόφαντος δεν διατυπώνει καμιά αλγεβρική εξίσωση με δύο αγνώστους· διατυπώνει, και θα λύσει στη συνέχεια, ένα αριθμητικό πρόβλημα, στο οποίο ζητείται να βρεθούν δύο άγνωστοι τετράγωνοι αριθμοί.

Ακριβώς σε αυτό το σημείο εντοπίζεται το πρώτο θεμελιώδες λάθος που κάνουν ο Rashed και η Bashmakova, απότοκα του οποίου είναι οι αναφορές σε «αντικαταστάσεις», «μετασχηματισμούς» και «αλλαγές μεταβλητών», όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια. Είναι προφανές, επίσης, ότι το αριθμητικό πρόβλημα δεν ορίζει καμία αλγεβρική καμπύλη.

Αλγεβρική καμπύλη (κύκλο εν προκειμένω) ορίζει η εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$, όμως ο Διόφαντος, όπως εξηγήσαμε, δεν διατυπώνει καμιά τέτοια εξίσωση.

Ας δούμε, τώρα, τι κάνει ο Διόφαντος στις γραμμές 3 και 4 του κειμένου. Σε αυτές τις γραμμές αποδίδει ονόματα στις άγνωστες αριθμητικές τιμές των ζητούμενων τετραγώνων. Ορίζει, λοιπόν, τον πρώτο τετράγωνο να ονομάζεται «1 Δύναμη» (συντομογραφικά, 1Δ) και τον δεύτερο τετράγωνο να ονομάζεται «16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης» (συντομογραφικά, αν και με αναχρονιστική χρήση του σημείου «–», 16μ – 1Δ). Τις δύο αυτές ενέργειες θα μπορούσαμε να τις γράψουμε, μένοντας κοντά στο κείμενο του Διόφαντου (με εξαίρεση τη χρήση του «–»), ως εξής:

$$\begin{aligned} &1\text{ος τετράγωνος} := 1\Delta, \\ &2\text{ος τετράγωνος} := 16\mu - 1\Delta. \end{aligned}$$

Πρόκειται και στις δύο περιπτώσεις για αλγεβρικά ονόματα που αποδίδονται στις άγνωστες αριθμητικές τιμές των δύο ζητούμενων τετραγώνων, προκειμένου στη συνέχεια να είναι δυνατή η εκτέλεση πράξεων, μέσω των ονομάτων, με αυτές τις τιμές, σαν να ήταν γνωστοί αριθμοί. Με σύγχρονους όρους θα μπορούσαμε να γράψουμε τους δύο ονοματισμούς ως

$$\begin{aligned} &1\text{ος τετράγωνος} := t^2, \\ &2\text{ος τετράγωνος} := 16 - t^2. \end{aligned}$$

Τώρα, οι οπαδοί της αλγεβρο-γεωμετρικής ερμηνείας, έχοντας ήδη ερμηνεύσει το πρόβλημα ως $x^2 + y^2 = 16$, αποδίδουν τις γραμμές 3 και 4 του κειμένου ως

$$\begin{aligned} x^2 &= t^2, \\ y^2 &= 16 - t^2. \end{aligned}$$

Έχοντας, όμως, αποδώσει εξαρχής τα ονόματα x^2 και y^2 στους δύο τετραγώνους, αδυνατούν να αντιληφθούν ότι τα t^2 και $16 - t^2$ είναι ονόματα που αποδίδονται σε δύο μη ονοματισμένες ποσότητες – αφού έχουν ήδη αποδώσει σε αυτές τα ονόματα x^2 και y^2 – και για αυτό είναι υποχρεωμένοι να περιγράψουν τις παραπάνω σχέσεις ως «αντικαταστάσεις», «μετασχηματισμούς» ή «αλλαγές μεταβλητής», διαστρεβλώνοντας έτσι τον τρόπο του σκέπτεσθαι του Διόφαντου.

Στη γραμμή 5 του κειμένου ο Διόφαντος αναφέρει ότι το πολυώνυμο 16μ – 1Δ (με σύγχρονους όρους, $16 - t^2$) πρέπει να είναι τετράγωνος αριθμός. Αυτή η δήλωση δεν πρέπει να θεωρείται ότι ταυτίζεται με ό,τι γράφεται στη γραμμή 4: στη γραμμή 4 αποδίδεται αλγεβρικό όνομα στον 2ο τετράγωνο, ενώ στη γραμμή 5 αρχίζει να διαμορφώνεται η αλγεβρική εξίσωση που θα καταστρωθεί από το πρόβλημα. Λέμε «αρχίζει να διαμορφώνεται» διότι στο στάδιο αυτό της επίλυσης έχει κατασκευαστεί μόνο το πρώτο μέλος της εξίσωσης, δηλαδή το πολυώνυμο 16μ – 1Δ (με σύγχρονους όρους, $16 - t^2$). Για να έχουμε μια πλήρως κατασκευασμένη εξίσωση πρέπει να κατασκευάσουμε και το δεύτερο μέλος της, πρέπει δηλαδή να ονοματίσουμε τον τετράγωνο προς τον οποίο ισούται το πολυώνυμο 16μ – 1Δ. Έχουμε, με άλλα λόγια, στη γραμμή 5 μια κατά το ήμισυ σχηματισμένη εξίσωση, ή, διαφορετικά, μια εξίσωση εν τω γεννάσθαι, την οποία θα μπορούσαμε να γράψουμε ως 16μ – 1Δ = □.

Ο ονοματισμός του μη ονοματισμένου τετραγώνου (□) γίνεται στη γραμμή 6 του κειμένου, με τη φράση «Σχηματίζω τον τετράγωνο από [...] 2 Αριθμούς με έλλειψη 4 μονάδων», που σημαίνει ότι στην πλευρά του τετραγώνου αποδίδεται το όνομα «2 Αριθμοί με έλλειψη 4 μονάδων» (συντομογραφικά, 2Α – 4μ). Την ενέργεια απόδοσης αυτού του ονόματος θα μπορούσαμε να τη γράψουμε ως $\sqrt{\Box}$: = 2Α – 4μ, ή, με σύγχρονους όρους, ως $\sqrt{\Box}\colon =\ 2t-4$. Στη συνέχεια, στην 7η γραμμή, ο Διόφαντος βρίσκει το ανάπτυγμα του τετραγώνου του πολυωνύμου 2Α – 4μ, το οποίο είναι «4 Δυνάμεις, 16 μονάδες με έλλειψη 16 Αριθμών», ήτοι (με αναχρονιστική χρήση των συμβόλων «+» και «–») 4Δ + 16μ – 16Α, ή, με σύγχρονους όρους $4t^2 + 16 - 16t$. Τώρα πια, έχοντας κατασκευάσει και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης, είναι σε θέση να γράψει την εξίσωση. Αυτό γίνεται στην 8η γραμμή με τη φράση «Αυτά είναι ίσα προς 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης». Πρόκειται, λοιπόν, για την εξίσωση

$$4\Delta + 16\mu - 16\mathrm{A} = 16\mu - 1\Delta,$$

ή, με σύγχρονους όρους,

$$4t^2 + 16 - 16t = 16 - t^2.$$

Αυτή είναι η εξίσωση που κατασκευάζει ο Διόφαντος από το πρόβλημα, *η μόνη εξίσωση που περιέχεται στο κείμενό του*. Ούτε το πρόβλημα είναι εξίσωση, ούτε η φράση που αναφέρεται στη γραμμή 5 είναι, κυριολεκτικά μιλώντας, εξίσωση, παρά τη χρήση του επιθέτου «ίσες» που περιέχεται σε αυτή. Η εξίσωση αναφέρεται στη γραμμή 8. Στη συνέχεια του κειμένου (9η γραμμή) η εξίσωση απλοποιείται για να λάβει την τελική μορφή της και επιλύεται, οπότε υπολογίζεται η αριθμητική τιμή του Αριθμού (δηλ. η αριθμητική τιμή του t). Κατόπιν, στην τελευταία γραμμή, υπολογίζονται οι αριθμητικές τιμές των ζητούμενων τετραγώνων και γίνεται η επαλήθευση.

Η ερμηνεία δια της αλγεβρικής γεωμετρίας είναι εσφαλμένη όχι μόνο για τον προφανή λόγο ότι είναι αναχρονιστική αλλά και διότι διαστρεβλώνει τα βήματα της επιλυτικής διαδικασίας που περιέχει το κείμενο. Αποδίδει ονόματα (x^2 και y^2) σε όσα αναφέρονται στις γραμμές 1 και 2, ενώ ο Διόφαντος αποδίδει ονόματα στις γραμμές 3 και 4. Θεωρεί ότι στις γραμμές 1 και 2 διατυπώνεται εξίσωση, ενώ ο Διόφαντος διατυπώνει την εξίσωση στη γραμμή 8. Ερμηνεύει όσα αναφέρονται στις γραμμές 3, 4 και 6 ως «αντικαταστάσεις», «αλλαγές μεταβλητής» κ.λπ., ενώ αυτό που γίνεται σε αυτές τις γραμμές είναι ότι αποδίδονται ονόματα σε μη ονοματισμένες ποσότητες. Ερμηνεύει το περιεχόμενο της γραμμής 5 ως ταυτόσημο με το περιεχόμενο της γραμμής 2, ενώ, όπως είδαμε, στη γραμμή 5 αρχίζει στην πραγματικότητα να καταστρώνεται η εξίσωση, η κατάστρωση της οποίας θα ολοκληρωθεί στη γραμμή 8. Τέλος, θεωρεί ότι άγεται η ευθεία $x = t, y = 2t - 4$ από το σημείο $(0, -4)$ του κύκλου

$x^2 + y^2 = 16$, συνδυάζοντας αυθαίρετα τις πληροφορίες που περιέχονται σε δύο τελείως διαφορετικά σημεία του κειμένου, στις γραμμές 2 και 6. Για όλους αυτούς τους λόγους η αλγεβρο-γεωμετρική ερμηνεία όχι μόνο είναι τελείως και σε ακραίο βαθμό αναχρονιστική αλλά, επίσης, διαστρεβλώνει τη σειρά των βημάτων της επιλυτικής διαδικασίας που ακολουθεί ο Διόφαντος.

Το τελευταίο σημείο που πρέπει να διευκρινιστεί είναι η χρήση του όρου «μέθοδος». Όπως ξέρουμε οι ιστορικοί των μαθηματικών από τον δέκατο όγδοο αιώνα και μετά διαφωνούν ως προς το εάν ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε ενιαία μεθοδολογία στις επιλύσεις των προβλημάτων των *Αριθμητικών*. Το ακανθώδες σημείο στο οποίο έχει επικεντρωθεί η συζήτηση είναι, όσον αφορά στο παράδειγμα του προβλήματος Β.8, το περιεχόμενο της γραμμής 6. Σύμφωνα με τη μία εκδοχή αυτά που γράφει ο Διόφαντος στην 6η γραμμή του Β.8 είναι καρπός μιας μεθοδικής διαδικασίας – η οποία κατά τους οπαδούς της αλγεβρο-γεωμετρικής ερμηνείας δεν είναι άλλη από ό,τι οι σύγχρονοι αλγεβρο-γεωμέτρες αποκαλούν «μέθοδο της τεμνούσης» και «μέθοδο της εφαπτομένης» για την εύρεση των ρητών σημείων μιας αλγεβρικής καμπύλης, ενώ κατά τον Πλανούδη είναι η μετατροπή μιας σχέσης σε αναλογία. Σύμφωνα με την άλλη εκδοχή όσα αναφέρονται στην 6η γραμμή δεν απορρέουν από κανενός είδους μεθοδική διαδικασία. Όταν ο Hankel έγραφε το ότι «είναι [...] δύσκολο για έναν σύγχρονο μαθηματικό ακόμα και αν έχει διαβάσει 100 διοφαντικές λύσεις να λύσει το 101ο πρόβλημα» είχε κατά νου φράσεις των διοφαντικών επιλύσεων σαν αυτή της 6ης γραμμής του προβλήματος Β.8. Το ερώτημα περί ενιαίας μεθόδου στον Διόφαντο, λοιπόν, είχε ευθύς εξαρχής περιοριστεί στην εξήγηση του κειμένου της 6ης γραμμής. Στην 6η γραμμή, όμως, όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, ο Διόφαντος αποδίδει αλγεβρικό όνομα στην πλευρά του μη ονοματισμένου τετραγώνου προς τον οποίο πρέπει να εξισωθεί το πολυώνυμο 16μ – 1Δ $(16 - t^2)$. Η συγκεκριμένη ενέργεια δεν καλύπτει το σύνολο της επίλυσης του προβλήματος Β.8· αποτελεί απλώς μια στιγμή της επιλυτικής διαδικασίας. Η αναζήτηση μεθόδου για να εξηγηθεί το περιεχόμενο της 6ης γραμμής δεν αφορά, λοιπόν, στην επίλυση συνολικά, αλλά μόνο στην εύρεση ονόματος για την πλευρά ενός μη ονοματισμένου τετραγώνου. Πρόκειται, δηλαδή, περί μεθόδου ονοματοδοσίας και όχι περί μεθόδου επίλυσης του προβλήματος. Στο κείμενο της ομιλίας μου του 1995 απέδειξα ότι οι ονοματισμοί σε περιπτώσεις ημιτελών εξισώσεων της μορφής $F(t) = \Box$ που λαμβάνουν χώρα στα προβλήματα των *Αριθμητικών* μπορούν να εξηγηθούν με ενιαίο τρόπο, με την τεχνική των αναλογιών. Η επίλυση των προβλημάτων, όμως, είναι κάτι διαφορετικό από την ονοματοδοσία. Και η Μέθοδος που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος για να επιλύσει τα αριθμητικά προβλήματα που συμπεριέλαβε στα *Αριθμητικά* δεν είναι άλλη από την Άλγεβρα, με την προ-μοντέρνα σημασία του όρου «Άλγεβρα».

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΟΛΩΝ ΤΩΝ HØYRUP, RASHED ΚΑΙ BASHMAKOVA

Jens Høyrup
Department of Languages and Culture
University of Roskilde
P.O. Box 260
DK-4000 Roskilde
Denmark
TEL (+45) 46 75 77 11
Private + FAX (+45) 31 31 41 87

1. avril 1995

Dr. Jean Christianidis
10, rue Chrisanthèmon
GR-15772 Athènes
Grækenland

Cher Jean,

Merci beaucoup pour ta lettre et pour la revue dont, malheureusement, je peux seulement apprécier les qualités esthétiques – la mise en page très belle, le papier en qualité d'édition bibliophile. *Félicitations!*

Je n'ai pas encore eu le temps de lire en profondeur ta discussion des problèmes, diophantines, mais puisqu'il peut durer en peu avant que je le trouve je me hâte de t'écrire mes remarques préliminaires. Comme tu le devines peut-être, je suis convaincu que tu suis la trace bonne. La phrase d'Althusser dont je me souviens le mieux, et avec lequel je sympathise plus qu'avec le reste, est son ironie vers "l'histoire écrite en future-parfait" – et celle chez Marx qui me donne la plus grande difficulté est l'idée que le clef pour l'anatomie du singe soit l'anatomie de l'homme. Je ne suis même pas sûr qu'il soit un problème si ton interprétation serait moins générale que celle de Bashmakova/Rashed: la théorie des espaces Hilbert couvre l'analyse fonctionnelle du 19$^{\text{ième}}$ siècle aussi bien que l'*Ausdehnungslehre* de Grassman, mais elle est certainement (et pour cette même raison) une mauvaise interprétation historique des deux. La théorie des proportions est évidemment beaucoup plus plausible comme interprétation. Bravo!

