Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού

Τόμ. 8 (2008)

Επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης σε διαφορετικά πλαίσια συμφραζομένων

Κωνσταντίνος Αντωνόπουλος (Konstantinos Antonopoulos), Παρασκευή Τσιούνη (Paraskevι Tsiouni), Κώστας Ζαχάρος (Kostas Zacharos)

doi: 10.12681/icw.18071

Βιβλιογραφική αναφορά:

Αντωνόπουλος (Konstantinos Antonopoulos) Κ., Τσιούνη (Paraskevι Tsiouni) Π., & Ζαχάρος (Kostas Zacharos) Κ. (2008). Επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης σε διαφορετικά πλαίσια συμφραζομένων. *Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού*, *8*, 9–24. https://doi.org/10.12681/icw.18071

Κωνσταντίνος Αντωνόπουλος,
Νηπιαγωγός, μεταπτυχιακός φοιτητής, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η., Πανεπιστήμιο Πατρών

Παρασκευή Τσιούνη,
Νηπιαγωγός

Κώστας Ζαχάρος,
Επίκουρος Καθηγητής, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η., Πανεπιστήμιο Πατρών

Επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης σε διαφορετικά πλαίσια συμφραζομένων

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα διερευνά τις γνώσεις νηπίων σχετικά με την έννοια του αριθμού, καθώς και τις στρατηγικές που επιλέγονται από τους μαθητές του δείγματός μας στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης. Επιπρόσθετα διερευνάται η αποτελεσματικότητα των στρατηγικών αυτών, ειδικότερα στις περιπτώσεις που προσφέρονται κατάλληλα πλαίσια για την ανάπτυξη των προβλημάτων.

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 31 νήπια από δημόσια νηπιαγωγεία που συμμετέχουν σε τρία διαφορετικά έργα. Το πρώτο διερευνά το βαθμό οικειοποίησης της έννοιας του αριθμού, ενώ τα άλλα δύο την ικανότητά τους να ανταποκριθούν σε προβλήματα πρόσθεσης.

Η αξιολόγηση των ευρημάτων δείχνει ότι το προτεινόμενο πλαίσιο ανάπτυξης των δραστηριοτήτων επηρεάζει τις επιδόσεις των νηπίων.

Λέξεις-κλειδιά: Μαθηματικές έννοιες, πρόσθεση, προσχολική εκπαίδευση.

Solution strategies on addition problems and meanful framework in teaching

Abstract

The objective of this study was to investigate two aspects: firstly to investigate children's knowledge about the concept of number, and then to analyze children's strategies in solving problems including additions. Furthermore, we examined whether expedient teaching situations would provide more successful results.

The research was carried out with the participation of 31 pupils 5 to 6 years old from Greek state kindergartens of the same area, bearing the same middle socioeconomic background. These subjects were participated in three different tasks. The first aimed to investigate children's knowledge on concept of number and the others to examine children's ability in solving addition problems.

Our findings highlight the important role of the communication framework in teaching, as it contributes to the acquisition of new knowledge.

Key words: Mathematical concepts, addition, early childhood education

1. Εισαγωγή

Η σύγχρονη έρευνα στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών επισημαίνει τη δυνατότητα των μικρών μαθητών να ανταποκρίνονται σε δραστηριότητες πρόσθεσης και αφαίρεσης και προτείνει την εισαγωγή στις πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης ήδη από την Προσχολική Εκπαίδευση (π.χ. Baroody & Tiilikainen, 2004, Clements, 2004, Lester & Charles, 2005, Van de Walle & Lovin, 2006, Wright et al., 2002). Η κατανόηση των εννοιών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης προϋποθέτει την οικειοποίηση της ιδέας ότι, μία συλλογή γίνεται μεγαλύτερη όταν προσθέτεις σ' αυτή αντικείμενα και αντίστοιχα μικρότερη όταν αφαιρείς. Σε ένα αρχικό στάδιο κατανόησης, τα παιδιά αντιλαμβάνονται διαισθητικά τέτοιες θετικές ή αρνητικές μεταβολές με ποσότητες, που το μαθηματικό τους περιεχόμενο αντιστοιχεί σε πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης, από πολύ μικρή ηλικία. Για παράδειγμα, παιδιά ηλικίας τριών περίπου ετών δίνουν επιτυχείς απαντήσεις σε προβλήματα που το μαθηματικό τους περιεχόμενο αντιστοιχεί σε πράξεις όπως «1+1» ή «2-1», ενώ παιδιά ηλικίας τεσσάρων περίπου ετών ανταποκρίνονται σε δραστηριότητες που απαιτούν πράξεις της μορφής «1+2», «2+1», «3-1» ή «3-2» (Baroody, 1999, Baroody and Tiilikainen, 2004). Σε ένα επόμενο στάδιο ανάπτυξης της ικανότητας που σχετίζεται με την πρόσθεση τα παιδιά μπορούν να χειρίζονται μεγαλύτερες ποσότητες αντικειμένων και σταδιακά να αποδεσμεύονται από την ανάγκη προσφυγής σε συγκεκριμένα αντικείμενα.

Σημαντική έμφαση δίνεται στο πλαίσιο εντός του οποίου αναπτύσσονται οι εν λόγω δραστηριότητες (Donaldson, 1991, Hughes, 1986, Nunes & Bryant, 1996, Wubbles, et al., 1997). Στο συγκεκριμένο πλαίσιο που αναπτύσσεται μια δραστηριότητα στο νηπιαγωγείο, το νόημα των μαθηματικών εννοιών οικοδομείται με την ενεργή εμπλοκή του μαθητή, ως μια σχέση μεσολάβησης μεταξύ συγκεκριμένων αντικειμένων και πλαισίων αναφοράς (objects/references) από τη μια και σημείων και συμβόλων (signs/symbols) από την άλλη (Steinbring, 2005, 2006). Τα νέα, μη οικεία σημεία και σύμβολα χρειάζεται να συσχετιστούν με συγκεκριμένα αντικείμενα και πλαίσια αναφοράς για να αποκτήσουν συγκεκριμένο νόημα. Πράγματι, πολλά παιδιά, ήδη από την προσχολική ηλικία, αντιλαμβάνονται ότι τα αντικείμενα που τους παρουσιάζονται ως εκπαιδευτικό υλικό, δεν έχουν ενδιαφέρον στο πλαίσιο της διδασκαλίας επιστημονικών εννοιών ως αντικείμενα καθαυτά, αλλά επειδή ενσωματώνουν επιστημονικές ιδέες και δομές. Έτσι, για παράδειγμα, η απομάκρυνση (η απόκρυψη, το φάγωμα κ.λπ.) τριών αντικειμένων από μια συλλογή επτά αντικειμένων, στο πλαίσιο δραστηριοτήτων με μαθηματικό περιεχόμενο προσλαμβάνει συγκεκριμένο περιεχόμενο και συσχετίζεται με την πράξη της αφαίρεσης. Παράλληλα, το πλαίσιο εντός του οποίου αναπτύσσεται η διδακτική κατάσταση και οι κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, ενεργοποιούν ψυχολογικές παραμέτρους, υποκινούν το ενδιαφέρον του παιδιού και το οδηγούν σε μια λειτουργική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (π.χ. Oers, 1996, Leontev, 1978, Vygotsky, 1978).

Στην έρευνα που θα παρουσιαστεί εδώ επιχειρείται να διερευνηθούν οι ικανότητες παιδιών προσχολικής ηλικίας να ανταποκριθούν σε διδακτικές καταστάσεις που σχετίζονται με προβλήματα πρόσθεσης, καθώς και να επισημανθούν οι στρατηγικές που αναπτύσσονται από τα παιδιά στην προσπάθεια επίλυσης αυτών των προβλημάτων. Στο πλαίσιο ανάπτυξης των δραστηριοτήτων επιδιώκεται η υποκίνηση του ενδιαφέροντος των παιδιών για να συμμετέχουν και να εμπλακούν σε καταστάσεις που σχετίζονται με πράξεις πρόσθεσης.

2. Ψυχολογικές πτυχές και διδακτικές προσεγγίσεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης

Η ικανότητα της πρόσθεσης και αφαίρεσης μικρών ποσοτήτων συνδέεται με τη συγκρότηση ψυχολογικών μηχανισμών μάθησης, όπως είναι το «σχήμα διαδοχής» (successor schema) και το σχήμα «μέρος-μέρος-όλο» (part-part- whole schema) (Resnick, 1983). Στο *σχήμα διαδοχής* το παιδί αναπαριστά νοερά τους αριθμούς από το 1 έως το 10 διαδοχικά, χωρίς απαραίτητα να συσχετίζει τα σύμβολα των αριθμών με τις ποσότητες που αυτοί αντιπροσωπεύουν. Αφορά ουσιαστικά την αναπαράσταση μιας νοητής αριθμογραμμής που επιτρέπει να δίνονται απαντήσεις σε προβλήματα σύγκρισης, όπως για παράδειγμα, «ποιο είναι μεγαλύτερο, το πέντε ή το έξι;», χωρίς την ανάγκη προσφυγής σε συγκεκριμένες ποσότητες. Η οικοδόμηση του σχήματος διαδοχής είναι ένα πρώτο αναγκαίο εισαγωγικό στάδιο που συμβάλλει στην επιτυχή εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης και αφαίρεσης. Σύμφωνα με το σχήμα διαδοχής για την επιτυχή εκτέλεση της πράξης «πέντε και δύο» πρέπει να «μετατοπιστούμε» στην νοητή αριθμογραμμή δύο βήματα δεξιά του 5. Παρόμοια η πράξη «πέντε βγάζω ένα» προϋποθέτει μια αριστερή μετατόπιση στην αριθμογραμμή κατά ένα βήμα από τον αριθμό 5. Ως μια διδακτική προσέγγιση για την κατάκτηση του σχήματος διαδοχής προτείνεται η θετική ή αρνητική αλλαγή της προτεινόμενης ποσότητας, προσθέτοντας ή αφαιρώντας κάθε φορά «ένα περισσότερο» ή «ένα λιγότερο» αντίστοιχα (Shane, 1999).

Η συγκρότηση του σχήματος *μέρος-μέρος-όλο* σχετίζεται με την ικανότητα νοητικής αναπαράστασης του αριθμού ως σύνθεσης επιμέρους ποσοτήτων, με ποικίλους τρόπους. Για παράδειγμα, πέντε αντικείμενα μπορούν να χωριστούν σε τέσσερα στο ένα χέρι και ένα στο άλλο, τρία στο ένα και δύο στο άλλο κ.λπ. Η πρόσθεση και η αφαίρεση συνδέονται ουσιαστικά με τις σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ των συνόλων αριθμών που εμπλέκονται στις πράξεις αυτές. Οι ψυχολογικές αρχές πάνω στις οποίες βασίζεται η λειτουργία αυτού του γνωστικού σχήματος είναι οι επόμενες: Αρχικά η συνολική ποσότητα των αντικειμένων παραμένει ίδια (διατήρηση της αριθμητικής ποσότητας). Αν είναι γνωστή η ποσότητα που βρίσκεται στο ένα χέρι, είναι πολύ πιθανό να εντοπιστεί η ποσότητα που βρίσκεται στο άλλο. Τέλος, υπάρχει ένας καθορισμένος αριθμός πιθανών συνδυασμών των ποσοτήτων ώστε να παραχθεί η συνολική ποσότητα.

Μια διδακτική προσέγγιση για την οικοδόμηση του παραπάνω σχήματος προτείνει το συνδυασμό συγκεκριμένων αντικειμένων με ποικίλους τρόπους (Shane, 1999): Στο προηγούμενο παράδειγμα των πέντε αντικειμένων, μπορεί να προταθεί η κατασκευή μιας ανθοδέσμης πέντε λουλουδιών με δύο διαφορετικά χρώματα με όλους τους δυνατούς τρόπους. Μπορεί, επίσης, μια ποσότητα αντικειμένων ίδιου χρώματος να αναλυθεί σε δύο ποσότητες με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς. Σκοπός και στις δύο περιπτώσεις είναι να προταθούν από τα παιδιά όσο το δυνατόν περισσότεροι συνδυασμοί, καθώς επίσης και η λεκτική περιγραφή της όλης διαδικασίας. Με τα παραδείγματα που περιγράφονται ως «μέρος-μέρος-όλο» εισάγουμε ουσιαστικά τα παιδιά σε άτυπες μορφές πρόσθεσης και αφαίρεσης μέσα σε ένα οικείο γι' αυτά πλαίσιο συμφραζομένων.

Οι πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης που αφορούν στην προσχολική εκπαίδευση εμφανίζονται με ποικίλες μορφές και παρουσιάζουν διαφορετικό βαθμό δυσκολίας εξαρτώμενο, κάθε φορά, από τη συγκεκριμένη μορφή του προβλήματος.

Η ανάλυση των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης που απαντώνται στην προσχολική ηλικία διακρίνονται σε προβλήματα «αλλαγής κατάστασης», «σύνθεσης δύο ποσοτήτων» και «σύγκρισης».

Η απλούστερη περίπτωση προβλημάτων πρόσθεσης είναι αυτά που χαρακτηρίζονται ως προβλήματα «αλλαγής κατάστασης» (Nunes & Bryant, 1996) ή διαφορετικά, ως προβλήματα «μεταβολής του μέτρου» (Vergnaud, 1979, 1983). Εδώ μια ποσότητα μεταβάλλεται προσθέτοντας ή αφαιρώντας σ΄ αυτή μιαν άλλη. Μια πρώτη, απλουστευμένη, μορφή αλλαγής κατάστασης συναντήσαμε στο «σχήμα διαδοχής» που αναφέρθηκε προηγούμενα.