J'inclus une prépublication et deux manuscrits en photocopie. "On the mensuration ..." va paraître dans les actes d'un colloque sur les mathématiques arabes tenu en Tunisie en décembre 1994.

Avec mes salutations cordiales

Jens

Jens

Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales
(D 1085)
C.N.R.S. - É.P.H.É. (5e section)
27 rue Damesme - 75013 Paris

Tél.: 45.81.14.85
Fax.: 45.80.78.47

Pr. J. Christianidis

Le 14 juin 95

Cher ami,

Merci bien de votre dernier texte que j'ai lu à réception. Les cours, les voyages, et le reste, m'ont mis en retard pour vous écrire. L'un des intérêts manifestes de ce texte est de revenir encore à la question de la lecture de Diophante, que vous exposez très clairement. Vous avez raison, cette question ne doit pas tomber dans l'oubli. Vous pouvez donc imaginer tout mon plaisir, et aussi mon intérêt, à lire vos pages. J'espère que dans l'avenir vous pourrez séjourner une année à Paris pour poursuivre vos recherches.

J'ai lu le texte de Birkenmajer (il n'est donc pas "passé … tout à fait inaperçu par les historiens des mathématiciens". Je demande justice !!!). Revenons donc à cette interprétation ; je vous donne mes arguments, que vous pouvez reproduire, si vous le voulez, en appendice à votre étude.

Je ne pense pas être d'accord pour parler d'une interprétation "proportionnelle", pour les raisons suivantes :

1-. Dans le texte de Diophante, il n'y a pas de mise en forme des proportions pour déterminer le changement de variable. Diophante passe toujours par la variable auxiliaire, dont on n'a *nul* besoin dans un exposé à l'aide des proportions.

2-. En revanche, Diophante parle explicitement de substitution, réduction, pour ramener l'équation à "une espèce égale une espèce".

3-. Diophante n'utilise aucunement l'information contenue dans la proportion. Par exemple

$$x^2 + y^2 = a^2$$

conduit à

$$\frac{x}{a+y} = \frac{a-y}{x} = m,$$

ce qui donne

$$y = a - mx \ \textbf{et} \ my = x - am.$$

Diophante, au lieu d'utiliser ces deux informations, se contente de rapporter $y = a - mx$ dans l'équation initiale. S'il avait utilisé la proportion, il aurait pu profiter de cette information supplémentaire, et résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

4-. La méthode de "complétion des carrés", ou des cubes, utilisée ailleurs, et explicitement, par Diophante, explique parfaitement les résolutions de toutes les équations citées dans votre article.

Dans le cas 3, par exemple (p. 12), le changement de variable x = 1 + t, ramène le problème immédiatement au cas n° 2 de votre article, donc à un problème de complétion des carrés

$$y^2 = ax^2 + b;$$

si on donne à x la valeur 1, on a immédiatement

a + b = un carré ;

si maintenant on remplace x par 1 + t, on trouve

$$y^2 = at^2 + 2at + (a+b) = at^2 + 2at + k;^2$$

on applique alors la méthode de complétion des carrés.

Si on avait utilisé la technique des proportions, on n'aurait pas dû utiliser celle des substitutions. D'ailleurs vous-même utilisez la substitution comme Diophante (voir p. 13).

5-. Les identités sont nécessaires pour compléter les carrés et les cubes, et ne représentent pas un argument en faveur de la proportion. Je ne vois d'ailleurs pas ce que la proportion explique ou ajoute, alors surtout que Diophante n'utilise *aucune propriété arithmétique* des proportions. Cette méthode des proportions, même si elle avait été utilisée par Diophante, l'aurait été au mieux comme technique empirique, et non pas comme une vraie méthode pour des problèmes de dimension supérieure — et ne pourra donc résoudre le problème : trouver un nombre limité des méthodes qui ont été appliquées par Diophante.

6-. Quand j'ai évoqué à Athènes la dimension historique de l'interprétation des Arithmétiques, j'entendais déterminer suffisamment d'éléments en analyse diophantienne avant Diophante, et à son époque. Les travaux des mathématiciens byzantins, importants pour eux-mêmes, ne peuvent éclairer, pas plus d'ailleurs que les mathématiciens arabes, les vraies méthodes de Diophante (je souhaiterais à ce propos que vous poursuiviez un travail sur Diophante byzantin).

Voilà, brièvement exposés, les quelques points que je voulais soulever. Il me reste à répéter que c'est toujours avec plaisir et intérêt que je vous lirai, même si je suis un mauvais correspondant !

En toute amitié,

R Rashed

Roshdi Rashed

I.G.BASHMAKOVA

A Dr. J.Christianidis
Moscou, le Ier octobre, I995

Cher Monsieur Christianidis, cher collègue!

Je vous remercie vivement pour votre lettre et votre article. J'ai lu votre papier sur une nouvelle interprétation des méthodes de Diophante avec un grand intérêt ~~satisfaction~~. Vous exposez l'histoire de la question bien clairement.

Mais mon avis sur votre interprétation coïncide avec selui de M. Roshdi Rashed. Je ne peut pas accepter votre point de vue. Dans cette lettre je veux faire quelques remarques essentielles sur votre interprétation.

I. Diophante lui-meme temoigne contre cette interprétation. Dans son introduction au Livre I d'Arithmétique il expose les principes d'une nouvelle algèbre - celle des équation. Il introduit des symboles pour l'inconnue et ses puissances, donne des règles pour opérations avec des équations, etc. Pas un mot sur des proportions!

2. Comment donc Diophante pouvait ecrire des proportions:

$$(a+y):x = x:(a-y)$$

$$(y-x^3):1 = (c^2-ax^3+bx):(y+x^3)?$$

Avec des mots? Mais ce serait un pas en arrière. Déjà Héron n'utilisait pas des proportions!

3. Tous les mathématiciens arabes et ceux d'Europe de XVIe - XVIIe siècles (Bombelli, Stevin, Viète, Fermat et beaucoup d'autres) comprenaient les méthodes de Diophante comme purement algébriques, concernant la théorie des équations.

4. On ne peut pas résoudre les "doubles équations" avec la méthode des proportions.

J'ai exposé ici quelques points concernants votre interprétation. En outre je souhaite beaucoup que vous poursuiviez des recherches sur Diophante byzantin. Ce serait bien important pour l'histoire de science. Sur mon avis personne ne peut le faire mieux que vous.

Veuillez accepter mes meilleurs veux pour vous et pour votre famille. Votre

И.Башмакова

Isabella Bashmakova

ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΤΙΚΗ

T. YAMADA

CIVIL SOCIETY AND SOCIAL SCIENCE IN YOSHIHIKO UCHIDA

SPRINGER, SINGAPORE, 2022, PP. 117

HTTPS://DOI.ORG/10.1007/978-981-19-1138-5 2

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΓΚΟΤΣΗΣ*

Το παρόν έργο επιχειρεί να παρουσιάσει στο δυτικό αναγνωστικό κοινό τη συμβολή του Yoshihiko Uchida (1913–1989), μιας από τις πλέον εξέχουσες φυσιογνωμίες της Ιαπωνικής διανόησης στο πεδίο των Κοινωνικών Επιστημών, και ειδικότερα στο ζήτημα της συγκρότησης της κοινωνίας των πολιτών στη μεταπολεμική Ιαπωνία. Το πόνημα αυτό συνιστά μια εισαγωγική παρουσίαση της κοινωνικής και οικονομικής σκέψης του Uchida, εστιάζοντας στη διαπραγμάτευση από τον εν λόγω στοχαστή περίπλοκων σχέσεων όπως¨νεωτερικότητα και προ-νεωτερικότητα, κοινωνία πολιτών και καπιταλιστική οργάνωση, ιστορικότητα και δι-ιστορικότητα, επιστήμη ως ενασχόληση των ειδημόνων και διερώτηση (ως κοινή εννόηση) από το μέσο πολίτη. Ωστόσο, ως σημαίνουσα προσωπικότητα στο χώρο της ιστορίας της οικονομικής σκέψης στην Ιαπωνία, ο Uchida προβαίνει σε μεθοδική διερεύνηση του έργου στοχαστών μεταξύ των οποίων οι Adam Smith, Karl Marx και Hajime Kawakami, ενός εξέχοντος οικονομικού ιστορικού στην Ιαπωνία. Η οικονομική σκέψη του Uchida είναι συμπεριληπτική, εντάσσοντας στον κοινωνικό-οικονομικό προβληματισμό του τη διάρθρωση της σχέσης ανθρώπου και φυσικού περιβάλλοντας, αλλά και την ανάδυση της δημοκρατικής φιλελεύθερης σκέψης στη μεταπολεμική Ιαπωνία.

Στη μονογραφία αυτή αναδεικνύονται τρία ζητήματα:

Η γένεση και εξέλιξη της ιστορίας των οικονομικών ιδεών στην Ιαπωνία

Η συγκρότηση της κοινωνικής επιστήμης με βάση τη συζήτηση για το περιεχόμενο της έννοιας κοινωνία των πολιτών σε μη-δυτικά πολιτισμικά πλαίσια

Η εμφάνιση μιας ολιστικής οπτικής με άξονα τη μαρξιστική έννοια για τη μεταβολική σχέση ανθρωπότητας και φύσης.

Η απάντηση στο πρώτο ζήτημα προϋποθέτει *τη γνώση των κοινωνικοοικονομικών μετασχηματισμών* που συντελέστηκαν στην Ιαπωνία της

* Ο Γ. Γκοτσης είναι Καθηγητής Μεθοδολογίας και Ιστορίας της Οικονομικής στο Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

περιόδου Meiji (1868-1912) και εντεύθεν (Ishii, 2019). Ηδη από τα τέλη του 19ου αιώνα η Ιαπωνία εισήλθε σε μια φάση εκδυτικισμού των παραδοσιακών φεουδαλικών δομών της και ταχύτατου εκσυγχρονισμού. Προς την κατεύθυνση αυτή συνέβαλλαν διανοητές μεταξύ των οποίων οι Fukuzawa Yukichi (1835-1901) με άξονα μια θεωρία πολιτισμικής εξέλιξης, στην οποία αντιπαρατέθηκαν όσοι απέδιδαν έμφαση στην κοινωνική διάσταση της φτώχειας και τις έκδηλες ανισότητες: Maeda Masana (1850-1921), Yanagita Kunio (1875-1962) και Hajime Kawakami (1879-1946). Ακολουθούν θεωρητικές αντιπαραθέσεις μεταξύ φιλελεύθερων στοχαστών όπως οι Ishibashi Tanzan (1884-1973) και Fukuda Tokuzo (1874-1930), και μαρξιστών όπως οι Yamada Moritaro (1897-1980) και Uno Kozo (1897-1977) κατά τη διάρκεια του μεσοπολέμου και μετέπειτα. Τα διλήμματα αυτά κορυφώνονται στη συλλογιστική στοχαστών κατά την περίοδο της εμπλοκής της Ιαπωνίας στο Β Παγκόσμιο πόλεμο, όπως οι Takata Yasuma (1883-1972) και Ryu Shintaro (1900-1967).

Η γένεση της Οικονομικής στην Ιαπωνία συνδέεται με την πρόσληψη, οικειοποίηση και ερμηνεία του έργου του Adam Smith από τον Yukichi Fukuzawa (1835–1901). Μια πλήρης Ιαπωνική μετάφραση του *Πλούτου των Εθνών* (1776) (*Fukokuron*), δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά στα 1882-1888 από τον Eisaku Ishikawa (1858-1887), μαθητή του Yukichi Fukuzawa, κορυφαίου διανοητή της εποχής (Sakamoto, 2016). Για τον Fukuzawa, ο Smith διατύπωσε τους νόμους της Οικονομικής, θεώρησε τον κοινωνικό πλούτο ως συνέπεια της ατομικής συμπεριφοράς, απέδωσε έμφαση στην οικονομική ελευθερία και έθεσε τα θεμέλια προαγωγής του δημοσίου συμφέροντος.

Ωστόσο, επιχειρήθηκαν και μαρξιστικές αναγνώσεις του έργου του Smith, με συνεπέστερο εκφραστή τον Hajime Kawakami (1879–1946), Καθηγητή στο τμήμα Οικονομικών επιστημών στο Αυτοκρατορικό Πανεπιστήμιο του Κιότο (1915 έως 1928). Ο Kawakami διείδε στον Smith τον συνεπέστερο υπέρμαχο της αρχής της φυσικής ελευθερίας. Ωστόσο η αμιγώς ατομικιστική διάσταση της καπιταλιστικής οικονομίας παραθεωρούσε το επίμαχο ζήτημα της ακραίας ένδειας στα αστικά κέντρα και την ενδοχώρα. Οι συμβολές αυτές επηρέασαν καθοριστικά τη σκέψη του Zenya Takashima (1904-1990), ενός κορυφαίου ιστορικού της οικονομικής σκέψης στη μεταπολεμική Ιαπωνία. Ο Takashima επηρεάστηκε επίσης από ένα εκ των επιβλεπόντων της διατριβής του στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο του Τόκυο, τον Tokuzo Fukuda (1874–1930), ο οποίος εισήγαγε στην προπολεμική Ιαπωνία τη νεοκλασσική Οικονομική του Alfred Marshall, καθώς και την Οικονομική της Ευημερίας του Pigou.

Ο Takashima υπήρξε ένθερμος μελετητής της *Θεωρίας των Ηθικών Συναισθημάτων* του Smith που μεταφράστηκαν στα Ιαπωνικά για πρώτη φορά από τον Tomio Yonebayashi (1905–1968). Επίσης, μελέτησε τον Schumpeter με βάση τις διαλέξεις του Yasuma Takata (1883–1972) στις αρχές της δεκαετίας του 1920 στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο του Τόκυο. Ο Takashima αντιπαρέβαλλε στην καθαρή αφαιρετική Οικονομική που εστίαζε σε ποσοτικές πτυχές της διανομής των αγαθών, μια οικονομική κοινωνιολογία βασισμένη στο έργο των Friedrich List, Werner Sombart, Max Weber και Friedrich Gottl. Με τον τρόπο αυτό, ανοίγεται πλέον στην Ιαπωνία το ερώτημα της εξήγησης των απαρχών του Ιαπωνικού καπιταλισμού, το οποίο θίγει ακριβώς τη δεύτερη διάσταση στην οποία αναφερθήκαμε, αυτή της γένεσης μιας κοινωνίας πολιτών σε αυτόχθονες βάσεις (Nohara, 2022).