Στα προβλήματα σύνθεσης δύο ποσοτήτων δύο ποσότητες συντίθενται για να δημιουργήσουν μια καινούργια. Μια μορφή προβλημάτων σύνθεσης δύο ποσοτήτων είναι τα προβλήματα που χαρακτηρίζονται ως «καταστάσεις μέρος-όλο» (part-whole situations) (Nunes & Bryant 1996) ή διαφορετικά «μέρος-μέρος-όλο» (part-part-whole schema) που αναφέρθηκε προηγούμενα και πρόκειται για όλους τους δυνατούς τρόπους σύνθεσης ποσοτήτων ώστε να παραχθεί μια συγκεκριμένη ποσότητα.

Τέλος, μια επόμενη κατηγορία είναι τα προβλήματα που περιέχουν καταστάσεις σύγκρισης. Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο βαθμός δυσκολίας ποικίλει ανάλογα με τη συγκεκριμένη κάθε φορά μορφή του προβλήματος (Hudson, 1983, Nunes & Bryant, 1996).

3. Στρατηγικές επίλυσης που χρησιμοποιούνται από τους μικρούς μαθητές

Μια πτυχή του ερευνητικού ενδιαφέροντος στη μαθηματική εκπαίδευση είναι η ανάδειξη των στρατηγικών (των νοητικών μεθόδων) που τα παιδιά χρησιμοποιούν προκειμένου να κατανοούν και να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα (π.χ. Baroody & Tiilikainen, 2004, Clements, 2004, Lester & Charles, 2005, Wright et al., 2002, Ζαχάρος κ.ά., 2007). Η επιλογή συγκεκριμένων στρατηγικών φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά προσεγγίζουν ένα πρόβλημα και παράλληλα πώς η σκέψη τους εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Τα παιδιά της ίδιας σχολικής τάξης συχνά χρησιμοποιούν ένα πλήθος τρόπων για να επιλύουν προβλήματα, γεγονός που υποδηλώνει τη συνθετότητα και την πολυμορφία της ανθρώπινης νόησης (Siegler, 1987, Siegler & McGilly, 1989). Η επιλογή από τα παιδιά ενός πλήθους εναλλακτικών στρατηγικών αποτελεί μια από τις πλέον κρίσιμες παραμέτρους που καθορίζονται από τον παιδικό συλλογισμό και παράλληλα τον προσδιορίζουν (Halford, 1990).

Οι κύριες στρατηγικές που επιλέγονται από τους μαθητές της προσχολικής εκπαίδευσης για την αντιμετώπιση των προβλημάτων πρόσθεσης είναι οι εξής (Kamii & De Clark, 1985, Siegler, 1987, Johansson, 2005, Ζαχάρος, 2007, Ζαχάρος, κ.ά., 2007): Η στρατηγική της «*απαρίθμησης όλων*» (counting all) των στοιχείων που απαρτίζουν τα σύνολα που συμμετέχουν στην προσθετική πράξη (Kamii & De Clark, 1985, Kammi et al., 2005). Εδώ, τα στοιχεία δύο συνόλων που συμμετέχουν στην πρόσθεση ενώνονται σε ένα και γίνεται η απαρίθμηση των στοιχείων του ενιαίου συνόλου. Μια δεύτερη στρατηγική είναι αυτή που χαρακτηρίζεται ως «*απαρίθμηση από*» (counting on, Kamii & De Clark, 1985), που σημαίνει τη διατήρηση των δύο διακριτών συνόλων και την έναρξη απαρίθμησης των στοιχείων του δεύτερου συνόλου από το σημείο που αυτή σταμάτησε στο πρώτο. Στην περίπτωση της απαρίθμησης των στοιχείων του δεύτερου προσθετέου, οι αριθμοί δεν αφορούν στην αξία του δεύτερου προσθετέου, αλλά στο συνολικό άθροισμα.

Μια επόμενη στρατηγική χαρακτηρίζεται της «*αριθμητικής ανάλυσης*» (arithmetic decomposition). Εδώ το παιδί αναλύει τον ένα ή και τους δύο προσθετέους, σε πιο εύκολους και εύχρηστους αριθμητικούς συνδυασμούς, που το διευκολύνουν στην επίλυση του προβλήματος. Η εν λόγω στρατηγική, λόγω της συνθετότητας των απαιτούμενων νοητικών λειτουργιών, θεωρείται ως μια «ώριμη» στρατηγική επίλυσης (Cheng & Chan, 2005).

Τέλος, παρατηρείται η στρατηγική των «*γνωστών δεδομένων*» που στη βιβλιογραφία καταγράφεται ως «derived facts» (Cheng & Chan, 2005) ή «known facts» (Nwabueze, 2001). Το παιδί στη στρατηγική αυτή ανακαλεί από τη μνήμη του αριθμητικά δεδομένα και δίνει άμεσα απαντήσεις ισχυριζόμενο ότι βασίζεται σε αποκτημένες γνώσεις. Σχετικά με τη χρήση σύνθετων νοητικών λειτουργιών που φαίνεται να χρησιμοποιούνται στη στρατηγική αυτή υπάρχουν επιφυλάξεις. Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται (Baroody, 1994) ότι η ανάκληση πληροφοριών από τη μνήμη δεν συνιστά απαραίτητα μία σύνθετη νοητική διεργασία και, συνεπώς, δεν αποτελεί αξιόπιστο κριτήριο κατανόησης και ουσιαστικής εμπέδωσης των πράξεων πρόσθεσης

Ο σκοπός της έρευνάς μας επικεντρώνεται στα εξής σημεία:

α. Στη διερεύνηση του βαθμού εξοικείωσης των νηπίων του δείγματός μας με την έννοια του αριθμού. Ειδικότερα, διερευνούμε την ικανότητά τους να απαριθμούν μικρές συλλογές αντικειμένων και να χρησιμοποιούν τα αντίστοιχα αριθμητικά σύμβολα.

β. Στην επισήμανση των στρατηγικών που τα συγκεκριμένα νήπια χρησιμοποιούν για να επιλύουν απλά προβλήματα προσθέσεων που απαιτούν μονοψήφιους αριθμούς.

γ. Τέλος, στη διερεύνηση του ρόλου που διαδραματίζει το πλαίσιο αναφοράς εντός του οποίου εισάγονται τα προβλήματα στις επιδόσεις των παιδιών.

4. Μέθοδος

Το δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας συγκροτήθηκε από 31 νήπια, με ηλικίες 5-6 ετών. Τα νήπια προέρχονται από τέσσερα δημόσια νηπιαγωγεία ελληνικής επαρχιακής πόλης. Σε όλα τα τμήματα από τα οποία αντλήθηκε το δείγμα οι νηπιαγωγοί-ερευνητές εισήγαγαν δραστηριότητες με προβλήματα πράξεων πρόσθεσης, όπου οι ποσότητες και τα αποτελέσματα των πράξεων είναι μικρότερα της δεκάδας.

Διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας

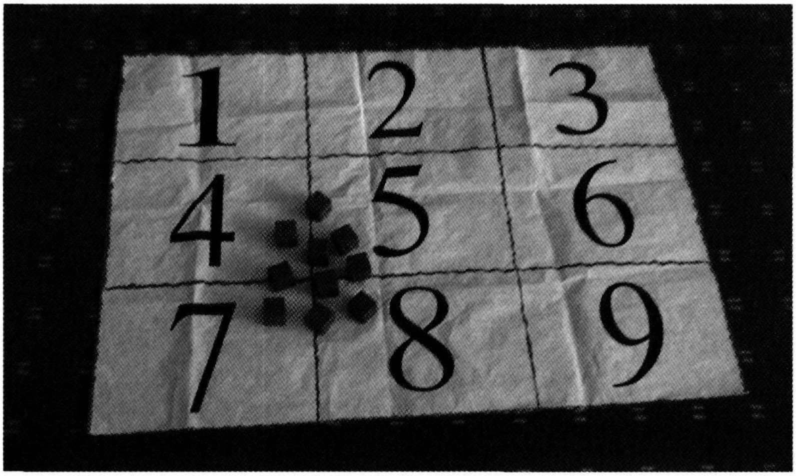
Η έρευνα σε κάθε νηπιαγωγείο διεξήχθη σε τρεις διαδοχικές ημέρες από τους ίδιους ερευνητές. Μέσω ημι-δομημένων ατομικών συνεντεύξεων διερευνάται η ικανότητα των νηπίων να ανταποκριθούν σε τρία διαφορετικά έργα, ένα κάθε ημέρα. Οι νηπιαγωγοί-ερευνητές που διεξήγαγαν την έρευνα καταγράφουν με βιντεοκάμερα την ανάπτυξη των έργων και αξιολογούν τη δυνατότητα ανταπόκρισης των παιδιών. Επίσης, εντοπίζονται οι στρατηγικές που επιλέγονται, καθώς και η αποτελεσματικότητα των εν λόγω στρατηγικών. Τα έργα είναι τα εξής:

Πρώτο έργο: Σκοπός του έργου αυτού είναι η διερεύνηση της γνώσης των παιδιών σχετικά με τη λεκτική ακολουθία των μονοψήφιων αριθμών («ένα», «δύο»,..., έως το «εννέα»), η γνώση των συμβόλων των μονοψήφιων αριθμών και τέλος, αν τα παιδιά κατανοούν ότι οι λεκτικές ή συμβολικές αναπαραστάσεις των αριθμών αντιστοιχούν σε συγκριμένες ποσότητες αντικειμένων.

Ένα χαρτόνι 120cmX80cm είναι χωρισμένο σε εννέα τετράγωνα, όπου αναγράφονται οι αριθμοί από το 1 έως το 9 (εικόνα 1). Στο πάτωμα είναι τοποθετημένοι ξύλινοι κύβοι και κάρτες με τους αντίστοιχους μονοψήφιους αριθμούς που είναι σχεδιασμένοι στο χαρτόνι. Οι κάρτες είναι τοποθετημένες ανάποδα και με τυχαία σειρά.

Κάθε παιδί συμμετέχει δύο φορές στην εξής δραστηριότητα: Τραβά μία κάρτα, αναφέρει τον αριθμό που αυτή απεικονίζει και τοποθετεί στο αντίστοιχο τετράγωνο τόσους κύβους, όσους δείχνει ο αριθμός. Η κάρτα που χρησιμοποιείται κάθε φορά αποσύρεται. Οι απαντήσεις των μαθητών σχολιάζονται από τους συμμαθητές τους και οι ερευνητές παρεμβαίνουν διορθωτικά αν κριθεί αναγκαίο.

Δεύτερο έργο: Σκοπός του δεύτερου έργου είναι η διερεύνηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από τα παιδιά για την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης μονοψήφιων αριθμών με αθροίσματα που δεν υπερβαίνουν το εννέα. Ο ερευνητής καλεί κάθε παιδί ατομικά σε χώρο ειδικά διαμορφωμένο για ένα παιχνίδι με κάρτες. Απλώνει τέσσερις κάρτες όπου αναγράφονται προβλήματα πρόσθεσης (τα προβλήματα βρίσκονται στο Παράρτημα). Το παιδί διαλέγει μια κάρτα και ο ερευνητής διαβάζει το πρόβλημα. Επίσης το παιδί έχει στη διάθεσή του αριθμοκάρτες με τους αριθμούς που αναφέρονται στα προβλήματα. Για παράδειγμα, αν το πρόβλημα απαιτεί την



Εικόνα 1
Διερεύνηση της γνώσης των αριθμών

πρόσθεση 2+3, ζητείται από το παιδί να επιλέξει τις αριθμοκάρτες με τους αριθμούς 2 και 3.

Σε δύο από τα προβλήματα που καλούνται να επιλύσουν τα παιδιά δίνονται οι δύο προσθετέοι και ζητείται το άθροισμα, ενώ στα άλλα δύο είναι γνωστό το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο αριθμών με άγνωστο το δεύτερο προσθετέο. Τα δύο πρώτα προβλήματα εντάσσονται στην κατηγορία «σύνθεσης ποσοτήτων» και απαιτούν πράξεις της μορφής: «2+3=?» (το πρώτο πρόβλημα), «5+4=?» (το δεύτερο πρόβλημα). Τα δύο επόμενα προβλήματα, τρίτο και τέταρτο, είναι προβλήματα «αλλαγής κατάστασης» και απαιτούν πράξεις της μορφής: 3+?=5 και 5+?=9 αντίστοιχα.

Τρίτο έργο: Το μαθηματικό περιεχόμενο των πράξεων στο τρίτο έργο είναι ίδιο με αυτό του δευτέρου. Επιπρόσθετα στο έργο αυτό προσπαθήσαμε να δημιουργήσουμε ένα πλαίσιο συμφραζομένων που να είναι οικείο στα παιδιά και παράλληλα να κινητοποιεί το ενδιαφέρον τους. Ειδικότερη στόχευση του τρίτου έργου είναι να διακριβωθεί αν ο σχεδιασμός της συγκεκριμένης διδακτικής κατάστασης συμβάλλει σε μια αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των προβλημάτων πρόσθεσης, απ' ότι στο δεύτερο έργο. Αναλυτικότερα, δημιουργείται ένα «κατάστημα παιχνιδιών» όπου εκτίθενται εννέα παιχνίδια με ανηρτημένες τις αξίες τους από 1 έως 9 ευρώ (εικόνα 2).

Τα παιδιά (στο έργο αυτό απουσίαζαν έξι από το συνολικό δείγμα) συμμετέχουν ατομικά και υποδύονται τον πελάτη, ενώ ο ερευνητής τον πωλητή. Κάθε παιδί παίρνει μέρος σε τέσσερεις χρηματικές συναλλαγές, όπου το μαθηματικό περιεχόμενο είναι παρόμοιο με αυτό του δεύτερου έργου. Τα νομίσματα που χρησιμοποιούνται είναι ψεύτικα χαρτονομίσματα που κατασκευάζονται ειδικά για τις ανάγκες της έρευνας, αξίας από 1 έως 5 ευρώ. Τα «χαρτονομίσματα» είναι διαφορετικού χρώματος, έχουν όλα το ίδιο μέγεθος και πάνω τους γράφεται ευκρινώς η αξία τους.