Η συγκρότηση μιας ευρύτερης κοινωνικής επιστήμης σε αυτόχθονα πλαίσια συνδέεται με την εμφάνιση της μαρξιστικής σκέψης στην προπολεμική Ιαπωνία. Για την Hannah Arendt, καθώς υπογραμμίζεται στο κορυφαίο έργο της *Η Ανθρώπινη Κατάσταση*, η συγκρότηση ενός κοινωνικού χώρου κατά την Ευρωπαϊκή νεωτερικότητα προϋπέθετε τη σαφή διάκριση μεταξύ ιδιωτικής και δημόσιας σφαίρας: προς αυτήν ακριβώς την κατεύθυνση συνέβαλε η εμφάνιση της πολιτικής οικονομίας κατά τον 18ο αιώνα. Η πρόσληψη και αφομοίωση των δυτικών οικονομικών ιδεών στην Ανατολική Ασία πραγματοποιήθηκε κατά τον ύστερο 19ο αιώνα με κριτικό τρόπο, βασισμένο στην προσαρμογή της δυτικής οικονομικής σκέψης σε διαφορετικά πολιτισμικά και κοινωνικά περιβάλλοντα.

Η εισαγωγή της πολιτικής οικονομίας στην ταχέως εκσυγχρονιζόμενη Ιαπωνία της περιόδου Meiji όφειλε να συνυπολογίσει την αναδυόμενη οριοθέτηση δημόσιας και κοινωνικής σφαίρας σε μια χώρα με ενυπάρχουσες φεουδαλικές δομές: για το λόγο αυτό, η πολιτική οικονομία θεωρήθηκε ως περιεκτική κοινωνική επιστήμη. Ο Yukichi Fukuzawa ειδικότερα, απέρριπτε την κρατούσα Νεο-Κομφουκιανική σύλληψη της οικονομίας, εκλαμβάνοντας την επιδίωξη πλούτου και τη συσσώρευση κεφαλαίου ως θεμιτή κοινωνική στοχοθεσία. Αντιθέτως, υπέρμαχοι των παραδοσιακών απόψεων όπως ο Shigeki Nishimura (1828–1902), απέδιδαν έμφαση στην ενίσχυση της δημόσιας ηθικότητας, υποστηρίζοντας ότι οι κοινωνικοί θεσμοί πρέπει να θεμελιώνονται στην αρετή και το συλλογικό ήθος, όχι στην προαγωγή του ατομικού συμφέροντος (Nohara, 2023). Ασφαλώς, αυτή ακριβώς η σύνθεση Ιαπωνικού Νέο-Κομφουκιανισμού και οικονομίας της αγοράς με άξονα το ιδεώδες της ενάρετης επιχειρηματικής συμπεριφοράς, ανάγεται στην οικονομική και πολιτική δράση ανδρών όπως οι Eiichi Shibusawa (1840-1931) και Ryoichiro Okada (1839-1915), αρκετές δεκαετίες προγενέστερα (IImori, 2022; Kikkawa, 2023; Takehara and Hasegawa, 2020).

Οι καταβολές της συζήτησης για την ενδεχόμενη υπεροχή του ατομικού συμφέροντος ως οικονομικού κινήτρου έναντι της αρετής τοποθετείται ήδη στα μέσα του 18ου αιώνα, στην Ιαπωνία της εποχής Edo του σογκουνάτου Tokogawa (1603-1868). Προς αυτήν ακριβώς την κατεύθυνση κινήθηκε η συλλογιστική του εξέχοντος Κομφουκιανού λόγιου Dazai Shundai (1680-1747), ο οποίος διακρίνει στην ανθρώπινη φύση μια πρωταρχική εγγενή τάση προς το ατομικό συμφέρον. Σε αντίθεση προς τον Ogyū Sorai (1666-1728) για τον οποίο η επικράτηση αγοραίων οικονομικών πρακτικών συνιστούσε αιτία κοινωνικής εξαθλίωσης, στη σκέψη του Shundai ως αρχή της σοφίας ορίζεται η επιδίωξη του ατομικώς επωφελούς, καθώς η αποφυγή του πόνου και η αναζήτηση της απόλαυσης συνθέτουν βασικές ροπές της ανθρώπινης φύσης. Λίγες δεκαετίες μεταγενέστερα, ο Kaiho Seiryo (1755-1817) σε αποκλίνουσα ερμηνεία του Ιαπωνικού Νέο-Κομφουκιανισμού υποστηρίζει τη θέση ότι την ανθρώπινη φύση συνθέτουν επιθυμίες. Στην οπτική του Seiryo ο πρακτικός λόγος προσλαμβάνει μια έκδηλη ωφελιμιστική απόχρωση: το ατομικό συμφέρον συγκροτείται με βάση μια ποικιλομορφία υποκειμενικών προτιμήσεων. Τις επιθυμίες ως πραγματολογικό δεδομένο της ανθρώπινης φύσης, είναι αδύνατο να τις αγνοήσουμε ή να τις καταστείλουμε: καμμιά επιθυμία δεν είναι εντονότερη από το ατομικό συμφέρον, την αγάπη του εαυτού. Βασική ανθρώπινη παρακίνηση σε κοινωνίες θεσμοθετημένων συμβάσεων δεν θεωρούνται πλέον οι αρετές, αλλά το ατομικό συμφέρον και η έφεση προς τον πλούτο (Γκότσης 2021, σσ.45-46; Caspary and Herrmann-Pillath, 2023; Gotsis, 2023; Horide, 2019).

Στο σημείο αυτό κατέστη καθοριστική η εισαγωγή μαρξιστικών ιδεών στην Ιαπωνία, στις αρχές του 20ου αιώνα (Goungor, 2023). Η μαρξιστική πολιτική οικονομία κατέστη συνώνυμη μιας ολιστικής, περιεκτικής θεώρησης της εξέλιξης και του μετασχηματισμού των οικονομικών και κοινωνικών συστημάτων, στο επίκεντρο των συζητήσεων για τον οικονομικό εκσυγχρονισμό της Ιαπωνικής οικονομίας και την εμφάνιση του Ιαπωνικού καπιταλισμού στις αρχές του 20ου αιώνα. Ως ειδικότερη κοινωνική επιστήμη, ο Μαρξισμός κλήθηκε να προσφέρει πειστικές εξηγήσεις στο ζήτημα της καπιταλιστικής μετάβασης σε μια προηγμένη Ασιατική κοινωνία. Συνέπεια τούτου υπήρξε η εμφάνιση δυο ανταγωνιστικών παραδόσεων Ιαπωνικής μαρξιστικής σκέψης: η σχολή Koza-ha εξηρτημένη από τα κελεύσματα της *Comintern* στη Μόσχα, υπεστήριζε ότι η οικοδόμηση του σοσιαλισμού δεν ήταν εφικτή χωρίς να προηγηθεί η αποδέσμευση της Ιαπωνίας από τα προγενέστερα φεουδαλικά κατάλοιπα, τα οποία επιβράδυναν δραστικά την καπιταλιστική ολοκλήρωση και ανάπτυξη. Αντιθέτως, η σχολή *Rono-ha* διατεινόταν ότι, παρά την υστέρηση στην εμφάνιση καπιταλιστικών διαδικασιών στην Ιαπωνία σε σχέση με τη Δυτική Ευρώπη, η ραγδαία ανάπτυξη του Ιαπωνικού καπιταλισμού θα καθιστούσε σύντομα την Ιαπωνία επεκτατική, αν όχι *ιμπεριαλιστική οικονομική δύναμη* (όπως και συνέβη κατά το μεσοπόλεμο). Τα φεουδαλικά κατάλοιπα θα μπορούσαν να εκριζωθούν ταυτοχρόνως με την αποδόμηση των καπιταλιστικών σχέσεων παραγωγής που οραματιζόταν η μαρξιστική σκέψη. Αν και η πρώτη παράδοση εμπνευσμένη από τη Σοβιετική Ορθοδοξία έτεινε να υπερισχύσει, αμφότερες οι σχολές θα υποστουν σοβαρό πλήγμα μεταγενέστερα, από τον Kozo Uno (Westra, 2019).

Κρίσιμο βήμα για τη συγκρότηση της κοινωνικής επιστήμης στην Ιαπωνία απετέλεσε, όπως επισημάνθηκε, η έννοια της κοινωνίας πολιτών στην

Ιαπωνική πολιτική πρακτική. Η συμβολή του Zenya Takashima στη διαμόρφωση της έννοιας *Shimin Shakai* (*civil society*, αρχικώς *πολιτική κοινωνία* και μετέπειτα *κοινωνία πολιτών*), υπήρξε καθοριστική. Ο Takashima θεωρούσε την επιδίωξη του ατομικού συμφέροντος ως ευεργετική υπό την προϋπόθεση ότι *οι κοινωνικοί και πολιτικοί θεσμοί θα διασφάλιζαν το αγαθό της κοινωνικής δικαιοσύνης*, το οποίο απέρρεε από μια θεώρηση ενύπαρκτων στην ανθρώπινη φύση ηθικών συναισθημάτων. Η έννοια της *κοινωνίας πολιτών* προσελάμβανε στη σκέψη του Takashima, *ηθική, πολιτική και οικονομική διάσταση*. Η σύσταση μιας παρόμοιας δημόσιας σφαίρας μη ταυτόσημης προς το κράτος ενείχε ωστόσο και μια *χειραφετική διάσταση*, αφού θα υποδήλωνε την αποδέσμευση της Ιαπωνίας από τα παλαιότερα φεουδαλικά κατάλοιπα της εποχής του Σογκουνάτου (1603-1868).

Σε αυτήν ακριβώς την οπτική του Takashima, βασίζεται η αντίστοιχη έννοια *Shimin Shakai* μεταγενέστερων διανοητών, όπως οι Kiyoaki Hirata, Yoshihiko Uchida και Hiroshi Mizuta (1919-2023). Για τον τελευταίο, ο Adam Smith εξελάμβανε την καπιταλιστική κοινωνία ως κοινωνία πολιτών, απελευθερωμένων από σχέσεις γαιοκτητικής υποτέλειας και επομένως, ελεύθερων. Συνεπώς, το ιδεώδες μιας *Shimin Shakai* απέκτησε πολιτικές συνδηλώσεις, εκφράζοντας μια κοινωνία την οποία συνθέτουν ελεύθεροι πολίτες σε καθεστώς ισονομίας και ισοπολιτείας. Για το λόγο αυτό, ο Yoshihiko Uchida διερμήνευε την πολιτική οικονομία με ηθικούς και φιλοσοφικούς όρους, διακρίνοντας στη συγκρότηση μιας κοινωνίας πολιτών την υλοποίηση της δυνατότητας απελευθέρωσης από κάθε στοιχείο όχι μόνον απολυταρχισμού και δεσποτισμού του παρελθόντος, αλλά και του ολοκληρωτισμού που κυριάρχησε στην Ιαπωνική πολιτική σκηνή την περίοδο του Β Παγκοσμίου Πολέμου. Αντιθέτως, ο Kiyoaki Hirata (1922-1995), εξέχων ιστορικός της οικονομικής σκέψης στην Ιαπωνία, υιοθέτησε μια περισσότερο Γκραμσιανή ερμηνεία της κοινωνίας πολιτών, διαβλέποντας στην πολιτική σφαίρα τις αξιώσεις για ηγεμονία ομάδων με συγκρουόμενες πολιτικές και οικονομικές επιδιώξεις (Yamada, 2018).

Ταυτοχρόνως, αναπτύσσονται σταδιακά και άλλες κριτικές θεωρήσεις του Ιαπωνικού καπιταλισμού. Οι Yoshikazu Miyazaki και Mitsuharu Itoh μελετούν τον Keynes σχολιάζοντας τη *Γενική θεωρία της Απασχόλησης, του τόκου και του χρήματος*, ενώ εξετάζουν και τη μετέπειτα μετα-Κευνσιανή Οικονομική, αναφερόμενοι στο έργο των Kalecki, Joan Robinson και Nicolas Kaldor, αλλά και σε αυτό μεταγενέστερων εκπροσώπων της Θεσμικής Οικονομικής, όπως οι John Kenneth Galbraith και Gunnar Myrdal (Uemura, 2023). Η προβληματική του Yoshihiko Uchida στη διατύπωση μιας θεωρίας περί κοινωνίας πολιτών στη μεταπολεμική Ιαπωνία εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο μιας συζήτησης στην οποία συμμετείχαν στοχαστές όπως οι Kazuo Ōkōchi (1905-1984), Hisao Ōtsuka

(1907-1996) και Masao Maruyama (1914-1996). Ωστόσο, ο Uchida αναλύει με μεγαλύτερη σαφήνεια αυτά τα ζητήματα, διατυπώνοντας σημαντικές αναλυτικές διεισδύσεις στο πλαίσιο μιας καθολικής επιστήμης των κοινωνικών φαινομένων.

Το τρίτο ζήτημα αφορά τη διακρίβωση μιας πρώιμης οικολογικής προβληματικής στο έργο του Marx. Στον Μαρξισμό βεβαίως είχε αποδοθεί μια έκδηλη προμηθεική, αντι-οικολογική οπτική, βασισμένη στην τεχνολογική καθυπόταξη της φύσης. Ωστόσο, η κατάρρευση του υπαρκτού σοσιαλισμού στα 1991, σε συνδυασμό προς την αδυναμία της οικονομίας της αγοράς να προσφέρει ικανοποιητικές λύσεις σε θέματα υποβάθμισης του περιβάλλοντος, έδωσε αφορμή στην εμφάνιση ετερόδοξων, Νέο-μαρξιστικών προσεγγίσεων επικεντρωμένων στην ανακάλυψη μιας διάχυτης οικολογικής ευαισθησίας στον Marx. Βασισμένη στη θεωρία του κοινωνικού μεταβολισμού του Istvan Mészáros, αυτή η οικολογική ανάγνωση του μαρξικού έργου εμφανίζεται θεμελιωμένη στην κριτική της πολιτικής οικονομίας. Ουσιαστικά, συνίσταται σε ενδογενείς μετασχηματισμούς του καπιταλισμού που καθιστούν το σύστημα ανθεκτικό και ευπροσάρμοστο εν όψει οικονομικών και οικολογικών κρίσεων, χωρίς ωστόσο να επιλύεται το πρόβλημα των βαθύτερων αντιφάσεων της καπιταλιστικής συσσώρευσης.

Όλα τα παραπάνω ζητήματα διερευνώνται μεθοδικά και εμπεριστατωμένα στη μονογραφία του Toshio Yamada, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Nagoya, την οποία παρουσιάζουμε εν προκειμένω. Συγκεκριμένα, το δεύτερο ζήτημα της συγκρότησης μιας κοινωνικής επιστήμης στην Ιαπωνία με βάση το έργο του Yoshihiko Uchida, αναλύεται στο δεύτερο κεφάλαιο του εξεταζόμενου βιβλίου. Στο σημείο αυτό υποστηρίζεται ότι η διαμόρφωση μιας λειτουργικής έννοιας κοινωνίας πολιτών από τον Uchida (σσ-32-34), απορρέει από την έρευνα του σε πληθώρα τομέων που περιλαμβάνουν τη γένεση του Ιαπωνικού καπιταλισμού, την οικονομική ιστορία, την κοινωνική πολιτική και τη θεωρία της τεχνολογίας του Mitsuo Taketani (1911-2000). Εν συνεχεία, αναλύεται το έργο του Uchida, *The Birth of Economic Science* (1953), με βάση το οποίο διατυπώνεται μια αφαιρετική θεωρητική σύλληψη της κοινωνίας πολιτών, ενδεχομένως μοναδική στις κοινωνικές επιστήμες στην Ιαπωνία (σσ. 34-37).

Το τρίτο ζήτημα που θίξαμε προηγουμένως εξετάζεται στο τρίτο κεφάλαιο αυτής της μονογραφίας. Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται ότι στη σκέψη του Yoshihiko Uchida ενυπήρχαν όλα εκείνα τα στοιχεία μιας διαφορετικής ανάγνωσης του Marx υπο το πρίσμα των σχέσεων ανθρώπου, φύσης και κοινωνικής πραγματικότητας. Αυτην ακριβώς την επι μακρόν αγνοηθείσα στη δυτική ακαδημαϊκή συζήτηση οικολογική διάσταση της μαρξικής σκέψης, την είχε διακρίνει αρκετές δεκαετίες νωρίτερα ο Uchida. Για τον Yoshihiko Uchida, αυτή ακριβώς η οικολογική προοπτική αναγορεύεται σε ουσιαστική συνιστώσα μιας καθολικής κοινωνικής επιστήμης. Η θεωρητική εκλογίκευση της κοινωνίας πολιτών εμφανίζεται για τον Uchida ως άρρηκτα συνυφασμένη προς τη σχέση ανθρώπου-φύσης ως θεμελιώδης συνιστώσα μιας νέας θεώρησης της κοινωνίας και της ιστορίας. Αναλύεται εν προκειμένω η ιστορική διαδρομή του Marx από τα *Οικονομικά και Φιλοσοφικά Χειρόγραφα* του 1844 μέσω των *Grundrisse* του 1857–1858 έως το *Κεφάλαιο*, και διαφαίνεται η διατάραξη της πρωταρχικής σχέσης ανθρώπου φύσης στον προηγμένο καπιταλισμό (σσ.48-51). Αυτήν ακριβώς την κοινωνική δυναμική συνήγαγε ο Uchida με βάση τη μελέτη των Smith, Marx και Hajime Kawakami, ορίζοντας την κοινωνία πολιτών ως *ορθολογικό σύστημα διαχείρισης του μεταβολισμού ανθρώπου-φύσης βασισμένο στη δημοκρατία, την ελευθερία, την ισότητα και τα ανθρώπινα δικαιώματα* (σσ. 62-64).

Στο τέταρτο κεφάλαιο αυτής της μονογραφίας θίγεται το πρώτο ζήτημα της γένεσης της οικονομικής επιστήμης στην Ιαπωνία με βάση το έργο του Hajime Kawakami (1879-1946). Ο Uchida αντελήφθη ότι ο Kawakami, ενώ είχε ως θεωρητική αφετηρία τη σύζευξη αστικού ορθολογισμού και εθνικισμού (σσ. 73-76), συνειδητοποίησε ότι η απολυταρχική δομή του Ιαπωνικού κράτους έπρεπε να αλλάξει ως συνέπεια της ανάπτυξης των παραγωγικών δυνάμεων και του εντεινόμενου καταμερισμού της εργασίας (σσ. 76-80). Ο Uchida διέβλεπε στον Kawakami μια έμφαση στην ανθρώπινη συνειδητότητα, με άξονα τη σημασία της ανιδιοτέλειας και του αλτρουισμού ως παραμέτρων μιας νέας σχέσης οικονομίας και ηθικής. Παρά τα στοιχεία αυτά, ο Kawakami απομακρύνθηκε από μια ανθρωπιστική θεώρηση της οικονομίας στρεφόμενος στη συγκρουσιακή προοπτική της μαρξιστικής θεωρίας (σσ. 80-83).

Αυτή η εξέλιξη επέδρασε καθοριστικά στην πνευματική πορεία του Kawakami, αναδεικνύοντας τις πλέον ενδόμυχες συγκρούσεις εντός του συναισθηματικού του κόσμου. Ο Kawakami αντιλαμβάνεται πλέον τις βαθύτερες αντιφάσεις μεταξύ της ακαδημαϊκής του ενασχόλησης και της πολιτικής του στράτευσης, γεγονός που τον οδήγησε να μετατραπεί σε ένα εκλαϊκευτή των μαρξιστικών αντιλήψεων που έθεσε ως στόχο τη διάδοση τους στο κοινωνικό σώμα. Η εξέλιξη αυτή συνέβαλε, κατά την οπτική του παρουσιαζόμενου βιβλίου του Toshio Yamada, στην απώλεια του δημιουργικού του πνεύματος, αφού εξέλαβε πλέον *την ερμηνεία του Κεφαλαίου ως μοναδική σοβαρή κοινωνική επιστήμη, υπηρετώντας τη διερώτηση του μέσου πολίτη σε θέματα κοινωνικού μετασχηματισμού*. Ακολουθεί αυτό που ο Yamada περιγράφει ως *συναίσθηση της τραγικότητας* στην ιστορία των κοινωνικών επιστημών στην Ιαπωνία, αφου η Ιαπωνική διανόηση στερείται ενός από τα πλέον δημιουργικά στελέχη της (σσ. 83-88). Ο Kawakami θα οδηγηθεί στη φυλακή την περίοδο του Ιαπωνικού μιλιταρισμού, ενώ μετά την αποφυλάκιση του δεν επιστρέφει ποτέ στη θεραπεία των κοινωνικών επιστημών, αλλά στρέφεται στην καλλιέργεια της αισθητικής έκφρασης μέσω της ποίησης. Αυτό ωστόσο, εκλαμβάνεται ως μια εξόχως δημιουργική στροφή στο βίο αυτού του Ιάπωνα λογίου (σσ. 89-91).

Στο πέμπτο κεφάλαιο του υπό συζήτηση βιβλίου, ο Yamada διερευνά τις βάσεις της Οικονομικής στη μεταπολεμική Ιαπωνία. Αναφέρεται κατ’ αρχήν στην έμφαση που απέδωσε ο Adam Smith στην επιδίωξη του ατομικού συμφέροντος και τις κοινωνικά επωφελείς εκβάσεις του, την βελτίωση της ανταγωνιστικότητας και της οικονομικής αποτελεσματικότητας. Εν συνεχεία, υπογραμμίζεται το γεγονός ότι, στη βάση αυτής της ανάγνωσης του σμιθιανού έργου, η νέο-φιλελεύθερη σκέψη ενεθάρρυνε τον άκρατο ατομικισμό που επέφερε την οικονομική κρίση του 2008, αλλά και την επίταση των οικονομικών ανισοτήτων σε εθνικό και παγκόσμιο επίπεδο (σσ. 96-97).

Εν τούτοις, η ανάγνωση του Smith από τον Yoshihiko Uchida αποκαλύπτει τις αγνοημένες και υποβαθμισμένες πτυχές του θεμελιωτή της κλασσικής Οικονομικής στη Δυτική Ευρώπη. Σύμφωνα με τον Uchida, η επιδίωξη του ατομικού συμφέροντος στον Smith αποκτά νόημα στην περίπτωση των μεσαίων και κατωτέρων κοινωνικών στρωμάτων, θεμιτή στοχοθεσία των οποίων ήταν η βελτίωση των συνθηκών ζωής μέσω της συναλλακτικής δικαιοσύνης, αλλά και της έννοιας του αμερόληπτου παρατηρητή (*impartial spectator*). Σύμφωνα με τον Uchida, το ατομικό συμφέρον στον Smith εντάσσεται σε μια σχέση αμοιβαιότητας, βασισμένη στην αναγνώριση ότι και τα άλλα άτομα ωθούνται από αντίστοιχα οικονομικά κίνητρα: πρόκειται για ένα *δεσμευμένο ατομικό συμφέρον*, ρυθμιζόμενο από τα ηθικά συναισθήματα στην ιδιόμορφη λειτουργία τους εκτός του φυσικού τους χώρου που παραμένει η σφαίρα των κοινωνικών θεσμών. Αυτό σημαίνει ότι *ηθικά συναισθήματα και ατομικό συμφέρον είναι άρρηκτα συνυφασμένα*, λειτουργούν συμπληρωματικά, ενώ δεν νοείται η αυτονόμηση μιας πτυχής του ανθρώπινου βίου από την άλλη (σσ. 97-99, 100-101).

Στην αρχή του 21ου αιώνα ωστόσο, η ευεργετική επίδραση της *αοράτου χειρός* του Smith έχει πλέον χαθεί. Αντιθέτως, αναδύεται αυτό που το βιβλίο αποκαλεί χείρα χειραγώγησης (*manipulative hand*), καθώς οι μεγάλες εταιρικές οντότητες υπαγορεύουν και καθορίζουν τις προτιμήσεις, αλλά και αλλοιώνουν τη δέσμη οικονομικών κινήτρων των ατόμων. Αυτή η νέα πραγματικότητα επιφέρει καταστάσεις ηθικής διαφθοράς και κατάλυσης των κοινωνικών ρυθμιστικών συνθηκών κατά τη διατύπωση του Michael Sandel (σσ. 102-104). Καθώς όμως υπογραμμίστηκε ήδη, συναισθήματα συμπάθειας και ατομικό συμφέρον, ηθικότητα και οικονομικά κίνητρα, δεν συνιστούν αμοιβαίως αποκλειόμενες ρυθμιστικές σφαίρες, αλλά τομείς με αλληλεπίδραση και διαδραστικές σχέσεις, γεγονός που εύστοχα επισημαίνεται από τον Samuel Bowles στην κριτική αναθεώρηση των κοινωνικών επιστημών υπό το πρίσμα της αδυναμίας διαχωρισμού πραξιακών κινήτρων και ηθικότητας (σσ. 104-106). Σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή, η διάδοση και επέκταση της ασυμμετρικής πληροφόρησης και των ατελών συμβολαίων στον ύστερο καπιταλισμό, καθιστά επιτακτική την οικοδόμηση σχέσεων εμπιστοσύνης μέσω ηθικών δεσμεύσεων και προσηλώσεων σε κοινά αποδεκτούς αξιακούς κανόνες (σσ. 106-107).

Κατά συνέπεια, αμφότεροι οι Uchida και Bowles προβαίνουν στην απερίφραστη καταδίκη μιας οικονομικής επιστήμης προσανατολισμένης στην υπόθεση της μονομερούς επιδίωξης του ατομικού συμφέροντος. Η υπόθεση homo economicus, στερείται της αναγκαίας ηθικής θεμελίωσης που θα καθιστούσε εφικτή την ταυτόχρονη ικανοποίηση των κριτηρίων ευημερίας και δικαιοσύνης, με άξονα την ενότητα ατομικού συμφέροντος και ηθικής, αλλά και τη συμπληρωματικότητα μεταξύ αγοράς και κοινωνίας πολιτών (σ. 108). Το έργο ολοκληρώνεται με συμπερασματικές διατυπώσεις: ο Uchida εμπλουτίζει και διευρύνει την έννοια του καταμερισμού της εργασίας στον Smith, ενσωματώνοντας τις σύγχρονες συνδηλώσεις της μαρξικής έννοιας της αλλοτρίωσης, με άξονα τη διάσπαση της οντολογικής ενότητας της ανθρώπινης ύπαρξης στον καπιταλισμό (111-114). Μια ηθικά διευρυμένη έννοια καταμερισμού της εργασίας θα μπορούσε να συστήσει θεμέλιο μιας ενιαίας και συμπεριληπτικής κοινωνικής επιστήμης (σσ. 114-117).

Η μονογραφία αυτή, αν και συνοπτική, παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον, ιδίως για το μη-δυτικό αναγνωστικό κοινό, καθώς και σε όσες/ους εκδηλώνουν ενδιαφέρον για τη γένεση και εξέλιξη των κοινωνικών επιστημών στην Ιαπωνία. Εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της ιστορίας των κοινωνικών επιστημών σε αυτόχθονα πολιτισμικά περιβάλλοντα, αναδεικνύοντας τους μηχανισμούς πρόσληψης, αφομοίωσης και διερμήνευσης της δυτικής επιστήμης από μη δυτικούς διανοουμένους σε μεταβαλλόμενες ιστορικές και κοινωνικές συνθήκες. Θα ευχόμαστε ωστόσο, αυτό το εγχείρημα να έχει, καθώς διαφαίνεται, την κατάλληλη συνέχεια, καθώς η περιορισμένη έκταση του έργου ενδέχεται να δημιουργήσει ορισμένα αναπάντητα ερωτήματα στον Έλληνα (και Ευρωπαίο εν γένει) αναγνώστη, ανοικτά προς περαιτέρω δημιουργική διερεύνηση.

Βιβλιογραφια

[1] S. C. Caspary & C. Herrman-Pillath: "Rethinking Confucianism: Family business and the ritual construction of the 'family' in Japan and China". Στο: *Family Firms and Business Families in Cross-Cultural Perspective*, επιμ. T. Koellner, Cham, Palgrave Macmillan, 2023, 149–178.

[2] Γ. Γκοτσης: *Διοικητική φιλοσοφία και ηθική στην Ανατολική Ασία: Σύγχρονη Κομφουκιανική επιχειρησιακή ηθική*. Θεσσαλονίκη, Ζήτη, 2021.

[3] G. Gotsis: "Economic policy in the prehistory of economics: A comparative perspective". Στο: *Economic Policy and the History of Economic Thought*, επιμ. S. Drakopoulos and I. Katselidis, London, Routledge, 2023, 13–33.

[4] P. M. Goungor: *The influence and interpretation of the work of Karl Marx in the Japanese economic thought of the early 20th century*. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα ΙΦΕ, ΕΚΠΑ, 2023.

[5] I. Horide: "Why study the ethical thought of merchants in the Edo Period Japan?". Στο: *The Mercantile Ethical Tradition in Edo Period Japan*, Singapore, Springer, 2019, 29–34.