Εικόνα 2
Το «κατάστημα παιχνιδιών»

Το έργο, ανάλογα με τη μορφή της προτεινόμενης συναλλαγής, διακρίνεται σε δύο φάσεις, που καθεμιά περιλαμβάνει δύο προβλήματα χρηματικών συναλλαγών.

- *1η φάση* (1η και 2η χρηματική συναλλαγή): Τα δύο προβλήματα είναι της μορφής α+β=?. Αναλυτικότερα, στην πρώτη συναλλαγή ο ερευνητής δίνει στο παιδί δύο χαρτονομίσματα, αξίας 2 και 3 ευρώ και το καλεί να αγοράσει ένα από τα παιχνίδια. Το παιδί πρέπει να αγοράσει ένα παιχνίδι που κοστίζει ακριβώς όσα τα δύο χαρτονομίσματα γιατί, σύμφωνα με το σενάριο, δεν υπάρχουν ρέστα για επιστροφή. Στη δεύτερη χρηματική συναλλαγή το παιδί έχει στη διάθεσή του ένα νόμισμα των 4 και ένα των 5 ευρώ.
- *2η φάση* (3η και 4η χρηματική συναλλαγή): Τα προβλήματα αυτής της φάσης είναι της μορφής: α+?=γ. Αναλυτικότερα, στο τρίτο πρόβλημα ο ερευνητής επιλέγει το παιχνίδι των 5 ευρώ και το τοποθετεί στον πάγκο. Στη συνέχεια, δίνει στο παιδί ένα χαρτονόμισμα 3 ευρώ και το καλεί να επιλέξει το κατάλληλο χαρτονομίσματα ώστε να συμπληρώσει ακριβώς το ποσό των 5 ευρώ. Στο τέταρτο πρόβλημα δίνεται το χαρτονόμισμα 5 ευρώ και ζητείται να συμπληρωθεί το ποσό για ένα παιχνίδι αξίας 9 ευρώ.

Οι μαθητές παροτρύνονται από τον ερευνητή να επιλύσουν τα προβλήματα και η διαδικασία θεωρείται περατωθείσα όταν δίνονται απαντήσεις που θεωρούνται τελικές ή όταν παρά τις προτροπές του ερευνητή τα παιδιά αρνούνται ή αδυνατούν να δώσουν απάντηση.

5. Αποτελέσματα της έρευνας

Η ανάλυση των απαντήσεων των νηπίων και η αξιολόγησή τους, ειδικότερα στα έργα πρόσθεσης στο δεύτερο και τρίτο έργο, δίνει έμφαση στις ακολουθούμενες από

Εικόνα 3
Αξιολόγηση της γνώσης των αριθμών

τα νήπια στρατηγικές, καθώς στην επιτυχή χρήση των εν λόγω στρατηγικών. Ως επιτυχής χαρακτηρίζεται μια προσπάθεια στην περίπτωση που οδηγεί σε σωστό αποτέλεσμα και προέρχεται από μια αιτιολογημένη διαδικασία, καθώς και στις περιπτώσεις που ενώ ακολουθείται σωστή διαδικασία, το νήπιο δίνει απαντήσεις που υπερβαίνουν ή υπολείπονται κατά μια μονάδα στου σωστού αποτελέσματος. Στις τελευταίες περιπτώσεις, που δεν υπερβαίνουν τις δέκα και στα δύο έργα (δεύτερο και τρίτο), το πρόβλημα είναι συνήθως διαδικαστικό, όπως στην περίπτωση χρήσης των δακτύλων, όπου συνήθως παρατηρείται ασυνεπής απαρίθμηση. Σε όλες τις άλλες προσπάθειες που θεωρούνται ανεπιτυχείς, τα νήπια είτε δεν απαντούν είτε οι απαντήσεις τους είναι «ιδιοσυγκρασιακές», δηλαδή δε συνοδεύονται από κάποια στρατηγική επίλυσης και ενίοτε δε σχετίζονται με τα δεδομένα των προβλημάτων.

Πρώτο έργο: Γνώση των αριθμών και του συμβολισμού τους

Σχετικά με την γνώση της ονομασίας των αριθμών και της αναγνώρισης των αντίστοιχων αριθμητικών συμβόλων, όλες οι προσπάθειες (εικόνα 3) των παιδιών χαρακτηρίστηκαν από επιτυχία. Επίσης τα παιδιά αντιλαμβάνονται τους αριθμούς ως συμβολικές αναπαραστάσεις ενός συγκεκριμένου πλήθους αντικειμένων και τα δεδομένα της συγκεκριμένης δραστηριότητας δείχνουν ότι από τις 62 συνολικά καταγεγραμμένες απαντήσεις (2 προσπάθειεςX31 παιδιά), μόνον οι 6 ήταν αποτυχημένες. Αναλυτικότερα, από τα 31 παιδιά, 27 ολοκλήρωσαν επιτυχώς και τις δύο προσπάθειες, 2 παιδιά είχαν μία αποτυχημένη και μία επιτυχημένη προσπάθεια, ενώ 2 παιδιά απέτυχαν και στις δύο περιπτώσεις.

Τα αποτελέσματα στο πρώτο έργο δείχνουν ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές γνωρίζουν τη λεκτική ακολουθία των αριθμών, τη συμβολική τους γραφή, καθώς και την ποσότητα που αυτοί συμβολίζουν.

Δεύτερο έργο: Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης

Στη δεύτερο έργο καταγράψαμε 124 συνολικά προσπάθειες (31 παιδιάΧ4 προβλήματα). Από αυτές οι 35 (28%) είναι επιτυχείς, ενώ 89 (72%) ανεπιτυχείς.

Αναλυτικότερα τα δεδομένα του πίνακα 1 δείχνουν μια κλιμακούμενη μείωση των επιτυχιών από το πρώτο προς το τέταρτο πρόβλημα. Τα αποτελέσματα αυτά είναι συμβατά με τον αντίστοιχο βαθμό δυσκολίας των προβλημάτων (Vergnaud, 1979, 1983).

Πίνακας 1

Συχνότητες επιτυχών προσπαθειών στο δεύτερο έργο

	Προβλήματα				
	1ο	2ο	3ο	4ο	Σύνολο
Επιτυχείς απαντήσεις	12 (26%)	11 (35,5%)	7 (22,6%)	5 (16%	35
Ανεπιτυχείς απαντήσεις	19 (74%)	20 (64,5%)	24 (77,4%)	26 (84%)	89

Οι ακολουθούμενες στρατηγικές στο δεύτερο έργο

Η ανάλυση του βιντεοσκοπημένου υλικού έδωσε τη δυνατότητα να παρακολουθήσουμε τις στρατηγικές των παιδιών που παρουσιάζονται και σχολιάζονται στη συνέχεια.