[6] A. Iimori: "Eiichi Shibusawa's support for international society through the league of nations association of Japan". Στο: *100 Years of World Wars and Post-War Regional Collaboration*, επιμ. K. Haba, A. Canavero & S. Mizobata, Singapore, Springer, 2022, 77–83.

[7] J. Ishii: "Economic development and economics in Japan, 1870-1940". Στο: *Ideas in the History of Economic Development: The Case of Peripheral Countries*, επιμ. E. Trincado, A. Lazzarini & D. Melnik, London, Routledge, 2019.

[8] T. Kikkawa: "Eiichi Shibusawa: Mobilization of managerial resources by an investor-manager". Στο: *History of Innovative Entrepreneurs in Japan*, Singapore, Springer, 2023, 73–83.

[9] S. Nohara: "The reception of Adam Smith in Japan: The formation of the idea of shimin shakai, or civil society, by Zenya Takashima before the end of World War II". *Journal of the History of Economic Thought* 44 (3) (2022), 370-392.

[10] S. Nohara: "The transformation of Adam Smith's Political Economy in Japan: The struggle between Yukichi Fukuzawa and Shigeki Nishimura over wealth and virtue". *Journal of Scottish Philosophy* 21 (1) (2023), 97-118.

[11] T. Sakamoto: "Adam Smith's 'sympathy' in modern Japanese perspectives". Στο: *The diffusion of Western economic ideas in East Asia*, επιμ. M. Warner, London, Routledge, 2016, 250–265.

[12] M. Takehara & N. Hasegawa: "Ryoichiro Okada: Aiming for integration of economy and morality". Στο: *Sustainable Management of Japanese Entrepreneurs in Pre-War Period from the Perspective of SDGs and ESG*, Cham, Palgrave Macmillan, 2020, 43–58.

[13] H. Uemura: "Yoshikazu Miyazaki and Mitsuharu Itoh: Research on Keynes and contemporary capitalism". Στο: *Japanese Institutionalist Post-Keynesians Revisited: Inheritance from Marx, Keynes and Institutionalism*, Singapore, Springer, 2023, 41–56.

[14] R. Westra: "The Japanese Uno–Sekine Approach to Marxian Political Economy". Στο: *Periodizing Capitalism and Capitalist Extinction*, Cham, Palgrave Macmillan, 2019, 147–177.

[15] K. Yagi: *Modern Japanese Economic Thought: An Intellectual History to 1950*. London, Routledge, 2022.

[16] T. Yamada: "Kiyoaki Hirata and his thoughts on civil society". In: *Contemporary Capitalism and Civil Society: The Japanese Experience*, Singapore, Springer, 2018, 49–67.

ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΤΙΚΗ

WILBUR RICHARD KNORR

Η ΑΡΧΑΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ: Τ. ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ, ΠΡΟΛΟΓΟΣ: Ν. SIDOLI,
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Γ. ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ & Μ. ΣΙΑΛΑΡΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, ΗΡΑΚΛΕΙΟ, 2022

ΝΤΟΡΑ ΤΟΥΛΙΑΤΟΥ*

Η *Αρχαία Παράδοση των γεωμετρικών προβλημάτων* δεν συνιστά μια εμπεριστατωμένη ιστορία της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας. Στην πραγματικότητα, απαριθμεί τις απόπειρες της αναλυτικής επίλυσης προβλημάτων, κυρίως, κατά τη διάρκεια των ελληνιστικών χρόνων. Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της δραστηριότητας επικεντρώθηκε στην εύρεση λύσεων στα τρία κλασικά γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας: 1) τον διπλασιασμό του κύβου, πρόβλημα που ανάγεται στην εύρεση δύο μέσων ανάλογων μεταξύ δύο δεδομένων ευθύγραμμων τμημάτων. 2) την κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός δεδομένου κύκλου και 3) την τριχοτόμηση μιας δεδομένης γωνίας. Το κεφάλαιο 2, λοιπόν, «Απαρχές και πρώτες προσπάθειες», αφιερώνεται στην απαρίθμηση των πρώτων προσπαθειών για την αναζήτηση λύσεων στα συγκεκριμένα προβλήματα. Με την μελέτη των τεκμηρίων της πρώιμης έρευνας, ειδικότερα στα προβλήματα του διπλασιασμού του κύβου και του τετραγωνισμού του κύκλου, ανακαλύπτονται οι ρίζες της ενασχόλησης των αρχαίων με την επίλυση προβλημάτων. Ο Knorr επιχειρεί μια ενδελεχή επισκόπηση των πρώιμων προσπαθειών της αρχαίας παράδοσης, απογυμνώνοντας αυτές από τους μύθους που τις περιβάλλουν, και αναδεικνύει την καθοριστική σημασία του έργου του Ιπποκράτη του Χίου, ο οποίος συνέβαλε τα μέγιστα στην έναρξη της έρευνας των γεωμετρικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Ερατοσθένη, ο Ιπποκράτης ο Χίος ήταν ο πρώτος που είχε την ιδέα να ανάγει τον διπλασιασμό του κύβου στην εύρεση δύο μέσων ανάλογων σε συνεχή αναλογία με λόγο 2:1. Παρόλο που ο Ερατοσθένης αποδίδει μικρή αξία στη σκέψη του Ιπποκράτη, ο Knorr επισημαίνει τη σπουδαιότητα αναγωγής ενός προβλήματος σε μια μορφή που επιτρέπει την εφαρμογή ενός νέου φάσματος γεωμετρικών τεχνικών, στη συγκεκριμένη περίπτωση της θεωρίας αναλογιών. Γενικά, παρατηρεί ο Knorr, αυτή η μορφή μετασχηματισμού (*ἀπαγωγή*) ενός

* Η Ν. Τουλιατου είναι Διδάκτορας του Τμήματος Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

προβλήματος σε άλλο, από τη λύση του οποίου προκύπτει και η λύση του αρχικού, είναι μια ισχυρή τεχνική επίλυσης προβλημάτων, ένας πρόδρομος της μεθόδου της γεωμετρικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, η αναγωγή του διπλασιασμού του κύβου προάγει τις γεωμετρικές τεχνικές της θεωρίας των αναλογιών, ενώ η αναγωγή του τετραγωνισμού του κύκλου σε τετραγωνισμό μηνίσκων ανάγει τις κατασκευαστικές τεχνικές σε προβλήματα, από τη μελέτη των οποίων θα προκύψουν, μεταγενέστερα, περιορισμοί στις τεχνικές κατασκευής. Τότε μόνο, στο πλαίσιο αυτής της πιο εκλεπτυσμένης γεωμετρίας, η τριχοτόμηση της γωνίας θα αποτελέσει πρόβλημα προς επίλυση.

Οι τεχνικές μέθοδοι γεωμετρίας που αναπτύχθηκαν κατά την πρώιμη περίοδο, και ιδιαίτερα η συνεισφορά του Ιπποκράτη του Χίου, έθεσαν τις βάσεις για μεταγενέστερες έρευνες και σημείωσαν σημαντική πρόοδο στα χέρια μιας ομάδας γεωμετρών που συνδέονται με την Ακαδημία του Πλάτωνα. Στις μελέτες αυτών των γεωμετρών ο Knorr αφιερώνει το κεφάλαιο 3, «Οι γεωμέτρες της Ακαδημίας του Πλάτωνα». Η ενθάρρυνση της μαθηματικής έρευνας προέρχεται από τον Πλάτωνα, ο οποίος επεφύλαξε μια ειδική θέση στα Μαθηματικά μέσα στο πρόγραμμα του για τη φιλοσοφική εκπαίδευση. Πράγματι, ο Πλάτων, εντυπωσιασμένος από την τεχνική αυστηρότητα κάποιων παλαιότερων γεωμετρών, και ειδικότερα του Θεόδωρου του Κυρηναίου, ενός σύγχρονου του Σωκράτη, καθώς και τις ιδιοφυείς εμπνεύσεις γεωμετρών της δικής του γενιάς, ειδικότερα του Αρχύτα του Ταραντίνου και του Θεαίτητου του Αθηναίου, θέλησε να ενσωματώσει τεχνικά παραδείγματα στα κείμενα του, προκειμένου να αποσαφηνίσει σημεία της μεθόδου του. Περί τα μέσα του 4ου αιώνα, εντάχθηκε στη σχολή ο Εύδοξος ο Κνίδιος, ο οποίος, μαζί με τους μαθητές του Μέναιχμο και Δεινόστρατο, ώθησαν στο έπακρο τη μαθηματική έρευνα. Ο Knorr παραθέτει, λεπτομερώς, και επεξηγεί τις λύσεις που προτάθηκαν από τον Αρχύτα, τον Εύδοξο και τον Μέναιχμο για τα προβλήματα τόσο του διπλασιασμού του κύβου όσο και του τετραγωνισμού του κύκλου. Είναι αξιοσημείωτο ότι η αντιμετώπιση των προβλημάτων με μια ποικιλία γεωμετρικών μεθόδων οδήγησε: 1) στις πρώιμες μελέτες των κωνικών τομών από τον Μέναιχμο. 2) σε μια ειδική τεχνική που οι σύγχρονοι συγγραφείς αποκαλούν «μέθοδο της εξάντλησης» ή «έμμεση μέθοδο των ορίων», της οποίας η πατρότητα αποδίδεται στον Εύδοξο. Η «μέθοδος της εξάντλησης» συνιστά τη βάση για τη μέτρηση του κύκλου, της πυραμίδας, του κώνου και της σφαίρας και έχει αποτελέσει αντικείμενο πραγμάτευσης τόσο από τον Αρχιμήδη στο *Κύκλου Μέτρησις* όσο και από τον Ευκλείδη στο Βιβλίο XII των *Στοιχείων*. 3) σε μία καμπύλη, την «τετραγωνίζουσα» η οποία, με βάση τη μαρτυρία του Πάππου, δημιουργήθηκε για τον τετραγωνισμό του κύκλου από τον Δεινόστρατο, τον Νικομήδη και κάποιους άλλους νεότερους, χρησιμοποιήθηκε, όμως, από τον ίδιο τον Πάππο για την τριχοτόμηση μιας γωνίας. Ο Knorr, ανατρέχοντας στα στοιχεία που συλλέγει από τους σχολιαστές της Ύστερης Αρχαιότητας, μεταφέρει με λεπτομέρειες τις λύσεις που προτάθηκαν, κατά την πρώιμη περίοδο για την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων, καθώς και τις διαφορετικές απόψεις που υπήρξαν σχετικά με την πατρότητα των διαφόρων αποτελεσμάτων που προέκυψαν, τόσο από σχολιαστές όσο και από σύγχρονους ιστορικούς.

Το φιλοσοφικό περιβάλλον της Ακαδημίας του Πλάτωνα, μέσα στο οποίο αυτοί οι γεωμέτρες πραγματοποίησαν τις έρευνές τους, αποτέλεσε το έναυσμα για τη διαμόρφωση μιας συγκεκριμένης οπτικής, η οποία διαμορφώθηκε, πρωτίστως, από τους σχολιαστές της Ύστερης Αρχαιότητας. Υπό το πρίσμα, λοιπόν, αυτής της οπτικής, κυρίαρχο ρόλο διαδραματίζει η σύγκλιση φιλοσοφικών και μαθηματικών ενδιαφερόντων, η οποία θα οδηγήσει στην άμεση επίδραση της φιλοσοφικής παράδοσης, κυρίως του Πλάτωνα, στην ελληνική γεωμετρία. Αποτέλεσμα αυτής της αντίληψης είναι η ανάπτυξη μιας «εξωτεριστικής» οπτικής, η οποία επικεντρώνεται στα εξής σημεία: 1) ο φιλοσοφικός λόγος θεωρήθηκε το αρχικό πρότυπο της θεωρητικής σκέψης των Ελλήνων γεωμετρών και, 2) οι μεταμαθηματικοί» προβληματισμοί, όπως για παράδειγμα η οργάνωση των γεωμετρικών ευρημάτων σε συνεκτικές δομές παραγωγικού συλλογισμού, αποτέλεσαν την κινητήρια δύναμη που ώθησε, αποτελεσματικά, τις προσπάθειές τους. Όμως, η συγγραφή ενός εγχειριδίου, υποστηρίζει ο Knorr, αποτελεί τον τελευταίο όρο μιας ακολουθίας, αλλά, σε καμία περίπτωση, δεν εξηγεί το κυριότερο: το κίνητρο εμπλοκής κάποιου σε μια δραστηριότητα. Όσον αφορά στους αρχαίους γεωμέτρες, ο Knorr θεωρεί πιο πειστική μια «εσωτεριστική» θέση, σύμφωνα με την οποία η τεχνική έρευνα στοχεύει στη λύση προβλημάτων που έχουν ανακύψει από προηγούμενες ή εν εξελίξει ερευνητικές προσπάθειες. Ο στόχος της διαμόρφωσης πιο αυστηρών αποδείξεων για ήδη γνωστά αποτελέσματα μπορεί να προκαλέσει, χωρίς αμφιβολία, μια μορφή έρευνας, αλλά, με εξαίρεση την περίπτωση του Εύδοξου, το πλαίσιο των μαθηματικών εμπνεύσεων των αρχαίων γεωμετρών που παρουσιάζουν ενδιαφέρον έγκειται στη μελέτη προβλημάτων. Άλλωστε, οι συζητήσεις σχετικά με τα προβλήματα θεμελίωσης απασχόλησαν, πρωτίστως, τους φιλόσοφους, οι οποίοι ενδιαφέρονταν να εντάξουν μαθηματικά ερωτήματα στο πλαίσιο των δικών τους φιλοσοφικών απόψεων, όπως είναι ο Πλατωνισμός, ο Επικουρισμός και ο Σκεπτικισμός. Η συμμετοχή των μαθηματικών σε αυτό το πεδίο υπήρξε μικρή και, αντιστρόφως, η επιρροή του στις δικές τους έρευνες ακόμα μικρότερη. Η εναλλακτική άποψη, λοιπόν, που υποστηρίζει ο Knorr σε αυτή τη μελέτη, αναγνωρίζει τη σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρίας και φιλοσοφίας στον ειδικό κλάδο που ασχολείται με την τυπική φύση της απόδειξης, αλλά θεωρεί ότι οι δύο κλάδοι αναπτύχθηκαν αυτόνομα.