I. ***Η στρατηγική της «αρίθμησης όλων»:*** Η στρατηγική αυτή καταγράφηκε σε 28 προσπάθειες 8 παιδιών.

Παράδειγμα «αρίθμησης όλων»: Ένα νήπιο προσφεύγει στη χρήση των δακτύλων προκειμένου να εκτελέσει την πράξη 5+4=?. Μετά τη διατύπωση του προβλήματος, αφού σκέφτεται λίγο, μετράει πέντε δάχτυλα στο αριστερό του χέρι και μετά τέσσερα στο δεξί. Στη συνέχεια, απαριθμεί όλα τα σηκωμένα δάχτυλα και δίνει τη σωστή απάντηση.

II. ***Η στρατηγική της «αρίθμησης από»***: Η επιλογή της στρατηγικής αυτής επιλέχτηκε σε 7 προσπάθειες 2 νηπίων (τέσσερεις και τρεις προσπάθειες αντίστοιχα). Στη συνέχεια παραθέτουμε τις ακολουθούμενες στρατηγικές.

Το πρώτο νήπιο: Για την επίλυση του προβλήματος 5+?=9, σηκώνει τα πέντε δάχτυλα του αριστερού χεριού και αποφαίνεται: «πέντε». Στις διευκρινήσεις που ζητάει ο ερευνητής, το παιδί εξηγεί:

Νήπιο: «Μέτρησα από το τέσσερα και έφτασα στο εννιά...(Δείχνει με τα δάχτυλα). Πέντε, έξι, επτά, οκτώ, εννιά».

Το άλλο νήπιο: Στο ίδιο πρόβλημα (5+4=?) το παιδί προσφεύγει ξανά στη χρήση των δακτύλων. Μετράει πέντε δάχτυλα στο αριστερό του χέρι και στη συνέχεια σηκώνει διαδοχικά τέσσερα δάχτυλα από το δεξί, ενώ απαριθμεί χαμηλόφωνα «έξι, εφτά, οκτώ, εννιά».

IV. ***Η στρατηγική της αριθμητικής ανάλυσης:*** Στην παρούσα φάση της έρευνας, ένα μόνο νήπιο προέβη σε χρήση της συγκεκριμένης στρατηγικής, στο πρόβλημα «5+4=?». Μάλιστα, το συγκεκριμένο νήπιο εφαρμόζει δύο διαφορετικές στρατηγικές για τη λύση του ίδιου προβλήματος: Αρχικά, όταν ο ερευνητής διατυπώνει το πρόβλημα, σηκώνει τέσσερα δάχτυλα του δεξιού του χεριού και εφαρμόζοντας τη «μέτρηση από» καταλήγει στον αριθμό «εννιά». Όταν ο ερευνητής ζητάει διευκρινήσεις, το νήπιο ισχυρίζεται:

Νήπιο: Πέντε και πέντε κάνουν δέκα και λέω, κατεβαίνουμε ένα. Οπότε κατεβαίνουμε κι απ' το δέκα ένα,... εννιά!

V. ***Η στρατηγική των γνωστών δεδομένων:*** Χρησιμοποιήθηκε σε τέσσερες προσπάθειες από δύο νήπια. Τα νήπια αυτά βασίστηκαν σε νοητικές διεργασίες που είναι δηλωτικό της ικανότητας χειρισμού των προβλημάτων από τα συγκεκριμένα υποκείμενα, όπως στην επόμενη περίπτωση:

Νήπιο: Είναι έξι. Γιατί είναι τέσσερα και δύο.

VI. ***Ιδιοσυγκρασιακές απαντήσεις:*** Τέλος, οι υπόλοιπες 90 απόπειρες επίλυσης είναι ανεπιτυχείς και οι ακολουθούμενες από τα παιδιά πρακτικές είναι ιδιοσυγκρασιακές, με τυχαία επιλογή των αριθμών και χωρίς αιτιολόγηση των προτεινόμενων αποτελεσμάτων.

Τρίτο έργο

Στο τρίτο έργο το δείγμα μας μειώνεται κατά έξι μαθητές. Από τις 100 συνολικά προσπάθειες των παιδιών, 59 ήταν επιτυχείς, ενώ 41 όχι. Οι 49 από τις επιτυχείς προσπάθειες πραγματοποιήθηκαν από τα ίδια τα παιδιά, χωρίς παρέμβαση των ερευνητών, ενώ οι υπόλοιπες 10, μετά από παρότρυνση των ερευνητών και αφού είχε ήδη προηγηθεί μια αποτυχημένη απόπειρα. Αναλυτικότερα οι επιτυχείς προσπάθειες των παιδιών καταγράφονται στον πίνακα 2, όπου καταφαίνεται ότι οι επιτυχίες υπερτερούν ελαφρώς στο πρώτο και τέταρτο πρόβλημα συναλλαγής, ενδεχομένως λόγω των μικρότερων προσθετέων που χρησιμοποιούνται στις συναλλαγές αυτές.

Πίνακας 2

Συχνότητες επιτυχών προσπαθειών στο τρίτο έργο

	Προβλήματα συναλλαγών				
	1ο	**2ο**	**3ο**	**4ο**	**Σύνολο**
Επιτυχείς συναλλαγές	18 (72%)	11 (44%)	14 (56%)	16 (64%)	59
Ανεπιτυχείς συναλλαγές	7 (28%)	14 (56%)	11 (44%)	9 (36%)	41

Οι ακολουθούμενες στρατηγικές στην τρίτο έργο

Αναλυτικότερα, οι στρατηγικές που επελέγησαν από τα παιδιά, βάσει της τυπολογίας που επισημάναμε είναι οι εξής:

I. ***Η στρατηγική της «αρίθμησης όλων»:*** Η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιήθηκε σε 34 συνολικά προσπάθειες 10 παιδιών. Αναλυτικότερα, 6 υποκείμενα υιοθέτησαν τη στρατηγική αυτή και στις τέσσερεις συναλλαγές τους, 2 υποκείμενα σε τρεις συναλλαγές, ένα υποκείμενο σε δύο και δύο σε μια συναλλαγή.

II. ***Η στρατηγική της «αρίθμησης από»:*** Υιοθετήθηκε από 7 νήπια σε 25 προσπάθειές τους. Αναλυτικότερα, ένα νήπιο χρησιμοποίησε τη στρατηγική αυτή και στις τέσσερεις περιπτώσεις συναλλαγών, δύο νήπια σε τρεις συναλλαγές, δύο νήπια σε δύο και δύο νήπια σε μία μόνο συναλλαγή (2^{η} και 4^{η}).