Ο κύριος όγκος της *Αρχαίας παράδοσης* είναι αφιερωμένος στη μελέτη των γεωμετρών της ελληνιστικής περιόδου: στον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, τον Απολλώνιο και τους συγχρόνους τους. Στο κεφάλαιο 4 ο Knorr πραγματεύεται τη γεωμετρία του Ευκλείδη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τίτλος του κεφαλαίου, «Η Γενιά του Ευκλείδη», ο οποίος απομακρύνει τον συγκεκριμένο μαθηματικό από το επίκεντρο και, μάλιστα, έρχεται σε αντίθεση με τους τίτλους των κεφαλαίων 5 και 7, με τους οποίους εκθειάζεται η συνεισφορά του Αρχιμήδη και Απολλώνιου, αντίστοιχα. Ο τίτλος του κεφαλαίου 4 συνάδει με την άποψη που αναλύεται από τον Knorr σχετικά με τη συνεισφορά του Ευκλείδη στην επίλυση προβλημάτων. Πράγματι, παρόλο που ο Knorr αναγνωρίζει τον Ευκλείδη ως έναν αποτελεσματικό δάσκαλο και συμπιλητή, υποστηρίζει ότι δεν ενεργεί μόνος του, αλλά βρίσκεται σε διαρκή αλληλεπίδραση τόσο με τους τους προδρόμους του όσο και τους σύγχρονούς του, οργανώνοντας και συνθέτοντας έργα προγενέστερων συγγραφέων, στα οποία ενσωματώνει και τα αποτελέσματα που παράγει ο ίδιος. Ο Knorr θα ισχυριστεί ότι τα *Στοιχεία* είναι ένα εισαγωγικό, αλλά όχι καινοτόμο έργο, το οποίο αντλεί από τις ανακαλύψεις του Θεαίτητου, του Εύδοξου και των συνεχιστών τους, και, επί της ουσίας, δεν θα συζητηθεί στην *Αρχαία παράδοση*. Σύμφωνα με τον Knorr, η συνεισφορά του Ευκλείδη στην επίλυση προβλημάτων ανιχνεύεται στα *Δεδομένα*, τα *Κωνικά* (3 βιβλία, δεν διασώζεται), τα *Πορίσματα* (3 βιβλία, δεν διασώζεται) και, σε μικρότερο βαθμό, στο *Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ* (2 βιβλία, δεν διασώζεται). Από τα έργα που δεν διασώζονται, θεωρήθηκε ότι τα *Κωνικά* περιείχαν ανάλογα θέματα με τα *Κωνικά* του Απολλώνιου, ενώ το περιεχόμενο των *Πορισμάτων* ανακατασκευάστηκε, εν μέρει, από λήμματα που παραθέτει ο Πάππος. Όσο για τα *Δεδομένα*, ο Knorr υποστηρίζει ότι καινοτομούν ως προς τη μορφή, ενώ το περιεχόμενό τους αναπαράγει αυτό των *Στοιχείων*, με στόχο, όμως, να οργανώσει τα μαθηματικά αποτελέσματα, ώστε να εφαρμοστούν στη γεωμετρική ανάλυση. Ο κύριος όγκος του κεφάλαιου 4 αποτελείται από *ανακατασκευές* προβλημάτων οι οποίες προέρχονται από την θεωρία των κωνικών του Αρισταίου ή από τα *Πορίσματα*, καθώς και ανακατασκευές γεωμετρικών αναλύσεων που υποκρύπτονται πίσω από αρχαίες κατασκευές γεωμετρικών τόπων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι οι μαθηματικές ανακατασκευές που αποτελούν τον κύριο όγκο του κεφαλαίου 4, παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη μεθοδολογία της *Αρχαίας παράδοσης* διατρέχοντας όλο το έργο. Για την καλύτερη κατανόηση, όμως, της μεθοδολογίας θα πρέπει το συγκεκριμένο έργο να ενταχθεί και να εξεταστεί στο πλαίσιο της συνολικής εργογραφίας του Knorr. Η *Αρχαία παράδοση* γράφεται μετά την *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων* (*Evolution of the Euclidean Elements*, 1975) και αποτελεί μέρος του ίδιου ερευνητικού προγράμματος με τις *Κειμενικές μελέτες στην αρχαία και μεσαιωνική γεωμετρία* (*Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, 1989). Οι *Κειμενικές μελέτες* αναφέρονται στον πρόλογο της *Αρχαίας παράδοσης*, ως τόμος υπό διαμόρφωση και, περιστασιακά, στο κείμενο, ως «ο δεύτερος τόμος». Στην *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων* ο Knorr καταλήγει σε πολλά νέα συμπεράσματα, ακολουθώντας, όμως, μία παλαιά παράδοση ανασυγκρότησης της ιστορίας των Μαθηματικών που περιέχονται στα

Στοιχεία, με βάση εκτεταμένες ανακατασκευές οι οποίες, συχνά, στηρίζονται σε αρκετά ασαφείς πηγές και σε ανεπιβεβαίωτους ισχυρισμούς ότι τα ίδια τα *Στοιχεία* αποτελούν σχεδόν καθαρή αντιγραφή παλαιότερων έργων. Αντίθετα, το κύριο μεθοδολογικό εργαλείο του Knorr στο συγκεκριμένο ερευνητικό πρόγραμμα είναι η μαθηματική και ορθολογική ανακατασκευή. Πράγματι, η *Αρχαία παράδοση* περιλαμβάνει ένα σημαντικό αριθμό ανακατασκευών, οι οποίες, όμως, υποστηρίζονται από περισσότερες μαθηματικές πηγές σε σχέση με αυτές που αναπτύσσονται στην *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων*· επιπλέον, οι μαθηματικές πηγές που χρησιμοποιούνται μελετώνται, λεπτομερώς, στις *Κειμενικές μελέτες*, όπου ο Knorr προβαίνει σε προσεκτικές φιλολογικές αντιπαραβολές ανάμεσα σε διάφορες μεσαιωνικές πηγές και σε αρχαία κείμενα, όπως το *Κύκλου μέτρησις* του Αρχιμήδη. Τα αποτελέσματα, όμως, των μαθηματικών ανακατασκευών είναι, κατά βάση, αβέβαια, από τη στιγμή που διάφοροι ερευνητές μπορούν, και έτσι γίνεται, να οδηγηθούν σε εντελώς διαφορετικά συμπεράσματα, τα οποία είναι πιθανό να αποκλίνουν ακόμη και από το αρχικό κείμενο. Ως εκ τούτου, η χρήση τους θεωρείται αναχρονιστική και έχει πλέον εκλείψει. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες· ειδικά, στην περίπτωση πραγματειών που δεν διασώζονται, αποτελούν τη μόνη δυνατότητα διαμόρφωσης κάποιων υποθέσεων. Πράγματι, από τη στιγμή που τα παραδείγματα μαθηματικών αποτελεσμάτων από ελληνικές πηγές είναι πενιχρά, αυτές οι ανακατασκευές μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη ενός ευρύτερου πλαισίου κατανόησης των αποσπασματικών τεκμηρίων που διασώζονται. Για πολλά από τα μη διασωθέντα έργα του σώματος κειμένων της αρχαίας ανάλυσης, όπως τα *Πορίσματα* του Ευκλείδη, το *Περί των κανονικών στερεών σωμάτων* του Αρισταίου ή το *Περί χωρίου αποτομής* του Απολλώνιου, η μόνη δυνατή προσέγγιση που υπάρχει σχετικά με το περιεχόμενό τους προκύπτει από μαθηματική ανακατασκευή. Παρόλο που ο Knorr μετά την *Αρχαία παράδοση* απομακρύνθηκε από αυτή τη μέθοδο, ο τρόπος που χρησιμοποιεί τις μαθηματικές ανακατασκευές σε αυτό το έργο αναδεικνύει τις ωφέλειες που μπορούν να προκύψουν από αυτήν τη μεθοδολογική προσέγγιση. Στην *Αρχαία παράδοση*, η σημαντικότερη όψη αυτής της μεθοδολογικής προσέγγισης συνίσταται στην ανακατασκευή μιας υποθετικής ανάλυσης για πολλά προβλήματα που σώζονται στα αρχαία κείμενα μόνο με συνθετική μορφή. Πράγματι, ο Knorr στις περιγραφές του προτιμάει τις αναλυτικές παρουσιάσεις, αντί για τις συνθετικές, με αποτέλεσμα στις περιπτώσεις που διασώζεται μόνο η σύνθεση να επιχειρεί την ανακατασκευή της αντίστοιχης ανάλυσης. Ισχυρίζεται, μάλιστα, ότι η ανασύνθεση των αναλύσεων μπορεί να επιτευχθεί με απόλυτη ακρίβεια, δεδομένου του στενού παραλληλισμού μεταξύ αυτών των δύο μερών – ανάλυσης και σύνθεσης – της συγκεκριμένης διαδικασίας. Η ανακατασκευή των αναλύσεων δίνει, επίσης, τη δυνατότητα κατανόησης του λόγου ύπαρξης ορισμένων αινιγματικών στοιχείων στις συνθέσεις που διασώζονται. Ο Knorr παραδέχεται, βέβαια, ότι όλοι αυτοί οι ισχυρισμοί αποτελούν ερμηνεία, αλλά δηλώνει ότι η πρόθεσή του δεν είναι να παραφράσει ή να αναπαράγει, με άλλον τρόπο, τα δεδομένα της πρωτογενούς βιβλιογραφίας, αλλά να φέρει στο προσκήνιο την κεντρική απλή, συνήθως, γεωμετρική ιδέα που βρίσκεται πίσω από κάθε αποτέλεσμα, δηλαδή να παράσχει την κατάλληλη εισαγωγή για την περαιτέρω διερεύνηση αυτής της βιβλιογραφίας. Παρόλο που δεν γνωρίζουμε για το αν οι αναλύσεις που δημιουργήθηκαν μέσω αυτής της διαδικασίας υπήρξαν αντικείμενο θεώρησης των αρχαίων μαθηματικών, αυτή η προσέγγιση μπορεί να μας δώσει μία αίσθηση σχετικά με το μαθηματικό πλαίσιο των προβλημάτων που διασώζονται και, το κυριότερο, μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα και σε κείμενα που ο ίδιος ο Knorr δεν ανέλυσε.

Το κεφάλαιο 5 με τίτλο, «Αρχιμήδης: Ο άριστος γεωμέτρης της ευδόξειας παράδοσης», αρχίζει και τελειώνει με τις περίτεχνες προσπάθειες του Αρχιμήδη στον τομέα της υπολογιστικής γεωμετρίας: τόσο τις προσεγγίσεις του για το π στο *Κύκλου μέτρησις* όσο και τους αποτελεσματικούς κανόνες του για την προσέγγιση τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Στο σύνολο του έργου του Αρχιμήδη κυριαρχεί το ενδιαφέρον του για τις ποσοτικές μετρήσεις των γεωμετρικών σχημάτων, συγκεκριμένα για τα εμβαδά, τους όγκους και τα κέντρα βάρους καμπυλόγραμμων σχημάτων. Η μέθοδος που ακολουθεί σε αυτά τα προβλήματα, παρατηρεί ο Knorr, είναι θεωρητική και αποτελεί τη βελτίωση της μεθόδου των ορίων του Εύδοξου. Ο Knorr, με τη μελέτη συγκεκριμένων προβλημάτων, θα αναδείξει αυτή τη νέα εύχρηστη τεχνική σε νέες οικογένειες σχημάτων, όπως αυτά που οριοθετούνται από κωνικές καμπύλες και έλικες, καθώς και σε νέους τύπους προβλημάτων, όπως είναι η κατασκευή εφαπτόμενων σε έλικες. Ιδιαίτερη μνεία γίνεται από τον Knorr στη χρησιμότητα των αποτελεσμάτων που ανακάλυψε ο Αρχιμήδης στη μετρητική γεωμετρία. Το πλέον αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αποτελεί ο Ήρων, του οποίου οι απλοί κανόνες για τις υπολογιστικές μετρήσεις μπορεί να αντλούνται από τα *Στοιχεία*, αλλά οι πλέον προηγμένοι οφείλουν την ανακάλυψη και απόδειξή τους στον Αρχιμήδη. Προφανώς, η πρακτική παράδοση δεν έδειξε ενδιαφέρον για τις τυπικές λεπτολογίες των μεθόδων των ορίων του Εύδοξου που προήχθησαν από τον Αρχιμήδη. Αλλά, σημειώνει ο Knorr, αξιοσημείωτη είναι η ουσιαστική εγκατάλειψη αυτού του ενδιαφέροντος στη μεταγενέστερη του Αρχιμήδη γεωμετρική παράδοση: οι οριακές μέθοδοι, απαραίτητες για τις μετρήσεις, απουσιάζουν από τα έργα του Απολλώνιου, ενώ στη *Συναγωγή* του Πάππου ελάχιστα αποτελέσματα εμπίπτουν σε αυτήν την αρχιμήδεια κατηγορία. Οι υπολογιστικές προσπάθειες του Αρχιμήδη που επιλέγονται και καταγράφονται στο κεφάλαιο 5 αποκαλύπτουν το ενδιαφέρον του για τον τετραγωνισμό του κύκλου και τον διπλασιασμό του κύβου. Ο Αρχιμήδης επιλέγει τη νεύση στην επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος που συνδέεται με τα θεωρήματά του σχετικά με τις έλικες και επινοεί ευρηματικές νεύσεις για την τριχοτόμηση της γωνίας και την εγγραφή επταγώνου σε κύκλο. Όπως παρατηρεί ο Knorr, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί, αποτελεσματικά, τη μέθοδο της ανάλυσης σε όλη την έκταση του έργου του, παρέχοντας αρκετά ενδιαφέροντα παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων. Παρά τη συνεισφορά του, όμως, στο ογκώδες Βιβλίο VII της *Συναγωγής* του Πάππου, στο οποίο εξετάζονται και σχολιάζονται αρκετές σημαντικές αναλυτικές πραγματείες – οι περισσότερες του Ευκλείδη και του Απολλώνιου – δεν αναφέρεται καμία δική του. Το κεφάλαιο 5 θα κλείσει με την παρατήρηση ότι ο Αρχιμήδης, επιλέγοντας ως κέντρο των ερευνών του το πεδίο με το οποίο ασχολήθηκε ο Εύδοξος, διαφοροποιείται από τη γενική ομάδα των γεωμετρών της εποχής του, καθώς και αυτής που ακολούθησε· αυτοί έθεσαν ως στόχο την ανάλυση των προβλημάτων. Τα έργα του Αρχιμήδη συνεχίζουν, ως ένα βαθμό, να μελετώνται και να εφαρμόζονται, όπως για παράδειγμα οι αριθμητικοί του κανόνες στην μετρητική γεωμετρία. Μόνο, όμως, μετά τον 16ο και 17ο αιώνα θα υπάρξουν γεωμέτρες οι οποίοι θα ενδιαφερθούν για τη συνέχεια και περαιτέρω ανάπτυξη του έργου του.

Το ενδιαφέρον για την επίλυση των τριών κλασικών προβλημάτων – διπλασιασμός του κύβου, τετραγωνισμός του κύκλου και τριχοτόμηση μιας γωνίας – συνεχίζεται αμείωτο και μετά την εποχή του Αρχιμήδη, με αποτέλεσμα ο Knorr να εισάγει το κεφάλαιο 6 με τίτλο, «Οι διάδοχοι του Αρχιμήδη κατά τον τρίτο αιώνα», παρατηρώντας ότι ο ύστερος 3ος αιώνας π.Χ., αναφορικά με αυτό το ενδιαφέρον, είναι η περίοδος της αρχαίας γεωμετρίας που δικαιούται να ονομάζεται «χρυσούς αιών». Πράγματι, τα τρία κλασσικά προβλήματα της αρχαιότητας συνιστούν το κατ' εξοχήν ενοποιητικό στοιχείο στα έργα μιας σειράς γεωμετρών εκείνης της εποχής, όπως ο Ερατοσθένης, ο Νικομήδης, ο Ιππίας, ο Διοκλής, ο Διονυσόδωρος, Περσέας και ο Ζηνόδωρος. Ο Knorr θα παραθέσει κάποια από τα διασωθέντα αποσπάσματα αυτών των γεωμετρών, με στόχο να αναδείξει το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που παρουσιάζουν, το οποίο έγκειται στις σοβαρές προσπάθειες εφαρμογής της γεωμετρίας σε πεδία όπως η αστρονομία, η οπτική και η μηχανική, καθώς στις απόπειρες χρήσης μηχανικών μεθόδων στη γεωμετρία. Ο Knorr ονομάζει τους παραπάνω γεωμέτρες «διάδοχους» του Αρχιμήδη, εξαιτίας του αρχιμήδειου υπόβαθρου στο έργο τους, με άλλα λόγια, εξαιτίας του ενδιαφέροντος που έδειξαν για τις επιστημονικές εφαρμογές της γεωμετρίας που επικεντρώνονται στην διεύρυνση της γεωμετρικής μηχανικής, όπως αναπτύχθηκε από τον Αρχιμήδη. Οι προσπάθειες τους, άλλωστε, κατευθύνονται στην αναζήτηση εναλλακτικών λύσεων σε εκείνες που παρέχει ο Αρχιμήδης σε ειδικά προβλήματα. Παρόλο που το όνομα του Αρχιμήδη μνημονεύεται μόνο ως η πηγή του προβλήματος της διαίρεσης της σφαίρας – που πραγματεύτηκαν ο Διοκλής και ο Διονυσόδωρος – και ως πηγή των θεωρημάτων για το εμβαδόν του κύκλου, ο Knorr είναι πεπεισμένος ότι η σημασία του έργου του Αρχιμήδη είναι σαφής και διατρέχει όλες τις προσπάθειες των παραπάνω γεωμετρών. Συγκεκριμένα: 1) οι μελέτες του

Αρχιμήδη για τις έλικες αποτελούν σημαντικό παράγοντα στην εφαρμογή της τετραγωνίζουσας για τη λύση που επιχειρεί ο Νικομήδης στο πρόβλημα τετραγωνισμού του κύκλου. 2) τα θεωρήματα του Αρχιμήδη για τη μέτρηση του κύκλου και της σφαίρας είναι καθοριστικής σημασίας στη μελέτη των ισοπεριμετρικών σχημάτων από τον Ζηνόδωρο. 3) Η έννοια του κέντρου βάρους και η χρήση της από τον Αρχιμήδη αποτελεί τη βάση του θεωρήματος του Διονυσόδωρου, για τα μέτρα στερεών εκ περιστροφής. 4) Οι τεχνικές του Αρχιμήδη για την επίλυση προβλημάτων, όπως οι κατασκευές νεύσεως αποτελούν παράδειγμα για τη χρήση κογχοειδών από τον Νικομήδη. 5) Το πιθανό αρχιμήδειο υπόβαθρο πίσω από τη νεύση που αποδίδεται στον Ήρωνα για τον διπλασιασμό του κύβου. Οι εναλλακτικές λύσεις που έχουν προταθεί από τους γεωμέτρες αυτής της εποχής ωθεί, πιθανώς, τον Knorr στο να διακρίνει σε αυτούς μια γενιά που αγωνίζεται να μεταφέρει το κέντρο βάρους έξω από τον τομέα που κυριαρχείται από τα επιτεύγματα του Αρχιμήδη. Το ευκλείδειο πεδίο επίλυσης προβλημάτων προσέφερε έναν ενδεχόμενο προορισμό, αλλά η εξερεύνησή του απαιτούσε διαφορετικές τεχνικές από αυτές που προωθούσε ο Αρχιμήδης.

Με την παραδοχή ότι η αυτή η πρόκληση θα αποτελούσε το έναυσμα για τις προσπάθειες της επόμενης γενιάς, ο Knorr θα περάσει στο κεφάλαιο 7 με τίτλο, «Απολλώνιος: η κορύφωση της παράδοσης», όπου θα πραγματευτεί την μεγάλη προσφορά του Απολλώνιου στην επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων. Τα δύο σωζόμενα έργα του Απολλώνιου – *Κωνικά* και *Περί λόγου αποτομής* – καθώς και πέντε ακόμη έργα τα οποία δεν έχουν διασωθεί, κατέχουν κεντρική θέση στο σώμα των έργων για τη μελέτη της γεωμετρικής ανάλυσης που περιγράφει ο Πάππος στο Βιβλίο VII της *Συναγωγής*. Παρόλο, λοιπόν, που τα *Κωνικά* αποτελούν μια αυστηρή και συστηματική παρουσίαση της θεωρίας των κωνικών με συνθετικό τρόπο, ο Knorr θεωρεί αναγκαίο να αξιολογηθούν τα επιτεύγματα του Απολλώνιου στη γεωμετρία, μέσω των προσπαθειών που κατέβαλλε για την επίλυση των προβλημάτων. Για την επιλογή αυτής της μεθοδολογικής προσέγγισης ο Knorr προτάσσει δύο επιχειρήματα: 1) την προθυμία του Απολλώνιου να απαρνηθεί το πεδίο εντός του οποίου εντάσσονται οι έρευνες του Αρχιμήδη, όπως για παράδειγμα, τη μέθοδο των ορίων του Εύδοξου και τις εφαρμογές της σε προβλήματα όπως ο τετραγωνισμός του κύκλου. 2) τη μετατόπιση του ενδιαφέροντος του Απολλώνιου σε προβλήματα, όπως ο διπλασιασμός του κύβου, για τα οποία η μέθοδος της ανάλυσης, αν εφαρμοστεί, είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική. Τότε, όμως, προκύπτουν δυσκολίες ανάλογες με εκείνες που προκύπτουν κατά την έρευνα των έργων του Ευκλείδη: και στις δύο περιπτώσεις οι πρωτότυπες έρευνες των συγγραφέων εντάσσονται στον τομέα της αναλυτικής διερεύνησης, ενώ τα σωζόμενα κείμενα αποτελούνται μόνο από συνθετικές πραγματείες. Ο Knorr θα υπερκεράσει αυτές τις δυσκολίες και θα προσπαθήσει να ανακτήσει τις πρωτότυπες έρευνες, ανακατασκευάζοντας τις αναλύσεις. Η φιλοδοξία του Απολλώνιου να αναγνωριστεί το έργο του σε μέγιστο βαθμό τον οδήγησε στην οριοθέτηση της περιοχής έρευνάς του – όπου τα πρότυπα ευρήματά του δεν θα επισκιάζονταν από τα επιτεύγματα του Αρχιμήδη – καθώς και σε μια πληθώρα αντιπαραθέσεων με σύγχρονούς του οι οποίοι ήταν μαθητές του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη. Στο πλαίσιο αυτής της αντιπαράθεσης, ο Knorr θα αναπτύξει το κεφάλαιο 7, χωρίζοντάς το σε ενότητες στις οποίες θα παρουσιάσει την πραγμάτευση κάποιων προβλημάτων από τον Απολλώνιο συγκριτικά με άλλους συγγραφείς. Συγκεκριμένα, μια σύγχρονη μαρτυρία τόσο για το έργο του Αρχιμήδη όσο και για την επιρροή του στον Απολλώνιο θα μπορούσε να είναι ο Ηρακλείδης, που εικάζεται να είναι εκείνος που αναφέρει ο Αρχιμήδης στον πρόλογο του *Περί ελίκων*, γεωμέτρης με σημαντική επιρροή, βιογράφος και συνεργάτης του Αρχιμήδη. Η μαρτυρία του Ηρακλείδη σχετίζεται με την επίδραση του Αρχιμήδη τόσο στις αριθμητικές έρευνες του Απολλώνιου όσο και στις έρευνες για μία καμπύλη που ονομάζεται κοχλίας. Ο Knorr θα ολοκληρώσει αυτήν την ενότητα με μια ανακατασκευή η οποία επιλύει τη νεύση του Απολλώνιου ως προς ένα ρόμβο, αντίστοιχη με τη νεύση του Ηρακλείδη ως προς το τετράγωνο. Στη δεύτερη ενότητα, ο Knorr εξετάζει τα τεκμήρια σχετικά με τη συνεισφορά του Απολλώνιου στον τομέα που διερεύνησε, κυρίως, ο Νικομήδης, αλλά και οι υπόλοιποι γεωμέτρες που διαδέχθηκαν τον Αρχιμήδη. Τα προβλήματα που μελετήθηκαν αφορούν στην τριχοτόμηση της γωνίας, του διπλασιασμού του κύβου, καθώς και τη μελέτη των καμπυλών που παράγονται με κίνηση. Παρόλο που ο ακριβής τρόπος και η έκταση του έργου του Απολλώνιου σε αυτούς τους τομείς δεν διασώζονται στις πηγές μας, γνωρίζουμε αρκετά για να αντιληφθούμε ότι η συνεισφορά του ήταν σημαντική. Ο πλούτος των γεωμετρικών ιδιοτήτων που περιέχονται στις έρευνες του Απολλώνιου και αναδεικνύονται από τις ανακατασκευές του Knorr είναι σαφής, ειδικότερα αν εξεταστούν σε αντιδιαστολή προς τα αποτελέσματα του Νικομήδη. Στην τρίτη ενότητα ο Knorr θα εξετάσει τη συνεισφορά του Απολλώνιου στη θεωρία των κωνικών, η οποία παρατίθεται στην ογκώδη πραγματεία του, *Κωνικά*, το οποίο απαρτίζεται από οκτώ βιβλία, με μόνο τα τέσσερα πρώτα να σώζονται στα ελληνικά. Ο Απολλώνιος, όπως παρατηρεί ο Knorr, υιοθετεί σε όλη την έκταση των *Κωνικών* τη συνθετική μέθοδο, με ελάχιστες εξαιρέσεις στο Βιβλίο ΙΙ. Ο Knorr, αφού παραθέσει, εν συντομία, τα θέματα που πραγματεύονται τα διάφορα Βιβλία, θα προτείνει αναλύσεις σε προβλήματα τα οποία ο Απολλώνιος πραγματεύεται σε συνθετική μορφή. Στα *Κωνικά* συστηματοποιείται ένα σημαντικό μέρος της ήδη γνωστής θεωρίας, με την εισαγωγή νέων στοιχείων και την εφαρμογή αυτών στη διερεύνηση νέων τομέων. Τότε, όμως, η οριοθέτηση ανάμεσα στο πρωτότυπο έργο του Απολλώνιου και στα συμπεράσματα που αυτός άντλησε από προγενέστερούς του είναι ασαφής. Ο Απολλώνιος δίνει την εντύπωση ότι οικειοποιήθηκε τις ανακαλύψεις άλλων, και ειδικότερα του Αρχιμήδη, προκαλώντας έτσι την αντίδραση των μαθητών του. Ο Απολλώνιος άσκησε κριτική στον Ευκλείδη, λέγοντας ότι επεξεργάστηκε τις λύσεις προβλημάτων περί κωνικών, πρόχειρα και ανεπαρκώς. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τις ιδιαίτερα έντονες αντιδράσεις των διαδόχων του Ευκλείδη. Αναμφίβολα, όμως, οι προσπάθειες του Απολλώνιου για κατασκευές νεύσεων με επίπεδες μεθόδους αντικατοπτρίζουν ένα ενδιαφέρον για την κανονικοποίηση της επεξεργασίας μιας σημαντικής κατηγορίας γεωμετρικών προβλημάτων. Στην τέταρτη και τελευταία ενότητα του κεφαλαίου 7 ο Knorr αναφέρεται στην ποικιλία θεωρημάτων σχετικά με τους λόγους των γινομένων ευθυγράμμων τμημάτων που άγονται ως χορδές ή εφαπτόμενες σε κωνικές. Ο Απολλώνιος θεωρεί, όπως αναφέρει στον πρόλογο των *Κωνικών*, ότι οι προτάσεις του Βιβλίου ΙΙΙ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιλυθεί πλήρως το πρόβλημα των «τόπων επί τριών και τεσσάρων ευθειών», πρόβλημα με το οποίο είχε ασχοληθεί ο Ευκλείδης. Η πλήρης λύση του συγκεκριμένου προβλήματος, επισημαίνει ο Απολλώνιος, δεν κατέστη δυνατή παρά μόνο με βάση τα θεωρήματα που παρουσιάζονται στο Βιβλίο ΙΙΙ των *Κωνικών*. Από το πρόβλημα του τόπου των τεσσάρων ευθειών αναπτύσσονται λύσεις σε προβλήματα κατασκευής κωνικών που διέρχονται από πέντε δεδομένα σημεία. Η πραγμάτευση της κατασκευής μιας έλλειψης που διέρχεται από πέντε δεδομένα σημεία, όπως δίνεται από τον Πάππο, συνδέεται με το πρόβλημα της εύρεσης των τομών μιας ευθείας με μια κωνική, που αναπτύσσεται λεπτομερώς από τον Απολλώνιο. Η κατασκευή με βάση δεδομένα σημεία και εφαπτόμενες απασχόλησε έντονα τον Απολλώνιο, αλλά οι πραγματείες του, οι οποίες περιγράφονται από τον Πάππο ως βοηθητικές, δεν φαίνεται να παρέχουν το κατάλληλο πλαίσιο. Το μόνο έργο που χαρακτηρίζεται συναφές με αυτό το θέμα είναι το *Περί στερεών τόπων* του Αρισταίου του Πρεσβύτερου, μια ογκώδης πραγματεία πέντε τόμων. Αν δεχθούμε, όμως, την υπόθεση του δεύτερου Αρισταίου, ως σύγχρονου του Απολλώνιου, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι το κύριο μέλημά του θα ήταν η τυπική διατύπωση των αποτελεσμάτων που είχε επιτύχει η αναλυτική παράδοση μέχρι την εποχή του. Ο Knorr θα ολοκληρώσει το κεφάλαιο 7, χαρακτηρίζοντας το έργο του Απολλώνιου ως μια σημαντική πηγή για την επίλυση των κωνικών προβλημάτων.