III. ***Η στρατηγική της αριθμητικής ανάλυσης:*** Ακολουθείται μόνο από ένα υποκείμενο, αυτό που και στη δεύτερη δραστηριότητα χρησιμοποίησε την ίδια στρατηγική. Η στρατηγική αυτή εφαρμόστηκε μία φορά στη δεύτερη συναλλαγή, όπου το νήπιο κλήθηκε να χρησιμοποιήσει νομίσματα των 4 και 5 ευρώ. Το νήπιο επιλέγει την κούκλα των 9 ευρώ και αιτιολογεί την επιλογή του ως εξής:
Νήπιο: Γιατί έξι και τέσσερα... (κάνει) δέκα. Κι αφού είναι πέντε (ο πρώτος προσθετέος),..., (είναι) εννιά. Κατεβαίνω ένα από το έξι.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση πρόκειται για μια σύνθετη μορφή νοητικών πράξεων που προσιδιάζει στην «αριθμητική ανάλυση», αφού το υποκείμενο δεν περιορίζεται μόνο στην ανάλυση ενός εκ των δύο προσθετέων, αλλά χρησιμοποιεί ως βάση το «10», που είναι το άθροισμα 6+4, αναλύει τον ένα εκ των δύο προσθετέων (6=5+1) και επειδή το άθροισμά του υπολείπεται μιας μονάδας, την αφαιρεί από τη δεκάδα.

IV. ***Η στρατηγική των γνωστών δεδομένων:*** Η στρατηγική αυτή εμφανίστηκε σε 6 προσπάθειες 3 παιδιών. Τα συγκεκριμένα υποκείμενα ανταποκρίθηκαν άμεσα και έδωσαν επιτυχείς απαντήσεις.

V. ***Ιδιοσυγκρασιακές απαντήσεις:*** Τέλος, σε 34 περιπτώσεις συναλλαγών παρατηρήθηκαν ασαφείς μέθοδοι επίλυσης ή τυχαίες επιλογές, οι οποίες δεν αιτιολογούνται από τα υποκείμενα ούτε δηλώνουν κάποια συγκεκριμένη στρατηγική. Από αυτές αν και οι 5 ήταν τυπικά επιτυχείς, η διερεύνηση κατέδειξε ότι ήταν τυχαίες.

6. Συζήτηση

Με την παρούσα έρευνα επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε τις γνώσεις νηπίων που αφορούν στην έννοια του αριθμού και τη συμβολική του αναπαράσταση, καθώς και τις στρατηγικές που επιλέγονται από τους μαθητές του δείγματός μας στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης. Επιπρόσθετα, διερευνάται η συνεισφορά του πλαισίου εντός του οποίου εισάγονται οι δραστηριότητες, στις επιτυχείς προσπάθειες των παιδιών.

Η ανάλυση των ευρημάτων δείχνει ότι τα νήπια του δείγματός μας έχουν κατακτήσει την έννοια του αριθμού και είναι ικανά να αναπαριστούν με αριθμητικά σύμβολα ποσότητες μέχρι το εννέα.

Οι στρατηγικές που επιλέγονται και οδηγούν σε επιτυχή αποτελέσματα στα προβλήματα πρόσθεσης είναι αυτές που αναλύονται στις θεωρητικές μας αναφορές, δηλαδή, της «αρίθμησης όλων», της «αρίθμησης από», της «αριθμητικής ανάλυσης» και της «στρατηγικής των γνωστών δεδομένων». Από το σύνολο των υποκειμένων της έρευνας, στο δεύτερο έργο, τα 13 χρησιμοποιούν κάποια από τις προηγούμενες στρατηγικές σε 41 συνολικά περιπτώσεις (33% των περιπτώσεων), ενώ στο τρίτο έργο 21 υποκείμενα χρησιμοποιούν τις εν λόγω στρατηγικές σε 66 περιπτώσεις (66% του συνόλου των περιπτώσεων). Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις τα νήπια προσπαθούν να ανταποκριθούν στις συμβάσεις της εκπαιδευτικής πρακτικής που απαιτεί απαντήσεις και προτείνουν λύσεις που δε σχετίζονται με τις παραμέτρους των προβλημάτων, ούτε εντάσσονται σε κάποια στρατηγική επίλυσης. Από τις επιτυχείς στρατηγικές, οι δύο πρώτες, της «αρίθμησης όλων» και της «αρίθμησης από», επιλέγονται με μεγαλύτερη συχνότητα και εμφανίζουν πολύ υψηλά ποσοστά επιτυχίας, με την στρατηγική της «αρίθμησης όλων» να υπερτερεί.

Εν τούτοις, στο σύνολο των προσπαθειών παρατηρούνται μικρά ποσοστά επιτυχίας στη δεύτερη δραστηριότητα (28%), ενώ στην τρίτη οι επιτυχείς απαντήσεις είναι εμφανώς περισσότερες (59%). Αν και η «πειραματική» ατμόσφαιρα ανάπτυξης των έργων μας αποστερεί τη δυνατότητα να διερευνήσουμε κοινωνικές αλληλεπιδράσεις που συντελούνται στη σχολική αίθουσα, εν τούτοις, η διαφοροποίηση στις επιδόσεις στο δεύτερο και τρίτο έργο ενισχύει το ερευνητικό ενδιαφέρον για τη διδακτική συνεισφορά του πλαισίου με το οποίο εισάγονται οι μαθηματικές έννοιες. Πράγματι, η ψυχολογική λειτουργία του εκπαιδευτικού υλικού συνίσταται στο ρόλο του στηρίγματος και του υποστρώματος των εσωτερικών νοητικών πράξεων του παιδιού (Davydov, 1999, Leontev, 1978). Οι δραστηριότητες που αναπτύσσονται στην αίθουσα του νηπιαγωγείου, στην αρχική και θεμελιακή τους μορφή έχουν τα χαρακτηριστικά της πρακτικής και αισθητηριακής δραστηριότητας με την οποία οι άνθρωποι έρχονται σε επαφή με τα αντικείμενα του κόσμου που τους περιβάλλει. Οι άνθρωποι ενεργούν πάνω στα αντικείμενα και προσαρμόζουν τα νοητικά τους σχήματα στις αντικειμενικές τους ιδιότητες (Leontev, 1978). Η έννοια της δραστηριότητας, όπως αυτή προσδιορίζεται στην κοινωνικο-ιστορική (cultural-historical) προσέγγιση (Louria, 1976; Leontiev, 1978; Vygotsky, 1978, Davydov, 1999, Engeström, 1999) είναι συνδεδεμένη με την έννοια του κινήτρου και του σκοπού. Το κίνητρο και ο σκοπός προσδίδουν στη δραστηριότητα συγκεκριμένο περιεχόμενο και καθορίζουν αντίστοιχα τη συγκινησιακή στάση του παιδιού. Επιπλέον, το αντικείμενο της δραστηριότητας καθορίζει τον προσανατολισμό της και αποτελεί το πραγματικό κίνητρο για την πραγμάτωσή της.

Όμως, το ενδιαφέρον των μαθητών για την υλοποίηση μιας δραστηριότητας στην κατεύθυνση που ο εκπαιδευτικός επιθυμεί, δεν οδηγείται αυτόματα με την επίδραση του εκπαιδευτικού υλικού. Ο παιδαγωγικός ρόλος της εκπαιδευτικού στην προσχολική εκπαίδευση δεν περιορίζεται απλά στον εμπλουτισμό των αισθητηριακών αντιλήψεων των μαθητών, αλλά σε μια συστηματική και εμπρόθετη προσπάθεια να προσδώσει στο εν λόγω υλικό συγκεκριμένο περιεχόμενο. Γιατί, το τελικό ζητούμενο του συγκεκριμένου παιδαγωγικού εγχειρήματος που μας απασχολεί εδώ είναι η διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών.

Βιβλιογραφία

Baroody, A. J. (1984). Children's difficulties in subtraction: Some causes and questions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15, 203–213.

Baroody, A. J. (1999). The roles of estimation and the commutativity principle in the development of third-graders' mental multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology,* 74, 157–193.

Baroody, A., J. & Tiilikainen, S., H. (2004). Two perspectives on addition development. In A. Baroody and A. Dowker (Eds.) *The development of the arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise.* Lawrence Erlbaum Associates, 75-125

Cheng, Z. J. & Chan, K. S. (2005). Chinese number-naming advantages? Analyses of Chinese pre-schoolers' computational strategies and errors. *International Journal of Early Years Education,* 13(2), 179–192.

Clements, D. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements and A.-M. DiBiase (eds.), *Engaging Young Children in Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, 7-72.

Davydov, V. (1999). The content and unsolved problems of activity theory. In Y., Engeström, R. Miettinem, R.-L. Punamäki (eds.), *Perspectives on activity theory.* Cambridge University Press, 39-52.

Halford, G. S. (1990). *Children's understanding: The development of mental models.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Y., Engeström, R. Miettinem, R.-L. Punamäki (eds.), *Perspectives on activity theory.* Cambridge University Press, 19-38.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between sets. *Child Development,* 54, 84-90.

Hughes, M. (1986). *Children and Number.* Oxford, Basil Blackwell Ltd.

Johansson, B. S. (2005). Numerical writing skill and elementary arithmetic mental calculations. *Scandinavian Journal of Educational Research,* 49(1), 3–25.

Kamii, C. & De Clark, G. (1985). *Young Children Reinvent Arithmetic,* Columbia University.

Kamii C., Rummelsburg J. & Kari A. (2005). Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *Journal of Mathematical Behavior,* 24, 39–50.

Leontev, A. N., (1978). *Activity, Consciousness, and Personality.* Prentice-Hall Englewood Cliffs, N.J.

Lester, F. & Charles, R. (2005). *Teaching Mathematics through Problem Solving. Prekindergarten-Grade 6.* National Council of Teachers of Mathematics.

Luria, A. R. (1976). *Cognitive development: Its cultural and social foundations.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics.* Oxford: Blackwell.

Nwabueze, K. (2001). Bruneian children's addition and subtraction methods. *Journal of Mathematical Behavior,* 20, 173–186.

Oers, B. van (1996). Are you sure? Stimulating Mathematical Thinking During Young Children's Play. *European Early Childhood Research Journal,* 4(1), 71-87.

Resnick, L. B. (1983). A development theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.

Shane, R. (1999). Making connections: A "number curriculum" for preschoolers. *Applied image.*

Siegler, R. S. (1987). The perils of averaging data over strategies: an example from children's addition, *Journal of Experimental Psychology: General,* 116, 250–264.

Siegler, R. S. & McGilly, K. (1989). Strategy choices in children's time-telling. In Levin, I. & Zakay, D. (Eds.) *Psychological time: A life span perspective.* Elsevier: The Netherlands.

Steinbring, H. (2005), *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective.* Springer, U.S.A.

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a *Mathematical Sing?*- An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics,* 61(1-2), 163-182.

Van de Walle, J. & Lovin, L. (2006). *Teaching Student-Centered Mathematics. Grades K-3.* Pearson Education, USA.

Vergnaud, G. (1979), Didactics and acquisition of "multiplicative structures" in secondary schools, In Archenhold W., et. al (Eds.), *Cognitive Development Research in Science and Mathematics,* 190- 201.

Vergnaud, G. (1983), Multiplicative Structures. In Richard Lesh & Marsha Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics concepts and processes,* 127-174, Academic Press.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes.* Edited by Cole, M., John_Steiner, V., Scribner, S. & Souberman, E., Harvard University Press.

Wright, R., Martland, J., Stafford, A. & Stanger, G. (2002). *Teaching Number. Advancing Children's Skills and Strategies.* Paul Chapman Publishing, London.

Wubbles, Th., Korthagen, Fr. & Broekman, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 32, 1–28.

Ζαχάρος, Κ. (2007). *Οι Μαθηματικές Έννοιες στην Προσχολική Εκπαίδευση και η Διδασκαλία τους.* Μεταίχμιο, Αθήνα.

Ζαχάρος, Κ., Κόμης, Β., Μπακανδρέα, Ζ. & Παπαδημητρίου, Κ. (2007). Στρατηγικές προσέγγισης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης στην Προσχολική Εκπαίδευση. *Νέα Παιδεία,* τόμος 121, 78-94.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τα προβλήματα του δεύτερου έργου

1) Χθες το απόγευμα, πήγα με τους φίλους μου στο ζωολογικό κήπο. Τα πέρασα θαυμάσια! Τα ζώα που μου άρεσαν περισσότερο ήταν οι μεγάλοι πολύχρωμοι παπαγάλοι. Στον ζωολογικό κήπο, ζούσαν 2 πράσινοι και 3 κόκκινοι παπαγάλοι. Πόσα ήταν όλοι μαζί οι παπαγάλοι του ζωολογικού κήπου;
2) Το προηγούμενο Σάββατο, δύο φίλες, η Μιμή και η Πόπη, επισκέφθηκαν ένα μεγάλο ζαχαροπλαστείο για να αγοράσουν σοκολατάκια. Η Μιμή αγόρασε 5 σοκολατάκια, ενώ η Πόπη, αφού το καλοσκέφτηκε, αποφάσισε να αγοράσει 4 σοκολατάκια. Πόσα ήταν όλα μαζί τα σοκολατάκια που αγόρασαν οι δύο φίλες;
3) Ένα ηλιόλουστο πρωινό, 3 γάτες ξεκίνησαν για να κάνουν ηλιοθεραπεία στη στέγη του σπιτιού μου. Στο δρόμο, συνάντησαν μερικές φίλες τους, οι οποίες, ενθουσιασμένες με την ιδέα, τις ακολούθησαν και μπήκαν στην παρέα. Έτσι, οι γάτες, από 3 που ήταν στην αρχή, τώρα έγιναν 5. Πόσες ήταν οι γάτες (φίλες τους) που μπήκαν στην παρέα;
4) Όπως κάθε μέρα, έτσι και σήμερα, η Μαρία πήρε το πρωινό λεωφορείο για το σχολείο της. Στην πρώτη στάση, ανέβηκαν στο λεωφορείο 5 παιδιά. Στη δεύτερη στάση, ανέβηκαν μερικά παιδιά ακόμα και στο λεωφορείο υπήρχαν πλέον 9 παιδιά. Πόσα παιδιά ανέβηκαν στη δεύτερη στάση του λεωφορείου;

Διεύθυνση Επικοινωνίας

Κώστας Ζαχάρος, Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία, Πανεπιστήμιο Πατρών, 25600, Ρίο, Πάτρα
e-mail: zacharos@upatras.gr