Κατά την επισκόπηση των αρχαίων προσπαθειών επίλυσης προβλημάτων και ανίχνευσης των διαφόρων τεχνικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται, ο Knorr επισημαίνει ότι οι αρχαίοι συγγραφείς, ειδικότερα αυτοί που ανήκουν στην ύστερη παράδοση της έκδοσης των κειμένων, προτιμούσαν τον συνθετικό τρόπο παρουσίασης στις τυπικές γεωμετρικές πραγματείες. Με τον συνθετικό τρόπο κάποιος καταλήγει σε έναν ισχυρισμό – θεώρημα ή κατασκευή- εκκινώντας από τις δεδομένες προϋποθέσεις και δεν χρησιμοποιεί παρά μόνο αξιώματα και πρώτες αρχές ή άλλα θεωρήματα και κατασκευές που έχουν ήδη αποδειχθεί. Για την ανακάλυψη λύσεων όμως σε γεωμετρικά προβλήματα, οι αρχαίοι χρησιμοποιούσαν μια εναλλακτική μέθοδο: την «ανάλυση». Σε περιπτώσεις προβλημάτων κατασκευής η διαδικασία εκτυλίσσεται ως εξής: υποθέτουμε ότι το ζητούμενο σχήμα έχει κατασκευαστεί και, στη συνέχεια, συνάγουμε τις ιδιότητες του σχήματος μέχρι να προκύψει κάποιο στοιχείο που, από προηγούμενα συμπεράσματα, είναι γνωστό ότι είναι κατασκευάσιμο. Στη συνέχεια η «σύνθεση» εκκινεί από αυτά τα κατασκευάσιμα αντικείμενα και, ακολουθώντας μια σειρά από παραγωγικά βήματα που είναι περίπου τα αντίστροφα της ανάλυσης, καταλήγει στην ολοκλήρωση της ζητούμενης κατασκευής. Η αναλυτική λύση μπορεί να δώσει καρπούς, ακόμη και στις περιπτώσεις όπου η λύση του προβλήματος δεν είναι ακόμη γνωστή. Ο Knorr εξαίρει την αναλυτική μέθοδο ως την απολύτως ενδεδειγμένη μέθοδο για τις ανάγκες της γεωμετρικής έρευνας, υποστηρίζοντας ταυτόχρονα και τον διδακτικό χαρακτήρα της στη εξοικείωση των μαθητευομένων στη χρήση της, εν όψει μεταγενέστερων δικών τους ερευνών. Επιπλέον, βοηθάει και στην ανακάλυψη της σκέψης που βρίσκεται πίσω από κάθε κατασκευαστικό βήμα. Αντίθετα, όταν σε θεωρήματα και προβλήματα παρατίθεται μόνο η σύνθεση, τα διάφορα βήματα φαντάζουν συχνά αυθαίρετα. Ως εκ τούτου, η προτίμηση του Knorr στις αναλυτικές παρουσιάσεις φαντάζει δικαιολογημένη. Όπως έχουμε, ήδη, επισημάνει, στις περιπτώσεις όπου διασώζεται μόνο η σύνθεση ο Knorr επιχειρεί να ανακατασκευάσει την αντίστοιχη ανάλυση.

Η γεωμετρική ανάλυση ως ευρετική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων διατρέχει όλα τα κεφάλαια της *Αρχαίας παράδοσης*. Στο τελευταίο κεφάλαιο, το κεφάλαιο 8 με τίτλο, «Η γεωμετρική ανάλυση των αρχαίων: μία αποτίμηση» συγκεκριμένα στην παράγραφο «Προβλήματα, θεωρήματα και η μέθοδος της ανάλυσης», συνοψίζει αυτήν την άποψη, υπογραμμίζοντας τις πολυάριθμες περιπτώσεις, στις οποίες η ευρετική ισχύς της γεωμετρικής ανάλυσης εφαρμόστηκε στις ανακατασκευές που έχουν παρατεθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Ένα σημαντικό τμήμα αυτής της παραγράφου αφιερώνεται στη διάκριση μεταξύ προβλημάτων και θεωρημάτων, διάκριση που διατηρείται σχολαστικά από τους συγγραφείς των βασικών πραγματειών της κλασικής γεωμετρίας, τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο, καθώς και σε διάφορα τεκμήρια που διασώθηκαν από μεταγενέστερους σχολιαστές, όπως ο Ήρων, ο Πάππος και ο Ευτόκιος. Αφού παραθέσει τη μορφή που έχει ένα πρόβλημα και την τυπική διατύπωση ενός θεωρήματος, θα υπερασπίσει τον τεχνητό χαρακτήρα της μεταξύ τους διάκρισης: «Ένα πρόβλημα, εύκολα, μπορεί να αναδιατυπωθεί σαν θεώρημα, αρκεί να ενσωματώσουμε στην εκφώνηση του θεωρήματος όλες τις λεπτομέρειες της κατασκευής του προβλήματος. Αντίστροφα, ένα θεώρημα μπορεί να αναδιατυπωθεί, ώστε να ζητείται να παραχθεί μια κατασκευή ή να βρεθεί κάποια ιδιότητα ενός δεδομένου σχήματος». Ο Πάππος και ο Πρόκλος επιφυλάσσουν μια τρίτη κατηγορία, τα πορίσματα, ξεχωριστή από τα προβλήματα και τα θεωρήματα. Με την παράθεση ενός ικανού αριθμού παραδειγμάτων αυτού του τύπου, ο Knorr θα ισχυριστεί ότι η επίλυση προβλημάτων αποτέλεσε το κύριο μέρος του γεωμετρικού εγχειρήματος που σηματοδοτείται από τα έργα του Ευκλείδη, του Απολλώνιου και όσων ακολούθησαν την παράδοσή τους και ότι η σύνταξη θεωρημάτων ήταν για αυτούς μια προσπάθεια επικουρική αυτής της δραστηριότητας. Θα αναφέρει, βέβαια, και θα εξετάσει τις απόψεις των αρχαίων διανοητών σχετικά με τη φύση των προβλημάτων και των θεωρημάτων και τη σημασία τους για τη γεωμετρία. Προς τούτο θα παραθέσει ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα από το τρίτο Βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου. Η ευρετική ισχύς που παρέχει η ανάλυση στην εύρεση λύσεων στα γεωμετρικά προβλήματα, επισφραγίζεται με μια λεπτομερή περιγραφή αυτής της μεθόδου που δίνεται από τον Πάππο ως εισαγωγή στην επισκόπηση του αναλυτικού σώματος κειμένων στο Βιβλίο VII της *Συναγωγής*. Σε αυτήν ο Knorr θα προσθέσει δύο σύντομες αναφορές σχετικά με τη φύση της μεθόδου, η μία σε ένα σχόλιο που προλογίζει κάποιες εναλλακτικές αποδείξεις στα αρχικά θεωρήματα του Βιβλίου XIII του Ευκλείδη και η δεύτερη από το σχόλιο του Ήρωνα στο Βιβλίο II, όπως σώζεται στην αραβική μετάφραση του al-Nairīzī. Ο Πάππος ολοκληρώνει την περιγραφή του με μια ενότητα, η οποία αποτελεί μια επαναδιατύπωση βασικών φιλοσοφικών θέσεων, όπου αποδέχεται τη διάκριση ανάμεσα στην ανάλυση των θεωρημάτων και στην ανάλυση των προβλημάτων. Ωστόσο, ο Knorr θα υποστηρίξει ότι η έννοια της «θεωρη(μα)τικής ανάλυσης», σε αντίθεση με την «προβληματική ανάλυση», είναι ένα δημιούργημα της Ύστερης Αρχαιότητας και δεν αντιστοιχεί σε κάποια ελληνιστική κατηγορία. Για αυτόν τον λόγο, θεωρεί ότι η ενδεδειγμένη μορφή ανάλυσης υπήρξε πάντοτε μια ευρετική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων. Όμως, ο ισχυρισμός του Knorr τίθεται υπό αμφισβήτηση, από τη στιγμή που υπάρχουν καταγεγραμμένες θεωρη(μα)τικές αναλύσεις στο *Λόγου αποτομή* του Απολλωνίου, άρα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτή η μορφή μαθηματικού κειμένου δεν χρησιμοποιούνταν από τους συγγραφείς της ελληνιστικής περιόδου. Επιπλέον, με τον περιορισμό στους γεωμέτρες της ελληνιστικής περιόδου, ο Knorr δεν έχει τη δυνατότητα να αναφερθεί στην επέκταση της έννοιας της ανάλυσης, όπως συναντάται στα έργα του Ήρωνα και του Πτολεμαίου. Συγκεκριμένα, ο Ήρων και ο Πτολεμαίος χρησιμοποιούν ισχυρισμούς από τα *Δεδομένα*, ώστε με μια αλληλουχία συλλογισμών να οδηγηθούν σε συμπεράσματα σχετικά με τον υπολογισμό αριθμητικών μεγεθών, με βάση την υπόθεση ότι ορισμένα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος έχουν δεδομένη τιμή. Αυτός ο τύπος συλλογισμού αποκαλείται «ανάλυση», τόσο από τον Ήρωνα όσο και από τον Πτολεμαίο, και αναπτύχθηκε περαιτέρω κατά τη μεσαιωνική περίοδο. Επομένως, για την πλήρη επισκόπηση και κατανόηση της γεωμετρικής ανάλυσης, θα έπρεπε να συμπεριληφθεί και αυτός ο τύπος συλλογισμού στη συνολική αποτίμηση των ελληνικών Μαθηματικών.

Ανακεφαλαιώνοντας, λοιπόν, η *Αρχαία παράδοση* είναι η πιο σημαντική μονογραφία που έχει γραφτεί σχετικά με την ελληνική γεωμετρική ανάλυση. Γενικότερα, ο Knorr, με το σύνολο των ευρημάτων του, παρουσιάζει μια ζωντανή εικόνα της ελληνικής γεωμετρίας. Πράγματι, η μεθοδολογική προσέγγιση που ακολουθεί δεν οδηγεί σε μια απλή επισκόπηση, στην οποία οι μαθηματικοί διερευνούν ιδέες εντός κατοχυρωμένων πλαισίων. Αντίθετα, περιγράφει μια δυναμική κατάσταση, στην οποία οι μαθηματικοί, εν μέσω συμφωνιών και διαφωνιών, συνδιαλέγονται σχετικά με τη μέθοδο που θα ακολουθήσουν, παρουσιάζοντας διαφορετικές και συχνά αντικρουόμενες προσεγγίσεις για την επίλυση των προβλημάτων που τους απασχολούν. Η *Αρχαία παράδοση* αποτελεί σημείο εκκίνησης για τη γνώση και μελέτη των μαθηματικών πρακτικών που υπεισέρχονται στην προσέγγιση και επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στους αρχαίους ελληνόφωνους πολιτισμούς.

Η *Αρχαία παράδοση* έχει εκδοθεί, το 2022, στη σειρά *Αρχαία Επιστημονική Γραμματεία* των Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης, σε υποδειγματική ελληνική μετάφραση του Τεύκρου Μιχαηλίδη και άρτια επιστημονική επιμέλεια από τους Γιάννη Χριστιανίδη και Μιχάλη Σιάλαρο.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Το περιοδικό *Νεύσις* δέχεται άρθρα, επισκοπήσεις, βιογραφίες κ.α., που πραγματεύονται θέματα Ιστορία και Φιλοσοφίας της Επιστήμης και της Τεχνολογίας. Η υποβολή εργασιών προς δημοσίευση γίνεται κατόπιν εγγραφής στο σύνδεσμο https://ejournals.epublishing.ekt.gr/neusis. Τα κείμενα που υποβάλλονται προς δημοσίευση κρίνονται από τη Συντακτική Επιτροπή και από ειδικούς κριτές και η κρίση κοινοποιείται στον συγγραφέα σε εύλογο χρονικό διάστημα.

Τα προς κρίση κείμενα πρέπει να είναι γραμμένα στην ελληνική γλώσσα, δακτυλογραφημένα με γραμματοσειρά μεγέθους 12 pt, σε διπλό διάστιχο και με μεγάλα περιθώρια. Κάθε άρθρο πρέπει να συνοδεύεται από σύντομες περιλήψεις στην ελληνική και στην αγγλική γλώσσα. Οι σημειώσεις και οι βιβλιογραφικές παραπομπές θα παρατίθενται σε συνεχή αρίθμηση στο κάτω μέρος της αντίστοιχης σελίδας.

(1) Οι παραπομπές σε βιβλία περιλαμβάνουν το όνομα του συγγραφέα (με Μικρα Κεφαλαια γράμματα), τον τίτλο του βιβλίου (με *πλάγια*), τον τόπο έκδοσης, τον εκδοτικό οίκο, τη χρονολογία έκδοσης και την σελίδα παραπομπής, όπως στα παραδείγματα:

   O. Pedersen: *A survey of the Almagest*. Odense, Odense University Press, 1974, σ. 94.

   D. C. Lindberg: *Οι απαρχές της Δυτικής Επιστήμης. Η φιλοσοφική, θρησκευτική και θεσμική θεώρηση της ευρωπαϊκής παράδοσης, 600 π.Χ. – 1450 μ.Χ.*, μτφρ. Η. Μαρκολέφας. Αθήνα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, 1997, σ. 349.

   Pappus: *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, επιμ. F. Hultsch, 2 τ. Hildesheim, Weidmann, 2004, T.I., σ. 76.8-12 (Πρώτη έκδοση, 1876–1878).

(2) Οι παραπομπές σε άρθρα δημοσιευμένα σε περιοδικά περιλαμβάνουν το όνομα του συγγραφέα (με Μικρα Κεφαλαια γράμματα), τον τίτλο του άρθρου εντός εισαγωγικών, το όνομα του περιοδικού (με *πλάγια*), τον τόμο, το έτος (σε παρένθεση), τις σελίδες που καταλαμβάνει το άρθρο και την συγκεκριμένη σελίδα της παραπομπής. Με ανάλογο τρόπο γίνονται οι παραπομπές σε άρθρα που έχουν δημοσιευθεί σε συλλογικούς τόμους. Παραδείγματα:

   S. Drake: “The Academia dei Lincei”. *Science* 151 (1966), 1194-2000, στην σ. 1195.

   I. B. Cohen: “Isaac Newton’s *Principia*, the Scriptures, and the Divine Providence”. Στο: *Philosophy, Science, and Method*, επιμ. S. Morgenbesser, New York, St. Martin’s Press, 1969, 523-548, στην σ. 531.

(3) Οι επαναλαμβανόμενες παραπομπές στο ίδιο άρθρο ή βιβλίο περιλαμβάνουν το όνομα του συγγραφέα, τον τίτλο και την σελίδα παραπομπής.

N E U S I S

BIANNUAL JOURNAL FOR HISTORY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME 30 / ISSUE 2 / JULY 2024

CONTENTS